В.А. Камионко

ФГБОУ высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет», Новосибирск

В.М. Маракулин

ФГБОУ высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»; Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Аксиоматизация вектора Шепли в играх с априорными вероятностями образования коалиций

Аннотация. Вводится и изучается новая, обобщенная модель кооперативной игры с трансферабельной полезностью (ТП-игра), в которой кроме характеристической функции используются две дополнительные функции: отношений между игроками и вероятности образования коалиций, которые отражают основные черты взаимодействия людей в конкретных группах. Изучаются различные свойства функции вероятности и доказано, какие из них являются достаточными для ее трансформации в вероятностную меру. Обобщенный вектор Шепли определяется для нового класса игр как математическое ожидание игрока от его маргинального вклада в коалиции. Приведены необходимые и достаточные условия, чтобы обобщенный вектор Шепли полностью совпадал с классическим, введенным Шепли. Предлагается аксиоматизация функций значения на новом классе игр, которая также является расширением существующих аксиом в оригинальных ТП-играх. Доказано, что введенной аксиоматике соответствует (обобщенный) вектор Шепли, и только он.

Ключевые слова: *ТП-игра, вектор Шепли, аксиоматика, вероятность образования коалиции.*

Классификация JEL: C71, D70.

DOI: 10.31737/2221-2264-2020-46-2-1

1. Введение

Для справедливого распределения суммарного выигрыша тотальной коалиции между игроками Ллойд Шепли в своей фундаментальной работе (Shapley, 1952) предложил особое правило, которое в дальнейшем получило название «вектор Шепли». Значение (компонента вектора) Шепли для каждого игрока является математическим ожиданием его присоединения к какой-либо коалиции и вклада в нее (маргинальный вклад). Недостаток подхода Шепли заключается в том, что все вероятности кооперироваться принимаются одинаковыми, хотя понятно, что у различных игроков разное желание кооперироваться друг с другом. Решая эту проблему, Роберт Вебер (Weber, 1988) вводит концепцию вероятностного значения Шепли, отличающуюся от классического вектора Шепли использованием вероятности присоединения игрока к коалициям. В (Weber, 1988) доказано, что значение игры, которое удовлетворяет аксиомам линейности и «болвана» (в специфическом виде), является вероятностным значением Шепли,

т.е. существует (некоторое) вероятностное распределение, определяющее это значение наряду с выигрышами коалиций.

Пытаясь приблизить модель кооперативных игр к реальности, авторы работы (Aumann, Myerson, 1988) описывают игровую ситуацию в виде графа, где каждый игрок ассоциирован с вершиной, а наличие ребра между вершинами показывает желание и возможность кооперироваться у соответствующих игроков. В настоящей работе предлагается модель, совмещающая оба вышеназванных подхода: вероятности определены исходя из отношений между игроками. Кроме того, представляется важным определение способа кооперации игроков, так как даже при одинаковых отношениях между игроками формируются разнообразные коалиции и существуют различия в институциональных механизмах совместной работы. Например, при коллективизации люди были вынуждены работать вместе, даже если они не знакомы друг с другом. Напротив, при заключении контрактов в добровольном режиме человек будет предпочитать работать с теми, кого он знает и кому доверяет. В нашей статье мы изучим основополагающие свойства механизмов создания коалиций, основанных на понятии функции вероятности (это не вероятностное распределение!), и рассмотрим ряд примеров.

Другим значимым аспектом в теории вектора Шепли является его и только его соответствие ряду аксиом, которые служат математической интерпретацией некоторых принципов справедливого распределения выигрыша. Это означает, что если в обществе установлены особые условия на распределение дохода, то им будет соответствовать только вектор Шепли. Например, в (Мулен, 1991) рассматриваются способы аксиоматизации Ллойда Шепли и Пейтона Янга. Шепли использует аксиому аддитивности и аксиому болвана, в то время как Янг основывается на свойстве зависимости значения от маргинальных вкладов: это означает, что выигрыш игрока зависит только от дополнительных выигрышей, приносимых им в работу коалиций. Для построения аксиоматики в новой модели мы применим аналогичное свойство — зависимость от *ожидаемых* маргинальных вкладов, т.е. от вкладов в коалиции, умноженных на вероятность присоединения к соответствующей коалиции. В отличие от (Weber, 1988) в новой аксиоматике учитывается специфика изучаемой модели, в которой наличие вероятности первично, и уже затем, совместно с коалиционными возможностями, они формируют результат (значение) каждого игрока.

Работа организована следующим образом: в разд. 2 строится новая модель кооперативных игр, вводятся основные определения, изучаются свойства функции вероятности. Разд. 3 посвящен определению вектора Шепли в построенной модели и доказательству его свойств, являющихся аналогами свойств из классической теории. В разд. 4 доказывается, что эти свойства являются характеристическими, т.е. что им удовлетворяет только вектор Шепли.

2. Модель кооперативной ТП-игры с вероятностно-эндогенным образованием коалиций

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ — конечное непустое множество игроков. Рассмотрим кооперативную игру в виде характеристической функции $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$, причем для упрощения рассуждений примем $v(\emptyset) = 0$. Эта функция сопоставляет каждой коалиции из N ее возможный доход.

Пара (N, v) называется игрой в виде характеристической функции, или, в другой терминологии, — игрой с трансферабельной полезностью (ТП-игра). Такая модель недостаточно полно описывает экономическую и политические реальности, поскольку полностью исключает из рассмотрения различия в отношениях между игроками. Действительно, в качестве примера можно представить страны, которым целесообразно поддерживать экономическое сотрудничество, однако его могут существенно ограничивать религиозные, территориальные и другие противоречия. Ниже в работе представлено обобщение стандартной модели ТП-игр, которое учитывает подобные явления.

Определим функцию отношений между игроками $G: N \times N \rightarrow \mathbb{R}$, которая каждой паре $(i, j) \in N \times N$ сопоставляет желание, выраженное численно, игрока i кооперироваться с игроком j при $i \neq j$, а паре (i, i) — инициативную способность игрока i . Эту функцию удобно изображать в качестве весов на взвешенном ориентированном графе либо в виде матрицы, у которой элементу на строке i и столбце j соответствует значение $G(i, j)$. Например,

$$G = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 14 \\ 16 & 4 & 1 \\ 13 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Такая функция G показывает, что игрок 1 инициативен и дружен с остальными игроками. Игроки 2 и 3 положительно относятся к игроку 1, но между собой находятся в ссоре.

Предполагается, что игроки присоединяются к коалиции последовательно, поэтому можно ввести функцию $p: (i, S, G) \mapsto p(i, S, G) \in [0, 1]$, которая отражает вероятность присоединения игрока i к коалиции $S^i \subset N \setminus \{i\}$, $S = S^i \cup \{i\}$ при общественных взаимоотношениях G . Заметим, что в общем случае при таком определении функции p мы можем получить произвольную функцию, а не вероятностную меру, и понятие «вероятность» будет лишено привычного математического смысла, например если p тождественно равно 1. В дальнейшем будет показано, что при некоторых ограничениях функция вероятности p является вероятностной мерой на соответствующих пространствах событий. Обратим внимание, что аргументом функции p будет S , но присоединяется игрок к коалиции $S^i = S \setminus \{i\}$.

То, что мы используем разные функции вероятности, связано с разными механизмами формирования объединений в обществе. Например, нового игрока может пригласить лидер, а могут все игроки из коалиции.

Четверку (N, v, p, G) мы называем ТП-игрой с *вероятностно-эндогенным* образованием коалиций.

2.1. Свойства функции вероятности

В случае, когда функция отношений G не имеет значения (не используется) для текущего анализа, будем писать p_s^i вместо $p(i, S, G)$. Положим

$$p_s = \sum_{i \in S} p_s^i. \quad (1)$$

Для определяемых ниже полных функций вероятности величина p_s представляет вероятность образования коалиции S . Это справедливо, так как коалиция S образуется тогда и только тогда, когда какой-либо игрок i присоединяется к коалиции $S \setminus \{i\}$.

Последовательное присоединение. Игрок i может присоединиться к коалиции $S \setminus \{i\}$ только если она уже образована, поэтому должно быть $p_s^i \leq p_{S \setminus \{i\}}$. Это условие описывает базовый принцип формирования коалиций. Данное требование довольно слабое и будет выполнено при следующем свойстве полноты, которое обладает уже большим содержательным смыслом.

Определение 1 (полнота). Функция вероятности $p(\cdot)$ называется полной, если:

1) в начальной ситуации всегда найдется игрок, который проявил инициативу, т.е. начал работать первым, —

$$\sum_{i \in N} p_{\{i\}}^i = 1; \quad (2)$$

2) пусть создана коалиция. Тогда вероятность присоединения к ней какого-то нового игрока из $N \setminus S$ равна 1, т.е. $\sum_{j \in N \setminus S} p_{S \cup \{j\}}^j / p_s = 1$ при $p_s \neq 0$ и $\sum_{j \in N \setminus S} p_{S \cup \{j\}}^j = p_s = 0$ в остальных случаях.

Термин «полнота» используется по причине того, что, как мы покажем далее, при данных условиях все игроки полностью вовлечены в деятельность сообщества.

Вторую часть определения полноты можно записать в эквивалентном виде

$$\sum_{j \in N \setminus S} p_{S \cup \{j\}}^j = p_s. \quad (3)$$

Таким образом, в силу (1) вероятность создания коалиции и вероятность присоединения к ней какого-либо игрока совпадают. Условие (3) легко интерпретируется в игровой ситуации: если коалиция S была создана, то к ней обязательно присоединится еще какой-то игрок, если свободные игроки вообще имеются. В дальнейшем мы будем использовать именно выражение (3).

Заметим, что в (Weber, 1988) были введены соотношения, аналогичные (2) и (3). Они применяются как критерий эффективности построенного Вебером вероятностного значения Шепли.

В дальнейшем мы будем сужать класс функций отношений между игроками G : например брать только положительнозначные G ,

для того чтобы какая-то полезная для теоретического построения функция p была полной.

Следующие два утверждения показывают, что при полной функции вероятности все игроки вовлечены в *процесс игровой жизнедеятельности* и тотальная коалиция будет создана. Эту ситуацию можно интерпретировать как включение всех людей в общую работу и отсутствие автономно функционирующих частей общества.

Утверждение 1. При выполнении (2) и (3) событие «была создана какая-то коалиция размером k » случится с вероятностью 1:

$$\sum_{S \subseteq N: |S|=k} p_S = 1, \quad k=1, \dots, n.$$

В частности, из этого утверждения следует, что $0 \leq p_S \leq 1$ для любой коалиции $S \subseteq N$, в то время как в определении (1) допускалось $p_S > 1$, если функция вероятности неполная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По индукции. При $k=1$ в силу определения $p_{\{i\}} = p_{\{i\}}^i$, поэтому выражение (2) можно переписать в виде

$$\sum_{S \subseteq N: |S|=1} p_S = 1.$$

Пусть $k > 1$. Воспользуемся индуктивным предположением и последовательно применим (3) и (1):

$$1 = \sum_{S \subseteq N: |S|=k-1} p_S = \sum_{S \subseteq N: |S|=k-1} \sum_{j \notin S} p_{S \cup \{j\}}^j = \sum_{T \subseteq N: |T|=k} p_T. \quad \blacksquare$$

Утверждение 2. Если $p(\cdot)$ полна, то вероятность того, что (любой) игрок присоединится к какой-либо коалиции, возможно пустой, равна 1:

$$\sum_{S \subseteq N: S \ni j} p_S^j = 1 \quad \forall j \in N.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $k \in N$. Далее воспользуемся требованием (2), а затем – (3):

$$1 = \sum_{i=1}^n p_{\{i\}} = p_{\{k\}}^k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n p_{\{i\}}^i = p_{\{k\}}^k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_{\{i,j\}}^j.$$

Теперь извлечем слагаемые вида $p_{\{i,k\}}^k$ из двойной суммы, а затем, сгруппировав слагаемые с одинаковым нижним индексом в двойной сумме, получим вероятности образования всех двухэлементных коалиций без игрока k :

$$\begin{aligned} & \left(p_{\{k\}}^k + \sum_{i=1, i \neq k}^n p_{\{i,k\}}^k \right) + \sum_{i=1, i \neq k}^n \sum_{j \neq i, j \neq k}^n p_{\{i,j\}}^j = (\dots) + \sum_{i=1, i \neq k}^{n-1} \sum_{j=i+1, j \neq k}^n p_{\{i,j\}}^j = \\ & = (\dots) + \sum_{i=1, i \neq k}^{n-1} \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq k}}^n \sum_{l \neq i, j}^n p_{\{i,j,l\}}^l. \end{aligned}$$

Далее проведем аналогичные действия для коалиций размера 3, ..., $n-1$, в результате получая

$$\begin{aligned} & \left[p_{\{k\}}^k + \sum_{i=1, i \neq k}^n p_{\{i,k\}}^k + \dots + \sum_{i_1=1, i_1 \neq k}^2 \sum_{i_2=i_1+1, i_2 \neq k}^3 \dots \sum_{\substack{i_{n-2}=i_{n-3}+1, \\ i_{n-2} \neq k}}^n p_{\{i_1, \dots, i_{n-2}, k\}}^k \right] + \\ & + \sum_{i_1=1, i_1 \neq k}^1 \sum_{\substack{i_2=i_1+1, \\ i_2 \neq k}}^2 \dots \sum_{\substack{i_{n-1}=i_{n-2}+1, \\ i_{n-1} \neq k}}^n p_{\{i_1, \dots, i_{n-1}\}} = [\dots] + p_{N \setminus \{k\}} = \\ & = p_{\{k\}}^k + \sum_{i=1, i \neq k}^n p_{\{i,k\}}^k + \dots + \sum_{i_1=1, i_1 \neq k}^2 \sum_{i_2=i_1+1, i_2 \neq k}^3 \dots \sum_{\substack{i_{n-2}=i_{n-3}+1, \\ i_{n-2} \neq k}}^n p_{\{i_1, \dots, i_{n-2}, k\}}^k + p_{N \setminus \{k\}}^k. \end{aligned}$$

Последнее выражение представляет сумму вероятностей присоединения игрока k ко всем коалициям размера от 0 до $n-1$, а это и есть вероятность присоединения k к какой-либо коалиции. ■

Наличие свойства полноты функции вероятности p позволяет работать с этой функцией как с дискретной вероятностной мерой на некоторых пространствах элементарных событий. Например, для конкретного игрока i можно определить пространство

$$\Omega_i = \{\text{игрок } i \text{ присоединился к коалиции } T \mid i \notin T, T \subseteq N\}.$$

Это может быть полезно для моделирования, но в настоящем исследовании мы не будем касаться данной особенности полных функций.

Рассмотрим канонический пример функции вероятности.

Пример 1 (равновероятное присоединение). Данная функция вероятности не зависит от отношений G и соответствует множителям в определении вектора Шепли $p(i, S, G) = (n - |S|)! (|S| - 1)! / n!$.

Полнота выполнена, так как $\sum_{i \in N} p_{\{i\}}^i = n / n = 1$, а также для $S \neq N$:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N \setminus S} p_{S \cup \{i\}}^i &= (n - |S|) \frac{(n - |S \cup \{i\}|)! (|S \cup \{i\}| - 1)!}{n!} = \frac{(n - |S|)! |S|!}{n!} = \\ &= \frac{|S| (n - |S|)! (|S| - 1)!}{n!} = \sum_{j \in S} p_S^j. \end{aligned}$$

В дальнейшем мы приведем более нетривиальные примеры, но для начала рассмотрим следующее свойство.

Определение 2 (анонимность). Функция вероятности *анонимна*, если для всех игроков i , коалиций $S \ni i$, функций отношений G и для любой перестановки игроков $\pi: N \rightarrow N$ имеет место $p(\pi(i), \pi(S), G) = p(i, S, \pi(G))$, где $\pi(G)$ — такая функция взаимоотношений, что $\pi(G)(i, j) = G(\pi(i), \pi(j))$.

Наличие этого свойства показывает, что вероятность присоединения не зависит от имен и нумераций игроков. Это означает, что при выбранном механизме формирования коалиций не будут учитываться характеристики игрока, которые не повлияли на отношение к нему других игроков. Очевидно, что равновероятное присоединение анонимно и, кроме того, ему будет соответствовать любая полная анонимная функция вероятности при условии равных инициативных способностей у игроков и отношениях между ними. Этот факт устанавливается в следующем утверждении.

Утверждение 3. Пусть p анонимна и полна, а G такая, что $\forall i, j \in N \ G(i, i) = G(j, j)$ и для всех $i \neq j, k \neq h$ выполнено $G(i, j) = G(k, h)$. Тогда $p(i, S, G) = (n - |S|)! (|S| - 1)! / n!$.

Доказательство. Для начала заметим, что $\pi(G) = G$ для любой перестановки π , так как при $i \neq j$ равенства $G(i, i) = G(\pi(i), \pi(i))$ и $G(i, j) = G(\pi(i), \pi(j))$ верны в силу условий утверждения. Теперь мы можем воспользоваться индукцией по размеру коалиции S .

При $|S| = 1$ имеем $p(i, \{i\}, G) = p(j, \{j\}, G) \ \forall i, j$, так как, взяв пере-

становку π такую, что $\pi(i) = j$, и используя свойство анонимности, получим $p(i, \{i\}, G) = p(i, \{i\}, \pi(G)) = p(\pi(i), \pi(\{i\}), G) = p(j, \{j\}, G)$.

Воспользуемся полнотой и выпишем (2):

$$1 = \sum_{i \in N} p(i, \{i\}, G) = n p(i, \{i\}, G),$$

откуда имеем $p(i, \{i\}, G) = 1/n = (n-1)!(1-1)!/n!$.

Пусть утверждение верно для коалиции S . Осталось показать, что оно выполнено и для $S \cup \{i\}$ при любых $i \notin S$. Зафиксируем $i \notin S$, возьмем произвольного игрока $j \notin S$ и перестановку π , меняющую местами только i и j , и воспользуемся анонимностью

$$p(i, S \cup \{i\}, G) = p(i, S \cup \{i\}, \pi(G)) = p(\pi(i), \pi(S \cup \{i\}), G) = p(j, S \cup \{j\}, G).$$

Далее в силу (1) и (3):

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N \setminus S} p(i, S \cup \{i\}, G) &= \sum_{j \in S} p(j, S, G) = |S|(n-|S|)!(|S|-1)!/n!, \\ (n-|S|)p(i, S \cup \{i\}, G) &= |S|(n-|S|)!(|S|-1)!/n! - \end{aligned}$$

окончательно получаем

$$p(i, S \cup \{i\}, G) = (n-|S|-1)!|S|!/n! = (n-|S \cup \{i\}|)!(|S \cup \{i\}|-1)!/n!. \blacksquare$$

Следующие два примера функций вероятности определяются только для таких отношений G , что $G(i, j) > 0 \forall i, j$.

Пример 2 (нового игрока приглашает последний пришедший). Вероятность игрока i начать работать одному зависит от его предпринимательской способности, а его вероятность присоединиться к коалиции $S \setminus \{i\}$ есть сумма произведений вероятностей игроков j из $S \setminus \{i\}$ присоединиться к $S \setminus \{i, j\}$ на отношение между i и j , нормированное по сумме отношений между j и игроками, не входящими в $S \setminus \{i\}$:

$$p(i, S, G) = \begin{cases} G(i, i) / \sum_{j \in N} G(j, j), & \text{если } S = \{i\}; \\ \sum_{j \in S \setminus \{i\}} \left(p(j, S \setminus \{i\}, G) G(j, i) / \sum_{k \in S \setminus \{i\}} G(j, k) \right) & \text{— в остальных случаях.} \end{cases}$$

Докажем полноту выбранной функции p . При

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} p_{\{i\}}^i &= \sum_{i \in N} p(i, \{i\}, G) = \sum_{i \in N} G(i, i) / \sum_{j \in N} G(j, j) = 1, \\ \sum_{i \notin S} p_{S \cup \{i\}}^i &= \sum_{i \notin S} \sum_{j \in S} \left(p(j, S, G) G(j, i) / \sum_{k \in S} G(j, k) \right) = \sum_{j \in S} \sum_{i \notin S} \left(p(j, S, G) G(j, i) / \sum_{k \in S} G(j, k) \right) = \\ &= \sum_{j \in S} p(j, S, G) \sum_{i \notin S} G(j, i) / \sum_{k \in S} G(j, k) = \sum_{j \in S} p(j, S, G) = p_S. \end{aligned}$$

Анонимность доказывается с помощью индукции по размеру S . Возьмем произвольную перестановку π , и для $|S| = 1$ имеем

$$p(\pi(i), \pi(\{i\}), G) = \frac{G(\pi(i), \pi(i))}{\sum_{j \in N} G(\pi(j), \pi(j))} = \frac{\pi(G)(i, i)}{\sum_{j \in N} \pi(G)(j, j)} = p(i, \{i\}, \pi(G)).$$

Аналогично проводится проверка анонимности и при $|S| > 1$, ее мы опустим из-за громоздкой записи формулы.

Пример 3 (приглашают все участники коалиции). Отличие от примера 2 состоит в том, что вероятность игрока i присоединиться к непустой коалиции $S \setminus \{i\}$ равна произведению вероятности образования этой коалиции на сумму отношений между i и игроками из $S \setminus \{i\}$, дополнительно нормированную по таким же суммам для всех игроков, не входящих в $S \setminus \{i\}$:

$$p(i, S, G) = \begin{cases} G(i, i) / \sum_{j \in N} G(j, j), & \text{если } S = \{i\}; \\ \left(\sum_{j \in S \setminus \{i\}} p(j, S \setminus \{i\}, G) \right) \sum_{j \in S \setminus \{i\}} G(j, i) / \sum_{j \in S \setminus \{i\}} \sum_{k \notin S \setminus \{i\}} G(j, k) - \\ & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Полнота и анонимность данной функции проверяется аналогично примеру 2.

3. Вектор Шепли в вероятностно-эндогенной кооперативной ТП-игре

Определение 3. Пусть дана игра (N, v, p, G) , где p является полной функцией вероятности. Тогда вероятностный вектор Шепли $\varphi = (\varphi_i)_{i \in N}$ определяется по правилу $\varphi_i(v, p, G) = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} p(i, S, G)(v(S) - v(S \setminus \{i\}))$.

Смысл определения в том, что компонента вектора Шепли является математическим ожиданием игрока, зависящим исключительно от его вклада в коалицию, к которой он присоединяется, – маргинального вклада. По определению мы рассматриваем следующую функцию маргинального вклада игрока i в коалицию $S \subseteq N$: $m(S, i) = v(S) - v(S \setminus \{i\})$. Теперь φ_i можно также переписать в виде:

$$\varphi_i(v, p, G) = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} p_S^i m(S, i). \quad (4)$$

В данном разделе будут рассмотрены свойства вектора Шепли в эндогенной кооперативной ТП-игре, а в следующем – описан экономический смысл этих свойств и доказано, что всем им удовлетворяет только значение Шепли.

Пусть $S_1, \dots, S_{2^{n-1}}$ – все различные коалиции, включающие игрока i , $p_{S_1}^i, \dots, p_{S_{2^{n-1}}}^i$ – соответствующие вероятности присоединения. Теперь можно определить вектор ожидаемых маргинальных вкладов:

$$E_i(v, p, G) = (p_{S_1}^i m(S_1, i), p_{S_2}^i m(S_2, i), \dots, p_{S_{2^{n-1}}}^i m(S_{2^{n-1}}, i)).$$

Очевидно, что у каждого игрока компонента вектора Шепли зависит только от его вектора ожидаемых маргинальных вкладов. Из формулы (4) легко заметить, что вектор Шепли удовлетворяет аксиоме *болована*¹ и аддитивен по параметру v , т.е. для любых двух характеристических функций v и w выполнено $\varphi_i(v + w, p, G) = \varphi_i(v, p, G) + \varphi_i(w, p, G)$.

Напомним, что в оригинальной терминологии отображение ψ из множества характеристических функций в $\mathbb{R}$ называется *оператором значения*, если для всех v выполнено $\sum_{i \in N} \psi_i(v) = v(N)$.

¹ Эта аксиома требует, чтобы значение игрока с нулевым маргинальным вкладом в каждой коалиции было равно нулю.

Следующее утверждение покажет, что (4) удовлетворяет аналогичному требованию.

Утверждение 4 (эффективность). Для всех характеристических функций v , функций отношений G и полных функций вероятности p выполнено $\sum_{i \in N} \varphi_i(v, p, G) = v(N)$.

Доказательство. Идея доказательства похожа на доказательство утверждения 2 — мы будем группировать вероятности при одинаковых $v(S)$ и последовательно пользоваться свойством (3) для зануления всех членов, кроме $v(N)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \varphi_i(v, p, G) &= \sum_{i \in N} \sum_{S \ni i} p_S^i (v(S) - v(S \setminus \{i\})) = \\ &= \sum_{i=1}^n p_{\{i\}}^i v(\{i\}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{\{i,j\}}^j (v(\{i,j\}) - v(\{i\})) + \\ &+ \dots = \sum_{i=1}^n \left(p_{\{i\}}^i - \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{\{i,j\}}^j \right) v(\{i\}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{\{i,j\}}^j v(\{i,j\}) + \dots, \end{aligned}$$

воспользовавшись (3), получаем

$$\sum_{i=1}^n 0 \times v(\{i\}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{\{i,j\}}^j v(\{i,j\}) + \dots = \sum_{i=1}^n p_N^i v(N) = v(N).$$

Последнее равенство следует из утверждения 1, так как $\sum_{i=1}^n p_N^i = p_N = 1$. ■

Следующее важное свойство вероятностного вектора Шепли называется *анонимность*, оно похоже на соответствующее свойство функции вероятности. Перед его формулировкой определим для функций v , p и перестановки $\pi: N \rightarrow N$ функции $\pi(v)$ и $\pi(p)$ по правилам:

$$\pi(v)(S) = v(\pi(S)),$$

$$\pi(p)(i, S, G) = p(\pi(i), \pi(S), G) \quad \forall i \in N, \forall S \subseteq N, S \ni i.$$

Далее мы покажем, что вероятностный вектор Шепли в эндогенной кооперативной ТП-игре является *анонимным* в следующем смысле: для любой перестановки π выполнено $\varphi_{\pi(i)}(v, p, G) = \varphi_i(\pi(v), \pi(p), G)$. Действительно, из определения несложно заключить, что $\varphi_{\pi(i)}(v, p, G) = \sum_{S \ni \pi(i)} p(\pi(i), S, G) (v(S) - v(S \setminus \{\pi(i)\}))$. Поменяем переменную суммирования с S на $\pi(S)$:

$$\begin{aligned} &\sum_{\pi(S) \ni \pi(i)} p(\pi(i), \pi(S), G) (v(\pi(S)) - v(\pi(S) \setminus \{\pi(i)\})) = \\ &\sum_{\pi(S) \ni \pi(i)} \pi(p)(i, S, G) (\pi(v)(S) - \pi(v)(S \setminus \{\pi(i)\})) = \\ &= \sum_{S \ni i} \pi(p)(i, S, G) (\pi(v)(S) - \pi(v)(S \setminus \{i\})) = \varphi_i(\pi(v), \pi(p), G). \end{aligned}$$

Заметим, что мы нигде не используем перестановку функции отношений G . Это связано с тем, что G входит в запись вектора Шепли опосредовано, через функцию вероятности p . Нетрудно проверить, что, если p анонимна, то вместо перестановки на p можно применить перестановку на G : $\varphi_{\pi(i)}(v, p, G) = \varphi_i(\pi(v), p, \pi(G))$.

В итоге мы показали, что вектор Шепли в ТП-играх с вероятностно-эндогенным образованием коалиций удовлетворяет аксиомам, которые аналогичны тем, что были введены Янгом и Шепли. Кроме того, если взять функцию вероятности p из примера 1 предыдущего раздела, мы увидим, что вектор ψ , отвечающий классическому определению Шепли, будет частным случаем введенного нами вектора, т.е.

$$\psi_i(v) = \varphi_i(v, p, G) = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \frac{(n-|S|)! (|S|-1)!}{n!} (v(S) - v(S \setminus \{i\})).$$

Наглядным приложением вектора Шепли является измерение политической силы различных агентов. В (Winter, 2002) рассматривается его использование в ТП-играх, а именно – в так называемых простых играх и играх взвешенного мажоритарного большинства, которые описывают взаимодействия членов парламента. Модель ТП-игр с вероятностно-эндогенным образованием коалиций и определенное для нее значение Шепли позволяют производить более точную оценку силы влияния партий друг на друга, учитывая отношения между их членами, предвыборные обязательства перед избирателями и др.

Пример 4 (игра взвешенного мажоритарного большинства). Пусть дано множество партий $N = \{1, 2, 3, 4\}$ и их размеры $w = (110, 60, 46, 44)$. Для простого большинства $q = 131$ функция выигрыша определяется по правилу

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i \geq q; \\ 0 & \text{— в остальных случаях.} \end{cases}$$

Это означает, что законопроект принимается и коалиция выигрывает, если сумма голосов от каждой партии больше заявленного числа. Будем считать, что каждая партия полностью повторяет голос своего лидера, а отношения между лидерами и их инициативные способности представлены матрицей

$$G = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 30 & 13 \\ 14 & 5 & 10 & 15 \\ 25 & 15 & 4 & 30 \\ 10 & 5 & 16 & 7 \end{bmatrix}.$$

В примере 3 приведен релевантный механизм формирования объединений между партиями, в котором фигурирует соответствующая функция вероятности p . Используя ее, мы можем рассчитать значение Шепли каждого игрока: $(0,31, 0,16, 0,36, 0,17)$. Мы видим, что, несмотря на свой малый размер, третья партия обладает наибольшей значимостью. Это связано с тем, что к ней чаще всего обращается инициативная первая партия с предложением об объединении голосов для принятия законопроекта. Ясно, что в реальной ситуации первая партия предложит ей какие-то политические дивиденды за сотрудничество, поэтому мы можем говорить, что значение Шепли показывает, какой силой и свободой обладает каждый игрок во внутрипарламентских переговорах.

Отношения G можно измерять, учитывая данные предвыборные обещания, высказывания в СМИ членов одних партий о других, проводимых встречах и пр.

Пример 4 показывает, что высокая инициатива не всегда идет на пользу: первая партия обременена большим количеством предвыборных обязательств и поэтому ради сохранения политической репутации должна идти на уступки другим членам парламента.

В процессе публикации настоящей работы рецензент отметил, что в (Шварц, 2010) произведен обзор оценок влияния, основанных на индексах Банцафа и Шепли–Шубика и следующих аналогичной идее, что и рассмотрение взаимоотношений игроков, а именно — учету предпочтений участников. Используя этот подход, был произведен анализ реальной политической системы (Aleskerov, Holler, Kamalova, 2014). В отличие от этих индексов влияния построенная модель эндогенных кооперативных ТП-игр и соответствующий вектор Шепли более универсальны и поэтому применимы в более широком классе задач, например в задачах интерпретации предсказаний алгоритмов машинного обучения, рассматриваемых, к примеру, в (Strumbelj, Kononenko, 2014).

4. Характеризация вектора Шепли

Рассмотрим несколько свойств, которые соответствуют справедливым условиям распределения выигрышей между игроками:

- 1) сумма выигрышей игроков равна выигрышу коалиции, состоящей из всех игроков;
- 2) выигрыш игрока зависит только от его ожидаемого выигрыша от присоединения ко всем возможным коалиции, т.е. от маргинального вклада в коалиции, умноженного на соответствующие вероятности присоединения;
- 3) выигрыши не зависят от имен и упорядочиваний игроков, т.е. при одинаковых ожиданиях игроки имеют равные выигрыши;
- 4) предположим, даны две игры с одинаковыми отношениями между игроками. В следующей игре те же отношения между игроками, но выигрыш каждой коалиции равен сумме выигрышей этой же коалиции в двух данных играх. Тогда суммарный выигрыш игрока в двух первых играх равен выигрышу этого игрока в третьей игре.

Для пространства всех игр (N, v, p, G) с полными функциями вероятности p можно рассматривать (некоторые) функции значения игры $\varphi: (v, p, G) \mapsto \varphi(v, p, G) \in \mathbb{R}^n$.

Выигрыш игрока i в игре (v, p, G) обозначим через $\varphi_i(v, p, G)$. Теперь мы можем сформулировать ряд математических аксиом для функции выигрыша φ , используя вышеописанные свойства:

- 1) *эффективность* — $\sum_{i \in N} \varphi_i(v, p, G) = v(N)$;

2) выигрыш зависит только от вектора ожидаемых маргинальных вкладов

$$\varphi_i(v, p, G) = f_i(E_i(v, p, G)) = f_i(p_{S_1}^i m(S_1, i), p_{S_2}^i m(S_2, i), \dots, p_{S_{2^{n-1}}}^i m(S_{2^{n-1}}, i)),$$

при этом каждая f_i дважды непрерывно-дифференцируема;

3) анонимность — для любой биекции $\pi: N \rightarrow N$ и любых v, G , полных p выполнено $\varphi_{\pi(i)}(v, p, G) = \varphi_i(\pi(v), \pi(p), G)$;

4) аддитивность — $\varphi_i(w + v, p, G) = \varphi_i(w, p, G) + \varphi_i(v, p, G) \quad \forall i \in N$ для любых характеристических функций v и w , функций отношений G и полных функций вероятности p .

Теорема 1 (о характеристизации). Существует только одно отображение φ , ставящее в соответствие игре (N, v, p, G) вектор выигрышей, удовлетворяющий четырем вышеописанным аксиомам, и это — вектор Шепли:

$$\varphi_i(v, p, G) = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} p(i, S, G) m(S, i).$$

Для доказательства теоремы 1 используется исправленная и переработанная идея из работы (Loehman, Whinston, 1974): основное утверждение будет следовать из серии вспомогательных. Для начала перепишем функцию f в виде

$$f_i(p_{S_1}^i m(S_1, i), \dots, p_{S_{2^{n-1}}}^i m(S_{2^{n-1}}, i)) = F_i(p_{S_1}^i, m(S_1, i), \dots, p_{S_{2^{n-1}}}^i, m(S_{2^{n-1}}, i)).$$

Здесь переменные функции F — это разделенные переменные из произведений, фигурирующих в определении f . Подобная запись позволяет упростить вид частных производных, причем не ограничивая общность.

Лемма 1. При $j \neq i$ и всех $S, T \subseteq N$ таких, что $i \in S, j \in T$, выполнены тождества:

$$\frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(T, j)} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 F_i(\cdot)}{\partial m(S, i) \partial m(T, j)} = 0. \quad (6)$$

Доказательство. Выражение (5) следует из аксиомы 2, т.е. из независимости от чужих маргинальных вкладов. Из двойной непрерывной дифференцируемости следует

$$\frac{\partial^2 F_i(\cdot)}{\partial m(S, i) \partial m(T, j)} = \frac{\partial}{\partial m(S, i)} \left[\frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(T, j)} \right] = 0. \blacksquare$$

Лемма 2. Функция F_i представима в виде суммы

$$F_i(\cdot) = \sum_{S \subseteq N} \frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(S, i)} m(S, i). \quad (7)$$

Доказательство. Для упрощения записи в данном пункте будем писать $\varphi_i(v)$ вместо $\varphi_i(v, p, G)$. Воспользуемся аддитивностью φ и покажем ее однородность первой степени. Пусть $\lambda \in \mathbb{Z}_{++}$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_i(\lambda v) &= \varphi_i((\lambda - 1)v + v) = \varphi_i((\lambda - 1)v) + \varphi_i(v) = \varphi_i((\lambda - 2)v + v) + \varphi_i(v) = \\ &= \varphi_i((\lambda - 2)v) + 2\varphi_i(v) = \dots = \varphi_i(v) + (\lambda - 1)\varphi_i(v) = \lambda\varphi_i(v). \end{aligned}$$

Пусть $\lambda = -1$. Для любых w, v выполняется $\varphi_i(w) = \varphi_i(w + v + (-v)) = \varphi_i(w) + \varphi_i(v) + \varphi_i(-v)$. Далее, вычитая $\varphi_i(w)$ из обеих частей, получим $\varphi_i(-v) = -\varphi_i(v)$. Отсюда следует, что при $\lambda = 0$ верно $\varphi_i(0 \times w) = \varphi_i(v + (-v)) = \varphi_i(v) + \varphi_i(-v) = 0 \times \varphi_i(w)$, а при $\lambda \in \mathbb{Z}_-$ верно $\varphi_i(\lambda v) = \varphi_i(-|\lambda|v) = -|\lambda|\varphi_i(v) = \lambda\varphi_i(v)$.

Если $\lambda \in \mathbb{Q}$, то $\lambda = z/q$ для некоторых $z \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}_{++}$. Так как $\varphi_i(v) = \varphi_i(qv/q) = q\varphi_i(v/q)$, то после деления на q мы получаем $\varphi_i(v)/q = \varphi_i(v/q)$, отсюда $\varphi_i(\lambda v) = \varphi_i(zv/q) = \varphi_i(zv)/q = z\varphi_i(v)/q = \lambda\varphi_i(v)$.

Осталось доказать однородность при $\lambda \in \mathbb{R}$. Для фиксированного λ существует последовательность $\{q_k\} \subset \mathbb{Q}$ такая, что $q_k \rightarrow \lambda$. В силу аксиомы 2 функция φ_i непрерывна, поэтому $\varphi_i(q_k v) \rightarrow \varphi_i(\lambda v)$, а так как $\varphi_i(q_k v) = q_k \varphi_i(v) \rightarrow \lambda \varphi_i(v)$, то $\varphi_i(\lambda v) = \lambda \varphi_i(v)$.

Мы доказали однородность φ_i , теперь воспользуемся определением функций f_i и F_i :

$$\begin{aligned} \lambda F_i(p_{S_1}^i, m(S_1, i), p_{S_2}^i, m(S_2, i), \dots, p_{S_{2^{n-1}}}^i, m(S_{2^{n-1}}, i)) &= \\ = \lambda f_i(p_{S_1}^i m(S_1, i), p_{S_2}^i m(S_2, i), \dots, p_{S_{2^{n-1}}}^i m(S_{2^{n-1}}, i)) &= \\ = \lambda \varphi_i(v) = \varphi_i(\lambda v) = f_i(p_{S_1}^i \lambda m(S_1, i), p_{S_2}^i \lambda m(S_2, i), \dots, p_{S_{2^{n-1}}}^i \lambda m(S_{2^{n-1}}, i)) &= \\ = F_i(p_{S_1}^i, \lambda m(S_1, i), p_{S_2}^i, \lambda m(S_2, i), \dots, p_{S_{2^{n-1}}}^i, \lambda m(S_{2^{n-1}}, i)). \end{aligned}$$

Мы получили, что F — однородная функция первой степени по аргументам m , поэтому (7) следует из теоремы Эйлера. ■

Замечание 1. Отметим, что для доказательства леммы 2 нам была необходима однородность по маргинальным вкладам, которая, как мы показали, следует из аддитивности и непрерывности φ . Поэтому аксиому 3 можно было бы заменить более слабым условием однородности, но мы оставляем эту аксиому, чтобы показать соответствие с классической теорией вектора Шепли.

Лемма 3. *Выполняются соотношения:*

$$1 = \sum_{i \in N} \frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(N, i)}, \quad (8)$$

$$\sum_{i \in S} \frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(S, i)} = \sum_{j \in N \setminus S} \frac{\partial F_j(\cdot)}{\partial m(S \cup \{j\}, j)} \quad \forall S \subset N. \quad (9)$$

Заметим, что равенство (9) похоже на выражение (3) из определения полноты функции вероятности p , а (8) — соответствующему соотношению из утверждения 1 при $k = n$. В действительности же, они в точности соответствуют друг другу, потому что, как мы докажем в лемме 5, верно представление $\partial F_i(\cdot)/\partial m(S, i) = p_{S_1}^i$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из аксиомы 1 имеем

$$\sum_{i \in N} F_i(\cdot) = v(N). \quad (10)$$

Взяв частные производные по $v(N)$, получим

$$1 = \sum_{i \in N} \frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial v(N)} = \sum_{i \in N} \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(S, i)} \frac{\partial m(S, i)}{\partial v(N)}.$$

Так как по определению $m(S, i) = v(S) - v(S \setminus \{i\})$, то

$$\frac{\partial m(S, i)}{\partial v(N)} = \begin{cases} 0, & \text{если } S \neq N; \\ 1, & \text{если } S = N. \end{cases}$$

Соединяя два предыдущих выражения, имеем $1 = \sum_{i \in N} \partial F_i(\cdot) / \partial m(N, i)$.

Теперь продифференцируем (10) по $v(T)$, $T \subset N$:

$$0 = \sum_{i \in N} \frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial v(T)} = \sum_{i \in N} \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(S, i)} \times \frac{\partial m(S, i)}{\partial v(T)}.$$

Из $m(S, i) = v(S) - v(S \setminus \{i\})$ заключаем, что

$$\frac{\partial m(S, i)}{\partial v(T)} = \begin{cases} 0, & \text{если } S \neq T \text{ и } S \setminus \{i\} \neq T; \\ 1, & \text{если } S = T, i \in T; \\ -1, & \text{если } S \setminus \{i\} = T, i \in N \setminus T. \end{cases}$$

Подставив данное выражение в предыдущее равенство, можно записать

$$0 = \sum_{i \in T} \frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(T, i)} - \sum_{i \in N \setminus T} \frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(T \cup \{i\}, i)},$$

что завершает доказательство леммы. ■

Лемма 4. Величины $\partial F_i(\cdot) / \partial m(S, i)$, фигурирующие в лемме 2, не зависят от $m(T, i)$, $\forall T \subseteq N$, $i \in T$.

Доказательство. Рассмотрим случай $S = N$.

Продифференцируем (8) по $m(N, k)$: $0 = \sum_{i \in N} \partial^2 F_i(\cdot) / \partial m(N, k) \partial m(N, i)$.

Из леммы 1 и (6) имеем $\partial^2 F_i(\cdot) / \partial m(N, k) \partial m(N, i) = 0$ при $i \neq k$.

Подставляя это в формулу, получим

$$0 = \partial^2 F_k(\cdot) / \partial m(N, k)^2 \quad \forall k \in N. \quad (11)$$

Теперь продифференцируем (9) по $m(T, k)$, где $T \subset N, k \in T, k \in S$:

$$\sum_{i \in S} \frac{\partial^2 F_i(\cdot)}{\partial m(T, k) \partial m(S, i)} = \sum_{j \in N \setminus S} \frac{\partial^2 F_j(\cdot)}{\partial m(T, k) \partial m(S \cup \{j\}, j)}. \quad (12)$$

Также по лемме 1:

$$\frac{\partial^2 F_i(\cdot)}{\partial m(T, k) \partial m(S, i)} = 0, \quad i \neq k, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 F_j(\cdot)}{\partial m(T, k) \partial m(S \cup \{j\}, j)} = \frac{\partial}{\partial m(S \cup \{j\}, j)} \left[\frac{\partial F_j(\cdot)}{\partial m(T, k)} \right] = 0, \quad k \neq j.$$

Так как $k \in S$ и $j \in N \setminus S$, то $k \neq j$ и правая часть уравнения (12) равна 0.

Подставив (13) в левую часть (12), получим

$$\frac{\partial^2 F_k(\cdot)}{\partial m(T, k) \partial m(S, k)} = 0. \quad (14)$$

Выражения (11) и (14) доказывают лемму. ■

Лемма 5. Частные производные функции F_i от маргинального вклада в коалицию $S \setminus \{i\}$ являются вероятностью присоединения игрока i к этой коалиции: $\partial F_i(\cdot) / \partial m(S, i) = p_s^i$.

Доказательство. Для начала докажем, что выполнено $\partial F_i(\cdot) / \partial m(S, i) = p_s^i c_s^i$, где c_s^i — константа. Из определения F_i имеем

$$\frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(S, i)} = \frac{\partial f_i(\cdot)}{\partial m(S, i)} = \frac{\partial f_i(\cdot)}{\partial (p_s^i m(S, i))} \times \frac{\partial (p_s^i m(S, i))}{\partial m(S, i)},$$

поэтому

$$\frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(S, i)} = \frac{\partial f_i(\cdot)}{\partial (p_s^i m(S, i))} p_s^i.$$

Далее продифференцируем это равенство по $m(T, i)$ для произвольной коалиции $T \ni i$ и воспользуемся независимостью значения выражения от этой переменной, доказанной в лемме 4:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 f_i(\cdot)}{\partial (p_s^i m(S, i)) \partial m(T, i)} p_s^i = \frac{\partial^2 f_i(\cdot)}{\partial (p_s^i m(S, i)) \partial (p_T^i m(T, i))} \times \frac{\partial (p_T^i m(T, i))}{\partial m(T, i)} p_s^i = \\ &= \frac{\partial^2 f_i(\cdot)}{\partial (p_s^i m(S, i)) \partial (p_T^i m(T, i))} p_s^i p_T^i. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\partial^2 f_i(\cdot) / \partial (p_s^i m(S, i)) \partial (p_T^i m(T, i)) = 0 \quad \forall T, S \ni i$, поэтому $\partial f_i(\cdot) / \partial (p_s^i m(S, i)) = \text{const}$ и мы получаем требуемое равенство

$$\frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(S, i)} = p_s^i c_s^i. \quad (15)$$

Для того чтобы найти постоянные c_s^i , достаточно определить их в какой-либо одной игре (N, v, p, G) . С этой целью возьмем характеристическую функцию v симметричной игры такую, что $v(S) = v(C)$ при $S, C \subseteq N$, $|S| = |C|$, и любую функцию отношений G . Функцию вероятности p выберем такую же, как и в примере 1, т.е. положим $p_s^i = (n-s)!(s-1)! / n!$, где $s = |S|$.

Из равенства выигрышей для коалиций одного размера вытекает, что

$$m(S, i) = v(S) - v(S \setminus \{i\}) = v(S) - v(S \setminus \{j\}) = m(S, j), \quad S \subseteq N, \quad i, j \in S.$$

Если все маргинальные вклады и вероятности присоединения равны, то из аксиомы 3 имеем $F_i(\cdot) \equiv F_j(\cdot)$. Продифференцируем это выражение при равных маргинальных вкладах:

$$\frac{\partial F_j(\cdot)}{\partial m(S, j)} = \frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(S, i)} \frac{\partial m(S, i)}{\partial m(S, j)} = \frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(S, i)}. \quad (16)$$

Осталось показать, что для всех $i, S \ni i$ верно $\partial F_i(\cdot) / \partial m(S, i) = p_s^i$ в выбранной игре. Это будет означать, что все постоянные c_s^i из (15) равны 1. Воспользуемся нисходящей индукцией по s — размеру коалиции S . Так как из леммы 3, то из соотношения (16) при $S = N$ получим

$$1 = \sum_{i \in N} \frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(N, i)} = \frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(N, i)} = \frac{1}{n} = \frac{(n-n)!(n-1)!}{n!} = p_N^i.$$

А это означает, что $c_N^i = 1$ для всех i . Теперь фиксируем $S \subset N$. Из индукционного предположения $\frac{\partial F_j(\cdot)}{\partial m(S \cup \{j\}, j)} = p_{S \cup \{j\}}^j = \frac{(n-s-1)!s!}{n!}$, поэтому из формулы (9) имеем

$$\sum_{i \in S} \frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(S, i)} = \sum_{j \in N \setminus S} \frac{\partial F_j(\cdot)}{\partial m(S \cup \{j\}, j)} = (n-s) \frac{(n-s-1)!s!}{n!} = \frac{(n-s)!s!}{n!}.$$

Так как в силу (16) в левой части выражения все слагаемые равны между собой, то

$$\frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(S, i)} = \frac{1}{s} \frac{(n-s)!s!}{n!} = \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} = p_S^i$$

и лемма доказана. ■

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Из определения функций f_i и F_i , а также из лемм 2 и 5 следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_i(v, p, G) &= f_i\left(p_{S_1}^i m(S_1, i), \dots, p_{S_{2^{n-1}}}^i m(S_{2^{n-1}}, i)\right) = F_i\left(p_{S_1}^i, m(S_1, i), \dots, p_{S_{2^{n-1}}}^i, m(S_{2^{n-1}}, i)\right) = \\ &= \sum_{S \subseteq N} \frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial m(S, i)} m(S, i) = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} p(i, S, G) m(S, i). \end{aligned}$$

Это доказывает теорему. ■

5. Заключение

В работе вводится и изучается новый класс коалиционных игр, названный как ТП-игры с вероятностно-эндогенным образованием коалиций. Коалиции могут образовываться с некоторой вероятностью, которая находится с помощью некоторой функции вероятности, заданной на дереве (граф) отношений между игроками, определяющем их возможные союзы. Постулируется, что выигрыш игрока, который присоединяется к коалиции, определяется через ожидаемый добавленный коалиционный выигрыш.

Эта модель обобщает ТП-игры, учитывает общественные отношения и механизмы объединения людей для какого-либо вида общественной деятельности. Исследуются свойства специфичной для модели функции вероятности, рассматриваются ее примеры, адекватно соответствующие различным реальным ситуациям. Вводится надлежащее (новое) понятие вектора Шепли, в котором в качестве слагаемого фигурирует добавленный ожидаемый выигрыш игрока (маргинальный вклад умножается на вероятность присоединения игрока к коалиции, а не на константу, как в классическом определении, т.е. вероятность образования коалиции явным образом влияет на выигрыш игрока). Аксиоматика классического значения Шепли трансформируется и обобщается применительно к новой модели. Подобно классической теореме Шепли доказано, что обобщенный вектор Шепли и только он удовлетворяет этим аксиомам.

В качестве перспективы авторам видится возможность рассмотреть и изучить значения игр в подобной модели, которые удов-

летворяют описанным аксиомам только частично, сохраняя при этом основной результат. Логика этого обобщения может быть аналогична подходу, представленному в работе (Monderer, Samet, 2002).

Другим применением построенной модели может быть ее использование как стадийной игры в некооперативных повторяющихся играх, в том числе дифференциальных: на каждом этапе стратегией игрока будет попытка изменений отношений ради увеличения математического ожидания от своих маргинальных вкладов. Соответственно исход представляется в виде цепочки последовательных присоединений игроков, а выигрыш игрока равен маргинальному вкладу, совершенного им в реализованной цепочке присоединений.

ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES

- Мулен Э.** (1991). Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. М.: Мир. [**Moulin H.** (1991). *Axioms of cooperative decision making*. Translated from the English. Moscow: Mir. Originally published by Cambridge University Press, 1988 (in Russian).]
- Шварц Д.А.** (2010) Аксиоматика для индексов влияния, учитывающих предпочтения участников // *Автоматика и телемеханика*. № 1. С. 144–158. [**Shvarts D.A.** (2010). Axiomatics for power indices that account for player preferences. *Automation and Remote Control*, 71, 2, 128–141 (in Russian).]
- Aleskerov F., Holler M.J., Kamalova R.** (2014). Power distribution in the Weimar Reichstag in 1919–1933. *Annals of Operations Research*, April, 215, 1, 25–37.
- Aumann R.J., Myerson R.B.** (1988). Endogenous formation of links between players and of coalitions: an application of the Shapley value. In: A.E. Roth (ed.). *The Shapley value*. Essays in honor of Lloyd S. Shapley. Cambridge: Cambridge University Press, 175–191.
- Loehman E., Whinston A.** (1974). An axiomatic approach to cost allocation for public investment. *Public Finance Quarterly*, 2, 2, 236–250.
- Monderer D., Samet D.** (2002). Variations of the Shapley value. In: R.J. Aumann, S. Hart (eds.). *The Handbook of Game Theory*. Amsterdam: North-Holland, 2055–2076.
- Shapley L.S.** (1952). *A value for n-person games*. Santa Monica: Rand Corporation.
- Strumbelj E., Kononenko I.** (2014). Explaining prediction models and individual predictions with feature contributions. *Knowledge and Information Systems*, 41 (3), 647–665.
- Weber R.J.** (1988). Probabilistic values for games. In: A.E. Roth (ed.). *The Shapley value*. Essays in honor of Lloyd S. Shapley. Cambridge: Cambridge University Press, 101–119.
- Winter E.** (2002). The Shapley Value. In: R.J. Aumann, S. Hart (eds.). *The Handbook of Game Theory*. Amsterdam: North-Holland, 2026–2052.

Поступила в редакцию 18.06.2019

Received 18.06.2019

V.A. Kamionko

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

V.M. MarakulinNovosibirsk State University, Sobolev Institute of Mathematics, Russian
Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

Shapley's value and its axiomatization in games with prior probabilities of coalition formation

Abstract. A new, generalized model of a cooperative game with transferable utility (TP game) is introduced and studied, in which, in addition to the characteristic function, two additional functions are used: relations between players and the probability of coalition formation, which reflect the main features of the interaction of people in specific groups. Various properties of the probability function are studied, and it is proved which of them are sufficient for its transformation into a probability measure. The generalized Shapley vector is defined for a new class of games as the mathematical expectation of a player from his marginal contribution to coalitions. Necessary and sufficient conditions are given for the generalized Shapley vector to completely coincide with the classical one introduced by Shapley himself. An axiomatization of value functions on a new class of games is proposed, which is also an extension of existing axioms in original TP games. It is proved that the (generalized) Shapley vector and only it corresponds to the introduced axioms.

Keywords: *TU game, Shapley's value, axiomatics, probability of coalition formation.*

JEL Classification: C71, D70.

DOI: 10.31737/2221-2264-2020-46-2-1