**КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С
ТРЕЩИНАМИ И НАКЛАДКАМИ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ
ДЕФОРМАЦИИ**

Агаян К.Л., Закарян В.Г.

Ключевые слова: контактная задача, стрингер, трещина, полупространство, сингулярное уравнение

Keywords: contact problem, stringer, crack, half-space, singular equation

Բանալի բառեր. Կոնտակտային խնդիր, վերադիր, ճաք, կիսատարածություն, սինգուլյար հավասարում

Աղայան Կ.Լ., Զաքարյան Վ.Գ.

**Ճաքեր և վերադիրներ պարունակող առաձգական կիսատարածության հակահարթ
խնդիր**

Դիտարկվում է բեռնվածքի՝ բարակ առաձգական վերադիրից առաձգական կիսատարածությանը փոխանցման կոնտակտային խնդիրը: Կիսատարածությունը թուլացված է կիսատարածության եզրին ուղղահայաց վերջավոր երկարությամբ թունելային ճաքերի համակարգով: Կիսատարածության եզրը ուժեղացված է կիսատարածությանը կոշտ ամրակցված շերտեր-վերադիրներով: Վերադիրների և ճաքի ափերի վրա ազդող արտաքին բեռնվածքների ազդեցության տակ կիսատարածություն – շերտ համակարգը դեֆորմացվում է հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում: Վերադիրների համար Մելանի հայտնի մոդելի շրջանակներում խնդրի լուծումը բերվում է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը, որի լուծումը կառուցված է մեխանիկական քառակուսային բանաձևերի օգնությամբ:

Aghayan K.L., Zakaryan V.G

Antiplane contact problem for elastic half-space with cracks and stringers

The contact problem of load transfer of a thin elastic plate to the elastic half-space is considered. The half-space weakened by a system of finite length collinear tunnel cracks which are perpendicular to the half-space boundary. The border of half-space reinforced by stringers. By external forces applied to the plates and the banks of the cracks, the half-space - plate system deformed under antiplane strain. In the frame of well-known Melan model for stringer the solution of the problem is reduced to a system of singular integral equations, whose solution is built by numerically - analytical method of mechanical quadratures. The behavior of the contact stresses and stress intensity factors at the crack tip and the end points of stringers is investigated.

Рассматривается контактная задача о передаче нагрузки от тонкой упругой пластины к упругому полупространству. Полупространство ослаблено системой коллинеарных туннельных трещин конечной длины, перпендикулярных к границе полупространства. Граница полупространства усилена сцеплёнными с ней полосами – накладками. Под воздействием внешних нагрузок, приложенных к накладкам и берегам трещин, полупространство деформируется в условиях антиплоской деформации. В рамках известной модели Мелана для накладок решение задачи сведено к системе сингулярных интегральных уравнений, решение которой построено численно-аналитическим методом механических характеристик. Изучено поведение контактных напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений на концах трещин.

1. Введение. Задачи о передаче нагрузок от тонкостенных элементов в виде стрингеров (накладок) и включений к массивным деформируемым телам, ослабленным трещинами, ввиду их актуальности для теоретических исследований и практических приложений в различных расчётах инженерной практики, давно стали предметом рассмотрения многих авторов. Имеется огромное количество работ, посвящённых изучению контактных и смешанных задач подобного рода. Не имея возможности остановиться на всех этих работах, укажем лишь работы [1–11], в которых, в свою очередь, имеется библиография, тесно связанная с рассматриваемой здесь задачей. В этих работах, как и здесь, исследованы смешанные задачи, связанные с вопросом взаимовлияния концентраторов напряжений разного типа, в частности,

трещин, штампов или стрингеров, когда один тип концентратора напряжений сочетается или пересекается с другими. Задачи этого типа отличаются тем, что в ядрах определяющих сингулярных уравнений появляются неподвижные особенности, которые, в конечном итоге приводят к появлению неклассических особенностей в решениях интегральных уравнений.

2. Постановка задачи и система определяющих уравнений. Пусть упругое пространство с модулем сдвига G , занимающее область $y > 0$, отнесено к правосторонней декартовой системе координат $Oxyz$. Полупространство по полосам $\Omega_j = \{x = a_j; l_j^{(1)} < y < l_j^{(2)}; |z| < \infty\} (l_j^{(1)} \geq 0; j = 1, 2, \dots, n)$ ослаблено туннельными трещинами, а на границе $y = 0$, по полосам $\omega_k = \{c_k \leq x \leq b_k; y = 0; |z| < \infty\} (a_k < c_k < b_k < a_{k+1})$, усилена упругими пластинами (накладками) малой толщины $h_s^{(k)}$ с модулями упругости $G_s^{(k)}, k = 1, 2, \dots, (n-1)$.

Фиг. 1

Предполагается, что: а) на берегах трещин заданы касательные напряжения $\tau_{xz}(a_j \pm 0)$ или перемещения $w(a_j \pm 0)$; б) на верхних гранях накладок действуют распределённые нагрузки $\tau_{yz}(x, -h_s^{(k)})$, в) к боковым граням $x = c_k$ и $x = b_k$ усиливающей пластины приложены сосредоточенные силы $T_c^{(k)}$ и $T_b^{(k)}$ (фиг. 1). При этом предполагается, что указанные воздействия равномерно распределены в направлении оси $Oz(|z| < \infty)$.

Относительно усиливающих пластин-накладок предполагается, что $G_s^{(k)} > G$, а $h_s^{(k)} \ll b_k - c_k$. Это позволяет для усиливающей накладки принять известную в области контактных задач физическую модель Мелана при антиплоской деформации [3-4]. Другими словами, предполагается, что по толщине накладки перемещение $w_s(x, y)$ не меняется, т.е. $w_s(x, y) = w_s(x)$.

При этих предположениях требуется определить закон распределения контактных касательных напряжений, возникающих под стрингерами, а также коэффициенты интенсивности напряжений на концах трещин.

Отметим, что под действием вышеуказанных воздействий рассматриваемая упругая система пластина-полупространство деформируется в условиях продольного сдвига (антиплоская деформация) с базовой плоскостью Oxy . Тогда, очевидно, что

поставленную выше контактную задачу можно рассматривать как антиплоскую контактную задачу для полуплоскости $y > 0$, ослабленной системой вертикальных трещин на линиях $x = a_j$ ($j = \overline{1, n}$) и усиленной на границе $y = 0$ упругими стрингерами.

При таком подходе поставленная контактная задача эквивалентна следующей краевой задаче для полуплоскости $y > 0$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0 \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} G \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=a_j \pm 0} = \tau_j^\pm(y), & y \in L_j \quad (j = \overline{1, n}) \\ w(a_j \pm 0, y) = w_j^\pm(y), & y \in L_j \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \tau(x) = \begin{cases} \tau_k(x), & x \in \Gamma_k \\ 0, & x \in \bigcup_{k=1}^{n-1} (\Gamma_k) \end{cases} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (1.3)$$

$$L_j = \{l_j^{(1)} < y < l_j^{(2)}, x = a_j\}, \quad \Gamma_k = \{y = 0, c_k < x < b_k\}$$

с дополнительным условием контакта [3-5]

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=0} = \frac{1}{h_s^{(k)} G_s^{(k)}} \int_{c_k}^x [q_s^{(k)}(s) - \tau_k(s)] ds + \frac{T_c^{(k)}}{h_s^{(k)} G_s^{(k)}} \quad (1.4)$$

$$x \in \Gamma_k, k = \overline{1, n-1}$$

обеспечивающим совместное деформирование граничных точек полуплоскости и накладок в рамках принятой модели на каждом участке контакта.

Здесь $w(x, y)$ – единственная, отличная от нуля, компонента упругого перемещения, $\tau_j^\pm(y)$ – заданные касательные напряжения на правом и левом берегах j -ой трещины, $w_j^\pm(y)$ – заданные смещения точек соответствующих берегов j -ой трещины, $\tau_k(x)$ – неизвестные контактные касательные напряжения, возникающие под каждой накладкой, $q_s^{(k)}(x)$ – заданные касательные напряжения, действующие на верхней границе накладки. Очевидно, что в каждом конкретном случае на берегах отдельной трещины следует брать только два из граничных условий (1.2).

Приступим к построению разрывного решения краевой задачи (1.1) – (1.3), полагая $\tau(x)$ заданной, т.е. основные компоненты напряжённо-деформированного состояния полупространства выразим через скачки тангенциального напряжения и смещения, непременно присутствующих при наличии трещин или включений. Очевидно, что полученное решение будет непосредственно использовано для получения определённого уравнения вышепоставленной контактной задачи. Решение (1.1) – (1.3) построим методом интегрального преобразования Фурье. Применив его к уравнению (1.1), имея при этом в виду условия (1.2), для определения $\bar{w}(\sigma, y)$ получаем уравнение:

$$\frac{d^2 \bar{w}(\sigma, y)}{dy^2} - \sigma^2 \bar{w}(\sigma, y) = \sum_{k=1}^n [-i\sigma g_k(y) + f_k(y)] e^{i\sigma a_k}, \quad y > 0$$

$$\bar{w}(\sigma, y) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{i\sigma x} dx, \quad (1.5)$$

где

$$g_k(y) = w(a_k + 0, y) - w(a_k - 0, y) \quad (1.6)$$

$$f_k(y) = \frac{1}{G} [\tau_k^+(y) - \tau_k^-(y)] \quad (1.7)$$

– указанные выше скачки перемещения и напряжения через линию k -той трещины.

Условие (1.3) после преобразования Фурье примет вид:

$$\left. \frac{d\bar{w}(\sigma, y)}{dy} \right|_{y=0} = \frac{1}{G} \bar{\tau}(\sigma) \quad (1.8)$$

Считая, что функции $f_k(y)$, $g_k(y)$ и $\tau(x)$ известны, решение уравнения (1.5), удовлетворяющее условию (1.8) и исчезающее при $y \rightarrow \infty$, получим в виде

$$\bar{w}(\sigma, y) = \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} (e^{-|\sigma||\eta-y|} + e^{-|\sigma||\eta+y|}) \left[\frac{i}{2} \operatorname{sgn} \sigma g_k(\eta) - \frac{1}{2|\sigma|} f_k(\eta) \right] e^{i\sigma a_k} d\eta -$$

$$- \frac{e^{-|\sigma|y}}{|\sigma|G} \bar{\tau}(\sigma), \quad (y > 0) \quad (1.9)$$

Теперь, имея в виду условие непрерывности на продолжении трещин:

$$g_k(y) = f_k(y) = 0, \quad y \in L_k, \quad k = \overline{1, n} \quad (1.10)$$

после обратного преобразования, из (1.9) получим решение антиплоской задачи (1.1) – (1.3) в виде

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{L_k} \left[\frac{x - a_k}{(x - a_k)^2 + (\eta - y)^2} + \frac{x - a_k}{(x - a_k)^2 + (\eta + y)^2} \right] g_k(\eta) d\eta -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{L_k} \left[\ln \frac{1}{(x - a_k)^2 + (\eta - y)^2} + \ln \frac{1}{(x - a_k)^2 + (\eta + y)^2} \right] f_k(\eta) d\eta -$$

$$- \frac{1}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{y^2}{(t - x)^2 + y^2} \tau(t) dt + \text{const} \quad (1.11)$$

Очевидно, что только часть из скачков $g_j(y)$ и $f_j(y)$, входящих в (1.11), может быть неизвестной, причём, какая из них, определяется граничными условиями на берегах трещин. При этом, в каждом конкретном случае, в зависимости от граничных условий, т.е. выбора пары, непротиворечащих друг другу условий, фигурирующих в (1.2), число неизвестных может быть от n до $2n$.

Учитывая, что, обычно, второе из условий (1.2) заменяется производной по y , представим производные от выражения (1.11) в явном виде:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=a_j \pm 0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \left[\frac{1}{\eta - y} + \frac{1}{\eta + y} \right] g'_j(\eta) d\eta \pm \frac{1}{2} f_j(y) + \frac{1}{\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_j - t}{(a_j - t)^2 + y^2} \tau(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n (1 - \delta_{ik}) \int_{L_k} \left[K_{jk}^+(\eta, y) g'_k(\eta) - R_{jk}^+(\eta, y) f_k(\eta) \right] d\eta, y \in L_j \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{x=a_j \pm 0} &= \pm \frac{1}{2} g'_j(y) - \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \left[\frac{1}{\eta - y} + \frac{1}{\eta + y} \right] f_j(\eta) d\eta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n (1 - \delta_{jk}) \int_{L_k} \left[R_{jk}^{(-)}(\eta, y) g'_k(\eta) d\eta + \right. \\ &\left. + K_{jk}^{(-)} f_k(\eta) \right] d\eta + \frac{1}{\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \tau(\eta) d\eta}{(\eta - a_j)^2 + y^2}, \quad y \in L_j \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$K_{jk}^{\pm}(\eta, y) = \frac{\eta - y}{(\eta - y)^2 + (a_j - a_k)^2} \pm \frac{\eta + y}{(\eta + y)^2 + (a_j - a_k)^2} \quad (1.14)$$

$$R_{jk}^{\pm}(\eta, y) = \frac{a_j - a_k}{(\eta - y)^2 + (a_j - a_k)^2} \pm \frac{a_j - a_k}{(\eta + y)^2 + (a_j - a_k)^2} \quad (1.15)$$

где $g'_k(t) = dg_k/dt$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Отметим, что в (1.12) и (1.13) и в дальнейшем, интегралы с ядром Коши $1/(\eta - y)$ следует понимать в смысле главного значения.

Теперь, при помощи (1.12), (1.13), удовлетворяя конкретно заданным на берегах трещин граничным условиям из (1.2), получим определяющую систему сингулярных интегральных уравнений, содержащей, максимально, $2n$ уравнений. Очевидно, что при одноимённых граничных условиях на берегах трещин и при определённой геометрической и физической симметрии задачи, число неизвестных, а, следовательно, и число определяющих уравнений уменьшаются.

Следует отметить, что решение (1.11) с выражениями (1.12) и (1.13) позволяет непосредственно выписать определяющие системы интегральных уравнений и для антиплоских контактных задач, когда в трещины вставлены тонкие жёсткие включения. При этом можно рассматривать случаи, когда: обе грани включения жёстко соединены с берегами трещины; одна грань жёстко соединена, а другая свободна; длина жёсткого включения короче длины трещины.

2. Система определяющих уравнений контактной задачи. Обратимся теперь к контактной задаче, сформулированной в начале статьи. Здесь уже касательная нагрузка на поверхности упругого полупространства является неизвестной и должна быть найдена из условия (1.4) контакта стрингера с полупространством. Для удовлетворения этому условию необходимо иметь представление производной смещения по x , которое, исходя из (1.11), имеет вид:

$$\left. \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right|_{y=+0} = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{L_k} \left[\frac{\eta}{\eta^2 + (a_k - x)^2} g'_k(\eta) + \right.$$

$$+\frac{a_k-x}{(a_k-x)^2+\eta^2}f_k(\eta)\Big]d\eta-\frac{1}{\pi G}\int_{\Gamma_j}\frac{\tau_j(t)}{t-x}dt, \quad (2.1)$$

где $\tau_j(x)$ – интенсивность неизвестных контактных касательных напряжений, возникающих под накладками на участках контакта Γ_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$).

Удовлетворяя при помощи (2.1) условиям контакта (1.4) на каждом контактном участке, в итоге, получим соответствующее число дополнительных интегральных уравнений. Объединяя последние с уравнениями, указанными в пункте 1, получим окончательную систему определяющих интегральных уравнений, разрешающую поставленную контактную задачу.

Для частного случая, когда имеются две трещины ($n = 2$), на берегах которых заданы первые из условий (1.2) (фиг. 1), по вышеуказанной процедуре из (1.12) и (2.1) получим следующую систему определяющих интегральных уравнений относительно неизвестных скачков $g'_k(t)$, ($k = 1, 2$) и контактного напряжения $\tau_1(x)$.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{a_1-t}{(a_1-t)^2+y^2}\frac{\tau_1(t)}{G}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{L_1}\left[\frac{1}{t-y}+\frac{1}{t+y}\right]g'_1(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{L_2}K_{12}^+(t,y)g'_2(t)dt= \\ & =\frac{1}{2}\frac{\tau_1^+(y)+\tau_1^-(y)}{G}+\frac{1}{\pi}\int_{L_2}R_{12}^+(t,y)f_2(t)dt, \quad y \in \Gamma_1 = (l_1^{(1)} < y < l_1^{(2)}) \quad (2.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{a_2-t}{(a_2-t)^2+y^2}\frac{\tau_1(t)}{G}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{L_1}K_{21}^+(t,y)g'_1(t)dt+\frac{1}{2\pi}\int_{L_2}\left[\frac{1}{t-y}+\frac{1}{t+y}\right]g'_2(t)dt= \\ & =\frac{1}{2}\frac{\tau_2^+(y)+\tau_2^-(y)}{G}+\frac{1}{2\pi}\int_{L_1}R_{21}^+(t,y)f_1(t)dt \quad y \in \Gamma_2 = (l_2^{(1)} < y < l_2^{(2)}) \quad (2.3) \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_1}\left[\frac{1}{t-x}-\lambda_1\theta(x-t)\right]\frac{\tau(t)}{G}dt+\sum_{k=1}^2\int_{L_k}\frac{tg'_k(t)}{t^2+(a_k-x)^2}dt=\sum_{k=1}^2\int_{L_k}\frac{x-a_k}{(x-a_k)^2+t^2}f_k(t)dt-$$

$$-\lambda_1\int_{\Gamma_1}\theta(x-t)q_s^{(1)}(t)dt-\frac{\pi T_{c_1}}{h_s^{(1)}G_s^{(1)}} \quad x \in \Gamma_1 = (c_1 < x < b_1) \quad (2.4)$$

где $\lambda_1 = \pi G/h_s^{(1)}G_s^{(1)}$, $q_s^{(1)}(t)$ – внешняя нагрузка, приложенная к верхней грани стрингера, $f_k(t)$ – известная функция, определяемая из (1.7), а ядра $K_{ij}^+(t, y)$, $R_{ij}^+(t, y)$ даются формулами (1.14), (1.15).

Неизвестные функции из (2.2)-(2.4) должны удовлетворять ещё условиям

$$\int_{\Gamma_1}\tau(s)ds=\int_{\Gamma_1}q_s^{(1)}(s)ds+T_{c_1}-T_{b_1}, \quad \int_{L_j}g'_j(s)ds=0. \quad (2.5)$$

Здесь первое из условия отражает условие равновесия накладки в целом, а второе – непрерывность перемещений на концах трещины. В случае, когда трещина выходит на край полуплоскости, т.е. $l_k^{(1)} = 0$, необходимость в удовлетворении второго условия отпадает, поскольку оно не выполняется.

3. Рассмотрим частный случай задачи, когда полуплоскость ослаблена двумя трещинами, расположенными симметрично относительно стрингера и выходящими на границу полуплоскости (фиг. 2). В таком случае, если принять

$$l_j^{(1)} = 0, \quad l_j^{(2)} = l, \quad (j=1,2), \quad a_2 = a = -a_1, \quad c_1 = -c, \quad b = c,$$

$$\tau_{xz}(-a+0, y) = \tau_{-a}^+(y) = P(y), \quad \tau_{xz}(-a-0, y) = \tau_{-a}^-(y) = Q(y),$$

$$\tau_{xz}(a+0, y) = \tau_a^+(y) = -Q(y), \quad \tau_{xz}(a-0, y) = \tau_a^-(y) = -P(y),$$

$$q_s^{(1)}(x) = q_0(x), \quad q_0(x) = q_0(-x), \quad T_c = -T_{-c} = T_0,$$

то задача будет симметрична относительно оси Oy и, следовательно, будем иметь только одну неизвестную – $g(y) = g_1(y) = -g_2(y)$.

Фиг.2

Тогда, из системы уравнений (2.2) - (2.4), для рассматриваемого случая получим следующую систему сингулярных уравнений относительно контактных напряжений $\tau_1(x)$ под накладкой и производной скачка перемещения $g'(y)$:

$$\begin{aligned} & \int_{-c}^c \left[\frac{1}{s-x} + \lambda \theta(x-s) \right] \tau_1(s) ds - \int_0^l \left[\frac{\eta}{\eta^2 + (a+x)^2} - \frac{\eta}{\eta^2 + (a-x)^2} \right] g'(\eta) d\eta = \\ & = \int_0^l \left[\frac{a+x}{\eta^2 + (a+x)^2} - \frac{a-x}{\eta^2 + (a-x)^2} \right] R^-(\eta) d\eta - \lambda \int_{-c}^c \theta(x-s) q_0(s) ds + \frac{\pi T_a}{h_s^{(1)} G_s^{(1)}} \\ & \quad (-c < x < c) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{-c}^c \frac{(a-t) \tau_1(t)}{(a-t)^2 + y^2} dt + \int_0^l \left[\frac{1}{t-y} + \frac{1}{t+y} - \frac{t-y}{4a^2 + (t-y)^2} - \frac{t+y}{4a^2 + (t+y)^2} \right] g'(t) dt = \\ & = \int_0^l \left[\frac{a}{4a^2 + (t-y)^2} + \frac{a}{4a^2 + (t+y)^2} \right] R^-(t) dt - \frac{\pi}{2} R^+(y) \quad (0 < y < l) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$R^\pm(y) = \frac{1}{G} [P(y) \pm Q(y)]; \quad \lambda = \pi \frac{G}{h_s^{(1)} G_s^{(1)}}$$

Условие равновесия стрингера (2.5) теперь запишется в виде

$$\int_{-c}^c \tau(s) ds = \int_{-c}^c q_0(x) dx - 2T_0. \quad (3.3)$$

Обращаясь теперь к решению системы сингулярных интегральных уравнений (3.1), (3.2) с условием (3.3), заметим следующее. В зависимости от взаимного расположения стрингера и трещин следует уточнить постановку задачи и класс функций, в котором ищется решение задачи.

Из фиг.2 видно, что здесь возможны следующие случаи взаимного расположения стрингера и трещин: 1) $c < a$ – стрингер и трещина не пересекаются; 2) $c = a - 0$ – стрингер достигает края ближнего берега трещины; 3) $c \geq a + 0$, стрингер проходит через трещину, достигая лишь края дальнего берега трещины, либо далее на конечную величину. Рассмотрим только первые два случая.

В первом случае контактные напряжения на концах линии интегрирования имеют корневую особенность [12,13], а $g'(y)$ имеет корневую особенность при $y = l$ и принимает конечное значение при $y = 0$.

Во втором случае, как показывают исследования, функции $\tau(x)$ и $g'(y)$ имеют конечные значения в точке пересечения стрингера и трещины. При этом оказывается, что $\tau(c) = \tau(-c) = Gg'(0)$, а при $y = l$ - $g'(y)$ имеет корневую особенность.

Решение системы (3.1), (3.2) с условиями (3.3), предварительно сведя её на интервал $(-1,1)$, построено методом механических квадратур [14].

Численная реализация задачи для двух рассмотренных выше частных случаев, когда $c < a$ и $c = a - 0$, была проведена при предположении, что берега трещины и боковые грани накладки свободны от напряжений, а на верхней границе накладки приложена равномерно распределённая нагрузка, т.е. $P(t) = Q(t) = 0$; $T_{\pm c} = 0$, $q_0 / G = 1$, $\lambda = 0.5\pi$.

Фиг.3

Фиг.4

Результаты вычислений в случае $c < a$ приведены на графиках (фиг.3, 4), а в случае $c = a - 0$ – на графиках (фиг.5, 6). На фиг.3 и 5 показано изменение контактных напряжений, а на фиг. 4 и 6 – относительное смещение берегов трещин в зависимости от параметра $\alpha = 2c/l$, т.е. от длины трещины при предположении длины стрингера неизменной. В табл.1 приведены значения коэффициентов интенсивности напряжений K_{III} на конце трещины. Анализ численных результатов во втором случае показывает, что при увеличении длины трещин распределение контактных напряжений под стрингером стремится к равномерному.

Фиг.5

Фиг.6

Таблица 1. Коэффициент K_{III}

α	4	2	0.67	0.2
$c < a$	-0.0974	-0.0796	-0.0504	-0.0285
$c = a$	-0.1504	-0.1241	-0.102	-0.0883

Заключение. Построено разрывное решение антиплоской задачи для упругого полупространства, ослабленного параллельно расположенными туннельными трещинами, перпендикулярными к границе полупространства, при задании разных условий на берегах трещин и на границе полупространства. Оно позволяет непосредственно получить определяющие системы сингулярных интегральных уравнений и для соответствующих контактных задач, когда граница усилена упругими накладками. Исследовано поведение контактных напряжений под накладками и производной скачка перемещений берегов трещин в окрестности точки их пересечения. На частном примере исследованы изменения распределения контактных напряжений под накладками и коэффициентов интенсивности напряжений на концах трещин при различных расположениях трещин и накладок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Greif R., Sanders J.L. (Jr.) The effect of a stringer on the stress in a cracked sheet. //Trans. ASME, Ser. E: J. appl. Mech., 32 (1965), pp. 59–66.
2. Агаян К.Л. Взаимодействие стрингеров с бесконечной пластиной, ослабленной двоякопериодической системой трещин. // В сб.: «Механика деформируемых тел и конструкции». Ереван: Изд. АН Арм ССР, 1985, с.26 – 32.
3. Григорян Э.Х. О коэффициентах интенсивности контактных напряжений в задачах для тел с накладками. //Межвузовский сб. научных трудов. Механика. Ереван: Изд.ЕГУ, 1986, № 5, с.130 – 140.
4. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. //В сб.: «Механика деформируемого твёрдого тела». Ереван: Изд. НАН Армении. 1993, с.129 – 143.
5. Агаян К.Л., Саркисян В.Г. Контактная задача упругой плоскости с трещинами, армированной бесконечными включениями.//В сб.: «Механика деформируемого твёрдого тела». Ереван: Изд. НАН Армении. 1993, с.42 – 47.
6. Мхитарян С.М. О контакте между бесконечными стрингерами и упругой полубесконечной пластиной с вертикальной трещиной. //В сб. трудов межд. конф.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Ереван 2012, с.74 – 78.

7. Агаян К.Л. Контактная задача для бесконечной пластины о взаимодействии пересекающихся трещины и стрингеров. //В сб. трудов «Проблемы механики деформируемого твёрдого тела». Ереван 2012, с.42-47.
8. Акопян Л.В., Саакян А.В. Уточнённое решение смешанной задачи для упругого пространства с Т-образной трещиной при антиплоской деформации. //В сб. трудов межд. конф.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван – 2015, с.38 – 42.
9. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Акопян Л.В. Антиплоское напряжённое состояние составного пространства с трещинами при смешанных условиях. //Известия НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №4. С.16 – 22.
10. Закарян В.Г. Трещины и включения в составном полупространстве при продольном сдвиге. // В сб. трудов межд. конф.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван – 2015, с.204 – 208.
11. Григорян М.С. О передаче нагрузок от системы разнородных стрингеров к упругому полупространству или слою при антиплоской деформации. //Известия НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. № 3. С.3 – 16.
12. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. //ПММ. 1968. Т.32. Вып. 4. С.632 – 646.
13. Разрушение. Том 2. М.: Мир, 1975. 763с.
14. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. № 3. С.12-19.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Тел.: (+37491)485-566; E-mail: karo.aghayan@gmail.com

Закарян Ваге Гришаевич, аспирант Института механики НАН Армении.

Тел.: (+37477)789-264; E-mail: vahe-zaqaryan@mail.ru

Поступила в редакцию 17.02.2016