ІСТОРИЧНИЙ ПІДХІД У ФОРМУВАННІ КЛЮЧОВИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

HISTORICAL APPROACH TO THE FORMATION OF KEY COMPETENCES IN TEACHING MATHEMATICS

У статті проаналізовано впровадження компетентнісного підходу до навчання математики майбутніх учителів. Ставиться завдання формування не тільки математичної компетентності, зазначеної в Законі України «Про освіту», але й інших виділених ключових компетентностей.

Одним із засобів здійснення компетентнісного підходу вважається систематичне використання історичного матеріалу. Ця ідея обґрунтовується дослідженнями видатних вчених М.В. Остроградського, О.М. Боголюбова, Й.З. Штокало, математиків-методистів О.М. Астряба, Г.П. Бевза, а також сучасних науковців Н.О. Вірченко, В.Г. Бевз та дослідників-викладачів.

Розглядається важливий навчальний ресурс – розв'язування історичних задач із математики. Це задачі, які збережені історією і розв'язувалися математиками різних періодів історії розвитку цієї науки. Їх розв'язання знайомить учнів із методами і результатами досліджень учених різних часів і сприяє розвитку критичного мислення та подальшим дослідженням.

Застосування історичного підходу розглядається на прикладі вивчення числових послідовностей. Досліджуються послідовності чисел Фібоначчі та Нарайани, а також задачі про кролів та теличок, що приводять до цих послідовностей. Задачі про пінгвінів та дельфінів започатковують розгляд нових узагальнених послідовностей. Розв'язані задачі з природничим змістом дають змогу зробити внесок у формування ключової компетентності в галузі природничих наук.

Досліджуються властивості побудованих математичних моделей. У результаті пропонується їх узагальнення, виявляється зв'язок з іншими математичними теоріями, зокрема золотим перерізом та його узагальненням. Пропонуються нові ідеї дослідження, а саме використання чисел типу Фібоначчі для кодування інформації. Тобто розвивається ключова компетентність, пов'язана з формуванням ініціативності, та уміння генерувати нові ідеї.

Ключові слова: компетентнісний підхід, навчання математики, історія матема-

тики, математична модель, історичні задачі.

The paper analyzes a competence approach implementation for training future teachers of mathematics. The work aims to formulate the mathematical key competence (according to Ukrainian Law on Education), as well as the other selected key competences.

It is considered that systematic use of historical material is a means for competence approach realization. Theoretical justification of the mentioned idea was given by M.V. Ostrogradskyi, O.M. Boholiubov, Y.Z. Shtokalo, O.M. Astriab, H.P. Bevz, N.O. Virchenko, V.H. Bevz et al.

Solving mathematical problems is seen as an important part of learning mathematics. These problems have been solved by mathematicians of previous periods in the history of mathematics. Solving these problems provides students with knowledge of solving methods and results, which were used by scientists at different times. It also contributes to the development of students' critical thinking and future scientific research.

As an example of using the historical approach, the work considers learning number sequences. The author investigates Fibonacci and Narayana sequences, along with rabbits problem and cows problem, leading to these sequences. Penguins problem and dolphins problem started researching new generalized sequences. Solving mathematical problems in the natural sciences contributes to forming key competences in natural sciences.

The paper investigates the attributes of created mathematical models, and, as a result, suggests their generalization, reveals the connections with other mathematical theories, including the golden ratio and its generalizations. Besides, the author presents new applications of these models, namely using Fibonacci numbers for data encoding. This idea would contribute to the development of key competencies related to students' initiative and their ability to generate new ideas.

Key words: competence approach, teaching mathematics, history of mathematics, mathematical model, historical problems.

УДК 511:378.147
DOI <https://doi.org/10.32843/2663-6085/2019.21.3-3>

Сверчевська І.А.,
канд. пед. наук,
доцент кафедри математичного аналізу
Житомирського державного
університету імені Івана Франка

Постановка проблеми в загальному вигляді.

В основу організації процесу навчання математики в Україні покладено компетентнісний підхід. У Законі України «Про освіту» виділяється десять ключових компетентностей: інформаційно-цифрова компетентність; вільне володіння державною мовою; спілкування іноземними мовами; основні компетентності у природничих науках і технологіях; математична компетентність; ініціативність і підприємливість; уміння вчитися впродовж життя; культурна компетентність; екологічна грамотність, інноваційність [5].

У процесі навчання математики провідна увага приділяється математичній компетентності, яка

передбачає вміння встановлювати відношення між реальними об'єктами (природними, культурними, технічними), розв'язувати задачі, будувати і досліджувати математичні моделі реальних процесів, оцінювати результати, використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях. Проте навчання математики має зробити внесок у формування всіх ключових компетентностей. Поряд з іншими засобами ми досліджуємо можливість історії математики у формуванні математичної компетентності під час навчання деяких розділів алгебри і теорії чисел: комплексні числа, розв'язування нелінійних систем рівнянь, різні

розділи теорії чисел. Виокремлюємо такий навчальний ресурс, як визначні математичні задачі.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Теоретичний аспект впровадження компетентнісного підходу досліджують такі науковці: О.В. Овчарук (перспективи впровадження компетентнісного підходу в освіті), О.І. Пометун (досвід зарубіжний країн у реалізації компетентнісного підходу в освіті), Я.С.Бродський, О.Л. Павлов (сутність компетентнісного підходу в загальній освіті), Н.А. Тарасенкова (теоретичний аспект компетентнісного підходу в навчанні математики), Л.В. Сєрих (реалізація компетентнісного підходу в педагогічному процесі).

Шляхи реалізації компетентнісного підходу розглядають: Н.П. Нелін, О.Є. Долгова (роль підручників у навчанні математики як засіб набуття предметних і ключових компетентностей), З.І. Кравченко (формування ключової математичної компетентності шляхом використання компетентнісно-орієнтованих задач), М.І. Бурда (компетентнісний підхід до змісту підручників із математики), В.Г. Бевз (набуття ключових компетентностей шляхом розв'язування практичних задач), В.А. Войтович (структуро-функціональна модель формування математичної компетентності майбутнього вчителя), О.С. Чашечникова (компетентнісний підхід до вивчення методики навчання математики).

Важливим засобом формування ключових компетентностей є історичний підхід. Ідея використання елементів історії математики в навчанні була висунута ще видатними вченими. М.В. Остроградський був відомим математиком, талановитим педагогом і методистом. У книзі «Міркування про викладання» він стверджує: «Біографії людей, корисних для науки і мистецтва, є одним із методів, який ми вживаємо для привернення уваги учнів» [6, с. 173].

Відомий математик, академік АН УРСР О.М. Боголюбов у роботах з історії математики звертає увагу на залучення елементів історії математики до навчання студентів та учнів. Це відкриває шлях до відкриттів, удосконалення методів математичної освіти [2, с. 9].

Математик, історик науки академік АН УРСР Й.З. Штокало звертав увагу на важливість використання розробленої ним математичної термінології, що актуально у процесі реалізації компетентнісного підходу щодо ключової компетентності – вільного володіння державною мовою.

Використанню елементів історизму у викладанні приділяли значну увагу математики-методисти. У роботах О.М. Астряба розробляється проблема ознайомлення учнів з історією математики, а саме: виховання інтересу до різних фактів з історії математики і зокрема до ролі вітчизняних математиків.

Г.П. Бевз наголошує, що використання елементів історії робить математику більш цікавою і зрозумілою. Досліджуючи історію розвитку математичної освіти в Україні, Г.П. Бевз доходить висновку, що математика і навчання математики, їх історія – важливі складники загальнолюдської культури.

Різні форми і методи використання історичного матеріалу пропонують науковці ЗВО та дослідники-викладачі. Академік Н.О. Вірченко стверджує, що історія математики підказує методичні шляхи кращого викладу теоретичного матеріалу на лекціях, допомагає студентам зрозуміти і запам'ятати означення, формули, підвищує інтерес і викликає творче ставлення до змісту курсу [3, с. 273].

Професор В.Г. Бевз досліджує роль історії математики у фаховій підготовці майбутніх учителів. Для цього пропонує систему відображення історичного матеріалу в курсі елементарної математики, курсах вищої математики і методики навчання математики [1, с. 69].

Корисними в практичній діяльності є рекомендації дослідників-викладачів: А.О. Розуменко (проведення оглядових лекцій із математичних дисциплін, які містять історичний аналіз виникнення і розвитку математичних понять, розв'язування історичних задач), Т.Л. Годованюк (ознайомлення учнів з історією визначних чисел), Т.М. Махомета (еволюція розвитку означень понять ліній і поверхонь у курсі аналітичної геометрії в роботах визначних математиків минулого і сьогодення), Л.А. Ребенюк (роль історичних довідок у навчанні математики в сучасних умовах розвитку технологій освіти), С.М. Шумигай (використання елементів історії математики при переході від початкової до основної школи для формування пізнавального інтересу до вивчення математики), А.В. Олейнікова (історичні задачі у навчанні математики в основній школі).

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. У наукових дослідженнях впровадження компетентнісного підходу в навчанні математики головна увага звертається на вироблення ключової математичної компетентності, яка формується одночасно з предметними. Але навчання математики має сприяти формуванню й інших ключових компетентностей. Так, нами побудовано математичні моделі в музиці, що дає змогу усвідомити зв'язок математик та культури, тобто формує ключову культурну компетентність [7, с. 18]. У цій статті досліджується можливість поряд із математичною компетентністю зробити внесок у формування компетентності в галузі природничих наук. Побудовані математичні моделі аналізуються, узагальнюються, результати пов'язуються з іншими математичними теоріями та пропонуються нові задачі й ідеї. Тобто формується ініціативність, уміння генерувати нові ідеї.

Мета статті – дослідити можливості історії математики у формуванні деяких ключових компетентностей майбутніх учителів математики.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо задачу Леонардо Пізанського.

Леонардо Пізанський – італійський математик, відомий як Фібоначчі (син Боначчо), народився бл. 1180 р. у Пізі. Життя його маловідоме. Він першим познайомив європейських вчених з алгеброю і десятиковою позиційною системою числення. У 1202 р. Фібоначчі написав трактат «Книга абака», що містив арифметичні й алгебраїчні відомості, які він одержав, подорожуючи країнами Європи та Сходу. Книга містить також його власні розробки, зокрема задачу, що приводить до «ряду Фібоначчі».

Задача. Скільки пар кроликів протягом року народиться від однієї пари, якщо кожного місяця одна пара народжує одну пару, яка через місяць народжує нову пару?

Розв'язання Фібоначчі.

На другий місяць буде $1+1=2$ пари, на третій місяць $2+1=3$, на четвертий $3+2=5$, тому що з трьох пар народить тільки дві. На п'ятий місяць тільки три пари народять, тому $5+3=8$ і т. д. Тобто число пар кролів у $(n+1)$ -му місяці u_{n+1} дорівнює числу пар кролів у попередньому місяці u_n плюс число пар u_{n-1} , що народилися, тобто ті, які були позаминулого місяця (тому що тільки вони народжують). Маємо $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$, $n>1$, $u_1=1$, $u_2=2$. Отже, отримали послідовність: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

Відповідь: через рік буде 377 пар кролів.

Якщо вважати, що перша пара є новонародженою, тоді одержимо послідовність чисел: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ..., $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$, $n>1$, $u_1=u_2=1$. Числа, що утворюють цю послідовність, французький математик Едуард Люка (1842–1891) назвав числами Фібоначчі.

Числа Фібоначчі мають цікаві властивості.

1. Сума всіх n членів послідовності дорівнює члену послідовності, розташованому через один від останнього, зменшеному на одиницю: $u_1+u_2+\dots+u_n=u_{n+2}-1$.

Приклад. Знайти суму дванадцяти членів послідовності.

$S=1+1+2+3+\dots+144$; $144=u_{12}$; $S=u_{14}-1=377-1=376$; $S=376$.

2. Сума членів послідовності Фібоначчі з парними номерами дорівнює члену послідовності, який є наступним за останнім доданком, зменшеному на одиницю: $u_2+u_4+\dots+u_{2n}=u_{2n+1}-1$.

3. Сума членів послідовності з непарними номерами дорівнює члену послідовності, який є наступним за останнім доданком: $u_1+u_3+\dots+u_{2n-1}=u_{2n}$.

Ці властивості зручно використовувати під час обчислення сум членів послідовності.

4. Послідовність Фібоначчі пов'язана із золотим перерізом: границя відношення наступного члена послідовності до попереднього дорівнює числу золотого перерізу відрізка на дві нерівні частини. Це число є коренем рівняння $x^2=x+1$, $x=1,618\dots$

Розглянемо задачу Нарайани.

Нарайана – індійський математик XIV ст. Він розглядав обчислення сум числових рядів, магічні квадрати, узагальнив правило «дев'ятки» для перевірки обчислень на інші модулі. У середині XIV ст. Нарайана написав трактат «Біджаганіті», де розв'язав задачу про стадо корів і теличок.

Задача. Скільки буде корів і теличок, народжених від однієї корови за 20 років, якщо корова щорічно народжує одну теличку, а теличка народжує на початку 4-го року життя?

Розв'язання. На початку першого року була одна корова, яка народила теличку, тобто 2 голови. На початку другого року – 3 голови, третього – 4. На початку четвертого року народить корова і теличка першого року народження $u_4=u_3+u_1$, стане $4+2=6$ голів, на початку п'ятого $u_5=u_4+u_2$; $6+3=9$, оскільки народить корова і телички першого і другого року народження. Починаючи з четвертого року кількість голів визначається за правилом $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$, тому що потрібно до кількості голів минулого року додати тих, які народилися, тобто тих, які були три роки тому. Одержимо числову послідовність: 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, 189, 277, 406, 595, 872, 1278, 1873, 2745, ..., $u_{n+1}=u_n+u_{n-2}$, $n>2$. Обчислюючи послідовно її члени, знаходимо $u_{20}=2745$. Тобто на початку двадцятого року корів і теличок буде 2745 голів.

Якщо ж вважати, що першого року була одна теличка, що тільки народилася, то другого і третього року буде тільки одна теличка, а четвертого – поголів'я почне збільшуватися і прийдемо до числової послідовності: 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, ..., $u_{n+1}=u_n+u_{n-2}$, $n>2$, $u_1=u_2=u_3=1$. Числа цієї послідовності будемо називати числами Нарайани.

Проаналізуємо властивості одержаної математичної моделі питання про народження теличок. Тобто послідовності чисел Нарайани.

1. Сума n членів послідовності дорівнює члену послідовності, розташованому через два члени вперед від останнього, зменшеному на одиницю: $u_1+u_2+\dots+u_n=u_{n+3}-1$.

2. Сума членів послідовності з номерами, які діляться на 3, дорівнює члену послідовності, який є наступним за останнім доданком, зменшеному на одиницю: $u_3+u_6+u_9+\dots+u_{3n}=u_{3n+1}-1$.

3. Сума членів послідовності, номери яких під час ділення на 3 дають остачі один і два, дорівнює члену послідовності, який є наступним за останнім доданком: $u_1+u_4+u_7+\dots+u_{3n-2}=u_{3n-1}$ та $u_2+u_5+u_8+\dots+u_{3n-1}=u_{3n}$.

Ці властивості зручні для практичного обчислення суми членів послідовності.

4. Границя відношення наступного члена послідовності до попереднього є числом узагальненого золотого перерізу, яке є коренем рівняння $x^3=x^2+1$, $x=1,465...$

Розвиваючи ідею пошуку математичних моделей популяції в тваринному світі, ми звернули увагу на закономірності в народженні пінгвінів і дельфінів. Для цього розв'язали дві задачі.

Задача про пінгвінів. Нехай кожного року пінгвін-самка народжує самку, яка через чотири роки народжує самку. Скільки буде пінгвінів через десять років?

Розв'язання. Якщо першого року є одна самка-пінгвін, яка вже народжує, тоді до п'ятого року щороку кількості пінгвінів дорівнюють 1, 2, 3, 4. Починаючи з п'ятого року до кількості пінгвінів минулого року потрібно додати кількість тих пінгвінів, які народилися. А їх буде стільки, скільки було чотири роки тому. Маємо $u_{n+1}=u_n+u_{n-3}$, $n>3$. Одержимо рекурентну послідовність: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 19, 26, 36, 50, 69, 95, 131, 181, ..., $u_{n+1}=u_n+u_{n-3}$, $n>3$.

Через десять років буде 36 дельфінів.

Якщо першого року була новонароджена самка, то одержимо числову послідовність: 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 19, 26, 36, 50, 69, 95, 131, 181, ..., $u_{n+1}=u_n+u_{n-3}$, $n>3$, $u_1=u_2=u_3=u_4=1$.

Проаналізуємо властивості цієї моделі [4, с. 19].

1. Сума всіх членів послідовності дорівнює члену, розташованому через три вперед від останнього доданка, зменшеному на одиницю: $u_1+u_2+...+u_n=u_{n+4}-1$.

2. Сума членів послідовності з номерами, які діляться на 4, дорівнює члену, який наступний за останнім доданком, мінус одиниця: $u_4+u_8+u_{12}+...+u_{4n}=u_{4n+1}-1$.

Наприклад.

$$1+1+1+1+2+3+4+5+7+10+14+19=u_{16}-1=69-1=68.$$

3. Сума членів послідовності, номери яких у процесі ділення на чотири дають остачі 1, 2 та 3, дорівнює члену наступному за останнім доданком: $u_1+u_5+u_9+...+u_{4n-3}=u_{4n-2}$; $u_2+u_6+u_{10}+...+u_{4n-2}=u_{4n-1}$; $u_3+u_7+u_{11}+...+u_{4n-1}=u_{4n}$.

4. Границя відношення наступного члена послідовності до попереднього є числом узагальненого золотого перерізу, яке є коренем рівняння $x^4=x^3+1$, $x=1,380...$

Задача про дельфінів. Нехай кожного року самка-дельфін народжує дитинча, яке у віці 6 років народжує. Скільки буде дельфінів через 10 років?

Розв'язання. Якщо першого року є одна самка-дельфін, тоді до шостого року кількості дельфінів щороку дорівнюють: 1, 2, 3, 4, 5. Починаючи з шостого року до кількості тих, які були попереднього року, треба додати кількість тих, що народилися. А їх буде стільки, скільки було п'ять років тому, оскільки тільки вони народжують. Одержимо реку-

рентну послідовність: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 15, 20, 26, 34, 45, ..., $u_{n+1}=u_n+u_{n-4}$, $n>4$. Через десять років буде 26 дельфінів.

Якщо першого року був новонароджений дельфін, то маємо числову послідовність: 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 15, 20, 26, 34, 45, 60, 80, 100, 134, 179, 239, 319, ..., $u_{n+1}=u_n+u_{n-4}$, $n>4$, $u_1=u_2=u_3=u_4=1$.

Розглянемо властивості цієї моделі задачі.

1. Сума всіх n членів послідовності дорівнює члену, розташованому через чотири вперед після останнього доданка, зменшеному на одиницю: $u_1+u_2+u_3+...+u_n=u_{n+5}-1$.

Наприклад.

$$1+1+1+1+1+2+3+4+5+6+8+11+15+20+26+34=134-1=133.$$

2. Сума членів послідовності з номерами, які діляться на 5, дорівнює члену, наступному за останнім доданком, зменшеному на одиницю: $u_5+u_{10}+u_{15}+...+u_{5n}=u_{5n+1}-1$.

3. Сума членів послідовності, номери яких у процесі ділення на 5 дають остачі 1, 2, 3, 4, дорівнює члену послідовності, який наступний за останнім доданком: $u_1+u_6+u_{11}+...+u_{5n-4}=u_{5n-3}$; $u_2+u_7+u_{12}+...+u_{5n-3}=u_{5n-2}$; $u_3+u_8+u_{13}+...+u_{5n-2}=u_{5n-1}$; $u_4+u_9+u_{14}+...+u_{5n-1}=u_{5n}$.

4. Границя відношення наступного члена послідовності до попереднього є числом узагальненого золотого перерізу, яке є коренем рівняння $x^5=x^4+1$, $x=1,324...$

Дослідивши одержані послідовності, прийшли до ідеї розглянути рекурентні послідовності $u_{n+1}=u_n+u_{n-p}$. Це p -послідовності типу послідовності Фібоначчі. При $p=1$ і $p=2$ одержимо, відповідно, послідовності Фібоначчі та Нарайани. Як впливає з дослідження властивостей цих послідовностей, вони пов'язані із золотими p -перерізами, які визначаються рівнянням $x^{p+1}=x^p+1$.

Зазначимо, що послідовності типу Фібоначчі знайшли застосування у побудові систем числення, які мають переваги над двійковою системою. Подамо число 7 у таких системах числення.

Основа з чисел Фібоначчі ($p=1$) 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

$$7 = 5 + 2 = u_5 + u_3 = 1 \cdot u_5 + 0 \cdot u_4 + 1 \cdot u_3 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_1 = \overline{10100}.$$

Основа з чисел Нарайани ($p=2$) 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, ...

$$7 = 6 + 1 = u_7 + u_1 = 1 \cdot u_7 + 0 \cdot u_6 + 0 \cdot u_5 + 0 \cdot u_4 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_1 = \overline{1000001}$$

Основа з чисел типу Фібоначчі при $p=3$: 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, ...

$$7 = u_9 = 1 \cdot u_9 + 0 \cdot u_8 + 0 \cdot u_7 + 0 \cdot u_6 + 0 \cdot u_5 + 0 \cdot u_4 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_1 = \overline{100000000}.$$

Основа з чисел типу Фібоначчі при $p=4$: 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 6, 8, ...

$$7 = 6 + 1 = u_9 + u_1 = 1 \cdot u_9 + 0 \cdot u_8 + 0 \cdot u_7 + 0 \cdot u_6 + 0 \cdot u_5 + 0 \cdot u_4 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_1 = \overline{100000001}.$$

Доцільно провести подальші дослідження щодо застосування чисел Фібоначчі та Нарайани. Зокрема, арифметики Фібоначчі, розробленої О.П. Стаховим, робіт про комп'ютери Фібоначчі американських вчених, універсального методу кодування, заснованого на числах Нарайани [8].

Висновки. У більшості педагогічних досліджень щодо впровадження компетентнісного підходу приділяється увага формуванню предметних і професійних компетентностей або ключової математичної компетентності. Але навчання математики має зробити внесок у формування всіх ключових компетентностей. Для цього застосування історичного матеріалу має значні можливості. Розглянуті в статті історичні задачі сприяють формуванню не тільки математичної компетентності, але й також ключової компетентності в галузі природничих наук, оскільки дають змогу будувати і досліджувати моделі природних явищ і процесів. Аналіз властивостей побудованих моделей дає змогу генерувати нові ідеї, тобто формує ініціативність і може визначити наукову діяльність як мету подальшої освітньої траєкторії. Це робить внесок у формування таких ключових компетентностей, як ініціативність та вміння вчитися впродовж

життя. Надалі в разі залучення історичних задач доцільно показувати не тільки виникнення математичних теорій, понять і методів, але й звертати увагу на їх застосування в практичних ситуаціях, а також показувати їх роль у створенні нових напрямів наукових математичних досліджень.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Бевз В.Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів : Монографія. Київ : НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2005. 360 с.
2. Боголюбов А., Пустовойтов Н. Антропология истории математики. *Праці ІМ НАН України*, т. 30. Нариси з історії математики і природознавства. Київ : ІМ НАН України. 2001. С. 8–20.
3. Вірченко Н.О. Нариси з методики викладання вищої математики. Київ, 2006. 396 с.
4. Дідківська Т.В., Сверчевська І.А. Узагальнення чисел Фібоначчі. *Актуальні питання природничо-математичної освіти* : Збірник наук. праць. Сумський ДПУ імені А.С. Макаренка. 2016. Вип. № 7-8. С. 19–26.
5. Закон України «Про освіту». URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#n264>.
6. Остроградський М.В., Блюм І.А. Міркування про викладання. Київ : Рад. шк., 1955. С. 137–155.
7. Сверчевська І.А. Зв'язок математики та музики у формуванні ключової культурної компетентності. *Математика в рідній школі*. 2018. № 9. С. 18–24.
8. Kirthi K., Kak S. The Narayana Universal Cod. arXiv:1601.07110 (2016).