ПРО АЛГОРИТМ НАСТРОЙКИ АДАПТАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ

ON ALGORITHM OF ADAPTATION MODEL TUNING

УДК 369.04:519.863

<https://doi.org/10.32843/infrastruct45-43>**Юрченко М.Є.**

к.ф.-м.н., доцент,
доцент кафедри бухгалтерського обліку,
оподаткування та аудиту
Національний університет
«Чернігівська політехніка»

Клименко Т.В.

к.е.н., доцент,
доцент кафедри бухгалтерського обліку,
оподаткування та аудиту
Національний університет
«Чернігівська політехніка»

Iurchenko Maryna

Chernihiv Polytechnic National University

Klymenko Tetiana

Chernihiv Polytechnic National University

Математичне моделювання реальних процесів, до яких належить, наприклад, завдання організаційно-економічного управління, планування стратегії капітальних вкладень, часто потребує розв'язування задач оптимізації. Під час побудови зазначених методів беруть до уваги, по-перше, критерій точності результату, а також граничні умови, завдяки яким досягається висока швидкість ітераційного процесу. У практичних задачах іноді дуже важко та трудомістко знайти чисельний розв'язок задач безумовної мінімізації функції багатьох змінних, тому що з ростом числа змінних зростає кількість ітерацій. Тому проблема адаптивного налаштування моделі та пошуку певних методик налаштування її параметрів стосовно питання її коректності досі залишається актуальною. У роботі наведено алгоритм, у якому швидкість сходження до мінімуму не залежить від орієнтації системи координат за умови, що стан системи в деякий момент часу залежить тільки від значень параметрів системи в момент t . Отримані оцінки збіжності є оцінками для більш вузького класу задач і дають точний розв'язок за нескінченне і лише в окремих випадках за скінченне число кроків.

Ключові слова: методи оптимізації, економічне управління, планування, градієнтний метод.

Математическое моделирование реальных процессов, к которым можно отне-

сти, например, задачи организационно-экономического управления, планирования стратегии капитальных вложений, часто требуют решения задач оптимизации. При построении указанных методов принимают во внимание, во-первых, критерий точности результата, а также граничные условия, благодаря которым достигается высокая скорость итерационного процесса. В практических задачах иногда достаточно трудно найти численное решение задач безусловной минимизации функции многих переменных. Это обусловлено тем, что с ростом числа переменных растет и количество итераций. Поэтому проблема адаптивной настройки модели и поиск определенных настроек ее параметров с точки зрения корректности остается актуальной. В работе представлен алгоритм, при котором скорость приближения к минимуму не зависит от ориентации системы координат. При этом состояние системы в некоторый момент времени зависит только от значений параметров системы в момент времени t . Полученные оценки сходимости являются оценками для более узкого класса задач и дают точное решение только в некоторых частных случаях при конечном количестве шагов итерации.

Ключевые слова: методы оптимизации, экономическое управление, планирование, градиентный метод.

Economic problems of the optimization type include problems in which it is required to find the best or optimal solution for given production conditions. A feature of this class of tasks is the multivariance of their solutions, which is due to a number of reasons, which include the interchangeability of resources, finished products, the existence of alternative technologies. Mathematical modeling of real processes, which include, for example, the tasks of organizational and economic management, planning of capital investment strategy, often requires the solution of optimization problems. When constructing these methods, first of all, the criterion of the accuracy of the result is taken into account, as well as the boundary conditions due to which a high speed of the iterative process is achieved. In practical problems, it is sometimes very difficult and time-consuming to find a numerical solution to the problem of unconditional minimization of the function of many variables, because the number of iterations increases with the number of variables. Therefore, the problem of adaptive adjustment of the model and the search for certain methods of adjusting its parameters in relation to the question of its correctness still remains relevant. The paper presents an algorithm in which the rate of ascent to a minimum does not depend on the orientation of the coordinate system, provided that the state of the system at some point in time depends only on the values of the system parameters at time t . When constructing the model, it is assumed that the identification of the object is achieved by approximating the main components of its process. The working algorithm of the block of adjustment of parameters working by a method of the fastest descent which allows to minimize the target function is presented. To identify the error tended to zero, it is assumed that the differential equations describing the behavior of the model are equivalent to the differential equation describing the process of a real object. The obtained convergence estimates are estimates for a narrower class of problems and give an exact solution for an infinite and only in some cases for a finite number of steps. The presented algorithm allows, in contrast to the classical gradient procedures, to maintain convergence for small-sized systems and can be applied in solving practical economic problems. The constructed model describes the relationship of intrasystem variables and reflects the degree of influence of these variables on the characteristic criterion.

Key words: optimization methods, economic management, planning, gradient method.

Постановка проблеми. Методи оптимізації знаходять широке застосування в різних сферах науки і техніки, у вирішенні завдань організаційно-економічного управління, плануванні стратегії капітальних вкладень. Під час постановки завдання оптимізації необхідно здійснювати вибір критерію, на основі якого можна оцінити найкращий проект або найкращі умови функціонування будь-якої системи. Критерії оптимізації можуть ґрунтуватися на певних економічних факторах, коли потрібно максимізувати прибуток, мінімізувати витрати або витрати в одиницю часу тощо.

У будь-якому разі математично потрібно знайти максимальне або мінімальне значення деякої функції або функціоналу, що являють собою математичну модель вимоги якості. У результаті такої перевірки спочатку відкидають рішення, які не визначають екстремальні значення критерію оптимальності, а потім серед залишених екстремальних рішень вибирають рішення, яке задовольняє умовам оптимальності. Додаткові труднощі під час вирішення задач оптимізації виникають внаслідок того, що система рівнянь, яка отримується в результаті, забезпечує лише необхідні умови

оптимальності. Тому всі рішення цієї системи (а їх може бути і декілька) повинні бути перевірені на достатність, що пов'язано з певними труднощами обчислювального характеру.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Питання необхідності пошуку нових шляхів удосконалення наявних оптимізаційних методів в останній час отримали певне освітлення в літературі. Зазначені методи є предметом дослідження багатьох вітчизняних та зарубіжних учених. Певні дослідження цього питання знайшли своє відображення у наукових роботах Б. Поляка [1], значний внесок у теорію оптимізаційних задач також зроблено у працях [2; 3]. Слід відзначити, що особливо великий інтерес до градієнтних методів в останні роки пов'язаний з тим, що градієнтні спуски і їх стохастичні (рандомізовані варіанти) лежать в основі майже всіх сучасних алгоритмів навчання, що розробляються в аналізі даних [4; 5].

Незважаючи на значну кількість публікацій із цієї проблематики, задачі такого роду ще недостатньо наведені в літературі. Одним із найважливіших питань залишається питання коректної постановки оптимізаційної задачі. Зауважимо, що від цього значною мірою залежить якість і достовірність одержуваних результатів, а також швидкість їх отримання.

Виділення невирішених частин загальної проблеми. Для вирішення задач оптимізації є безліч математичних методів, зокрема градієнтний. Він дає змогу за збільшення обсягу обчислень досягти екстремуму функції з наперед заданою точністю. Градієнтні методи дають лише певне наближення до екстремуму, причому за збільшення обсягу обчислень можна досягти результату з наперед заданою точністю, але в цьому разі є можливість знаходити лише локальні екстремуми цільової функції. У цій роботі пропонується підхід, який дає змогу збільшити швидкість налаштування параметрів оптимізації та відрізняється від підходу, запропонованого в роботах [3; 5].

Постановка завдання. Метою цієї статті є знаходження досить простого для обчислення кроку градієнтної ітерації та одночасного визначення власного вектору і набору власних значень задачі.

Виклад основного матеріалу дослідження.

У процесі ідентифікації об'єкта оптимальна настройка моделі здійснюється за методом найшвидшого спуску. Сутність цього методу полягає в тому, що швидкість зміни цільової функції досягає максимального значення тільки в тому разі, коли вибрана траєкторія у просторі параметрів стосується вектору градієнта в цьому просторі. Головною особливістю методу є те, що кожний новий напрям пошуку є ортогональним попередньому, а швидкість збіжності до мінімуму не залежить від орієнтації системи координат.

Розглянемо фізичну систему, припускаючи, що її стан у певний момент часу t повністю описується функціями $X_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Припускаємо, що швидкість зміни цих функцій за будь-якого t залежить тільки від значень параметрів системи в той же момент часу. Покажемо, яким саме чином можна змінювати параметри, щоб мінімізувати цільову функцію.

$$R = R(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Швидкість зміни наданої функції надамо у такому вигляді:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial R}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial R}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \quad (1)$$

У векторній формі вираз (1) можна представити у вигляді скалярного добутку

$$\frac{dR}{dt} = \langle \text{grad} R, \frac{dS}{dt} \rangle \quad (2)$$

де

$$\text{grad} R = \left[\frac{\partial R}{\partial x_1}, \frac{\partial R}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial R}{\partial x_n} \right], \frac{dS}{dt} = \left[\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right]$$

Оскільки вектор градієнта у напрямку збігається з напрямком найшвидшого зростання цільової функції, то для того, щоб вектор швидкості dS/dt і вектор градієнта $\text{grad} R$ були паралельні, їхні складники повинні відповідати таким співвідношенням:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dR}{dx_i}, i, j = 1, 2, 3, \dots, n, i \neq j \quad (3)$$

Для отримання алгоритму на кінцевому інтервалі надамо вираз (3) у такому вигляді:

$$\frac{dx_i}{dt} = -k \frac{\partial R}{\partial x_i}, \quad (4)$$

де k – загальний коефіцієнт пропорційності, який визначає швидкість спуску. Знак мінус вказує на той факт, що це є задача мінімізації $dR/dt < 0$. Припускаємо, що ідентифікація об'єкта досягається за рахунок апроксимації основних складників його процесу.

Оскільки ідентифікація процесу здійснюється за допомогою настроюваної моделі, то в контурі апроксимації повинен функціонувати блок настройки параметрів. Головне завдання полягає в мінімізації цільової функції декількох змінних на кінцевому інтервалі налаштування моделі. Розглянемо робочий алгоритм блоку налаштування параметрів, який працює за методом найшвидшого спуску.

Розглянемо реальний об'єкт, поведінка якого описується за допомогою векторного диференційного рівняння

$$\frac{dy_0}{dt} = Ay_0 + Du \quad (5)$$

$$y_0 = [y_{01} : y_{0n}], A = [A_{11} \dots A_{1n} \dots A_{n1} \dots A_{nn}], \\ D = [D_{11} \dots D_{1m} \dots D_{n1} \dots D_{nm}], u = [u_1 : u_m]$$

де $y_{0k} (k=1,2,\dots,n)$ – змінні, які визначають фазовий стан об'єкта, $u_r (r=1,2,\dots,m)$ – дії на вході об'єкта. Елементи A_{ik} і D_{ir} матриць A і D відповідно є постійними. Рівняння (5) еквівалентно системі скалярних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_{0i}}{dt} = \sum_{k=1}^n A_{ik} y_{0k} + \sum_{r=1}^m D_{ir} u_r \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (6)$$

Поведінку моделі, що настраюється, опишемо векторним диференціальним рівнянням такого вигляду:

$$\frac{dy_M}{dt} = B y_M + C u \quad (7)$$

$$y_M = [y_{M1} : y_{Mn}], B = [B_{11} \dots B_{1n} \dots B_{n1} \dots B_{nn}],$$

$$C = [C_{11} \dots C_{1m} \dots C_{n1} \dots C_{nm}], u = [u_1 : u_m]$$

де $y_{Mk} (k=1,2,\dots,n)$ – змінні, які визначають фазовий стан процесу моделі, $u_r (r=1,2,\dots,m)$ – управляючі дії, які прикладені на вході моделі.

Рівняння (7) еквівалентно системі скалярних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy_{Mi}}{dt} = \sum_{k=1}^n B_{ik} y_{Mk} + \sum_{r=1}^m C_{ir} u_r \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (8)$$

На відміну від (6) система рівнянь (8) містить змінні елементи C_{ir} та B_{ik} матриць B і C відповідно. Представимо елементи B_{ik} матриці B у вигляді такої суми: $A_{ik} + B_{ik}$. Сума матриць A і B визначається співвідношеннями $A+B$, тоді $A_{ik} + B_{ik} = A+B$, де B – нова дійсна матриця, елементи $B_{ik} (i,k=1,2,\dots,n)$ якої є деякі функції часу. Значення цих функцій вказують на той факт, що параметри моделі мають певні відхилення від відповідних параметрів об'єкта. Ідентифікація процесу здійснюється за однакових керуючих взаємодій u_r та еквівалентних початкових умов об'єкта $y_{0i}(0) = C_i$ та моделі $y_{Mi}(0) = C_i$, де $C_i = f_i(C_1, C_2, \dots, C_n)$.

За вказаних умов поведінка моделі на інтервалі налаштування описується функціями $y_{Mi}(t) (i=1,2,\dots,n)$ для всіх невід'ємних елементів B_{ik}

$$B_{ik} = A_{ik} + B_{ik}, A_{ik} \gg B_{ik} \quad (9)$$

Для того, щоб помилка ідентифікації $\varepsilon(t)$ прямувала до нуля, необхідно, щоб диференціальне рівняння, яке описує поведінку моделі, було еквівалентним диференціальному рівнянню, яке характеризує процес реального об'єкта.

Після підстановки (9) в (8), маємо

$$\frac{dy_{Mi}}{dt} = \sum_{k=1}^n A_{ik} y_{Mk} + \sum_{k=1}^n B_{ik} y_{Mk} + \sum_{r=1}^m C_{ir} u_r \quad (10)$$

де сума

$$\sum_{k=1}^n B_{ik} y_{Mk}$$

розглядається як функція додаткового обумовлення моделі. Система (6) із початковими умовами $y_{0i}(0) = C_i (i=1,2,\dots,n)$ має загальний розв'язок:

$$y_{0i}(t) = y_{0i}(t) + y_{1i}(t), \quad (11)$$

де $y_{0i}(t)$ – загальний розв'язок системи однакових рівнянь, $y_{1i}(t)$ – часткові рішення системи (6), які залежать від правих частин вигляду

$$\sum_{r=1}^m D_{ir} u_r$$

Система (10) за початкових умов $y_{Mi}(0) = C_i (i=1,2,\dots,n)$ має розв'язок

$$y_{Mi}(t) = y_{Mi}(t) + y_{1i}(t) + y_{2i}(t), \quad (12)$$

де $y_{Mi}(t)$ – загальний розв'язок системи однакових рівнянь, $y_{1i}(t)$ – часткові розв'язки системи (10), які залежать від правих частин вигляду

$$\sum_{r=1}^m C_{ir} u_r$$

$y_{2i}(t)$ – часткові рішення системи (10), які залежать від правих частин вигляду

$$\sum_{k=1}^n B_{ik} y_{Mk}$$

Із теорії диференціальних рівнянь відомо, що процеси, які визначаються зі співвідношення $y_{0i}(t)$ та $y_{Mi}(t)$, характеризують вільні коливання, у свою чергу складники $y_{1i}(t), y_{1i}(t), y_{2i}(t)$ – вимушені коливання. З урахуванням фізичного існування моделі припускаємо, що за однакових управляючих дій u_r і еквівалентних початкових умов об'єкта та моделі складники загальних розв'язків $y_{0i}(t)$ і $y_{Mi}(t)$ будуть тотожно рівними один одному. Своєю чергою складники часткових рішень $y_{1i}(t), y_{1i}(t)$ пов'язані між собою співвідношенням

$$y_{1i}(t) = \frac{\sum_{r=1}^m D_{ir}}{\sum_{r=1}^m C_{ir}} y_{1i}(t) \quad (13)$$

У процесі апроксимації співвідношення (13) повинно бути постійним. Це означає, що в процесі ідентифікації коефіцієнт посилення моделі повинен підтримуватися рівним коефіцієнту посилення об'єкта.

Останнє обмеження дає змогу записати нове співвідношення

$$\frac{\sum_{r=1}^m C_{ir}}{\sum_{k=1}^n (A_{ik} + B_{ik}^*)} = \frac{\sum_{r=1}^m D_{ir}}{\sum_{k=1}^n A_{ik}} \quad (14)$$

або

$$\frac{\sum_{r=1}^m D_{ir}}{\sum_{r=1}^m C_{ir}} = \frac{\sum_{k=1}^n A_{ik}}{\sum_{k=1}^n (A_{ik} + B_{ik}^*)}$$

Підставляючи вираз (14) в співвідношення (13), отримуємо

$$y_{1i}(t) = \frac{\sum_{k=1}^n A_{ik}}{\sum_{k=1}^n (A_{ik} + B_{ik}^*)} y_{1i}(t) \quad (15)$$

З використанням виразів (11), (12) та (15) знаходимо помилку ідентифікатора процесу.

$$\varepsilon_i(t) = y_{Mi}(t) - y_{Oi}(t) = y_{2i}(t) + y_{Mi}(t) - y_{Oi}(t) + \frac{\sum_{k=1}^n B_{ik}}{\sum_{k=1}^n (A_{ik} + B_{ik})} y_{1i}(t),$$

беручи до уваги, що $B_{ik} \ll A_{ik}$, $y_{Mi}(t) - y_{Oi}(t) = 0$. Ця рівність дає змогу надати помилку ідентифікації у вигляді часткового розв'язку такого рівняння:

$$\varepsilon_i(t) = y_{2i}(t) \quad (16)$$

Оскільки помилка ідентифікації $\varepsilon_i(t)$ визначається частковим розв'язком рівняння вигляду

$$\frac{dy_{Mi}}{dy} = \sum_{i=1}^n A_{ik} y_{Mk} + \sum_{k=1}^n B_{ik} y_{Mk}, \quad (17)$$

для досягнення оптимальної апроксимації основних складників процесу необхідне виконання умови:

$$\sum_{i=1}^n A_{ik} y_{Mk} + \sum_{k=1}^n B_{ik} y_{Mk} = 0.$$

Нехай

$$r = \sum_{i=1}^n [S_i \varepsilon_i(t)]^2; S_i = \sum_{k=1}^n B_{ik} \quad (18)$$

функція відстані, яка дорівнює нулю на кінцевому інтервалі настройки системи. У цьому разі помилка $\varepsilon_i(t)$ дорівнює нулю у разі, коли варіаційні параметри моделі досягають необхідних значень. Вираз (19) описує залежність функції відстані від помилки ідентифікації. Оскільки оптимальна задача оптимізації настройки має на увазі максимальне зменшення функції відстані, маємо:

$$\frac{dS_i}{dt} = -k \frac{\partial r}{\partial S_i} \quad (19)$$

Диференціюючи вираз (18) за незалежними змінними S_i , отримуємо

$$\frac{dS_i}{dt} = 2\varepsilon_i^2(t) S_i \quad (20)$$

Підставляючи вираз (2) в рівняння (19), маємо

$$\frac{dS_i}{dt} = -2k\varepsilon_i^2(t) S_i \quad (21)$$

Отримана нами залежність дає змогу вибирати швидкість налаштування параметрів, виходячи з умови максимального зменшення функції відстані та умови неперервності траєкторії. Виходячи з систем (21) та (9), надамо алгоритм налаштування параметрів у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dS_i}{dt} &= -2k(S_i^* - S_i^{**})\varepsilon_i^2(t), \\ S_i^* &= \sum_{k=1}^n B_{ik}, S_i^{**} = \sum_{k=1}^n A_{ik} \end{aligned} \quad (22)$$

Висновки з проведеного дослідження. Таким чином, отримали вираз, який являє собою робочий алгоритм налаштування параметрів моделі. З наведеного алгоритму випливає, що швидкість налаштування параметрів моделі залежить як від початкових значень самих параметрів, так і від помилки ідентифікації $\varepsilon_i(t)$.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию / Б.Т. Поляк. Москва: Наука, 1983. 384 с.
2. Зорич В.А. Математический анализ задач естествознания / В.А. Зорич. Москва: МЦНМО, 2017. 160 с.
3. Гасников А.В. Поиск стохастических равновесий в транспортных сетях с помощью универсального прямо-двойственного градиентного метода / А.В. Гасников, М.Б. Кубентаева // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. № 10. С. 335–345.
4. Shalev-Shwartz S. Understanding Machine Learning: From theory to algorithms / S. Shalev-Shwartz, S. Ben-David. Cambridge University Press, 2014. 342 p.
5. Newton D. Stochastic gradient descent: Recent trends / D. Newton // Recent Advances in Optimization and Modeling of Contemporary Problems. 2018. № 3. P. 193–220.

REFERENCES:

1. Polyak B.T. (1983), Vvedeniye v optimizatsiyu [Introduction to optimization], Nauka, Moscow, Russia.
2. Zoritch V.A. (2017), Matematitseskiy analiz dlya estestvoznaniya [Mathematical analysis of problems in natural science], MCNMO, Moscow, Russia.
3. Gasnikov A.V. (2018), "Search for stochastic equilibria in transport networks using the universal direct-dual gradient method", *Computer research and modeling*, vol. 10, pp. 335-345.
4. Shalev-Shwartz S. (2014), Understanding Machine Learning: From theory to algorithms, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
5. Newton D. (2018) "Stochastic gradient descent: Recent trends", *Recent Advances in Optimization and Modeling of Contemporary Problems*, Cambridge University, Cambridge, pp. 193–220.