НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ЛОКАЛЬНО ІНТЕГРОВНИХ ФУНКЦІЙ МАЛОЇ ГЛАДКОСТІ ЗА ДОПОМОГОЮ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Анотація. В роботі досліджується екстремальна задача теорії наближення на класах функцій, що є локально інтегровними на дійсній осі та не обов'язково періодичних. В основі класифікації функцій лежить поняття узагальнених похідних, частинними випадками яких є відомі похідні в сенсі Вейля та Вейля-Надя. Вивчається апроксимація функцій малої гладкості (які можуть не мати жодної дробової похідної у сенсі Вейля) у деяких лінійних нормованих просторах цілими функціями експоненціального типу не вищого за деяке число. Одержано оцінки зверху сум функцій зі зсувом за аргументом, що наближаються операторами Валле Пуссена, які належать до множини цілих функцій експоненціального типу. При цьому було виявлено так зване явище інтерференції: лінійні комбінації зсувів функцій за аргументом можуть бути обмеженими на дійсній осі для деяких необмежених функцій $f(x)$.

Ключові слова: ψ – похідна, локально інтегровні функції, ряди Фур'є, оператор Валле Пуссена, інтерференція функцій, лінійні комбінації.

Silin Euvgen

State Higher Educational Institution
“Donbass State Teacher's Training University”

APPROXIMATING CLASSES OF LOCALLY INTEGRATED SMALL-SMOOTHNESS FUNCTIONS BY INTEGER FUNCTIONS

Summary. The paper presents the extreme problem of approximation theory on classes of functions that are locally integrable on the real axis and not necessarily periodic. The natural apparatus for approximating periodic functions is the partial Fourier series of these functions. But Fourier series are not uniformly convergent over the entire space of continuous functions. This fact prompted the development of various trigonometric sums generated by linear methods of summation of Fourier series and devoid of the specified drawback. In the 80-90s of the last century, O. Stepanets proposed a new approach to the classification of periodic functions based on the concepts of the derivative. As a result, new feature classes were introduced. This classification made it possible to cover the whole spectrum of summable functions and to take into account the subtle properties of particular functions. Then O. Stepanets introduced classes of functions that are locally summable on the real line and are not necessarily periodic. New feature classes contain classes of periodic functions as a partial case. Since the end of the last century O. Stepanets and his followers have been exploring classes of functions locally conditional on the real line, which are a generalization of previously introduced classes. The problem of investigating the approximate properties of Valle Poussin operators is relevant and is considered in this paper. S. Bernstein found that for entire functions of eventual degree their linear combinations may be bounded on the real line for some unbounded functions. This phenomenon was called interference of functions. Further research of this direction was continued by O. Timan, R. P. Boas, V. Drozd and others. In the paper, we continue these studies in the more general classes defined by the generalized notion of the derivative. In this case, the classes of functions contain locally summable functions, not just continuous. We find asymptotic law of deviations the special sums of the Valle Poussin's operators on the classes functions under some natural limits of parameters, defining the classes and method of approximation in the integral metric. The cases have been considered in thesis when the classes functions are defined by slowly going downward to zero functions ψ_1 and ψ_2 . We found an interference phenomenon: linear combinations of functions shifts by argument may be bounded to the real line for some unbounded functions.

Keywords: $\bar{\psi}$ -derivatives, locally integrable functions, Fourier series, Valle Poussin's operator, interference of functions, linear combinations.

Постановка проблеми. У 80-х роках минулого століття О.І. Степанець було сформовано поняття (ψ, β) -похідної, яка визначена для заданої функції f деякою послідовністю чисел $\psi = \psi(k)$, $k = 1, 2, \dots$, й числами β . Звичайна r -та похідна похідна періодичної функції при цьому була частинним випадком (ψ, β) -похідної при $\psi(k) = k^{-r}$ і $\beta = r$. Частинними випадками (ψ, β) -похідної є і похідні у сенсі Вейля та Вейля-Надя. Витоками згаданих досліджень були роботи Б. Надя, С.М. Нікольського, С.Б. Стечкіна, В.К. Дзядика, Н.І. Ахієзера, М.П. Корнейчука, О.В. Єфімова, С.О. Теляковського та інших.

Послідовності $\psi(k)$, взагалі кажучи, можуть бути довільними. Але, як було з'ясовано, в багатьох випадках досить обмежитися лише опуклими донизу послідовностями. Будь-яка сумовна чи неперервна періодична функція обов'язково має (ψ, β) -похідну, яка, у свою чергу, також є сумовною чи неперервною функцією. Отже, за допомогою поняття узагальненої похідної є можливість ранжувати весь спектр періодичних сумовних функцій.

У кінці 90-х років О.І. Степанець увів ще більш загальне поняття ψ -інтегралів та ψ -похідних періодичних функцій, яке дозволило одержати нові ефекти, не доступні в рамках попередніх робіт.

Розроблені методи досліджень є досить універсальними. Вони дозволили, починаючи з кінця 80-х років побудувати паралельну теорію наближення локально інтегровних функцій, які визначені на дійсній осі і не є обов'язково періодичними, за допомогою цілих функцій експоненціального типу.

У нашій роботі продовжується дослідження питань апроксимації локально інтегровних функцій які класифікуються за допомогою узагальненого поняття ψ -похідної й у випадку, коли ці класи містять функції, що можуть не мати жодної дробової похідної у сенсі Вейля.

Наведемо точне означення класів локально інтегровних функцій, яке належить О.І. Степанцю [1].

$$\mu(\psi) = \mu(\psi, t) = \frac{t}{\eta(t) - t}, \quad t \geq 1$$

де $\psi \in \mathfrak{M}$ і $\eta(t) = \eta(\psi, t) = \psi^{-1}\left(\frac{\psi(t)}{2}\right)$, ψ^{-1} – обернена до ψ функція.

Уведемо наступні множини: $\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(\psi, t) \leq K_1\}$, $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{M}_c = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < K_2 \leq \mu(\psi, t) \leq K_3 < \infty\}$, $\mathfrak{A}_c = \mathfrak{M}_c \cap \mathfrak{A}$, де K_i , $i = 1, 2, 3$ – деякі сталі, які, можливо, залежать від функції $\psi(t)$.

Відмітимо, що функції $\psi \in \mathfrak{M}_0$ не можуть спадати до нуля швидше деякої від'ємної степені t . Представниками множини $\mathfrak{M}_0$ є функції $\psi_{r,\alpha}(t) = t^{-r} \ln^\alpha(t+e)$, $r > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $\psi_\beta(t) = \ln^\beta(t+e)$, $\beta < 0$; $\psi_{\beta,\gamma}(t) = \ln^\beta(t+e) \ln^\gamma \ln(t+e)$, $\beta < 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

Означимо функцію $\bar{\psi}$ наступним чином. Нехай пара функцій (ψ_1, ψ_2) така, що $\psi_1 \in \mathfrak{A}$ і $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, а ψ_{1+} та ψ_{2-} – парне й непарне продовження функцій ψ_1 , ψ_2 відповідно. Тоді $\bar{\psi} = \psi_{1+} + i\psi_{2-}$.

Нехай, далі, $\hat{L}_p$, $1 \leq p < \infty$, – простір сумовних за Лебегом у p -му степені функцій f , з нормою

$$\|f\|_p = \sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_a^{a+2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty), \quad \|f\|_\infty \stackrel{\text{df}}{=} \text{esssup}_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

Поділ множини $\hat{L}_p$ на класи $\hat{L}^{\bar{\psi}}_p$ О.І. Степанець здійснив за допомогою поняття $\bar{\psi}$ -похідної. Якщо функцію $f \in \hat{L}_p$ майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ можна подати у вигляді наступної рівності:

$$f(x) = A + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x+t) \bar{\psi}(t) dt \stackrel{\text{df}}{=} A + \varphi * \hat{\bar{\psi}}(x), \quad (1)$$

де A – константа, інтеграл являє собою границю інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються: $\int_{\mathbb{R}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a$, $\varphi \in \hat{L}_p$, і

$$\hat{\bar{\psi}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}(x) e^{-ixt} dx, \quad (2)$$

то функцію $\varphi(\cdot)$ в зображенні (1) називають $\bar{\psi}$ -похідною функції $f(\cdot)$ і позначають як $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$.

Якщо $f \in \hat{L}_p$ а $\bar{\psi}$ – похідна цієї функції $f^{\bar{\psi}} \in \hat{L}_p$, то кажуть, що функція f належить класу $\hat{L}^{\bar{\psi}}_p$.

Агрегатом наближення функцій з класів $\hat{L}^{\bar{\psi}}_p$ виступають оператори Валле Пуссена $V_{\sigma,h}(f;x)$, які належать до множини ε_σ цілих функцій експоненціального типу $\leq \sigma$ (а у періодичному випадку, при натуральних значеннях параметрів, відповідають відомим сумах Валле Пуссена. Отже, при кожних дійсних $\sigma > h \geq 1$ функції $f \in \hat{L}^{\bar{\psi}}_p$ поставимо у відповідність оператор $V_{\sigma,h}(f;x)$, поклавши

$$V_{\sigma,h}(f;x) = A + f^{\bar{\psi}} * \widehat{\lambda_{\sigma,h} \bar{\psi}(t)},$$

де $\widehat{\lambda_{\sigma,h} \bar{\psi}}$ перетворення вигляду (2) функції $\lambda_{\sigma,h}(t) \bar{\psi}(t)$, у якій

$$\lambda_{\sigma,h}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |t| \leq \sigma - h, \\ \frac{\sigma - |t|}{h}, & \sigma - h \leq |t| \leq \sigma, \\ 0, & \sigma \leq |t|. \end{cases}$$

Предметом нашого дослідження будуть наступні суми:

$$\Sigma_{\sigma,h,m}^{\alpha,\delta}(f;x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i (f(x + \delta_i) - V_{\sigma,\sigma-h}(f;x + \delta_i)),$$

де $\alpha_i = \alpha_i(\sigma)$, $\delta_i = \delta_i(\sigma)$ – величини, які рівномірно обмежені щодо σ .

Будемо позначати множину функцій $\psi(t)$, які є опуклими донизу на промені $[1, \infty)$ і такими, що $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$ як множину $\mathfrak{M}$. Якщо ж ці функції також задовольняють наступні умови: є неперервними при $t \geq 0$; $\psi(t) \geq 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(t)$ зростає на $[0,1)$ і похідна $\psi'(t) = \psi'(t+0)$ має обмежену варіацію на множині $[0, \infty)$, то такі функції утворюють множину $\mathfrak{A}$. Нарешті, виділимо підмножину $\mathfrak{A}'$ як множину функцій $\psi \in \mathfrak{A}$, для яких

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty.$$

Оскільки множина $\mathfrak{M}$ є неоднорідною відносно швидкості спадання до нуля її елементів, О.І. Степанець запропонував увести до розгляду модуль напіврозпаду функції:

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Поняття інтерференції вперше запропонував С.Н. Бернштейн [2, с. 446–467], який встановив, що для цілих функцій скінченної степені лінійної комбінації $f(x+x_0) \pm f(x-x_0)$ можуть бути обмеженими на дійсній осі для деяких необмежених функцій $f(x)$:

$$\frac{1}{2} \left| f\left(x - \frac{\pi}{2\sigma}\right) + f\left(x + \frac{\pi}{2\sigma}\right) \right| \leq \frac{4}{\pi} \sup_k \left| f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) \right| \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

У подальшому дослідження цього напрямку продовжили О.П. Тіман [3, с. 201–208], R.P. Voas [4], В.В. Дрозд [5] та інші. Зокрема, О.П. Тіман встановив нерівність

$$\frac{1}{2} \left| f\left(x - \frac{m\pi}{2\sigma}\right) + f\left(x + \frac{m\pi}{2\sigma}\right) \right| \leq \frac{4M}{\pi m} + \frac{8mM}{\pi} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{m^2 - 4i^2},$$

де $M = \sup_k \left| f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) \right|$, $k \in \mathbb{Z}$, довільне непарне число,

В.В. Дрозд [5] узагальнив перераховані дослідження на нові класи неперервних функцій, означених за допомогою (ψ, β) -похідної та у випадку наближення операторами Фур'є. У вище наведених термінах В.В. Дрозд розглянув задачу у випадку $h = \sigma - 1$,

$$\lambda_{\sigma, \delta-1}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \sigma - 1, \\ 1 - \frac{(t - \sigma + 1)\psi(\sigma)}{\psi(t)}, & \sigma - 1 \leq t \leq \sigma, \\ 0, & t \geq \sigma \end{cases}$$

$$\text{та } \psi_1(\sigma) = \psi(\sigma) \cos \frac{\beta\pi}{2}, \quad \psi_2(\sigma) = \psi(\sigma) \sin \frac{\beta\pi}{2},$$

$$\beta \in \mathbb{R}, \quad \psi(\sigma) \in \mathfrak{A}_C.$$

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. У роботі ми продовжуємо дослідження В.В. Дрозда на більш загальний клас, які визначаються за допомогою узагальненого поняття ψ -похідної. При цьому класи містять локально сумовні, а не лише неперервні функції.

Науковий інтерес представляє вивчення явища інтерференції функцій у випадку апроксимації іншими методами, зокрема за допомогою операторів Валле Пуссена, та у інших метриках.

Постановка завдання. Метою роботи є знаходження оцінок зверху для величин $\Sigma_{\sigma, h, m}^{\alpha, \delta}(f; x)$ на класах локально інтегровних функцій $\hat{L}_p^\psi$ у випадку, коли вони містять функції малої гладкості. Об'єктом дослідження є класи $\hat{L}_p^\psi$. Предметом дослідження є апроксимативні характеристики операторів Валле Пуссена на згаданих класах.

Виклад основного матеріалу дослідження. Основним результатом дослідження є наступна

Теорема. Нехай $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}_0$ числа σ і $h = h(\sigma)$, задовільняють умови: $\sigma > h \geq 1$, $0 \leq \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{h}{\sigma} < 1$; стала $a \in (0, \pi\sigma / h)$. Тоді $\forall f \in \hat{L}_p^\psi$, $p \in [1, \infty)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ має місце оцінка

$$\|\Sigma_{\sigma, h, m}^{\alpha, \delta}(f; x)\|_p \leq E_{\sigma-h}(f^\psi) \left(\frac{4|\bar{\psi}(\sigma)|}{\pi^2} R_m \ln \frac{\sigma}{h} + \frac{2}{\pi} \left| Q_m \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi_2(t)}{t} dt \right| \right) + O(1) |\bar{\psi}(\sigma - h)|,$$

де $R_m = \sqrt{A_m^2 + B_m^2}$, $A_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cos(\sigma\delta_i + \gamma)$, $B_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i \sin(\sigma\delta_i + \gamma)$, $Q_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i$, $\gamma = \frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$, $W_\sigma^2 = \left\{ \varphi \in \varepsilon_\sigma : \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi^2(t)|}{(1+|t|)^2} dt < \infty \right\}$, $E_\sigma(f) = \inf_{g \in W_\sigma^2} \|f(x) - g(x)\|_p$, $O(1)$ – величина, яка рівномірно обмежена щодо величин m та h в метриці простору $\hat{L}_p$.

Висновки і пропозиції. Нехай $\psi_2 \in \mathfrak{A}_C$, тоді має місце оцінка

$$\left| \int_{\sigma}^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt \right| = O(1) |\psi(\sigma)|.$$

Таким чином, із наведеної теореми ми одержуємо

Наслідок 1. Нехай $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}_C$ числа σ і $h = h(\sigma)$, задовільняють умови: $\sigma > h \geq 1$, $0 \leq \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{h}{\sigma} < 1$; стала $a \in (0, \pi\sigma / h)$. Тоді $\forall f \in \hat{L}_p^\psi$, $p \in [1, \infty)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ має місце оцінка

$$\|\Sigma_{\sigma, h, m}^{\alpha, \delta}(f; x)\|_p \leq E_{\sigma-h}(f^\psi) \frac{4|\bar{\psi}(\sigma)|}{\pi^2} R_m \ln \frac{\sigma}{h} + O(1) |\bar{\psi}(\sigma - h)|,$$

де $R_m = \sqrt{A_m^2 + B_m^2}$, $A_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cos(\sigma\delta_i + \gamma)$, $B_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i \sin(\sigma\delta_i + \gamma)$, $\gamma = \frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$, $O(1)$ – величина, яка рівномірно обмежена щодо величин σ та h в метриці простору $\hat{L}_p$.

Далі наведемо умови, за яких має місце рівність $R_m = 0$. Нехай спочатку $m = 2$. Тоді

$$R_m = R_m(\alpha, \delta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cos(\sigma\delta_1 + \gamma) + \alpha_2 \cos(\sigma\delta_2 + \gamma) = 0, \\ \alpha_1 \sin(\sigma\delta_1 + \gamma) + \alpha_2 \sin(\sigma\delta_2 + \gamma) = 0, \\ \delta_1 + \delta_2 = (\pi k) / \sigma, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \alpha_1 = (-1)^{k+1} \alpha_2, \end{cases} \quad (4)$$

Отже, за умови $m = 2$ справедлива нерівність

$$\|f(x) + (-1)^{k+1} f(x + \pi k / \sigma) - V_{\sigma, \sigma-h}(f(x) + (-1)^{k+1} f(x + \pi k / \sigma))\|_p \leq K |\bar{\psi}(\sigma - h)|.$$

Для випадку $m \geq 3$ одержимо наступне твердження.

Наслідок 2. Нехай виконано умови наслідку 1. Якщо при $m \geq 3$ координати α_i довільного вектора $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ задовольняють одній з умов:

1) $\sum_{i=1}^m (-1)^{k_i} \alpha_i = 0$, якщо сума $\delta_s + \delta_l = \frac{\pi n}{\sigma}$, $n \in \mathbb{N}$, для всіх $l, s \in m$, при цьому k_i — ціле число, яке визначається з рівності $\delta_i = \delta_0 + \pi k_i / \sigma$, де δ_0 — деяке фіксоване число;

2) $\alpha_l = \sin^{-1}(\delta_s + \delta_l) \sigma \sum_{i \neq l, s} \alpha_i \sin(\delta_i + \delta_s) \sigma$, $\alpha_s = \sin^{-1}(\delta_s + \delta_l) \sigma \sum_{i \neq l, s} \alpha_i \sin(\delta_i + \delta_l) \sigma$, якщо при деяких l та s $\delta_s + \delta_l \neq \pi n / \sigma$, $n \in \mathbb{N}$, то при $\sigma \rightarrow \infty$

$$\|\Sigma_{\sigma, h, m}^{\alpha, \delta}(f; x)\|_{\dot{p}} \leq O(1) |\psi(\sigma - h)|.$$

Список літератури:

1. Stepanets A.I., Wang Kunyang, Zhang Xirong. Approximation of locally integrable function on the real line. *Український математичний журнал*. 1999. № 11. С. 1549–1561.
2. Бернштейн С.Н. Собрание сочинений: в 3 т. Москва : Изд-во АН СССР, 1954. Т. 2. 626 с.
3. Тиман А.Ф. О явлении интерференции в поведении целых функций конечной степени. *Доклады АН СССР*. 1953. № 89. С. 17–21.
4. R.P. Boas, Jr. Interference phenomena for entire functions. *Michigan Math J.* 1955. № 3. P. 17–34.
5. Дрозд В.В. Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье в среднем. Киев : Ин-т математики АН Украины, 1989. С. 78. (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; 89.17).

References:

1. Stepanets, A.I., Wang Kunyang, & Zhang Xirong (1999). Approximation of locally integrable function on the real line [Approximation of locally integrable function on the real line]. *Ukrainian mathematical journal*, vol. 11, no. 11, pp. 1549–1561.
2. Bernshtejn, S.N. (1954). *Sobranie sochinenij: V 3 tomah* [Collected Works: In 3 Volumes]. Moskva : Izdatel'stvo AN SSSR. (in Russian)
3. Timan, A.F. (1953). O javlenii interferencii v povedenii celyh funkcij konechnoj stepeni [On the phenomenon of interference in the behavior of entire functions of finite degree]. *Reports of the USSR Academy of Sciences*, no. 89, pp. 17–21. (in Russian)
4. Boas, R.P. (1955). Interference phenomena for entire functions [Interference phenomena for entire functions]. *Michigan math journal*, no. 3, pp. 17–34.
5. Drozd, V.V. (1989). *Odnovremennoe priblizhenie funkcij i ih proizvodnyh operatorami Fur'e* [Simultaneous approximation of functions and their derivatives by Fourier operators]. Working paper 89/17. Kyiv : Academy of Sciences of Ukraine. Institute of Mathematics. (in Russian)