ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ КАТАСТРОФ У ПРОМИСЛОВІЙ ЕКОЛОГІЇ

Хлєстова О.А., Єлістратова Н.Ю., Кальянов А.В., Волков Д.В.
Приазовський державний технічний університет

вул. Університетська, 7, 87555, м. Маріуполь, Донецька область

helga26122016@gmail.com, elistratova.n.y@gmail.com, kalyanov.anat@ukr.net, fullmetalalchemist2016@gmail.com

У цій роботі розглянуто зв'язок математичної теорії катастроф із промисловою екологією за наявності фотохімічних реакцій над мегаполісом для моделювання проблемних екологічних процесів. Використана теорія катастроф дає змогу дослідити певні процеси в навколишньому середовищі, що залежать від великої кількості факторів й розвивається шляхом стрибкоподібних змін. Основними критеріями обрано приземну прозорість повітря, яка чим більше, тим екологічний стан краще, та приземну концентрацію характерних для смогу домішок повітря – фотооксидантів, яких чим більше, тим екологічний стан стає гірше. Для дослідження закономірності поведінки системи навколишнє середовище – техносфера під дією зовнішніх впливів застосовано теорію біфуркацій диференціальних рівнянь (динамічних систем) і теорію особливостей гладких відображень. Проведено моделювання еволюції атмосфери за допомогою математичної теорії катастроф щодо розвитку фотохімічного смогу від техногенного навантаження. Встановлено локальні мінімуми, за якими можна судити про наближення критичних точок. Наведено результати моделювання еволюції атмосфери мегаполіса у двох ситуаціях: докритичній та закритичній. Маючи таку досить просту модель еволюції атмосфери щодо розвитку фотохімічного смогу, можна якісно оцінити можливості переходу, пов'язані зі збільшенням з якихось причин загального забруднення повітря, причому можна варіювати рівень факторів, пов'язаних із природою атмосфери, що склалася в мегаполісі, наприклад, температурною інверсією повітряних шарів, вологістю, швидкістю вітру тощо. Представлена якісна модель дає змогу точніше поставити завдання управління загальним рівнем забруднень, аби не допустити катастрофічного розвитку подій і визначити основні функціональні зв'язки системи управління і моніторингу. *Ключові слова:* математична теорія катастроф, промислова екологія, теорія біфуркацій, фотохімічний смог, стрибкоподібні зміни, моделювання еволюції атмосфери.

Using the mathematical theory of disasters in industrial ecology. Khlestov A., Elistratova N., Kalyanov V., Volkov D.

In this paper, we consider the relationship between the mathematical theory of disasters and industrial ecology in the presence of photochemical reactions over a metropolis to model problematic environmental processes. The used catastrophe theory allows us to study certain processes in the environment, which depend on many factors, and develops by abrupt changes. The main criteria were chosen for surface transparency of air, the higher the environmental condition, the better the surface concentration of airborne impurities characteristic of smog – photooxidants, the higher the environmental condition, the worse. To study the laws of behavior of the environment-technosphere system under the influence of external influences, the theory of bifurcations of differential equations (dynamical systems) and the theory of features of smooth mappings are used. The atmosphere evolution was simulated using the mathematical theory of catastrophes regarding the development of photochemical smog from anthropogenic load. Local minima are established by which one can judge the approximation of critical points. The results of modeling the evolution of the atmosphere of a metropolis in two situations: subcritical and supercritical. Having such a fairly simple model of atmospheric evolution for the development of photochemical smog, one can qualitatively assess the transition possibilities associated with an increase, for some reason, of general air pollution, and it is possible to vary the level of factors related to the nature of the atmosphere prevailing in the metropolis, for example, temperature inversion of air layers, humidity, wind speed and the like. The presented qualitative model allows, more precisely, to set the tasks of controlling the general level of pollution in order to prevent a catastrophic development of events and to determine the main functional relationships of the control and monitoring system. *Key words:* mathematical theory of disasters, industrial ecology, bifurcation theory, photochemical smog, spasmodic changes, modeling of atmospheric evolution.

Постановка проблеми. Екологічне середовище і техносфера (промислова екологія) є динамічною системою, схильною до змін. Стрибкоподібні зміни, що виникають при змінах значень параметрів вивчає математична теорія катастроф (МТК), яка є частиною якісної теорії складних нелінійних систем. МТК знайшла своє застосування в різних галузях знань: математиці, фізиці, біології, психології, економіці, соціології та екології. У промисловій екології МТК може бути використаний для моделювання критичних точок для розуміння і передбачення катастрофічного розвитку подій, раптових стрибкоподібних змін, пов'язаних із фотохімічним смогом та іншими фізико-хімічними про-

цесами в атмосфері над технополісом та їх впливом на навколишнє середовище.

Актуальність дослідження. Актуальність роботи зумовлена тим, що, незважаючи на наявні дослідження, питання використання математичної теорії катастроф у промисловій екології, а саме щодо розвитку фотохімічного смогу та інших фізико-хімічними процесів в атмосфері, вивчено недостатньо і вимагає виявлення і розкриття проблемних екологічних процесів, де очікується «катастрофічний» розвиток подій, при плавній зміні екологічних факторів для подальшого аналізу і теоретичного осмислення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вивченню теорії катастроф присвячена низка робіт

зарубіжних і російських вчених. Термін «теорія катастроф» був уведений Р. Томом і К. Зіманом на початку 1970-х років. Нині відомо сім фундаментальних типів катастроф під назвами, які надав їм Р. Том [1]. Розвиток теорії катастроф в 1970–1980-і роки пов'язаний із діяльністю англійського математика Т. Постона (теорія особливостей і біфуркацій і їх додатків) [2]. Вивченню теорії катастроф і застосуванню її методів у фізиці, математиці, механіці і термодинаміці присвячена монографія відомого американського вченого Р. Гилмора [3]. Докладно описаний математичний опис катастроф – стрибкоподібних змін у вигляді раптової відповіді системи на зміну зовнішніх умов у роботі російського вченого В. Арнольда [4]. Разом із тим варто зазначити, що зв'язок теорії катастроф із промисловою екологією є найменш вивченою проблемою і являє собою актуальну задачу екологічної науки, оскільки дає змогу передбачати стрибкоподібні зміни динамічних зв'язків у середині системи навколишнє середовище – техносфера і спрогнозувати вплив «катастрофічного» перебігу подій.

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття. У роботі досліджено зв'язок теорії катастроф із промисловою екологією за наявності фізико-хімічних процесів та фотохімічних реакцій в атмосфері над мегаполісом для моделювання проблемних екологічних процесів. Можливі шляхи застосування МТК визначаються цілком – «зв'язати» в один математичний опис три об'єкти: характеристику, що описує екологічний стан оточення; одну або дві координати процесу функціонування; один або кілька параметрів, зміни яких впливають на хід процесу або навіть керують їм.

Новизна. Вперше досліджено модель еволюції атмосфери за допомогою МТК щодо розвитку фотохімічного смогу від техногенного навантаження. Якісна модель дає змогу варіювати рівень факторів, пов'язаних із природою атмосфери, наприклад, температурною інверсією повітряних шарів, вологістю, швидкістю вітру тощо, а також визначити основні функціональні зв'язки системи управління і моніторингу.

Методологічне або загальнонаукове значення. Для дослідження закономірності поведінки системи навколишнє середовище – техносфера під дією зовнішніх впливів застосовано теорію біфуркацій диференціальних рівнянь (динамічних систем) і теорію особливостей гладких відображень. Встановлені локальні мінімуми, за якими можна судити про наближення критичних точок. Запропонована модель еволюції атмосфери щодо розвитку фотохімічного смогу та інших фізико-хімічних процесів в атмосфері.

Виклад основного матеріалу. Математична теорія катастроф (далі – МТК) впевнено посідає важливе місце серед досить нових розділів математики, бо

дає змогу дослідити певні процеси в навколишньому середовищі, що залежать від великої кількості факторів й розвиваються шляхом стрибкоподібних змін. У цьому випадку термін «катастрофа» означає різкі стрибкоподібні зміни, що виникають при плавних змінах значень параметрів [5]. У популярних виданнях МТК рекламується як переворот у математиці, який можна порівняти з винаходом диференціального обчислення. Опубліковано безліч робіт, в яких моделі МТК застосовувалися в економіці, психології, лінгвістиці, соціології [6]. Однак щодо екологічних моделей досягнення МТК використовуються досить стримано. Можливо, це пояснюється традиційною «відчуженістю» екологів від складної математики.

Один з провідних російських математиків В.І. Арнольд [4] зазначає, що застосування МТК суттєво залежить від обґрунтованості вихідних посилок. Найчастіше неприємним сюрпризом для спостерігача виявляється ситуація, в якій невеликі, поступові зміни параметрів ведуть до несподівано різкої, обвальної зміни поведінки системи. Більшість екологічних проблеми мають біологічну природу й «плавні» еволюційні зміни змінних, але є також процеси, що мають потенціал нелінійного, «катастрофічного» розвитку.

Наприклад, перехід повільного збільшення забруднення атмосфери мегаполісу може раптово привести до розвитку фотохімічного смогу, що цілком вкладається в «катастрофічний» розвиток подій, що описується МТК. Однією з найбільш популярних моделей теорії катастроф є катастрофа «збірка» [1], топологія якої наведена на рис. 1.

Рис. 1. Катастрофа «збірка»

Тут наочно продемонстровані якісні особливості катастрофічної поведінки систем. По осях a й b відкладені значення незалежних змінних, а по осі x – залежної. Можливим положенням системи відповідає поверхня катастроф. Проекція цієї поверхні на площину (a, b) дає біфуркаційну криву (від лат. *Bifurcus* – роздвоєний).

Припустимо, що безперервній зміні значень параметрів a і b на рис. 1 відповідає рух по кривій

RT . У точці T відбувається катастрофа – система стрибком переходить із верхнього листа на нижній у точку P .

Зазначимо, що кожному значенню параметрів a і b всередині біфуркаційної кривої відповідають два різних стани системи (бімодальність). На поверхні катастроф можна спостерігати явище гістерезису, коли поведінка системи істотно залежить від передісторії процесу. Наприклад, у разі зміни стану системи уздовж кривої RT відбувається стрибок із верхнього листа на нижній – із точки T в точку P . Але при русі вздовж кривої PQ стрибок із нижнього листа на верхній відбудеться не в точці P , а в точці Q .

Такий тип катастрофи МТК може бути використаний у промисловій екології для моделювання проблемних екологічних процесів, де очікується «катастрофічний» розвиток подій, тобто різка зміна оточення при плавній зміні екологічних факторів.

Алгоритм отримання математичної моделі наступний. Спочатку треба визначитися з тим, що вважати критерієм екологічного стану. Якщо, наприклад, як негативне екологічне явище розглядати фотохімічний смог, то основними критеріями варто вважати, або приземну прозорість повітря (видимість, в метрах) – L , чим більше, тим екологічний стан краще, або приземну концентрацію характерних для смогу домішок повітря – фотооксидантів (в мг/м^3) – C , чим більше, тим екологічний стан гірше.

Далі виберемо координату, що характеризує процес смогоутворення. Вочевидь, найбільш раціональним вибором буде загальний рівень повітряних забруднень y .

Цілком очевидно, що видимість L або концентрація C будуть залежати від загального рівня забруднень y , тобто можна записати, що:

$$L = f_1(y), \quad (1)$$

$$C = f_2(y), \quad (2)$$

де f_1 і f_2 – деякі функції, причому можна вважати, що видимість L і концентрація C є, в деякому сенсі, зворотними величинами або величинами, що мають різні математичні знаки. Якщо видимість L позитивна, то концентрацію C можна вважати негативною. Якщо концентрація L зростає, то концентрація C зменшується і навпаки.

Ясно, що величини L і C залежать не тільки від рівня забруднення атмосфери y , а й від безлічі інших величин або керуючих параметрів, як вони називаються в теорії катастроф, наприклад, температури і вологості повітряних шарів, швидкості вітру, наявності температурної інверсії, рівня сонячного випромінювання тощо, тобто можна записати, що:

$$L = f_1(y, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots), \quad (3)$$

$$C = f_2(y, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots), \quad (4)$$

де $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ – керуючі параметри.

В ідеалі для прогнозування розвитку фотохімічного смогу необхідно знати точні залежності f_1 і f_2 або модель процесу, тобто знати, яким змінам керуючих параметрів $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ і рівня забруднення атмосфери y відповідає те чи інше значення, наприклад видимості L . Ясно, що таку модель збудувати вельми складно. Тому можна використати математичну теорію катастроф і отримати досить просту модель, виходячи з мінімуму знань про функції f_1 і f_2 .

Що відомо про стан атмосфери мегаполісу зі значним техногенним навантаженням, наприклад, Маріуполя або іншого розвиненого промислового комплексу, що успішно існує у сформованих реаліях? Відомо, фотохімічний смог – наявність в атмосфері високої концентрації оксидів азоту, вуглеводнів і інших забруднювачів у приземному шарі при потужній і протягом не менше доби підвищеної інверсії [7], утворюється час від часу, але не є постійним явищем. Це означає, що, з одного боку, відновлювальних природних властивостей атмосфери поки вистачає для «вирівнювання» екологічної ситуації, при цьому і соціум «намагається» знизити загальний рівень атмосферних забруднень і не «посилювати» екологічну ситуацію, в тому числі і розвиток фотохімічного смогу. І цей «стабільний» стан досягається при деякому середньому обсязі забруднень y і деяких значеннях керуючих параметрів $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$. Чисто якісно таку ситуацію можна пояснити рис. 2.

Рис. 2. Докритична залежність

На рис. 2 представлені 4 графіки залежності видимості L від рівня забруднення атмосфери y . Стан атмосфери умовно позначена кулькою. Графіки відрізняються різними наборами керуючих параметрів. У разі плавної зміни керуючих параметрів графіки зсуваються, їх гілки йдуть крутіше або пологіше, або трохи деформуються. Однак у них усіх залишається щось спільне: стійкий стан, у межах малих відхилень, що визначається локальним одним мінімумом кривої. Така область називається докритичною областю катастрофи.

Рис. 3. Закритична залежність видимості L від рівня забруднення у видимості L від рівня забруднення у

Чи можливі інші гіпотетичні сценарії, які вже мали місце в інших точках планети в атмосфері сучасного промислового мегаполісу? Відомо те, що фотохімічний смог над технополісом може і не «розвіється», тобто відбудеться втрата стійкого екологічного стану. Це буде означати, що за умови певної комбінації параметрів крива втрачає «стійкий» характер – раніше згаданий локальний мінімум «випрямляється» і для «стану атмосфери» – кульки, більше немає стійкого становища в колишньому місці.

Будемо вважати, що катастрофа відбувається тоді, коли видимість L досягає якогось мінімального значення. Типологічно це виражається тим, що колишній, стійкий стан атмосфери стає нестійким, і атмосфера «звалюється» з нього в інший стійкий стан, але вже з нульовою видимістю (рис. 3). У цьому випадку при деякому іншому наборі керуючих параметрів крива видимості L (коричневий графік) має вже новий стійкий стан рівноваги, наприклад, із нульовою видимістю. Така ситуація називається закритичною областю катастрофи.

Таким чином, можна зробити висновок, що катастрофа означає зміну кількості і якості станів рівноваги, в яких може знаходитись атмосфера. Той набір параметрів, при якому відбувається катастрофа, називається критичним. Коли атмосфера наближається до цього стану, ймовірність катастрофи зростає.

Розглянемо простий приклад. Нехай є тільки два керуючих параметри: $a1$ і $a2$. Для однієї координати y і двох керуючих параметрів у математичної теорії катастроф є тільки одна стандартна, канонічна залежність для запису залежності функції мети:

$$V(y) = 0.25 y^4 - 0.5 a1 y^2 - a2 y, \quad (5)$$

де $V(y)$ – потенційна функція, якої може відображати видимість L або концентрацію C стосовно аналізованого завдання.

Катастрофа, що має таку потенційну функцію, називається катастрофою типу «збірки». Збірка має в докритичній області один стійкий стан рівноваги (одну ямку потенційної функції), а в закритичній області – два стійких і один нестійкий стан рівноваги (тобто дві ямки, розділені пагорбом).

Докритична і закритична області задаються набором параметрів:

$$\begin{cases} a1 < 0, -\infty > a2 > \infty \\ a1 > 0, |a2| > \frac{2a1}{3} \sqrt{\frac{a1}{3}} \end{cases} \text{ – докритична область}$$

$$a1 > 0, |a2| < \frac{2a1}{3} \sqrt{\frac{a1}{3}} \text{ – закритична область}$$

Рівняння (5) задає статичну модель стану атмосфери. Визначимо екологічний зміст керуючих параметрів. Нехай параметр $a1$ задає наявність і рівень температурної інверсії в атмосфері, яка вважається основною причиною розвитку фотохімічного смогу, а параметр $a2 = p - q$, де p – відображає рівень сонячної радіації, що сприяє протіканню атмосферних хімічних реакцій, q – рівень швидкості вітру, що знижує концентрацію атмосферних забруднень. Усі величини можна вважати віднесеними на одиницю об'єму повітря.

Для отримання динамічної моделі або моделі еволюції будемо вважати атмосферу мегаполісу градієнтною системою. Це означає, що потенційна функція $V(y)$ прагне до екстремуму: мінімуму смогової забрудненості або максимуму видимості (залежно від того, що вибрано за потенційну функцію). Будемо вважати, що $V(y)$ є функцією смогової забрудненості, тоді еволюція відбуватиметься в бік антиградієнта потенційної функції, бо градієнт смогової забрудненості спрямований у бік найшвидшого зростання потенційної функції:

$$\text{grad } V(y) = \frac{\partial V}{\partial y} = y^3 - a1y - a2, \quad (6)$$

Далі, в першому наближенні, будемо вважати, що швидкість зменшення смогової забрудненості в міру зростання первинних забруднень пропорційна швидкості росту їх викиду в часі. Тоді можна записати, що:

$$K \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial y} = -y^3 + a1y + a2, \quad (7)$$

де K – коефіцієнт пропорційності; dy/dt – швидкість зміни викиду первинних забруднень у часі.

У механіці таке рівняння характерно для руху в середовищі в'язкого тертя. У цьому випадку процес переходу з одного стану рівноваги до іншого виходить плавним, схожим на S -подібну криву розвитку.

На рис. 4 наведено результати вирішення диференціального рівняння (7), тобто моделювання еволюції атмосфери мегаполіса у двох ситуаціях. Графіки для відповідних ситуацій позначені номерами 1 і 2. Для обох ситуацій параметр $a1 = 3 = \text{const}$, тобто тем-

пературна інверсія атмосферних шарів має місце і постійна протягом усього спостережуваного періоду.

Рис. 4. Моделювання еволюції атмосфери мегаполіса в двох ситуаціях

Коефіцієнт $K = 10$, він визначає масштаб часу і узгоджує розмірності змінних. Параметр $a_2 = p - q = 3 = \text{const}$, тобто природні фактори сприяють утворенню фотохімічного смогу, наприклад, рівень сонячної радіації – p і чинники, що ослаблюють цей процес, наприклад, швидкість вітру – q , знаходяться в динамічній рівновазі, становлячи постійну різницю.

Видимість L обчислюється за формулою потенційної функції (5), взятої з негативним знаком, бо видимість L протилежна приземній концентрації C .

У першій ситуації, як впливає з графіків, загальний рівень забруднень y зростає приблизно за S -подібною кривою. Аналогічно зростає і видимість L , досягаючи максимуму, що приблизно дорівнює 9 одиницям.

У другій ситуації керуючий параметр, атмосферні умови, що сприяють розвитку фотохімічного смогу, рівномірно зменшується за законом $a_2 = p - wt$, що еквівалентно, наприклад, постійній дії сонячної радіації, з початковою інтенсивністю $p = 3$, яка

поступово знижується зі швидкістю w , за відсутності значимої для процесу швидкості вітру, $q = 0$.

Як видно з графіка, до точки t видимість L , незважаючи на поступове зниження дії чинників, що стимулюють розвиток смогу, все одно зростає, щоправда, не такими темпами, як у першому випадку. Потім видимість L починає знижуватися, і в точці k стає критично низькою, в нашому випадку, для простоти моделі – нульовою, тобто в атмосфері розвиваються катастрофічні процеси смогоутворення.

Головні висновки. Проведено моделювання еволюції атмосфери за допомогою МТК щодо розвитку фотохімічного смогу та інших фізико-хімічних процесів в атмосфері від техногенного навантаження. Наведено результати моделювання еволюції атмосфери мегаполіса у двох ситуаціях. Виявлено, що загальний рівень забруднень y зростає приблизно за S -подібною кривою, атмосферні умови, що сприяють розвитку фотохімічного смогу, поступово знижується зі швидкістю w , за відсутності значимої для процесу швидкості вітру, $q = 0$.

Очевидно, маючи таку досить просту модель еволюції атмосфери щодо розвитку фотохімічного смогу та інших фізико-хімічних процесів в атмосфері, можна якісно оцінити можливості переходу з однієї S -подібною кривою на іншу, пов'язану зі збільшенням з якихось причин загального забруднення повітря, причому можна варіювати рівень факторів, пов'язаних зі природою атмосфери, що склалася в мегаполісі, наприклад, температурною інверсією повітряних шарів, вологістю, швидкістю вітру тощо.

Перспективи використання результатів дослідження. Отримані результати є певним внеском у вивчення як теоретичних, так і практичних аспектів використання математичної теорії катастроф у промисловій екології. Наведена якісна модель дає змогу точніше поставити завдання управління загальним рівнем забруднень, аби не допустити катастрофічного розвитку подій і визначити основні функціональні зв'язки системи управління і моніторингу.

Література

1. Thom, R. Catastrophe theory: Its present state and future perspectives. Dynamical systems. Warwick. 1974. Berlin – Heidelberg – New York Springer Verlag. 372 p.
2. Постон Т. Теория катастроф и ее приложения / Т. Постон, И. Стюарт; Пер. с англ. А.В. Чернавского. Москва : Мир, 1980. 607 с.
3. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Москва : Мир, 1984. Т. 2. 285 с.
4. Арнольд В.И. Теория катастроф. Москва : Наука, 1990. 128 с.
5. Научно-технический словарь. URL: https://gufo.me/dict/scientific/ТЕОРИЯ_КАТАСТРОФ (дата звернення: 15.02.2020).
6. Маневич Л.И. О теории катастроф. Соровский образовательный журнал. 2000. № 7. С. 85–90
7. Экология: Учебник. Изд. 2-е перераб. и доп. / В.Н. Большаков, В.В. Качак, В.Г. Коберниченко и др.; Под ред. Г.В. Тягунова, Ю.Г. Ярошенко. Москва : Логос, 2005. 504 с.