Una teoría generalizada de señales y sistemas

A generalized signals and systems theory

Emilio Gago Ribas, Juan Heredia Juesas y José Luis Ganoza Quintana

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones, Universidad de Oviedo, Edificio Polivalente de Viesques,
33203, Gijón - España

DOI: <https://doi.org/10.33017/RevECIPeru2014.0015/>

Resumen

La Teoría de Señales y Sistemas Teoría (SST) desempeña un papel fundamental en la formación académica y profesional en diferentes áreas de la ingeniería eléctrica (procesado de la señal, electromagnetismo, acústica, mecánica cuántica, etc.), así como en muchas otras áreas científicas. Muchos autores presentan esta teoría siguiendo un esquema que es válido para el análisis práctico de muchos sistemas siguiendo el esquema habitual de la SST. Esta forma de presentar dicha teoría suele evitar tener que tratar con conceptos más generales que son fundamentales en las explicaciones asociadas con la resolución de un gran número de problemas físicos. Estas limitaciones suelen estar relacionadas con la interpretación matemática y física de muchos conceptos importantes inherentes a la SST, por ejemplo, (i) la definición de funciones generalizadas, como la delta de Dirac o sus derivadas, sin considerar el rigor matemático de la teoría de distribuciones, (ii) el análisis de sistemas lineales invariantes en los dominios tiempo-frecuencia mediante la realización del análisis espectral bajo la transformada de Fourier solamente, (iii) el análisis de problemas en variable continua y discreta por separado, (iv) el hecho de no considerar el análisis de sistemas lineales no invariantes de una manera rigurosa, etc. Estas simplificaciones dejan de lado muchos problemas importantes que deberían ser analizados bajo la SST. Esto es particularmente importante si el análisis se centra en los problemas físicos (generalmente definidos por ecuaciones diferenciales más ciertas condiciones de contorno) bajo la SST, por ejemplo: (i) los problemas en el dominio espacial, que a menudo son lineales no invariantes, (ii) el análisis en el dominio del tiempo de los sistemas lineales no invariantes (modulador de amplitud, por ejemplo), (iii) el análisis espectral bajo otras transformadas, en relación con las representaciones habituales utilizando diferentes funciones de onda como funciones de base (ondas cilíndricas, ondas esféricas, haces gaussianos, haces complejos, wavelets, etc.), (iv) el análisis de la teoría de funciones de Green como un caso particular de la SST, (v) la consideración de la teoría de las distribuciones junto con las funciones ordinarias a través de la teoría de los espacios de Hilbert equipados (RHS), (vi) la extensión de la SST a las funciones de variable compleja con el fin de entender la continuación de coordenadas reales a coordenadas complejas, o (vii) la generalización del análisis de los operadores no lineales, así como muchos otros tipos de problemas. El objetivo final del trabajo presentado en este artículo es desarrollar una teoría general que puede incluir todos estos casos de una manera rigurosa. Esto conduce a una Teoría Generalizada de Señales y Sistemas (GSST) que se ha construido teniendo en cuenta que cualquier problema físico pueda analizarse particularizando los conceptos generales de esta teoría con los parámetros concretos del problema en cuestión. Este esquema se revisa continuamente y se actualiza con nuevos resultados. En este artículo se presentará una versión actualizada de este esquema, versión que es usada hoy en día para la presentación de la SST tanto para estudiantes de grado (en una versión simplificada) como para estudiantes de postgrado. El esquema de la GSST está construido considerando inicialmente espacios vectoriales de señales de dimensión finita e infinita junto con la teoría de los operadores y de la teoría de distribuciones, considerando variables generales que pueden representar cualquier magnitud física (tiempo, espacio, etc.) Con estas consideraciones iniciales en mente, se introducirán varios conceptos generalizados importantes, tales como la Combinación Lineal Generalizada (LC), la Transformada Generalizada (GT), los Cambios Generalizados de Transformadas (GTC) y el Análisis Espectral Generalizado (GSA) de sistemas lineales (invariantes y no invariantes).

Descriptores: señales, sistemas, distribuciones, transformadas generalizadas, análisis espectral generalizado
Abstract

The Signals and Systems Theory (SST) plays a fundamental role in the academic and professional background in different areas of electrical engineering (signal processing, electromagnetics, acoustics, quantum mechanics, etc.) as well as in many other scientific areas. Many authors present this theory following a scheme which is valid for the practical analysis of many systems following the usual scheme of the SST, for instance. This way of presenting this theory usually avoids dealing with more general concepts that are fundamental in the explanations associated with the resolution of a large number of physical problems. These limitations use to be related to the mathematical and physical interpretation of many important concepts underlying the SST, for instance (i) the definition of generalized functions such as the Dirac delta or its derivatives without considering the mathematical rigor of the theory of distributions, (ii) the analysis of linear invariant system in the timefrequency domain by performing spectral analysis under the Fourier transform only, (iii) the analysis of continuous and discrete variable problems separately, (iv) the lack of considering the analysis of linear non invariant systems in a rigorous way, etc. These simplifications leave out many important problems that should be analyzed under the SST. This is particularly important if the analysis focuses on physical problems (usually defined by differential equations plus some boundary conditions) under the SST, for instance: (i) problems in the spatial domain, which are often linear non invariant, (ii) the analysis in the time domain of linear non-invariant systems (amplitude modulator, for instance), (iii) the spectral analysis under other transforms, in connection with the usual representations using different wave functions as base functions (cylindrical waves, spherical waves, Gaussian beams, complex beams, wavelets, etc.), (iv) the analysis of the Green's functions theory as a particular case of the SST, (v) the consideration of the theory of distributions together with the ordinary functions through the theory of rigged Hilbert spaces (RHS), (vi) the extension of the usual SST to complex variable functions in order to understand the continuation of real coordinates to complex ones, or (vii) the generalization of the analysis of nonlinear operators, as well as many other types of problems. The final aim of the work presented in this paper is to develop a general theory which can include all of these cases in a rigorous way. This leads to a Generalized Signals and Systems Theory (GSST) that has been built keeping in mind that any physical problem may be analyzed particularizing the general concepts of this theory to the concrete parameters of the problem at hand. This scheme is continuously revised and updated with new results. The up-to-date version of this scheme will be presented in this paper and it is used nowadays for presenting the SST to both undergraduates (in a simplified version) and postgraduate students. The GSST scheme is built under finite or infinite dimension signal vector spaces together with the theory of operators and the theory of distributions, considering general variables that may represent any physical magnitude (time, space, etc.). With these initial considerations in mind, several generalized important concepts will be introduced, such as the *Generalized Linear Combination* (LC), the *Generalized Transform* (GT), the *Generalized Transform Changes* (GTC) and the *Generalized Spectral Analysis* (GSA) of linear (invariant and non-invariant) systems.

Keywords: signals, systems, distributions, generalized transforms, generalized spectral analysis.

1. Introducción

La Teoría de Señales y Sistemas juega un papel fundamental en la formación básica tanto de la ingeniería eléctrica y de telecomunicación, como en otras áreas científicas. Son muchas las referencias que abordan este tema y todas ellas siguen habitualmente un esquema similar al que se puede encontrar en [1]-[2], por ejemplo. Esta metodología de análisis, aunque válida desde un punto de vista eminentemente práctico, no trata algunos conceptos importantes que pueden conducir a futuros problemas conceptuales -desde un problema tan simple como

considerar sólo el dominio temporal, hasta un problema tan importante como el no tener en cuenta la teoría de distribuciones, [3], para entender los diferentes papeles que juega, por ejemplo, la distribución delta Dirac y otras muchas señales importantes relacionadas con ésta. Estos problemas se vuelven más importantes aun cuando se trata de relacionar la teoría de señal con la representación matemática de problemas físicos definidos habitualmente por ecuaciones diferenciales junto con ciertas condiciones de contorno; un caso particular son justamente aquellos problemas relacionados con la descripción de los fenómenos de radiación y

dispersión electromagnética, de especial interés para los autores y una de las motivaciones principales de los trabajos presentados.

Con estas consideraciones en mente, se presenta en este artículo un esquema basado en el álgebra de espacios vectoriales de dimensión infinita y en la teoría de operadores actuando sobre dichos espacios, todo ello complementado con la teoría de distribuciones, que permitirá resolver algunos de los problemas mencionados y generalizar en lo posible la teoría de señal habitual.

Este esquema se utiliza para introducir conceptos tan importantes en teoría electromagnética como las representaciones integrales de las ecuaciones de Maxwell, así como la teoría de funciones de Green. Además, este trabajo está directamente relacionado con diversas actividades de investigación llevadas a cabo en la actualidad, especialmente aquellas relacionadas con los "Espacios de Hilbert Equipados" -Rigged Hilbert Spaces (RHS) [4,5], y su aplicación al modelado de problemas electromagnéticos, así como el estudio de los fundamentos de la continuación de problemas EM de radiación/dispersión del dominio tiempo-espacio real a su versión compleja, -véanse [6]-[8], por ejemplo-. Por lo tanto, es posible generalizar conceptos importantes asociados al análisis real y espectral, tales como el análisis de una transformada generalizada (*Generalized Transform*, GT), el análisis generalizado de los cambios de base o cambio de transformada generalizada (*Generalized Transform Changes*, GTC) o el análisis espectral generalizado (*Generalized Spectral Analysis*, GSA), conceptos con los que será posible analizar cualquier sistema lineal bajo cualquier tipo de transformada. En este sentido, cualquier problema se puede estudiar como un caso particular de la teoría general. En este artículo se presentará un resumen de la Teoría Generalizada de Señales y Sistemas (*Generalized Signals and Systems Theory*, GSST), centrado en los conceptos más importantes. Los desarrollos detallados se pueden encontrar en [9-16].

2. Algunos conceptos iniciales

El esquema de la GSST se construye considerando inicialmente un espacio vectorial $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ de señales, siendo $a(\tau)$ un elemento genérico de dicho espacio. La variable independiente puede representar tanto variables discretas ($\tau \equiv n \in \mathbb{Z}$) como continuas ($\tau \equiv x \in \mathbb{R}$) -en problemas prácticos, estas variables identificarán magnitudes físicas como el tiempo, el espacio, o cualquier otra variable de interés-.

Figura 1: Resumen de los conceptos algebraicos más importantes asociados al esquema de la GSST subyacentes a la representación habitual en forma de una 'caja negra' en la teoría de señales y sistemas.

En la Figura 1 se muestran los conceptos algebraicos más importantes asociados al esquema de la GSST. La definición de una estructura algebraica sobre este espacio se determina definiendo, en la forma habitual, la distancia $d[a(\tau), b(\tau)]$, la norma $\|a(\tau)\|$ y el producto escalar $\langle a(\tau), b(\tau) \rangle$ correspondientes, así como las leyes de composición interna y externa suma y producto por un escalar- asociadas a la definición del espacio vectorial.

Un modo general de describir subconjuntos de señales es introduciendo un nuevo parámetro μ que identifica elementos dentro del subconjunto; éste puede contener un número finito ($\mu \in \langle N_0 \rangle$), infinito numerable ($\mu \in \mathbb{Z}$) o infinito continuo ($\mu \in \mathbb{R}$) de elementos. La descripción generalizada de un subconjunto se realiza a través de la notación $u(\tau; \mu)$. Nótese que los elementos -señales en $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ - dependen solamente de la variable real τ , el parámetro μ se ha introducido para identificar a cada uno de los elementos del subconjunto en cuestión. Este concepto se denota mediante el símbolo ";" para identificar que la visualización del subconjunto puede realizarse en dos dimensiones, forma que resultará muy conveniente para entender ciertas interpretaciones. En la Figura 1 se identifican algunos casos particulares de subconjuntos de señales mientras que en la Figura 2 se muestra un ejemplo particular con $\tau = x \in \mathbb{R}$ y $\mu = \xi \in \mathbb{R}$.

Figura 2: Ejemplo de representación en forma de superficie de un subconjunto de funciones $u(x; \xi)$, $x, \xi \in \mathbb{R}$. Esta representación está asociada a la descripción de un subconjunto continuo en un espacio de funciones de variable continua.

3. Transformada generalizada

Las transformadas se generalizan en base a la descripción de los elementos del espacio de señales $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ en términos de subconjuntos de funciones $e(\tau; \mu)$ que juegan el papel de una base en $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$; así, un elemento $a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ se podrá representar como una Combinación Lineal Generalizada, $\mathbf{LC}_{\mu}$, de este conjunto de funciones base, ponderadas por un conjunto de coeficientes $\alpha(\mu)$ -coordenadas de $a(\tau)$ en la base $e(\tau; \mu)$ -. El cálculo de dichos coeficientes se realiza minimizando la distancia entre la función

El par de ecuaciones (1) y (2) constituyen la Transformada Generalizada, donde $\alpha(\mu)$ es la transformada directa de $a(\tau)$ en la base $e(\tau; \mu)$ y $a(\tau)$ es la transformada inversa de $\alpha(\mu)$ en la base $e(\tau; \mu)$. En los casos en que $e(\tau; \mu)$ sea un conjunto ortogonal, el análisis de la distancia en la transformada directa se reduce al producto escalar entre $a(\tau)$ y cada función base $e(\tau; \mu)$, obteniéndose el siguiente par de ecuaciones,

$$a(\tau) = \mathbf{LC}_{\mu}[\alpha(\mu)e(\tau; \mu)], \quad (3)$$

$$\alpha(\mu) \propto \langle a(\tau), e(\tau; \mu) \rangle. \quad (4)$$

original $a(\tau)$ y la combinación lineal generalizada $\mathbf{LC}_{\mu}$. Matemáticamente,

$$a(\tau) = \mathbf{LC}_{\mu}[\alpha(\mu)e(\tau; \mu)], \quad (1)$$

$$d\{a(\tau), \mathbf{LC}_{\mu}[\alpha(\mu)e(\tau; \mu)]\} \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha(\mu). \quad (2)$$

Nótese que esta definición de transformada está íntimamente ligada a las definiciones de la distancia y del producto escalar impuestos originalmente en el espacio de señales, lo que supone una generalización muy importante a la hora de poder redefinir cualquier problema desde su origen. Esta representación proporcional también herramientas conceptuales importantes para definir la forma que toma el operador $\mathbf{LC}_{\mu}$ para un problema específico; así, en espacios de dimensión numerable el operador se identificará con sumas finitas o infinitas, mientras que en espacios de dimensión continua se identificará con diferentes representaciones integrales (Riemman, Lebesgue, Henstock-Hurzwil) o bien con representaciones integrales asociadas a funcionales, lo que permite introducir de forma natural la teoría de distribuciones en el esquema de la GSST.

4. Cambios generalizados de transformadas

Escogida una base ortogonal $e(\tau; \mu)$, para cada señal $a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ se obtiene el conjunto de coeficientes $\alpha(\mu)$. Si se elige otra base ortogonal $\tilde{e}(\tau; \mu')$ se obtiene otro conjunto de coeficientes $\tilde{\alpha}(\mu')$ para la misma señal $a(\tau)$, tal como se representa gráficamente en la Figura 3. A la relación entre $\alpha(\mu)$ y $\tilde{\alpha}(\mu')$ se le llama análisis generalizado de cambio de base o Cambio de Transformada Generalizado (GTC). Para realizar esto, se necesita otro conjunto de funciones $(\mu'; \mu)$. Este conjunto es proporcional a la proyección de cada

$$(\mu'; \mu) \propto \langle e(\tau; \mu), \tilde{e}(\tau; \mu') \rangle. \quad (6)$$

De manera recíproca se tiene que,

$$\alpha(\mu) = \mathbf{LC}_{\mu'}[\tilde{\alpha}(\mu') \sim (\mu; \mu')], \quad (7)$$

$$\sim (\mu; \mu') \propto \langle \tilde{e}(\tau; \mu'), e(\tau; \mu) \rangle. \quad (8)$$

función base $e(\tau; \mu)$ sobre cada elemento de la otra base $\tilde{e}(\tau; \mu')$. Entonces, la expresión final que relaciona ambos conjuntos de coeficientes es la siguiente,

$$\tilde{\alpha}(\mu') = \mathbf{LC}_{\mu}[\alpha(\mu) (\mu'; \mu)], \quad (5)$$

Figura 3: Representación esquemática del cambio de base en un espacio de señal.

Estos conceptos se pueden entender considerando el ejemplo de la relación entre la transformada de Fourier y la transformada de Hilbert en el espacio de funciones de variable continua $S(-\infty, \infty)$. Si $\alpha(\mu) = F(\xi) = \mathbf{FT}[f(x)]$ o $\tilde{\alpha}(\mu') = H(x') = \mathbf{HT}[f(x)]$ son conocidos, entonces se tienen las siguientes relaciones

$$H(x') = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} jF(\xi) \text{sign}(\xi) e^{j\xi x'} d\xi, \quad (9)$$

$$F(\xi) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} -jH(x') \text{sign}(\xi) e^{-j\xi x'} dx'. \quad (10)$$

Otro ejemplo especialmente interesante de GTC aparece cuando se trata de entender la representación de funciones periódicas de variable continua vistas como elementos de dos espacios de señal diferentes; el primero, el espacio de funciones $S(-\infty, \infty)$ considerando el conjunto de funciones base $e(x; \xi) = e^{j\xi x}$, y el segundo cuando se consideran dichas funciones periódicas en el espacio de funciones periódicas $P(X_0)$ considerando el conjunto de funciones base $\tilde{e}(x; m) = e^{jm\xi_0 x}$. Entonces se tienen las siguientes ecuaciones para este caso particular de GTC

$$a(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \text{sinc}\left[\frac{X_0}{2}(\xi - m\xi_0)\right] d\xi, \quad (11)$$

$$F(\xi) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\xi - m\xi_0). \quad (12)$$

$\mathcal{F}(\star)$

$\mathcal{F}(\star), \mathcal{F}(\circ; \star)$

Figura 4: Ejemplo del proceso de cambio de un conjunto continuo de coeficientes a un conjunto discreto. Ambos representan la misma señal.

Figura 5: Ejemplo del proceso de cambio de un conjunto discreto de coeficientes a uno continuo. Ambos representan la misma señal.

En las Figuras 4 y 5 se representa gráficamente un ejemplo del proceso matemático llevado a cabo en las ecuaciones (11) y (12).

Este último ejemplo muestra cómo la GTC se puede aplicar sobre funciones identificadas en diferentes espacios de señal, donde los conjuntos de funciones base definidos pueden tener diferente cardinalidad, siendo μ y μ' no necesariamente de la misma naturaleza.

5. Caracterización de sistemas

Caracterización de sistemas en el dominio real

En un espacio de señal, se puede escoger como conjunto de funciones base el conjunto de deltas desplazadas denotadas, de manera generalizada, como $e(\tau; \tau') = \delta(\tau - \tau')$ con $\mu = \tau'$ y donde $\delta(\tau)$ representa, o bien una delta de Kronecker en variable discreta ($\tau \in \mathbb{Z}$) o la distribución delta de Dirac en variable continua ($\tau \in \mathbb{R}$). Cualquier señal $a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ se puede representar a través de este conjunto de deltas desplazadas como

$$a(\tau) = \mathbf{LC}_{\tau'}[a(\tau')\delta(\tau - \tau')]. \quad (13)$$

Cuando la señal $a(\tau)$ es transformada por un sistema lineal $\mathbf{F}_L$, se obtiene la siguiente señal de salida del sistema

$$b(\tau) = \mathbf{F}_L[a(\tau)] = \mathbf{LC}_{\tau'}[a(\tau')\mathbf{F}_L[\delta(\tau - \tau')]]. \quad (14)$$

El conjunto $h(\tau; \tau') = \mathbf{F}_L[\delta(\tau - \tau')]$ se denomina conjunto de respuestas al impulso y define matemáticamente las propiedades del sistema lineal $\mathbf{F}_L$, ya que

$$b(\tau) = \mathbf{F}_L[a(\tau)] = \mathbf{LC}_{\tau'}[a(\tau')h(\tau; \tau')]. \quad (15)$$

En el caso particular de sistemas lineales e invariantes, la señal de salida se puede caracterizar a través de una única respuesta al impulso $h(\tau) = \mathbf{F}_L[\delta(\tau)]$ por lo que la señal de salida $b(\tau)$ del sistema lineal e invariante $\mathbf{F}_{LI}$ vendrá dada por

$$b(\tau) = \mathbf{F}_{LI}[a(\tau)] = \mathbf{LC}_{\tau'}[a(\tau')h(\tau - \tau')]. \quad (16)$$

Caracterización de sistemas en el dominio espectral

Sea el conjunto de funciones $e(\tau; \mu)$ que juegan el papel de una base en $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ tal y como se muestra en (1); cualquier función $a(\tau) \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ se puede representar como una Combinación Lineal Generalizada de este conjunto de funciones base, ponderadas por un conjunto de coeficientes $\alpha(\mu)$

$$a(\tau) = \mathbf{LC}_{\mu}[\alpha(\mu)e(\tau; \mu)]. \quad (17)$$

Así, la señal de salida $b(\tau)$ de un sistema lineal $\mathbf{F}_L$ se puede expresar como:

$$\begin{aligned} b(\tau) &= \mathbf{F}_L[a(\tau)] = \mathbf{F}_L\{\mathbf{LC}_{\mu}[\alpha(\mu)e(\tau; \mu)]\} = \\ &= \mathbf{LC}_{\mu}\{\alpha(\mu)\mathbf{F}_L[e(\tau; \mu)]\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Si el conjunto de funciones base $e(\tau; \mu)$ pertenece al subconjunto de autofunciones de $\mathbf{F}_L$, es decir

$$e(\tau; \mu) \in \text{Eig}\{\mathbf{F}_L\} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbf{F}_L[e(\tau; \mu)] = \lambda(\mu)e(\tau; \mu) \quad (19)$$

la señal de salida $b(\tau)$ de un sistema lineal $\mathbf{F}_L$ se puede expresar como

$$b(\tau) = \mathbf{LC}_{\mu}[\alpha(\mu)\lambda(\mu)e(\tau; \mu)]. \quad (20)$$

donde $\lambda(\mu)$ son los autovalores de cada autofunción $e(\tau; \mu)$. El producto

$$\beta(\mu) = \alpha(\mu)\lambda(\mu). \quad (21)$$

es la representación habitual en el dominio espectral de la señal $a(\tau)$ bajo la base $e(\tau; \mu)$. Por ejemplo, si se tiene el siguiente conjunto de funciones base $e(x; \xi) = e^{j\xi x}$ relacionado con la transformada de Fourier, entonces bajo sistemas lineales invariantes, la función $\lambda(\mu)$ se identifica directamente con la bien conocida *función de transferencia* del sistema. El conjunto de funciones base $e(x; \xi) = e^{j\xi x}$ son siempre autofunciones de cualquier sistema lineal e invariante, sin embargo no lo son para sistemas lineales no invariantes.

Análisis espectral generalizado

El concepto fundamental asociado al análisis espectral generalizado es el de establecer la relación entre los coeficientes de la señal de salida $\beta(\mu)$ de un sistema lineal $\mathbf{F}_L$ y los coeficientes de la señal de entrada $\alpha(\mu)$, es decir, determinar la relación entre la señal de entrada y la señal de salida en el dominio espectral bajo la transformada generalizada definida a partir de un conjunto de funciones base $e(\tau; \mu)$. En el análisis de un sistema lineal en el dominio real se tiene,

$$b(\tau) = \mathbf{F}_L[a(\tau)] = \mathbf{LC}_{\tau'}[a(\tau')h(\tau; \tau')]. \quad (22)$$

De forma similar se ha obtenido que la señal de salida en el dominio espectral se puede obtener a partir de un conjunto de funciones $H_*(\mu; \mu')$ que dependen del sistema y del conjunto de funciones base utilizado para realizar dicho análisis espectral; así

$$\beta(\mu) = KLC_{\mu'}[\alpha(\mu')H_*(\mu; \mu')]. \quad (23)$$

donde

$$H_*(\mu; \mu') = \langle \langle h(\tau; \tau'), e(\tau; \mu) \rangle_{\tau}, \tilde{e}^*(\tau'; \mu') \rangle_{\tau'}. \quad (24)$$

En la Tabla 1 se muestran algunos resultados particulares para algunas transformadas específicas.

Tabla 1: Casos particulares del GSA de sistemas lineales para algunas transformadas habituales.

Transformada	GSA
Fourier	$G(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi'=-\infty}^{\infty} F(\xi')H(\xi; \xi')d\xi'$
Hilbert	$' = \quad , \quad , \quad , \quad , \quad ,$
Bessel (orden ν)	$G_v(\xi) \int_{y'=-\infty}^{\infty} F(y)H(x; y)dy$
Series de Fourier	$= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi'=-\infty}^{\infty} F(\xi')H_v(\xi; \xi')d\xi'$
	$b(m) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} a(m')H(m; -m')$

Cuando el conjunto de funciones base son autofunciones del sistema, se tiene que

$$H_*(\mu; \mu') = \frac{1}{K} \lambda(\mu') \delta(\mu - \mu'). \quad (25)$$

de forma que

$$\beta(\mu) = \alpha(\mu) \lambda(\mu). \quad (26)$$

resultado habitual en la teoría de señales y sistemas ya mencionado en (21). Por ejemplo para el análisis de Fourier de un sistema lineal e invariante se tiene que,

$$h(x; x') = h(x - x'),$$

$$H(\xi; \xi') = \int_{x'=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} h(x; x') e^{-j\xi x} e^{-j\xi' x'} dx dx' =$$

$$= 2\pi \delta(\xi + \xi') H(\xi). \quad (27)$$

De esta forma se obtiene la expresión bien conocida,

$$G(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi'=-\infty}^{\infty} F(\xi') H(\xi; -\xi') d\xi' =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi'=-\infty}^{\infty} F(\xi') 2\pi \delta(\xi - \xi') H(\xi) d\xi' =$$

$$= H(\xi) F(\xi). \quad (28)$$

Conclusiones

En el presente artículo se presenta el resumen de un esquema generalizado de señales y sistemas que permite ampliar de forma importante los esquemas habituales de la teoría de señales y sistemas. La *transformada generalizada* permite analizar las transformaciones en términos de una combinación lineal generalizada. Mediante el *análisis generalizado de cambios de base* se obtienen los coeficientes de una señal en una nueva base en términos de los coeficientes de la misma señal en otra base. Con el *análisis espectral generalizado* se obtienen los coeficientes de una señal de salida de cualquier sistema lineal en términos de los coeficientes de la señal de entrada y de un conjunto de funciones que dependen del sistema y de la transformada. Estos resultados incluyen el caso de que los espacios de salida y de llegada puedan ser diferentes. Todos los análisis presentados enlazan directamente con una serie de problemas de investigación particulares, en concreto: (i) la obtención de una Teoría Generalizada de Funciones de Green, herramienta fundamental en la formulación y resolución de problemas físicos, como es el caso del análisis de problemas electromagnéticos, y (ii) la obtención de una Teoría Generalizada de Señales y Sistemas en Variable Compleja, problema que enlaza directamente con la explicación rigurosa de la extensión de coordenadas espacio-tiempo reales a coordenadas complejas, trabajo de especial interés para los firmantes del presente trabajo.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio español de Ciencia e Innovación/FEDER bajo el proyecto iScat TEC2011-24492.

Referencias

- [1] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, I. T. Young, Signals and Systems, 2nd Ed., Prentice-Hall International, 1997.
- [2] D. K. Lindner, Introduction to Signals and Systems, McGraw-Hill, 1999.
- [3] R. Skinner, J. A. Weil, An Introduction to Generalized Functions and Their Application to Static Electromagnetic Point Dipoles, Including Hyperfine Interactions, American Journal of Physics, Vol. 57, No. 9, pp. 777-791, September 1989.
- [4] R. De la Madrid, Rigged Hilbert Space Approach to the Schrödinger Equation, Journal of Physics A: Mathematical and General, Vol. 35, pp. 319-342, 2002.
- [5] R. De la Madrid, The Rigged Hilbert Space Approach to the Lippmann-Schwinger, Part I, Journal of Physics A: Mathematical and General, 39, 3949, 2006.
- [6] E. Gago-Ribas, M. J. Gonzalez, C. Dehesa, Analytical Parameterization of a 2D Real Propagation Space in Terms of Complex Electromagnetic Beams IEICE Trans. on Electronics, Vol. E80-C, no. 11, 1997.
- [7] E. Gago-Ribas, M. J. Gonzalez, C. Dehesa, Challenges and Perspectives of Complex Spaces and Complex Signal Theory Analysis in Electromagnetics: First Steps in Electromagnetics in a Complex World: Challenges and Perspectives, Springer Proceedings in Physics, Vol. 96 (Pinto, Galdi, Felsen), Springer-Verlag, pp. 175-188, 2003.
- [8] M. J. González Morales, E. Gago Ribas, C. Dehesa Martínez, Complex analysis of the induced currents on a perfectly conducting plane under complex beam incidence, Progress in Electromagnetic Research (PIER), Vol. 76, pp. 299-326, USA, 2007.
- [9] E. Gago-Ribas, A. Serroukh, A Generalized Signals and Systems Theory Scheme and its Applications in the Description of Electromagnetic Problems, Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS), Moscow, Russia, August 2009.
- [10] E. Gago-Ribas, A Scheme to Generalize Signal Theory and Its Application to Electromagnetics, IEEE International Symposium on Antennas & Propagation and URSI Meeting, Ref. 978-1-4244-3647-7/09, Charleston, SC, USA, June 2009.
- [11] E. Gago-Ribas, F. Varona, Real and Fourier Spectral Characterization of Linear Non Invariant Systems ENMA International Conference on Engineering and Mathematics, pp. 269-276, Bilbao, 2008.
- [12] J. Heredia Juesas, E. Gago-Ribas, A New View of Spectral Analysis of Linear Systems, Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS), Kuala Lumpur, Malaysia, March 2012.
- [13] J. Heredia Juesas, E. Gago-Ribas, Summary of a Generalized Signals & Systems Theory for Its Applications to the Description of Electromagnetic Problems, International Conference Electromagnetics in Advanced Applications, ICEAA 2013 Preceedings pp. 400-403, Torino, Italy, 9-13 September 2013.
- [14] J. Heredia Juesas, Análisis General de la Teoría de Señales y Sistemas para su Aplicación al Modelado de Problemas Físicos, Proyecto Fin de Carrera Ingeniería en Telecomunicación, EPSIG, Universidad de Oviedo, Gijón (España), Diciembre 2009.
- [15] J. Heredia Juesas, Generalización de la Teoría de Señales y Sistemas para el Análisis de Sistemas Lineales No Invariantes, Master Thesis in Information Technologies and Communication in Mobile Networks (TICRM), EPSIG, Universidad de Oviedo, Gijón (España), Julio 2010.
- [16] J. Heredia Juesas, Generalización de la Teoría de Señales y Sistemas para la su Aplicación a la Descripción, Resolución y Parametrización de Problemas Electromagnéticos. Tesis Doctoral, EPIG, Universidad de Oviedo, Gijón (España), marzo 2014.

E-mail: egr@tsc.uniovi.es juanherediaj@hotmail.com
joseluisganozaquintana@gmail.com