DOI - 10.32743/UniTech.2021.86.5.11762

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ
ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙ НА ОСНОВЕ «К - Е» МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ****Махмудов Содикжон Ахмаджонович***канд. техн. наук, доцент,
Андижанский машиностроительный институт,
Республика Узбекистан, г. Андижан***Эшонхужаев Дилмурод Одилович***инженер-исследователь,
Андижанский машиностроительный институт,
Республика Узбекистан, г. Андижан
E-mail: eshonxojayevdilmurod34@gmail.com***Хайдаров Сардор Искандарович***инженер-исследователь,
Андижанский машиностроительный институт,
Республика Узбекистан, г. Андижан
E-mail: sardor@buaa.edu.cn***RESEARCH OF MIXING AND PROPAGATION OF THREE-DIMENSIONAL TURBULENT
FLOWS BASED ON "K - E" TURBULENCE MODEL****Sodikzhon Makhmudov***Cand. tech. Sciences,
Assoc. Andijan Machine-Building Institute,
Uzbekistan, Andijan***Dilmurod Eshonkhuzhaev***Researcher Engineer,
Andijan Machine-Building Institute,
Uzbekistan, Andijan***Sardor Khaydarov***Researcher Engineer, Andijan Machine-Building Institute,
Uzbekistan, Andijan***АННОТАЦИЯ**

В данной статье представлено численное решение параболизированного уравнения Навье-Стокса с использованием «k - ε» модели турбулентности. Описывается применение двухпараметрической «k - ε» модели турбулентности, для исследования трехмерной турбулентной однородной струи, истекающей из сопла прямоугольной формы. Рассматривается модифицированная формула Прандтля, позволяющая обезразмеривать координаты и параметры потока, и соответственно приводящие входное сечение сопла в квадратную область. Описывается преимущества и недостатки разработанной методики.

ABSTRACT

This paper presents a numerical solution of the parabolized Navier-Stokes equation using the "k - ε" turbulence model. The paper describes the application of a two-parameter "k - ε" turbulence model for the study of a three-dimensional homogeneous turbulent jet flowing out of a rectangular nozzle. A modified Prandtl formula is considered, which makes it possible to de-size the coordinates and parameters of the flow, and, accordingly, to bring the inlet section of the nozzle into a square region. Described the advantages and disadvantages of the developed methodology.

Ключевые слова: «k - ε» модель турбулентности, уравнения Навье-Стокса, уравнения переноса, скорость диссипации, турбулентная кинетическая энергия, вихревая вязкость

Keywords: "k - ε" turbulence model, Navier-Stokes equations, convection-diffusion equations, dissipation rate, turbulent kinetic energy, eddy viscosity

Введение. В последние годы появилось большое количество работ, в которых делаются попытки рассчитать трехмерные турбулентные струйные течения приближенными методами с использованием двух и многопараметрических моделей турбулентности, включающих пять и более эмпирических констант [1, 2, 3].

Число методов, основанных на использовании многопараметрических моделей и отличающихся друг от друга количеством привлекаемых уравнений переноса и составом неизвестных, выражающих характеристики турбулентных движений, в настоящее время велико.

Наиболее положительно относятся к методам, содержащим уравнения переноса кинетической энергии. Среди них выделяется метод основанный на совместном решении уравнений переноса импульса, кинетической энергии, ее скорости диссипации, так называемый, метод «**k** - ϵ » модели турбулентности.

В «**k** - ϵ » модели выводятся уравнения для турбулентной кинетической энергии **k** и скорости диссипации ϵ [1]:

$$k = 0.5(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}) = 0.5(\overline{u_i u_i}),$$

$$\epsilon = \nu_T \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}.$$

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{\Sigma} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \mu_{\Sigma} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \epsilon \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_{\Sigma}}{\sigma_{\epsilon}} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + \mu_{\Sigma} \frac{C_1 \epsilon}{k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\rho C_2 \epsilon^2}{k} \quad (2)$$

где ν_T - кинематический, μ_{Σ} - динамический коэффициенты турбулентной вязкости; $\sigma_k, \sigma_{\epsilon}, C_1, C_2$ - эмпирические постоянные «**k** - ϵ » модели турбулентности; ρ - плотность смеси газов.

Здесь для удобства записи использованы тензорные обозначения в декартовых координатах. Левые части (1) и (2) представляют конвективный перенос соответственно величин **k** и ϵ . Три члена в правой части уравнений описывают диффузию, выделение и диссипацию соответствующих величин.

Данные уравнения выведены из нестационарных уравнений Навье-Стокса, в которых сохранены диффузионные члены, соответствующие вязкой диссипации, а также произведена модификация некоторых других членов.

Локальная (турбулентная) вихревая вязкость μ_t может быть выражена через локальные значения **k** и ϵ следующим образом:

$$\mu_t = \frac{c_{\mu} \rho k^2}{\epsilon} \quad (3)$$

Эта вязкость используется для связи рейнольдсовых напряжений, со средними значениями $-\rho(u_i u_j)$. Стандартные значения эмпирических констант в уравнениях (1-3), принятые для наших расчетов, приведены в таблице 1.

В многочисленных отечественных и зарубежных публикациях на основе «**k** - ϵ » модели турбулентности приводятся в основном двумерные турбулентные течения, и некоторые работы посвящены численным исследованиям пространственных турбулентных течений.

Таблица 1.

Стандартные значения эмпирических констант

	c_{μ}	C_1	C_2	σ_k	σ_{ϵ}
Стандартные	0,09	1,44	1,92	1,0	1,3
Используемые	0,09	1,3	1,5	1,0	1,3

Поставленная задача описывается с помощью уравнений неразрывности, количество движений, энергии, состояния, связи полной энтальпии **H** и **T**, а также подключением уравнений кинетической энергии турбулентности и диссипации энергии турбулентности для вычисления турбулентной вязкости, имеющих следующий вид:

Уравнения кинетической энергии турбулентности:

$$\rho u \frac{\partial k}{\partial x} + \rho v \frac{\partial k}{\partial y} + \rho w \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + G - \rho \epsilon \quad (4)$$

Уравнения диссипации энергии турбулентности:

$$\rho u \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \epsilon}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\sigma_{\epsilon}} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu}{\sigma_{\epsilon}} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) + (C_1 G - C_2 \rho \epsilon) \frac{\epsilon}{k}. \quad (5)$$

где

$$G = \hat{\mu} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right).$$

А связь μ_t через «**k** - ϵ » по формуле (3)

Турбулентная вязкость может быть выражена через локальные значения **k** и ϵ по формуле (3) (гипотеза Прандтля – Колмогорова): Уравнения (4-5) позволяют обезразмеривать координаты и параметры потока, и соответственно приводящие входное сечение сопла в квадратную область, а также выбором масштабов для кинетической энергии турбулентности и ее диссипации.

Система уравнений численно реализуется с помощью следующих безразмерных краевых условий:

$$\text{I. } x = 0$$

$$1) 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1;$$

$$u = 1, v = 0, w = 0, H = H_2,$$

$$P = P_2, k = k_2, \epsilon = \epsilon_2$$

$$\begin{aligned}
 & 2) \quad 1 < y < y_{+\infty}, 1 < z < z_{+\infty}; \\
 & u = u_1, v = 0, w = 0, H = H_1 \\
 & P = P_1, k = k_1, \varepsilon = \varepsilon_1
 \end{aligned} \quad (6)$$

II. $x > 0$

$$1) \quad z = 0, 0 < y < y_{+\infty}, \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \frac{\partial v}{\partial z} = 0, w = 0, \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \frac{\partial k}{\partial z} = 0, \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0.$$

$$2) \quad y = 0, 0 < z < z_{+\infty}; \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0, v = 0, \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \frac{\partial k}{\partial y} = 0, \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0.$$

$$\begin{aligned}
 & 3) \quad z \rightarrow z_{+\infty}, y \rightarrow y_{+\infty}; \\
 & u = u_1, v = 0, w = 0, H = H_1 \\
 & P = P_1, k = k_1, \varepsilon = \varepsilon_1
 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 & 4) \quad y = 0; z = 0 \\
 & v = w = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0
 \end{aligned}$$

Здесь k_1, k_2 , и $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, – соответственно исходные значения кинетической энергии турбулентности и диссипации энергии турбулентности струй основного и спутного потоков.

Метод и результаты исследования. Из-за сложности получения распределения характеристик

турбулентности на срезе сопла, в большинстве существующих работ профили распределения кинетической энергии турбулентности приводятся, а скорость диссипации кинетической энергии не имеет прямых экспериментальных аналогов. Поэтому, для задания распределения характеристик турбулентности на срезе сопла пользуются различными соотношениями, но эти исходные значения должны, обеспечить выражения турбулентной вязкости (3), соответствующие действительной картине течения.

Уравнения (3 ÷ 5) с начальными и граничными условиями (6, 7) имеют параболический вид, их можно численно решить одним из разработанных методов и алгоритмами, приведенными в работе [4]. Отличие в расчете состоит в том, что прежде чем вычислить μ_3 , вычисляются значения k и ε соответственно решением разностных уравнений (4) и (5) методом прогонки. Разностные уравнения (4) и (5) с использованием граничных условий (6) и (7) можно представить аналогичной трех диагональной системой уравнений [4].

В качестве примера рассмотрим переход к разностным уравнениям диссипации энергии турбулентности (5), заменив дифференциалы их аналогами [4], с точностью до порядка $O(\Delta x, \Delta y^2, \Delta z^2)$. Получим:

$$\begin{aligned}
 & (\rho u)_{ijk}^s \frac{\varepsilon_{ijk}^{s+1} - \varepsilon_{i-1,j,k}^{s+1}}{\Delta x} + (\rho v)_{ijk}^s \frac{\varepsilon_{i,j,k+1}^{s+1} - \varepsilon_{i,j,k-1}^{s+1}}{2L\Delta y} + (\rho w)_{ijk}^s \frac{\varepsilon_{i,j,k+1}^{s+1} - \varepsilon_{i,j,k-1}^{s+1}}{2\Delta z} = \frac{1}{L^2} \frac{1}{\sigma_\varepsilon} (\mu_3)_{i,j+\frac{1}{2},k}^s \frac{\varepsilon_{i,j+1,k}^{s+1} - \varepsilon_{i,j,k}^{s+1}}{\Delta y^2} - \\
 & \frac{1}{L^2} \frac{1}{\sigma_\varepsilon} (\mu_3)_{i,j-\frac{1}{2},k}^s \frac{\varepsilon_{ijk}^{s+1} - \varepsilon_{i,j-1,k}^{s+1}}{\Delta y^2} + \frac{1}{\sigma_\varepsilon} (\mu_3)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^s \frac{\varepsilon_{i,j,k+1}^{s+1} - \varepsilon_{ijk}^{s+1}}{\Delta z^2} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} (\mu_3)_{i,j,k-\frac{1}{2}}^s \frac{\varepsilon_{ijk}^{s+1} - \varepsilon_{i,j,k-1}^{s+1}}{\Delta z^2} + \left\{ C_1 \mu_{ijk}^s \left[\left(\frac{u_{i,j+1,k}^{(s+1)} - u_{i,j-1,k}^{(s+1)}}{2L\Delta y} \right)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left(\frac{u_{i,j,k+1}^{(s+1)} - u_{i,j,k-1}^{(s+1)}}{2L\Delta z} \right)^2 \right] - C_2 \rho_{ijk}^s \varepsilon_{ijk}^s \right\} \frac{\varepsilon_{ijk}^{s+1}}{k_{ijk}^{s+1}} \quad (8)
 \end{aligned}$$

Уравнение (8) записаны для фиксированных (i), (k) и (j=1, 2, ...Ny). Учитывая, что значения неизвестных в точках (i-1, j, k), (i, j, k-1) и (i, j, k+1) пространства

уже вычислены или заранее известны из краевых условий (7), то коэффициенты уравнений, приведенные в работе [4] будут равны:

$$\begin{aligned}
 A_{ijk}^s &= -\frac{\Delta x}{2L\Delta y} (\rho v)_{ijk}^s - \frac{\Delta x}{L^2 \sigma_\varepsilon \Delta y^2} (\mu_3)_{i,j-\frac{1}{2},k}^s \\
 B_{ijk}^s &= (\rho u)_{ijk}^s + \frac{\Delta x}{L^2 \sigma_\varepsilon \Delta y^2} \left[(\mu_3)_{i,j+\frac{1}{2},k}^s + (\mu_3)_{i,j-\frac{1}{2},k}^s \right] + \frac{\Delta x}{\sigma_\varepsilon \Delta z^2} \left[(\mu_3)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^s + \frac{\Delta x}{\sigma_\varepsilon \Delta z^2} (\mu_3)_{i,j,k-\frac{1}{2}}^s \right] - D\Delta x, \\
 C_{ijk}^s &= \frac{\Delta x}{2L\Delta y} (\rho v)_{ijk}^s - \frac{\Delta x}{L^2 \sigma_\varepsilon \Delta y^2} (\mu_3)_{i,j+\frac{1}{2},k}^s
 \end{aligned} \quad (9)$$

$$E_{ijk}^s = -(\rho u)_{ijk}^s \varepsilon_{i-1,j,k}^{(s+1)} - \frac{\Delta x}{2\Delta z} (\rho w)_{ijk}^s [(\varepsilon)_{i,j,k+1}^{(s+1)} - (\varepsilon)_{i,j,k-1}^{(s+1)}] - \frac{\Delta x}{\sigma_\varepsilon \Delta z^2} \left[(\mu_3)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^s (\varepsilon)_{i,j,k+1}^{(s+1)} + (\mu_3)_{i,j,k-\frac{1}{2}}^s (\varepsilon)_{i,j,k-1}^{(s+1)} \right],$$

где

$$D = \left\{ C_1 \mu_{ijk}^s \left[\left(\frac{u_{i,j+1,k}^{(s+1)} - u_{i,j-1,k}^{(s+1)}}{2L\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{u_{i,j,k+1}^{(s+1)} - u_{i,j,k-1}^{(s+1)}}{2L\Delta z} \right)^2 \right] - C_2 \rho_{ijk}^s \varepsilon_{ijk}^s \right\} \frac{1}{k_{ijk}^{s+1}}$$

Здесь $\rho_{i,j,k}^{(s)}, u_{i,j,k}^{(s)}, k_{i,j,k}^{(s)}, v_{i,j,k}^{(s)}, w_{i,j,k}^{(s)}, \varepsilon_{i,j,k}^{(s)}, \mu_{i,j,k}^{(s)}$ и другие значения сеточных функций $\rho, u, v, w, k, \varepsilon, \mu$ для s -й итерации.

Для достоверности разработанного алгоритма и метода решения в качестве тестового варианта исследовалось истечение изотермической струи из

сопла квадратной формы ($L = 1$) и распространяющейся в затопленном потоке воздуха[5].

В расчетах безразмерные исходные значения кинетической энергии турбулентности струи варьируют от 0,001 до 0,1, а диссипация энергии турбулентности $\varepsilon = 0,005$. Во избежание деления на ноль

исходные значения окислителя (покоящегося воздуха) k и ε остались постоянными и равными $k=0,005$; $\varepsilon=0,0001$.

Основные результаты расчетов приведены в виде графиков на рисунках (1) - (7). На **рис. 1, а, б** приведены поперечные распределения продольной скорости по осям Oy и Oz в разных сечениях вдоль струи. Здесь надо отметить, что при выборе граничных условий требуется определить начальные данные k и ε на срезе сопла. Из-за трудоемкости экспериментальные измерения распределения характеристик турбулентности на срезе сопла, данные по определению кинетической энергии турбулентности работ очень мало, а скорость диссипации кинетической энергии турбулентности не имеет прямых экспериментальных аналогов. Поэтому для определения распределений характеристик турбулентности на срезе сопла пользуются различиями соотношениями. Так в работе [6] при выборе граничных условий для случая истечения из круглой трубы предложен способ нахождения скорости диссипации на срезе трубы при условии, что на срезе трубе известны распределения скорости и пульсационной энергии.

В [7] для исходных значений кинетической энергии турбулентности использовано соотношение

$$k_2 = \alpha_r u_2^2$$

где α_r - некоторая постоянная, которую можно интерпретировать как начальный уровень турбулентности. Однако в этой работе не приведен способ определения распределения скорости диссипации кинетической энергии турбулентности на срезе сопла. Распределения k и ε на срезе сопла определены выражениями $k_2 = \alpha u_2^2$, $\varepsilon = \beta k_2^{3/2} / L_1$, где α , β , L_1 - эмпирические постоянные. В работах [8,9,10] распределение характеристик турбулентности на срезе сопла найдено следующим образом:

$$\frac{(u'^2)^{1/2}}{u_2} = 0.45, \varepsilon = G_\mu \frac{k_2^{3/2}}{L_1}$$

Согласно приведенному анализу, на практике хорошо зарекомендовали себя соотношения для круглых струй

$$k_2 = \alpha u_2^2, \varepsilon_2 = \frac{k_2^{3/2}}{L_1} \quad (10)$$

Рисунок 1. Поперечное распределение продольной скорости по осям OY и OZ в разных сечениях вдоль струй на основе "k - ε" модели турбулентности

Рисунок 2. Поперечное распределение кинетической энергии турбулентности

В проведенных расчетах мы пользовались соотношениями (10), с некоторыми модификациями для трехмерных струй, содержащими некоторую эмпирическую информацию. «Произвольность» выбора этих величин должна обеспечить значения турбулентной вязкости (3), соответствующие действительной картине течения. Для получения лучшего согласования расчета, т.е. сохранение ядра струи, осуществлен подбор эмпирических констант модели турбулентности, подобно предложенному в [6], приведенных в таблице 1.

На **рис. 2. а, б** приведены поперечные распределения кинетической энергии турбулентности по осям Oy и Oz в разных сечениях при $k_2=0,01$, $k_2=0,1$ с набором констант, приведенных в таблице 1. Как следует из рисунка при $k=0,01$ в некоторой степени соответствует физике течения по сравнению, чем $k_2=0,1$ т.е. при $k_2=0,1$ не сохраняется ядро струи даже до одного калибра против трех калибров. На **рис. 3. а, б** приведено поперечное распределение диссипации кинетической энергии турбулентности по осям Oy и Oz в разных сечениях вдоль струи при исходных значениях $k_2=0,01$ и $k_2=0,1$. Пунктирная

линия соответствует при $k_2=0,1$, как следует из графика. На рис. 4 и 5 приведены границы зоны смешения вдоль струи и в разных сечениях по поперечному сечению. Как следует из рисунка в начальных

сечениях быстрое расширение границы зоны смешения, а при удалении от выходного сечения примерно на 5..7 калибров струя принимает круглую форму и границы зоны смешения асимптотически стремятся к линейному значению.

Рисунок 3. Поперечное распределение диссипации кинетической энергии турбулентности по осям OY и OZ в разных сечениях

Рисунок 4. Границы зоны смешения

Рисунок 5. Границы зоны смешения струй в разных сечениях на основе "k - ε" модели турбулентности

Рисунок 6. Граница зоны смешения

На рис. 6. приведены изменения границ зоны смешения вдоль струи при использовании алгебраической модели турбулентности (сплошная линия) и при использовании "k - ε" модели турбулентности (пунктирная линия). Судя по этим графикам можно сказать, что в начальных сечениях границы зоны

Рисунок 7. Поперечное распределение тангенциальной скорости по оси OY в разных сечениях

смешения при использовании "k - ε" модели шире, а при удалении от входного значения их разница уменьшается и закономерность изменения в автоматической области становится примерно одинаковой.

Это говорит о том, что в начальных сечениях "k - ε" модель турбулентности более точно описывает

физику процесса по сравнению с алгебраической моделью турбулентности. На **рис.7.** приведено поперечное распределение по оси Оу тангенциальной скорости в разных сечениях вдоль струи. Из рисунка следует, что в начальных сечениях тангенциальная скорость принимает значение как положительное, так и отрицательное, а при удалении от входного сечения значение w уменьшается и асимптотически стремится к нулю такие результат также были получены авторами работ [10]. Это объясняется тем, что в начальных сечениях за счет разности скоростей на границе образуются обратные токи, что, приводит к отрицательному значению w . При удалении от входного сечения разность скоростей на границах

двух потоков уменьшается и стремится к нулю тем самым, и тангенциальная скорость стремится к нулю.

Заключение. Разработана методика решения для исследования трехмерных турбулентных струйных течений на основе "k - ε" модели турбулентности. С помощью численного эксперимента определены значения кинематических параметров, а также значения эмпирической постоянной турбулентности, применение которых в модифицированной формуле Прандтля и двухпараметрической модели турбулентности дает удовлетворительное описание для трехмерных турбулентных струйных течений.

Список литературы.

1. Лапина Ю.В., Стрелеца М.Х. Внутренние течения газовых смесей. – М.: Наука, 1989. -368 с.
2. Булеев Н.И. Пространственная модель турбулентного обмена – М.: Наука, 1989. -343 с.
3. Васильев В.И., Голубцов Л.Г., Крашенинников С.Ю., Руди Ю.А. – Алма-Ата, аннотация доклада 1981, -87-88 с.
4. Махмудов С.А., Эшонхужаев Д.О. Исследование влияния исходных значений скорости на процессы перемешивания и распространения трехмерных турбулентных струй. Universum: технические науки: 2020. 11(80). URL:<https://7universum.com/ru/tech/archive/item/10940>
5. Жумаев З.Ш., Махмудов С.А., Хожиев С. Исследование начальных участков трехмерных турбулентных изотермических и неізотермических струй, истекающих из прямоугольного сопла и распространяющихся в спутном (затоленном) потоке воздуха. Самарканд, 1992, 53-54 с.
6. Кондратьев Л.В., Медведов С.В. Применение 2-ух параметрической модели турбулентности для расчета струйных течений // Физико-химические процессы в энергетических установках. Минск. 1983. 16-19 с.
7. Акатнов Н.И., Гульверт В.Р. Использование баланса пульсационной энергии пристеночных турбулентных течений // Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, 13-24 с.
8. Методы расчета турбулентных течений: Пер. с англ./Под ред. В. Колманна./ М.: Мир. 1984. -464 с.
9. Жумаев З.Ш. Исследование начального участка круглых турбулентных струй в изотермическом и неізотермическом случаях. АН УзССР, Ташкент, 1990, 13с.
10. Алиев Ф., Жумаев З.Ш., Струйные течения реагирующих газов. Ташкент. Фан 1987 г.