Левкін Д.А.

Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка

ПРИКЛАДНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ СИСТЕМ

У статті розглянуті деякі аспекти питань розрахунку та оптимізації параметрів багатошарових систем, які знаходяться під впливом зосереджених рухомих джерел теплового навантаження. У якості досліджуваного об'єкта виступає багатошаровий сферичний мікробіологічний матеріал під дією зосереджених сканованих джерел лазерного випромінювання. Сформульовані основна оптимізаційна задача пошуку раціональних параметрів лазерної дії на багатошарові мікробіологічні системи з урахуванням обмежень на температурні поля та технічні параметри випромінювачів, а також вимоги до кінцевого результату, а саме, до значень шуканих параметрів лазера задля забезпечення життєздатності сегментів матеріалу з метою підвищення якості біотехнологічного процесу сегментації.

Виходячи з постановки основної оптимізаційної задачі в статті наведені декілька прикладних оптимізаційних математичних моделей. Здійснена формалізація і систематизація прикладних задач оптимізації, які є частковими випадками основної оптимізаційної задачі. Досліджені характерні особливості їх математичних моделей, що дозволило обґрунтовано здійснити вибір методів їх чисельної реалізації. Запропонована модифікація пошукового методу оптимізації, який базується на композиції чисельних методів, що створюють обчислювальну структуру. В роботі наведена крайова задача системи неоднорідних диференціальних рівнянь теплопровідності, що лежить в основі розрахункової математичної моделі процесу теплового впливу та намічені кроки для реалізації процесу оптимізації з застосуванням чисельних методів. Слід зазначити, що результати досліджень мають універсальний характер і можуть бути застосовані для оптимізації процесів ділення штучної і натуральної шкіри при лікуванні великих опіків; зварювання біоматеріалу; використання в практиці мікрохірургії, офтальмології, косметології та інших галузях.

Ключові слова: оптимізація, математичні моделі, пошуковий метод оптимізації, крайова задача, чисельні методи.

Постановка проблеми. Питанням математичного моделювання та оптимізації багатошарових систем приділяється недостатньо уваги. Це перш за все пов'язане з тим, що стан досліджуваних об'єктів описується за допомогою нестационарних, неоднорідних диференціальних рівнянь у часткових похідних. Для отримання значень цільової функції необхідне розв'язання систем диференціальних рівнянь, а це зумовлює використання чисельних методів або залучення програмно-апаратних засобів. Тому виникають ризики зниження точності отриманого розв'язку, додаткові витрати часу і машинної пам'яті на кожній ітерації. Для уникнення означених складнощів багато авторів йдуть шляхом усереднення параметрів розглянутих систем, досить грубих оцінок параметрів та одержання усереднених значень цільової функції. Використання таких даних зумовлює неконтрольовані додаткові витрати матеріалу та витрати технічних ресурсів систем.

Ще одним засобом вибору і завдання керуючих параметрів систем є побудова і реалізація математичних моделей під певну задачу. Однак, на думку

автора, куди більш доцільніше запропонувати підхід до розрахунку і оптимізації цілого ряду об'єктів систем. Це дозволить, змінюючи набір чисельних методів, досягти оптимізації довільних систем, які містять джерела термовпливу.

У статті наведені математична модель основної оптимізаційної задачі пошуку раціональних значень параметрів точкового лазерного впливу на багатошаровий мікробіологічний матеріал та прикладні оптимізаційні математичні моделі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Актуальність питань дослідження привертала увагу провідних вітчизняних і закордонних вчених [1–4]. В роботах [1, 2] наведено аналіз наукових публікацій, які стосуються питань розрахунку та оптимізації теплофізичних, електротехнічних, гідродинамічних та інших систем під впливом джерел фізичних полів. Важливим у цих роботах є підхід до здійснення оптимізації довільних складних систем. Незважаючи на те, що в роботі [3] розглянуті питання технічного забезпечення електронно-променевого впливу та його застосування для різних технологічних процесів, дослідження не торкаються

питань оптимізації та завдання технічних параметрів лазерного впливу на багат шаровий мікробіологічний матеріал. Розглянутий у роботі процес суттєво відрізняється постановкою та реалізацією розрахункових і прикладних оптимізаційних математичних моделей. Авторами роботи [4] наведена електронно-променева дія на ембріон для 3-х певних режимів лазерного впливу. Однак не наведений розрахунок і оптимізація параметрів цільової функції.

Постановка завдання. Розробка математичних моделей та удосконалення існуючих чисельних методів реалізації прикладних оптимізаційних математичних моделей дозволить запропонувати універсальний підхід для реалізації одразу декількох прикладних оптимізаційних математичних моделей довільних теплофізичних систем для підвищення якості біотехнологічних процесів.

Виклад основного матеріалу дослідження. Математична модель основної оптимізаційної задачі полягає в тому, що необхідно знайти

$$\underset{\substack{(x,y,z) \in \Omega^* \\ t \in [t_0, t^*] \\ z^* \in Z}}{\text{extr}} T(x, y, z, t, z^*) \quad (1)$$

де $T(x, y, z, t, z^*)$ – температурне поле області точок $(x, y, z) \in \Omega^*$ багат шарового мікробіологічного матеріалу | ;

t_0 і t^* – початковий і кінцевий моменти часу t ;
 $z^* = (x, y, z, t, u, E, s(t), v(t), Q(x, y, z, t), S)$ – вектор параметрів лазерної дії;

u – інтенсивність джерела;

E – енергія дії;

$s(t)$ – траєкторія руху джерела;

$v(t)$ – швидкість руху джерела;

$Q(x, y, z, t)$ – густина теплової дії;

S – діаметр джерела.

Тобто, необхідно знайти такі параметри вектора z^* , які б забезпечували виконання екстремуму (1) в області точок |* при заданій системі обмежень на температурне поле і на компоненти вектора z^* .

Обмеження на розмір області багат шарового мікробіологічного матеріалу | :

$$\begin{cases} x_{\min} \leq x \leq x_{\max}; \\ y_{\min} \leq y \leq y_{\max}; \\ z_{\min} \leq z \leq z_{\max}. \end{cases}$$

Обмеження на тривалість дії лазерного променя:

$$t_{\min} \leq t \leq t_{\max}.$$

Обмеження на інтенсивність джерела:

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}.$$

Обмеження на енергію дії:

$$E_{\min} \leq E \leq E_{\max}.$$

Обмеження на траєкторію:

$$s(t) \in M^*,$$

де M^* – множина всіх можливих траєкторій руху лазерного джерела по поверхні багат шарового мікробіологічного матеріалу.

Обмеження на швидкість руху джерела:

$$v_{\min} \leq |\dot{s}(t)| \leq v_{\max}.$$

Обмеження на густину теплового впливу:

$$Q_{\min} \leq Q(x, y, z, t) \leq Q_{\max}.$$

Обмеження на діаметр лазерного джерела у вигляді п'ятна:

$$S_{\min} \leq S \leq S_{\max}.$$

Обмеження на результуюче температурне поле:

$$T(x, y, z, t, z^*) \leq T^*,$$

де T^* – допустимі значення температурного поля.

В залежності від мети оптимізації з математичної моделі основної оптимізаційної задачі випливають прикладні оптимізаційні моделі. Розглянемо найбільш типові з них.

Математична модель 1. Необхідно мінімізувати за параметрами теплової дії максимальне значення температурного поля в області точок |* багат шарового мікробіологічного матеріалу:

$$\min_{z^* \in Z} \max_{\substack{(x,y,z) \in \Omega^* \\ t \in [t_0, t^*]}} T(x, y, z, t, z^*), \quad (2)$$

Математична модель 2. Необхідно мінімізувати різницю між значеннями температурного поля T_i в заданих точках $(x_i, y_i, z_i) \in \Omega_i \in \Omega^*, i = 1, \dots, N$ багат шарової системи | і наперед заданими допустимими значеннями температурного поля T^* , тобто знайти:

$$\min_{z^* \in Z} \max_{\substack{(x_i, y_i, z_i) \in \Omega_i \\ i=1, N \\ t \in [t_0, t^*]}} |T_i(x_i, y_i, z_i, t, z^*) - T^*|, \quad (3)$$

У формулі (3) t_0 – початковий момент часу t , t^* – кінцевий момент часу t , z^* – вектор параметрів теплової дії на багат шаровий мікробіологічний матеріал, T^* – допустимі значення температурного поля.

Математична модель 3. Автор розглядає задачу контролю характеру міжшарового розподілу температурного поля. У цьому випадку потрібен

пошук таких параметрів теплового впливу z^* , щоб мінімізувати різницю між максимальними значеннями температурного поля в контрольованих шарах, тобто знайти:

$$\min_{z^* \in Z} \left| \max_{\substack{(x,y,z) \in N_1 \\ t \in [t_0; t^*]}} T(x,y,z,t,z^*) - \max_{\substack{(x,y,z) \in N_2 \\ t \in [t_0; t^*]}} T(x,y,z,t,z^*) \right|, \quad (4)$$

де N_1, N_2 – області, які займають контрольовані шари.

У свою чергу, $T(x,y,z,t,z^*)$ – температурне поле, t_0 та t^* – початковий і кінцевий моменти часу t , а z^* – вектор параметрів дії лазерного променя.

Математична модель 4. Диференціальний критерій, що полягає в максимізації числа життєздатних зародків, наприклад, при лазерному діленні ембріонів:

$$\sum_{i=1}^N T_i(x_i, y_i, z_i, t, z^*) \rightarrow \max_{\substack{(x_i, y_i, z_i) \in \Omega^* \\ t \in [t_0; t^*] \\ z^* \in Z \\ i=1, N}}, \quad (5)$$

$$\text{де } T_i = \begin{cases} 0, & \text{якщо } T_i > T^*, \\ 1, & \text{якщо } T_i \leq T^*, \end{cases}$$

T^* – допустима температура в точках зародків.

Слід зазначити найбільш характерні особливості математичної моделі основної оптимізаційної задачі та прикладних математичних моделей: велика розмірність шуканих параметрів; система обмежень є нелінійною; область допустимих розв'язків у загальному випадку є багатозв'язною; цільові функції є нестационарними, нелінійними, багатовимірними; задачі оптимізації – багатоекстремальні; пошук і напрямлений перебір локальних екстремумів пов'язаний із необхідністю розв'язання серії нелінійних, нестационарних крайових задач; потрібні значні часові витрати на розв'язання останніх; пошук рекордного значення цільової функції пов'язаний зі значними часовими витратами. Наведені особливості впливають на вибір та обґрунтування чисельних методів реалізації прикладних оптимізаційних математичних моделей. Деякі аспекти процесу математичного моделювання та оптимізації багатопарових систем, які містять дискретні джерела термонавантажень, розглянуті в роботах [5–7].

В основі розрахункової математичної моделі процесу дії лазерного променя на 3-х шаровий кулястий мікробіологічний матеріал із неоднорідними включеннями лежить крайова задача:

$$\begin{cases} \rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} - \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r_1} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + q_1 = 0 & \text{при } r \in [0; r_1], t \in [0; t_1]; \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r_2} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + q_2 = 0 & \text{при } r \in [r_1; r_2], t \in [t_1; t_2]; \\ \rho_3 c_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} - \lambda_3 \left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial r^2} + \frac{2}{r_3} \frac{\partial T_3}{\partial r} \right) + q_3 = 0 & \text{при } r \in [r_2; r_3], t \in [t_2; t_3], \end{cases} \quad (6)$$

де ρ_e – коефіцієнт густини e -го шару;

c_e – коефіцієнт теплоємності;

$T_e = T_e(r, t)$ – температурне поле;

r – просторова змінна;

t – час дії лазерного променя;

r_e – відстань від центру джерела теплового впливу у вигляді п'ятна до точки в e -му шарі мікробіологічного матеріалу, у якій визначається значення температурного поля;

λ_e – коефіцієнт теплопровідності e -го шару;

q_e – питома щільність потужності теплових навантажень.

Граничні умови Діріхле:

$$\begin{cases} T(r_0, t_0) = T_n; \\ T(r_5, t_5) = T_k, \end{cases} \quad (7)$$

де T_n – температура мікробіологічного матеріалу на початку дії лазерного променя;

T_k – температура наприкінці дії лазерного променя.

Гранична умова теплового обміну між зовнішнім шаром мікробіологічного матеріалу та навколишнім середовищем:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}(0, t) = qS, \quad 0 \leq t \leq h, \quad (8)$$

де q – питомий тепловий потік;

S – діаметр джерела теплової дії, тобто п'ятна;

h – тривалість дії джерела.

Розв'язок диференціального рівняння теплопровідності системи (6) запишемо у вигляді:

$$T(r, t) = T_{z.o.}(r, t) + T_{ч.н.}(r, t), \quad (9)$$

де $T_{z.o.}(r, t)$ – загальний однорідний розв'язок;

$T_{ч.н.}(r, t)$ – частковий неоднорідний розв'язок.

Загальний неоднорідний розв'язок рівняння теплопровідності шукатимемо у вигляді:

$$T(r, t) = u(r)v(t), \quad (10)$$

Отримаємо:

$$v'(t)u(r) - a(v(t)u''(r) + \frac{2}{r}v(t)u'(r)) = 0, \quad (11)$$

де $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ – коефіцієнт температуропровідності.

Провівши ряд алгебраїчних перетворень [8], автор знайшов два розв'язки:

$$u_1(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k r^{2k-1}}{a^k ((2k)!!)^2} \quad \text{і} \quad u_2(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k r^{2k}}{a^k ((2k+1)!!)^2}$$

Підставивши їх у диференціальне рівняння (11), було отримано аналітичний вираз для цільової функції:

$$T(r, t) = T(0, 0)e^{ct} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k r^{2k}}{a^k ((2k+1)!!)^2} - \frac{q_e}{6a} r^2 g(t)$$

Процес оптимізації параметрів автор здійснював таким чином. Було проведено редукцію розмірності вектора параметрів лазерної дії, відокремивши параметри, які буде оптимізовано, інші залишимо без змін. Сформовано рівномірну сіткову модель дискретизації оптимізованих параметрів. Розв'язано крайову задачу системи диференціальних рівнянь теплопровідності для кожного вузла сіткової моделі.

Згідно з диференціальним критерієм (математична модель 4) розраховано травмованість мікробіологічного матеріалу у вузлових точках крупної рівномірної сітки. Напрявлений пошук локального екстремуму здійснювався кроковим методом по вузлах сітки. Методом напрямленого перебору автор рухався вузлами сіткової моделі від вузла, в якому досягалося найбільше значення травмованості мікробіологічного матеріалу (5) до вузла з меншою травмованістю.

Для знаходження технічних параметрів, завдання яких дозволило б здійснити процес лазерної сегментації та зменшити травмованість мікробіологічного матеріалу, автором проведено

подрібнення кроків сіткової моделі. Після цього процес повторився, покроковий аналіз травмованості мікробіологічного матеріалу у вузлових точках продовжився.

Критеріями припинення пошуку локальних екстремумів слугуватиме закінчення часу, відведеного для оптимізації; досягнення необхідної точності розв'язання крайових задач; отримання досить малої величини неузгодженості значень контрольованого диференціального критерію (5) у вузлових точках сітки.

Висновки. У статті розглянутий процес математичного моделювання та пошуку оптимальних параметрів багатопараметричних біотехнологічних систем під дією дискретних джерел термічного навантаження. Автором запропоновані деякі прикладні оптимізаційні математичні моделі, які впливають із постановки основної оптимізаційної задачі пошуку раціональних параметрів систем. Значну увагу в роботі приділено питанням чисельної реалізації прикладних оптимізаційних математичних моделей.

Незважаючи на наведений у роботі алгоритм для чисельної реалізації лише двох прикладних оптимізаційних математичних моделей, використання запропонованого автором підходу дозволить реалізувати процес оптимізації більшого числа параметрів цільової функції, дасть змогу досягти зниження витрат досліджуваного матеріалу та технічних ресурсів.

Практичне застосування отриманих у роботі результатів дозволить оптимізувати процеси лазерного ділення ембріонів з метою їх подальшої трансплантації, ділення штучної і натуральної шкіри при лікуванні значних опіків і в інших галузях.

Список літератури:

1. Стоян Ю.Г., Путятин В.П. Оптимизация технических систем с источниками физических полей. К. : Наук. думка, 1988. С. 44–48.
2. Стоян Ю.Г., Путятин В.П. Размещение источников физических полей. К. : Наук. думка, 1981. С. 59–87.
3. Чубаров Е.П. Управление системами с подвижными источниками воздействия. М. : Энергоатомиздат, 1985. 288 с.
4. Douglas-Hamilton D.H., Conia J. Thermal effects in laser-assisted pre-embryo zona drilling. *Journal of Biomedical Optics*. 2001. Vol. 6, Issue 2. P. 205. DOI: 10.1117/1.1353796.
5. Мегель Ю.Е., Путятин В.П., Левкин Д.А., Левкин А.В. Математическое моделирование и оптимизация параметров действия лазерного луча на многослойные биоматериалы. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ» : Збірник наукових праць. Серія «Механіко-технологічні системи та комплекси»*. Х. : НТУ «ХПІ», 2017. № 20(1242). С. 60–64.
6. Левкин Д.А. Математичні моделі оптимізації параметрів дії лазерного променя на багатопараметричні біосистеми. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ» : Збірник наукових праць. Серія «Механіко-технологічні системи та комплекси»*. Х. : НТУ «ХПІ», 2014. № 60(1102). С. 77–84.
7. Levkin A., Levkina R., Petrenko A., Chaliy I. Economic Security as a Result of Modern Biotechnology Implementation: 2019 IEEE International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications Science and Technology (PIC S & T 2019) (8-11 October 2019 Kyiv). Kyiv, 2019. P. 139–142.
8. Левкин Д.А. Математическое моделирование и оптимизация многослойных систем. *Енергетика і автоматика*. Київ : НУБіП України, 2019. № 1(41). С. 45–56. DOI: 10.31548/energiya2019.01.045.

Levkin D.A. APPLIED MODELS AND METHODS OF SYSTEM OPTIMIZATION

The article deals with some aspects of calculation and optimization of multilayer systems parameters, which are influenced by concentrated moving sources of heat load. The object under study is multilayer spherical microbial material under the influence of concentrated scanned laser sources. The main optimization problem of the search for rational parameters of laser action on multilayered microbiological systems is formulated, taking into account the restrictions on the temperature fields and technical parameters of the emitters, as well as the requirements for the end result, namely, to the values of the required parameters of the laser in order to ensure the viability of the material process material segmentation.

Based on the main optimization problem formulation, the article presents several applied optimization mathematical models. Formalization and systematization of applied optimization problems, which are partial cases of the main optimization problem, are carried out. The characteristic features of their mathematical models were investigated, which made it possible to reasonably make a choice of methods for their numerical realization. A modification of a search engine optimization method based on the compositions of numerical methods that create a computational structure is proposed. The paper presents a boundary value problem of a system of non-uniform differential equations of thermal conductivity, which underlies the calculated mathematical model of the process of thermal influence, and outlines steps for the implementation of the optimization process using numerical methods. It should be noted that the results of the studies are universal in nature and can be applied to optimize the processes of division of artificial and genuine skin in the treatment of major burns; welding of biomaterial; use in the practice of microsurgery, ophthalmology, cosmetology and other fields.

Key words: *optimization, mathematical models, search engine optimization method, boundary value problem, numerical methods.*