А.П. Бричикова

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва

Модель оценки фондовых активов с использованием нечетких данных и применение для российского фондового рынка

Аннотация. Модель оценки фондовых активов (CAPM) является одной из основных моделей при построении оптимального инвестиционного портфеля. Для борьбы с многовариантностью определения доходностей, нечеткостью или неточностью данных, пропусками в переменных может быть использована теория нечетких множеств. В данной работе представлен ряд расчетов и проведено сопоставление параметров модели оценки фондовых активов для российского фондового рынка с помощью классической и нечеткой регрессии. В работе дается обзор зарубежных исследований с нечеткими данными. Анализируется возможность применения нечеткой регрессии для установления взаимосвязи между ожидаемой доходностью финансового актива и его риском посредством CAPM, рассматривается вопрос о чувствительности полученных бета-коэффициентов при изменении длины периода оценивания. Согласно показателям качества подгонки модели применение нечеткой регрессии с нечетким свободным членом показывает определенное улучшение по сравнению с классической регрессией. Бета-коэффициенты нечеткой регрессии оказываются более стабильными при изменении длины периода оценивания по сравнению с классической регрессией.

Ключевые слова: нечеткие множества, нечеткая регрессия, модель оценки фондовых активов, рынок акций.

Классификация JEL: G12, G17, C32, C61.

DOI: 10.31737/2221-2264-2019-43-3-3

1. Введение

Моделирование и предсказание доходностей активов является одним из важных этапов инвестиционного анализа при формировании портфеля ценных бумаг. Одной из наиболее простых и распространенных моделей, применяемых при решении данных задач, служит Capital Asset Pricing Model (CAPM), а также ее различные расширения и модификации. В 1960-е годы Дж. Трейнор, У. Шарп, Дж. Линтнер и Я. Моссин независимо друг от друга предложили модель оценки фондовых активов (CAPM), основанную на подходе Марковица, известном как «доходность — риск», или «среднее — дисперсия». Исходя из этой теории, инвестор при заданном уровне риска максимизирует ожидаемую доходность и с помощью диверсификации активов минимизирует риск при фиксированном уровне ожидаемой доходности. В основе данных моделей лежит мера чувствительности актива к изменениям рыночной доходности, выражаемая через бета-коэффициент. Оценка акций является актуальной задачей для инвестора, поэтому важно знать правильное значение бета-коэффициента.

При оценивании регрессии в эконометрических моделях цен и доходностей активов часто возникает проблема нечеткости данных (неточности). Для САРМ характерна многовариантность определения доходностей активов, которым сложно поставить в соответствие одно значение. Выбор четких значений для доходностей при использовании дневных данных сопряжен со значительным произволом. Более реалистично предполагать, что в данных присутствует неоднозначность, что может позволить лучшим образом оценить значения бета-коэффициентов. Вариантом решения данной проблемы является применение теории нечетких множеств. Нечеткие множества были введены в работе (Zadeh, 1965) и с тех пор стали распространенным математическим инструментом для решения многих прикладных задач.

Несмотря на то что методы нечеткой математики, в частности нечеткой регрессии, возникли относительно недавно, данная методология развивается и находит применение во многих областях. Задача нечеткой регрессии впервые появилась в работе (Tanaka, Uegima, Asai, 1982). Авторы исследовали случай нечетких зависимых и четких независимых переменных, коэффициенты регрессии – нечеткие числа. Оценивание производилось с помощью методов математического программирования.

В работе (Celminš, 1987a) рассматривался случай нечетких входных и выходных переменных и четких коэффициентов. Для оценивания параметров регрессии применяется метод наименьших квадратов. Работа (Celminš, 1987b) стала продолжением предыдущей, но в ней изучается случай четких регрессоров и нечетких коэффициентов. Одной из первых работ, где для оценивания коэффициентов также используется метод наименьших квадратов, является работа (Diamond, 1988). Также в этой работе определяется ставшее широко применимым расстояние между двумя нечеткими треугольными числами. Более подробный обзор этого направления можно найти в работах (Вельдяков, Шведов, 2014а, 2014б); алгоритм нечеткой регрессии, предложенный в данных работах, служит основанием для настоящего исследования.

Нечеткая регрессия имеет ряд преимуществ перед традиционными регрессионными методами. Нечеткие числа позволяют применить всю доступную информацию о ценах активов. Не существует ограничений на использование какой-то единой или средней цены, поскольку актив в течение выбранного интервала времени торгуется по различным ценам. Традиционные эконометрические методы ограничивают использование различных данных, заменяя весь диапазон изменения цен актива ценой закрытия, средней ценой и т.п. Большая часть информации теряется, выбор одного или другого значения происходит произвольно. Нечеткая регрессия позволяет установить функциональную связь между переменными на основе всей доступной информации. В ряде задач возникает выбор, применять ли для передачи неопределенности нечеткие числа или случайные величины.

Но в регрессионных моделях при проверке гипотез и при построении доверительных интервалов для коэффициентов регрессии нечеткие числа и случайные величины используются комбинировано. Среди многочисленных модификаций CAPM существуют модификации, основанные на нечетких данных, например (Östermark, 1989; Campobasso et al, 2010; Moussa et al., 2014) (подробнее см. разд. 3). Вероятно, первой работой для российского фондового рынка по модели CAPM с применением нечетких чисел является студенческая работа (Попов, 2015). Нечеткая регрессия встречается также при актуарном анализе и оценке срочной структуры процентных ставок в работах (Sánchez, Gómez, 2003a, 2003b, 2004).

Целью настоящей работы является совершенствование методов для определения бета-коэффициентов в модели оценки фондовых активов путем применения нечеткой регрессии. Некоторые определения для нечетких чисел и алгоритм построения нечеткой регрессии рассматриваются в разд. 2. Краткие сведения, относящиеся к модели оценки фондовых активов, и обзор применения нечеткой регрессии при оценивании параметров CAPM содержатся в разд. 3. Описание данных, методология формирования доходностей и фазификация описаны в разд. 4. В разд. 5 содержатся основные результаты работы: рассчитываются и сопоставляются бета-коэффициенты акций компаний «Газпром», «Лукойл», «Роснефть», «Сургутнефтегаз» и «Сбербанк» с помощью классической и нечеткой регрессии с включением нечеткого свободного члена. Вопрос о стабильности полученных оценок бета-коэффициентов при изменении длины периода оценивания рассматривается в разделе 6. В разд. 7 приводятся выводы. Согласно показателям качества подгонки модели применение нечеткой регрессии с нечетким свободным членом показывает улучшение по сравнению с моделью без введения нечеткости.

2. Нечеткие числа и операции над ними, построение нечеткой регрессии

Первой работой по теории нечетких множеств, как отмечалось ранее, является работа (Zadeh, 1965). В настоящее время существует ряд отличающихся определений нечетких чисел и операций над ними, например (Dubois, Prade, 2000; Zimmermann, 2001; Кофман, 1982; Пегат, 2013). Дадим краткие определения нечеткого числа и основных операций над нечеткими числами в соответствии с работой (Шведов, 2016).

Пусть координаты в пространстве $\mathbb{R}^2$ обозначаются (ξ, η) . Нечетким числом называется замкнутое и ограниченное (компактное) множество $\tilde{K} \subseteq \mathbb{R}^2$ при выполнении следующих условий:

- 1) при $t \notin [0, 1]$ пересечение множества $\tilde{K}$ с прямой $\eta = t$ пусто;
- 2) при $t \in [0, 1]$ пересечение множества $\tilde{K}$ с прямой $\eta = t$ принимает вид

$$\{(\xi, \eta) : k_1(t) \leq \xi \leq k_2(t), \eta = t\}, \quad (1)$$

где $k_1(t)$ — монотонно неубывающая непрерывная слева функция (левый индекс нечеткого числа); $k_2(t)$ — монотонно невозрастающая непрерывная слева функция (правый индекс нечеткого числа).

Если $k_1(1) = k_2(1)$ и индексы являются линейными функциями, то нечеткое число называется треугольным и может быть задано как $(k_1(0), k_1(1), k_2(0))$. Значения $k_1(0)$ и $k_2(0)$ называются левыми и правыми границами нечеткого числа $\tilde{K}$ соответственно. Если $k_1(1) < k_2(1)$ и индексы являются линейными функциями, то нечеткое число называется трапецеидальным. Если при $\forall t \in [0, 1]$ $k_1(t) = k_2(t)$, нечеткое число может быть отождествлено с действительным числом.

При работе с нечеткими числами вводятся операции, аналогичные работе с обычными четкими числами. Пусть $\tilde{Z}$ и $\tilde{U}$ — нечеткие числа; $z_1(t)$ и $u_1(t)$ — левые индексы соответствующих чисел, а $z_2(t)$ и $u_2(t)$ — правые индексы; ($t \in [0, 1]$). Суммой нечетких чисел $\tilde{Z}$ и $\tilde{U}$ называется нечеткое число $\tilde{Z} + \tilde{U}$ с левым индексом $z_1(t) + u_1(t)$ и правым индексом $z_2(t) + u_2(t)$. Умножение на положительное и отрицательное число имеет различный вид. Пусть λ — действительное число и $\lambda \geq 0$. Произведением действительного числа λ на нечеткое число $\tilde{Z}$ называется нечеткое число $\lambda\tilde{Z}$ с левым индексом $\lambda z_1(t)$ и правым индексом $\lambda z_2(t)$. Пусть λ — действительное число и $\lambda < 0$. Произведением действительного числа λ на нечеткое число $\tilde{Z}$ называется нечеткое число $\lambda\tilde{Z}$ с левым индексом $\lambda z_2(t)$ и правым индексом $\lambda z_1(t)$. Метрика на множестве нечетких чисел может задаваться различными способами; в настоящей работе использовался подход из (Grzegorzewski, 1998).

Существуют также различные подходы для задания расстояния $d(\tilde{Z}, \tilde{U})$ между нечеткими числами $\tilde{Z}$ и $\tilde{U}$. Мы будем определять расстояние между двумя нечеткими числами по формуле

$$d(\tilde{Z}, \tilde{U}) = \sqrt{\int_0^1 (z_1(t) - u_1(t))^2 dt + \int_0^1 (z_2(t) - u_2(t))^2 dt}. \quad (2)$$

Практическая часть настоящей работы основана на алгоритме построения регрессионных зависимостей, предложенном в (Вельдяков, Шведов, 2014а, 2014б). В этих работах алгоритм из (Bargiela, Pedrycz, Nakashima, 2007), где свободный член является действительным числом, модифицируется таким образом, что свободный член может быть нечетким числом. Это обеспечивает лучшие результаты при построении регрессий.

Регрессия строится с нечеткими зависимыми и независимыми переменными, а также с включением нечеткого свободного члена. Пусть $\tilde{Y}_i$ и $\tilde{X}_i$ — наборы нечетких чисел с левыми индексами $y_{i1}(t)$, $x_{i1}(t)$ и правыми индексами $y_{i2}(t)$, $x_{i2}(t)$ соответственно ($i = 1, \dots, n$, $t \in [0, 1]$). Регрессионная модель имеет вид

$$\tilde{Y}_i = \beta \tilde{X}_i + \alpha, \quad (3)$$

где β — действительное число; α — нечеткое число с левым индексом $\alpha_1(t)$ и правым индексом $\alpha_2(t)$.

Для того чтобы найти действительное число β и нечеткое число α , минимизируется функционал F :

$$F(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n d^2(\tilde{X}_i, \beta \tilde{X}_i + \alpha), \quad (4)$$

где d – расстояние между нечеткими числами, задаваемое с помощью (2).

Рассмотрение функционала распадается на два случая из-за различий в определениях умножения нечеткого числа на действительное число. При $\beta \geq 0$ минимизируется функционал $F_p(\alpha, \beta)$:

$$F_p(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 (y_{i1}(t) - \beta x_{i1}(t) - \alpha_1(t))^2 dt + \sum_{i=1}^n \int_0^1 (y_{i2}(t) - \beta x_{i2}(t) - \alpha_2(t))^2 dt, \quad (5)$$

при $\beta < 0$ –

$$F_n(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 (y_{i1}(t) - \beta x_{i2}(t) - \alpha_1(t))^2 dt + \sum_{i=1}^n \int_0^1 (y_{i2}(t) - \beta x_{i1}(t) - \alpha_2(t))^2 dt. \quad (6)$$

После минимизации функционалов $F_p(\alpha, \beta)$ и $F_n(\alpha, \beta)$ из наборов параметров (α_p, β_p) и (α_n, β_n) выбирается тот, где функционал принимает меньшее значение. Задача минимизации решается следующим образом.

Пусть $\beta \geq 0$. Фиксируется значение β , затем определяются функции $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ отдельно для каждой суммы $F_p(\alpha, \beta)$. Выбор функций происходит на основе решения задачи вариационного исчисления. На выходе формулы имеют вид:

$$\alpha_{1p}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_{j1}(t) - \beta x_{j1}(t)), \quad \alpha_{2p}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_{j2}(t) - \beta x_{j2}(t)). \quad (7)$$

Для определения числа β минимизируется функционал $F_p(\alpha, \beta)$ при условиях (7) на индексы нечеткого числа α . Вводятся обозначения:

$$v_{i1}(t) = x_{i1}(t) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{j1}(t), \quad v_{i2}(t) = x_{i2}(t) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{j2}(t),$$

$$w_{i1}(t) = y_{i1}(t) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{j1}(t), \quad w_{i2}(t) = y_{i2}(t) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{j2}(t),$$

$$A_1 = \sum_{i=1}^n \int_0^1 w_{i1}(t) v_{i1}(t) dt, \quad A_2 = \sum_{i=1}^n \int_0^1 w_{i2}(t) v_{i2}(t) dt,$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^n \int_0^1 v_{i1}^2(t) dt, \quad B_2 = \sum_{i=1}^n \int_0^1 v_{i2}^2(t) dt, \quad C = \sum_{i=1}^n \int_0^1 (w_{i1}^2(t) + v_{i1}^2(t)) dt.$$

С помощью вышеприведенных обозначений функционал имеет вид $F(\beta) = \beta^2 (B_1 + B_2) - 2\beta (A_1 + A_2) + C$. Из необходимого условия минимума находится β :

$$\beta_p = \max(0, (A_1 + A_2) / (B_1 + B_2)). \quad (8)$$

При $\beta < 0$ минимизация функционала происходит аналогичным образом. Таким образом, на выходе получаются два набора параметров:

(α_p, β_p) и (α_n, β_n) . В качестве итогового выбирается тот, где функционал принимает меньшее значение. Если вместо функций $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ использовать одно и то же значение α , то алгоритм применим и к четкому свободному члену. В работах (Вельдяков, Шведов, 2014а, 2014б) приведены результаты численных экспериментов, показывающие, что добавление нечеткости в свободный член повышает точность.

3. Применение нечеткой регрессии в модели оценки фондовых активов для зарубежных рынков

Классическая CAPM базируется на ряде строгих предположений. Одно из допущений, что инвесторы могут кредитовать и заимствовать любую сумму денег по безрисковой ставке R_f . Существуют различные версии CAPM. Версия Шарпа–Линтнера основывается на линейной взаимосвязи между доходностями ценных бумаг и рыночного портфеля и является однофакторной моделью. Согласно данной теории ожидаемая доходность актива i и мера риска имеют следующую взаимосвязь:

$$\mu_i = R_M + \beta_i(\mu_M - R_f), \quad (9)$$

где μ_i — ожидаемая доходность актива i ; R_f — безрисковая ставка, по которой инвесторы могут заимствовать и кредитовать любую сумму денег; R_M — доходность оптимального рыночного портфеля, который в дальнейшем будет называться М-портфелем; μ_M — ожидаемая доходность М-портфеля; β_i — бета-коэффициент рискованных активов, который является мерой чувствительности актива i к изменениям доходности рынка; $\mu_M - R_f$ — премия за риск.

Бета-коэффициент может быть найден с помощью отношения $\beta_i = \text{Cov}(R_i, R_M) / \text{Var}(R_M)$, где $i = 1, \dots, N$; R_i — доходность актива i ; R_M — случайные величины.

Как отмечалось ранее, модель оценки финансовых активов базируется на строгих предположениях. Например, может не наблюдаться безрисковой ставки R_f , по которой можно заимствовать и кредитовать произвольную сумму денег. Поэтому в 1970-е годы в версии Блэка было предложено одно из первых расширений CAPM. В его основе лежит предположение о существовании Z-портфеля с нулевым бета. Модель в версии Блэка имеет вид

$$\mu_i = \mu_Z + \beta_i(\mu_M - \mu_Z), \quad (10)$$

где $i = 1, \dots, N$; μ_i — ожидаемая доходность актива i ; β_i — бета-коэффициент актива, описывающий меру чувствительности актива i к изменениям доходности рынка; $\mu_Z = E(R_Z)$ — ожидаемая доходность Z-портфеля; R_Z — доходность Z-портфеля; μ_M — ожидаемая доходность М-портфеля.

Помимо теории Марковица и CAPM в версиях Шарпа–Линтнера и Блэка существует ряд моделей одностороннего риска. Например, в (Hogan, Warren, 1974) рассматривается модель ES-CAPM. В (Harlow, Rao, 1989; Bawa, Lindenberg, 1977) учитываются моменты

одностороннего порядка. Наиболее популярной моделью одностороннего риска является D-CAPM (Estrada, 2002). Помимо включений моментов одностороннего порядка используются расширения модели и на более высокие порядки. К примеру, в работе (Kraus, Litzenberger, 1976) предлагается модель с включением систематической дисперсии, систематической асимметрии и систематического куртозиса.

Классическая модель оценки фондовых активов определяет ожидаемую доходность с помощью безрисковой ставки и премии за риск. При практической реализации оцениваются параметры регрессионной модели, где объясняемая переменная содержит относительное изменение в ценах исследуемого актива, а объясняющая переменная — относительное изменение в ценах рыночного портфеля (индекса). Однако изменения в ценах исследуемого актива и изменения в ценах рыночного портфеля не могут полностью отражать тенденцию изменения доходностей.

Применение нечеткой регрессии при оценивании бета-коэффициентов CAPM можно разделить на следующие ветви. Первая ветвь использует подход, основанный на решении задачи линейного программирования, предложенный в работе (Tanaka, Uegima, Asai, 1982), и его различных модификациях. Вторая ветвь базируется на методе наименьших квадратов (Celminš, 1987a; Diamond, 1988). Остановимся на некоторых публикациях по этим двум подходам.

В работе (Smimou, 2006) дан анализ оценок систематического риска для фьючерсов канадского сырьевого рынка. Нечеткая регрессия основана на модифицированной двухшаговой процедуре, в основе которой лежит задача линейного программирования из работы (Savic, Pedrycz, 1991). Изменения заключаются в несимметричных спредах полученных оценок. Результаты работы схожи с предыдущими исследованиями товарных фьючерсов в сельском хозяйстве и животноводстве, но в то же время показывают улучшения в оценках.

При существовании экстремальных наблюдений может возникнуть проблема взаимодействия между статистической и финансовой теориями. Для преодоления этого в работе (Kocadagli, 2013) рассматривается модель нелинейного программирования с помощью нечеткой регрессии. Анализируются бета-коэффициенты турецкого фондового рынка. Новый подход дополнительно решает проблему выбора уровня подгонки в нечетких регрессионных моделях, оцениваемых с помощью линейного программирования.

В работах (Terceño et al., 2011; Laumann, 2015) авторы анализируют бета-коэффициенты бразильского фондового рынка, используя методологию нечеткой линейной регрессии. Для определения коэффициентов регрессии решается задача линейного программирования из работы (Tanaka, Ishibuchi, 1991), и на эмпирических данных показано, что нечеткая регрессия не противоречит результатам традиционной линейной регрессионной модели.

В работе (Campobasso et al., 2010) авторы также применили метод наименьших квадратов для нечетких чисел, анализируя акции компаний ENEL и TISCALI итальянского фондового рынка за период с января 2003 по январь 2009 г. с данными различной частоты (дневными, недельными, месячными). Бета-коэффициенты, полученные с помощью обычного метода наименьших квадратов, сопоставляются с бета-коэффициентами нечеткой регрессии. Для различных частот данных по котировкам показатель качества подгонки позволяет сделать вывод о преимуществе нечеткой регрессионной модели. В работе рассматривается следующее введение нечеткости: процентные изменения цен актива (рыночного портфеля) лежат в диапазоне между отношением максимальной цены актива i (рыночного портфеля) в момент времени t к минимальной цене в предыдущий момент $t-1$ и отношением самой низкой цены актива i (рыночного портфеля) в момент времени t к максимальной цене в момент времени $t-1$. Данная фазификация предусматривает использование треугольных нечетких чисел. Поэтому для оценивания бета-коэффициентов САРМ применяется нечеткая регрессия. Коэффициенты регрессионной модели оценивались с помощью минимизации сумм квадратов расстояний между фактическими и расчетными значениями зависимой переменной.

Пусть $\tilde{Y}_t^*$ – прогнозное значение наблюдаемой переменной $\tilde{Y}_t$, рассчитанное после оценивания регрессионной модели $\tilde{Y}_t^* = \alpha + \beta \tilde{X}_t$. Качество подгонки построенной модели контролируется с помощью коэффициента FFI (Fuzzy Fit Index):

$$FFI = \sum_{t=1}^n d(\tilde{Y}_t^*, \bar{Y}^*)^2 / \sum_{t=1}^n d(\tilde{Y}_t, \bar{Y})^2, \quad (11)$$

где $\bar{Y}^*$ и $\bar{Y}$ – средние значения прогнозной и наблюдаемой объясняемой переменной соответственно; $\tilde{Y}_t^*$ – прогнозные значения объясняемой переменной, вычисленные согласно нечеткой регрессии; d – некоторым образом определенное расстояние между нечеткими числами. FFI принимает значения от 0 до 1: чем ближе значение к 1, тем сильнее зависимость, так как доля необъясненной дисперсии оказывается меньше в дисперсии зависимой переменной. В следующих разделах показатель FFI будет выступать в качестве показателя качества подгонки модели и сопоставляться с аналогичным показателем для модели без введения нечеткости.

Для классической линейной регрессии показатель качества подгонки модели OFI (Ordinary Fit Index) имеет вид:

$$OFI = \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 / \sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2, \quad (12)$$

где $\hat{Y}_t$ – прогнозные значения объясняемой переменной, вычисленные согласно классической регрессии, $\bar{Y}$ – среднее значение наблюдаемой объясняемой переменной.

4. Описание данных для российского фондового рынка и построение на основе этих данных нечетких чисел

Для анализа выбраны акции компаний «Роснефть» (ROSN), «Газпром» (GAZP), «Сургутнефтегаз» (SNGS), «Лукойл» (LKOH), «Сбербанк» (SBER). Доходность индекса Московской биржи (IMOEX) выступает в качестве рыночной доходности. Рассматривался промежуток времени с января 2012 по декабрь 2017 г. Для того чтобы проследить, как частота наблюдений влияет на полученные оценки модели, используются недельные и месячные данные. Для изучения влияния изменения доходностей на оценки модели они задавались двумя способами (в ценах закрытия и в логарифмах). Ресурс www.finam.ru выступает в качестве источника данных по котировкам.

Недельные доходности активов моделировались двумя способами:

1) разница между логарифмом цены закрытия на пятницу и логарифмом цены открытия на понедельник $i = 1, \dots, n$; n – число недель в рассматриваемом промежутке:

$$y_i = \ln(\text{close}(y_i)) - \ln(\text{open}(y_i)); \quad (13)$$

2) разница между ценами закрытия актива в моменты времени i и $i-1$, деленная на цену закрытия актива в $i-1$ момент времени $i = 2, \dots, n$:

$$y_i = (\text{close}(y_i) - \text{close}(y_{i-1})) / \text{close}(y_{i-1}). \quad (14)$$

Для того чтобы описанные способы задания доходностей актуально определяли тенденцию их изменения, производится фазификация (введение нечеткости) данных. Введение нечеткости осуществляется с помощью треугольных и гауссовских нечетких чисел.

В случае задания доходностей согласно (13) в качестве левого и правого индексов ($\eta \in [0, 1]$) треугольного нечеткого числа используются:

$$\begin{aligned} y_{i1}(\eta) &= \ln(\min(y_i)) - \ln(\text{open}(y_i)) + \eta(\ln(\text{close}(y_i)) - \ln(\min(y_i))), \\ y_{i2}(\eta) &= \ln(\max(y_i)) - \ln(\text{open}(y_i)) - \eta(\ln(\max(y_i)) - \ln(\text{close}(y_i))), \end{aligned} \quad (15)$$

где $i = 1, \dots, n$; $\min(y_i)$ и $\max(y_i)$ — минимальная и максимальная цены актива за неделю i ; $\text{open}(y_i)$ — цена закрытия на понедельник недели i ; $\text{close}(y_i)$ — цена закрытия на пятницу недели i . Следует отметить, что определение доходностей проводится не в форме равнобедренных треугольников, т.е. с помощью несимметричной фазификации (рис. 1).

В случае задания доходностей согласно (14) фазификация проводится в виде гауссовских нечетких чисел со следующей функцией принадлежности:

$$\eta = \begin{cases} \exp\left(-\frac{(\xi - a)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{при } \xi \in [a - 3\sigma, a + 3\sigma]; \\ 0 & \text{при } \xi \notin [a - 3\sigma, a + 3\sigma]. \end{cases} \quad (16)$$

В качестве параметров a и σ используются ($i = 2, \dots, n$):

$$a = \frac{\text{close}(y_i) - \text{close}(y_{i-1})}{\text{close}(y_{i-1})}, \quad \sigma = \frac{\max(y_i) - \min(y_i)}{2\text{close}(y_{i-1})}. \quad (17)$$

Рис. 1

Треугольное нечеткое число $\tilde{Y}_i$

Рис. 2

Гауссовское нечеткое число $\tilde{Y}_i$

Для гауссовского нечеткого числа $\tilde{Y}_i$ (рис. 2) левые и правые индексы имеют следующий вид. Пусть для $i=2, \dots, n$ имеем $\eta_0 = \exp(-4,5)$, тогда левый индекс $y_{i1}(\eta) = a - \sqrt{-2\sigma^2 \ln(\eta_0)}$ при $\eta < \eta_0$ и $y_{i1}(\eta) = a - \sqrt{-2\sigma^2 \ln(\eta)}$ при $\eta \geq \eta_0$. Аналогично определяется правый индекс $y_{i2}(\eta)$.

Рис. 3

Процентные изменения в недельных значениях доходностей с января 2012 по декабрь 2017 г.

Источник: расчеты автора.

Можно заметить, что в случае задания доходностей согласно (14) проводится симметричная фазификация. Рыночная доходность и ее фазификация определяются на основе тех же подходов, что и для активов. Для задания месячных показателей доходностей используются формулы, аналогичные (13)–(17). Доходности активов и рыночного портфеля, посчитанные согласно (13), представлены на рис. 3.

5. Результаты расчетов для российского фондового рынка

В данном разделе производится анализ возможности применения нечеткой регрессии при оценке параметров CAPM на российском фондовом рынке. Алгоритм из (Вельдяков, Шведов, 2014а, 2014б) применяется к доходностям ряда активов, которые выступают в качестве зависимых переменных, и к доходности рыночного портфеля, представляющего независимую переменную. Рассчитанные бета-коэффициенты сопоставляются с бета-коэффициентами, полученными с помощью классической версии CAPM. Для контроля над точностью модели использовались показатель *FFI*, вычисленный согласно (11), и показатель *OFI*, найденный по формуле (12). Расстояния между нечеткими числами считались согласно (2). Вычисление интегралов при реализации алгоритма из разд. 2 производилось в Wolfram Mathematica.

В табл. 1 содержатся результаты оценивания модели по недельным и месячным данным без введения нечеткости (строки *OLS Beta 1* и *OLS Beta 2*) и бета-коэффициенты нечеткой версии CAPM (строки *FLS Beta 1* и *FLS Beta 2*).

В случае акций «Сбербанка» классический и нечеткий подходы при обеих фазификациях определяют β намного больше 1. Следовательно, премия за риск актива больше, чем премия за систематический риск. Таким образом, акциям «Сбербанка» присуща большая изменчивость по сравнению с рыночным индексом «МосБиржи». При росте (падении) ожидаемой доходности рыночного портфеля ожидаемая доходность акций будет расти (падать) быстрее ожидаемой доходности рыночного индекса. В частности, согласно сравнению *OFI* и *FFI* нечеткая регрессия показывает более близкие к 1 показатели качества модели, чем классический подход. Более того, чувствительность актива к колебаниям рынка растет от недельных данных к месячным (аналогично для акций «Газпрома»). Данное явление может быть объяснено тем, что актив не может реагировать немедленно на любые изменения рынка.

В случае остальных компаний нечеткая и классическая регрессии определяют β , близкие к 1. Это означает, что изменчивость акций «Газпрома», «Лукойла», «Роснефти» и «Сургутнефтегаза» совпадает с изменчивостью рыночного портфеля. Точное значение бета-коэффициента, чуть большее или меньшее 1, зависит от выбранного метода оценивания. Согласно показателям качества подгонки модели нечеткая регрессия оценивает бета-коэффициенты более точным образом.

Таблица 1

Оценки бета-коэффициентов и показателей качества модели,
2012–2017 гг.

Акции компании	<i>GAZP</i>	<i>LKOH</i>	<i>ROSN</i>	<i>SNGS</i>	<i>SBER</i>
Недельные данные					
<i>OLS Beta 1</i>	1,069	1,01	0,994	1,017	1,268
<i>OFI 1</i>	0,635	0,598	0,469	0,476	0,641
<i>OLS Beta 2</i>	1,088	1,031	1,011	0,999	1,292
<i>OFI 2</i>	0,65	0,614	0,478	0,47	0,651
<i>FLS Beta 1</i>	1,065	0,957	0,935	1,006	1,313
<i>FFI 1</i>	0,775	0,708	0,648	0,668	0,75
<i>FLS Beta 2</i>	1,054	1,014	0,929	1,006	1,321
<i>FFI 2</i>	0,868	0,827	0,803	0,81	0,843
Месячные данные					
<i>OLS Beta 1</i>	1,124	0,894	0,997	1,107	1,469
<i>OFI 1</i>	0,628	0,605	0,432	0,438	0,609
<i>OLS Beta 2</i>	1,095	0,919	0,993	1,133	1,449
<i>OFI 2</i>	0,615	0,619	0,423	0,443	0,577
<i>FLS Beta 1</i>	1,194	0,88	0,93	0,951	1,538
<i>FFI 1</i>	0,851	0,743	0,653	0,611	0,798
<i>FLS Beta 2</i>	1,079	0,865	0,882	1,071	1,458
<i>FFI 2</i>	0,907	0,818	0,799	0,8	0,869

Примечание. Здесь и далее приведенные показатели рассчитаны по формулам: *OLS Beta 1* — с помощью обычной линейной регрессии при задании доходностей по (13); *OLS Beta 2* — по формуле (14); *FLS Beta 1* — с помощью нечеткой регрессии при фазификации по формуле (15), *FLS Beta 2* — по формуле (16).

При оценивании как нечеткой регрессии, так и классической линейной модели, одновременно для всех рассматриваемых компаний коэффициент при свободном члене (нечеткий в случае нечеткой и четкий в случае классической регрессии) получается близким к 0.

Сопоставляя значения показателей качества подгонки моделей, можно заключить, что задание доходностей согласно (14) с соответствующей фазификацией в виде гауссовских нечетких чисел лучше подходит данным, чем задание доходностей согласно (13) с фазификацией в виде треугольных нечетких чисел.

Для того чтобы проверить, как эмпирические значения соотносятся с полученными нечеткими границами и классическими доверительными интервалами (на уровне значимости 95%), производится дополнительное исследование. Рассматриваются недельные и месячные данные на временном промежутке с октября 2016 по декабрь 2017 г. Доходность задается согласно (13) с соответствующей фазификацией. Для примера были отобраны акции «Сбербанка» ($\beta > 1$) и «Лукойла»

($\beta \approx 1$). На рис. 4 можно увидеть эмпирические значения доходностей, доверительные интервалы и нечеткие границы для акций «Сбербанка» и «Лукойла». Исходя из графиков на этих рисунках, можно сделать вывод, что эмпирические значения процентных изменений доходностей практически полностью заключены в нечетких границах, что в меньшей мере можно отметить про доверительные интервалы с классическими границами.

Рис. 4

Процентные изменения в недельных и месячных значениях доходностей, нечеткие границы и доверительные интервалы для акций «Сбербанка» и «Лукойла» с октября 2016 по декабрь 2017 г.

Примечание. Доходности заданы по формуле (13).

6. Стабильность бета-коэффициентов при изменении периодов оценивания

При вычислении бета-коэффициентов актива одним из важных этапов является определение продолжительности периода оценивания. Более длинный период обеспечивает больший объем данных, но в то же время компания может регулировать некоторые характеристики риска. Ряд исследований, например (Levy, 1971; Kihoon, Satchell, 2014), приводят взаимосвязь между длиной периода оценивания и стабиль-

ностью бета-коэффициентов. В этих работах обнаружено, что стабильность бета-коэффициентов возрастет с увеличением продолжительности периода оценивания. Однако данное наблюдение выполняется не для всех компаний в выборках. Поэтому дополнительно исследуем, как меняются результаты оценок бета-коэффициентов акций рассматриваемых компаний при изменении длины периода оценивания.

Рассмотрим два временных промежутка: январь 2012 – декабрь 2015 г., январь 2014 – декабрь 2017 г. Доходности и фазификация задаются согласно разд. 4.

Результаты оценивания модели за период 2012–2015 гг. по недельным и месячным данным содержатся в табл. 2, за период 2014–2017 гг. – в табл. 3; фазификация используется в виде треугольных нечетких чисел и в виде гауссовских нечетких чисел.

Таблица 2

Оценки бета-коэффициентов и показателей качества модели, 2012–2015 гг.

Акции компании	<i>GAZP</i>	<i>LKOH</i>	<i>ROSN</i>	<i>SNGS</i>	<i>SBER</i>
Недельные данные					
<i>OLS Beta 1</i>	1,051	0,942	0,965	1,087	1,275
<i>OFI 1</i>	0,651	0,598	0,492	0,529	0,642
<i>OLS Beta 2</i>	1,076	0,959	0,98	1,064	1,284
<i>OFI 2</i>	0,667	0,61	0,498	0,517	0,649
<i>FLS Beta 1</i>	1,056	0,893	0,889	1,047	1,343
<i>FFI 1</i>	0,798	0,701	0,65	0,691	0,753
<i>FLS Beta 2</i>	1,037	0,964	0,89	1,039	1,351
<i>FFI 2</i>	0,88	0,817	0,799	0,824	0,844
Месячные данные					
<i>OLS Beta 1</i>	1,05	0,866	0,867	1,298	1,459
<i>OFI 1</i>	0,642	0,618	0,447	0,651	0,613
<i>OLS Beta 2</i>	1,012	0,895	0,857	1,324	1,418
<i>OFI 2</i>	0,622	0,641	0,435	0,65	0,572
<i>FLS Beta 1</i>	1,152	0,855	0,866	1,03	1,547
<i>FFI 1</i>	0,875	0,689	0,685	0,696	0,802
<i>FLS Beta 2</i>	1,017	0,863	0,816	1,198	1,463
<i>FFI 2</i>	0,922	0,8	0,81	0,853	0,87

В табл. 4 содержатся данные о стабильности для недельных и месячных данных. Каждое число в таблице рассчитано как длина наименьшего отрезка, который содержит бета-коэффициенты для трех рассматриваемых промежутков. При сопоставлении результатов в табл. 4 можно сделать вывод, что бета-коэффициенты, как правило,

Таблица 3

Оценки бета-коэффициентов и показателей качества модели,
2014–2017 гг.

Акции компании	<i>GAZP</i>	<i>LKOH</i>	<i>ROSN</i>	<i>SNGS</i>	<i>SBER</i>
Недельные данные					
<i>OLS Beta 1</i>	1,047	1,074	1,08	0,94	1,304
<i>OFI 1</i>	0,665	0,608	0,544	0,447	0,639
<i>OLS Beta 2</i>	1,073	1,085	1,093	0,929	1,338
<i>OFI 2</i>	0,691	0,621	0,553	0,449	0,657
<i>FLS Beta 1</i>	1,021	1,018	0,999	0,942	1,37
<i>FFI 1</i>	0,777	0,72	0,689	0,649	0,754
<i>FLS Beta 2</i>	1,04	1,072	1,003	0,941	1,365
<i>FFI 2</i>	0,876	0,842	0,834	0,789	0,847
Месячные данные					
<i>OLS Beta 1</i>	1,081	1,019	1,201	1,037	1,574
<i>OFI 1</i>	0,645	0,629	0,575	0,357	0,604
<i>OLS Beta 2</i>	1,082	1,023	1,177	1,082	1,516
<i>OFI 2</i>	0,681	0,63	0,551	0,378	0,564
<i>FLS Beta 1</i>	1,149	0,948	1,08	0,897	1,697
<i>FFI 1</i>	0,868	0,747	0,712	0,549	0,809
<i>FLS Beta 2</i>	1,063	0,921	1,028	1,018	1,547
<i>FFI 2</i>	0,932	0,838	0,827	0,757	0,888

ведут себя более стабильно в случае нечеткой регрессии. Например, для «Лукойла» в случае классической регрессии разница между максимальным и минимальным значениями на трех рассматриваемых промежутках равна 0,132 и 0,126 для обоих способов задания доходностей, а для нечеткой регрессии – 0,125 и 0,108 (для недельных данных).

Таблица 4

Результаты по стабильности оценок бета-коэффициентов

Акции компании	<i>GAZP</i>	<i>LKOH</i>	<i>ROSN</i>	<i>SNGS</i>	<i>SBER</i>
Недельные данные					
$\Delta OLS Beta 1$	0,022	0,132	0,115	0,147	0,0369
$\Delta FLS Beta 1$	0,044	0,125	0,11	0,105	0,057
$\Delta OLS Beta 2$	0,015	0,126	0,114	0,135	0,054
$\Delta FLS Beta 2$	0,014	0,108	0,113	0,098	0,044
Месячные данные					
$\Delta OLS Beta 1$	0,074	0,153	0,334	0,261	0,115
$\Delta FLS Beta 1$	0,045	0,093	0,214	0,133	0,159

Окончание таблицы 4

Акции компании	<i>GAZP</i>	<i>LKOH</i>	<i>ROSN</i>	<i>SNGS</i>	<i>SBER</i>
$\Delta OLS\ Beta\ 2$	0,083	0,128	0,32	0,242	0,098
$\Delta FLS\ Beta\ 2$	0,062	0,058	0,212	0,18	0,089

Примечание. $\Delta OLS\ Beta\ 1$ вычислен с помощью обычной линейной регрессии при задании доходностей по формуле (13), $\Delta OLS\ Beta\ 2$ — по формуле (14); $\Delta FLS\ Beta\ 1$ — с помощью нечеткой регрессии при фазификации по формуле (15), $\Delta FLS\ Beta\ 2$ — по формуле (16).

Дополнительно отметим, что на всех трех временных промежутках: 2012–2017 гг., 2012–2015 гг. и 2014–2017 гг. — показатель качества *FFI* нечеткой модели значительно превышает аналогичный показатель *OFI* для модели без нечеткости. На временных промежутках 2012–2015 и 2014–2017 гг., как и 2012–2017 гг., наблюдается превышение показателей качества подгонки модели в случае использования доходностей в ценах закрытия и соответствующей фазификации в виде гауссовских нечетких чисел.

7. Выводы

В работе произведено оценивание САРМ для российского фондового рынка, сравниваются классический подход и подход, основанный на нечеткой регрессии. В последнем случае бета-коэффициенты остаются действительными числами. Изучено применение нечеткой регрессии на различных по поведению активах и с разной частотой данных. Фазификация проводится двумя способами: в виде треугольных нечетких чисел и в виде гауссовских нечетких чисел. Дополнительно исследован вопрос о стабильности результатов при изменении длительности периода оценивания. Бета-коэффициенты нечеткой регрессии оказываются более стабильными при увеличении длительности периода оценивания по сравнению с классической регрессией. В целом полученные бета-коэффициенты в нечеткой регрессии соответствуют бета-коэффициентам без введения нечеткости. С точки зрения показателя качества подгонки нечеткая версия модели оценки фондовых активов позволяет более точно, чем классическая версия модели, оценить чувствительность актива к рыночным колебаниям, что может быть связано с использованием дополнительной информации о ценах акций. Согласно показателям качества подгонки модели фазификация в виде гауссовских нечетких чисел дает несколько лучшие результаты, чем фазификация в виде треугольных нечетких чисел.

ЛИТЕРАТУРА

Вельдяков В.Н., Шведов А.С. (2014а). О методе наименьших квадратов при регрессии с нечеткими данными // *Экономический журнал ВШЭ*. Т. 18. № 2. С. 328–344.

- Вельдяков В.Н., Шведов А.С.** (20146). Проверка гипотез при регрессии с нечеткими данными // *Экономический журнал ВШЭ*. Т. 18. № 3. С. 508–524.
- Кофман А.** (1982). Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь.
- Пегат А.** (2013). Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний.
- Попов Т.С.** (2015). Эконометрические модели с нечеткими данными. Магистерская диссертация. М.: НИУ ВШЭ.
- Шведов А.С.** (2016). Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин // *Прикладная эконометрика*. Т. 42. С. 121–138.
- Bargiela A., Pedrycz W., Nakashima T.** (2007). Multiple Regression with Fuzzy Data // *Fuzzy Sets and Systems*. Vol. 158. P. 2169–2188.
- Bawa V., Lindenberg E.** (1977). Capital Market Equilibrium in a Mean Lower Partial Moment Framework // *Journal of Financial Economics*. Vol. 5. P. 189–200.
- Campobasso F., Fanizzi A., Bilancia M.** (2010). The Pricing of Risky Securities in a Fuzzy Least Square Regression Model. In: “*Proceedings of the 11th IFCS Biennial Conference and 33rd Annual Conference of the Gesellschaft für Klassifikation e.V.*”. Dresden. P. 639–646.
- Celminš A.** (1987a). Least Squares Model Fitting to Fuzzy Vector Data // *Fuzzy Sets and Systems*. Vol. 22. P. 245–269.
- Celminš A.** (1987b). Multidimensional Least-Squares Model Fitting of Fuzzy Models // *Math. Modeling*. Vol. 9. P. 669–690.
- Diamond P.** (1988). Fuzzy Least Squares // *Information Sciences*. Vol. 46. P. 141–157.
- Dubois D., Prade H.** (2000). Fundamentals of Fuzzy Sets. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Estrada J.** (2002). Systematic Risk in Emerging Markets: the D-CAPM // *Emerging Markets Review*. Vol. 3. P. 365–379.
- Grzegorzewski P.** (1998). Metrics and Orders in Space of Fuzzy Numbers // *Fuzzy Sets and Systems*. Vol. 97. P. 83–94.
- Harlow W., Rao R.** (1989). Asset Pricing in a Generalized Mean-Lower Partial Moment Framework: Theory and Evidence // *Journal of Financial and Quant. Analysis*. Vol. 24(3). P. 285–311.
- Hogan W., Warren J.** (1974). Toward the Development of an Equilibrium Capital-Market Model Based on Semi Variance // *Journal of Financial and Quant. Analysis*. Vol. 9 (1). P. 1–11.
- Kihoon H., Satchell S.** (2014). The Sensitivity of Beta to the Time Horizon When Log Prices Follow an Ornstein-Unlenbeck Process // *The European Journal of Finance*. Vol. 20. P. 264–290.
- Kocadagli O.** (2013). A Novel Nonlinear Programming Approach for Estimating CAPM Beta of an Asset Using Fuzzy Regression // *Expert Systems with Applications*. Vol. 40. P. 858–865.
- Kraus A., Litzenberger R.** (1976). Skewness Preference and Valuation of Risk Assets // *Journal of Finance*. Vol. 31. P. 1085–1100.
- Laumann Y.** (2015). Analysis of Beta Coefficients in the Brazilian Stock Market Using Fuzzy Linear Regression Methodology // *Fuzzy Economic Review*. Vol. 2. P. 3–17.

- Levy R.** (1971). On the Short-Term Stationarity of Beta-Coefficients // *Financial Analysis Journal*. Vol. 27. P. 55–62.
- Moussa A., Kamdem J., Shapiro A., Terraza M.** (2014). CAPM with Fuzzy Returns and Hypothesis Testing // *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 55. P. 40–57.
- Östermark R.** (1989). Fuzzy Linear Constraints in the Capital Asset Pricing Model // *Fuzzy Sets and Systems*. Vol. 30. P. 93–102.
- Price K., Storn R.** (1997). Differential Evolution-A Simple Evolution Strategy for Fast Optimization // *Dr. Dobb's Journal*. Vol. 22 (4). P. 18–24.
- Sánchez J., Gómez A.** (2003a). Applications of Fuzzy Regression in Actuarial Analysis // *Journal of Reproduction and Infertility (JRI)*. Vol. 70 (4). P. 665–699.
- Sánchez J., Gómez A.** (2003b). Estimating a Term Structure of Interest Rates for Fuzzy Financial Pricing by Using Fuzzy Regression Methods // *Fuzzy Sets and Systems*. Vol. 139. P. 313–331.
- Sánchez J., Gómez A.** (2004). Estimating a Fuzzy Term Structure of Interest Rates Using Fuzzy Regression Techniques // *European Journal of Operational Research*. Vol. 154. P. 804–818.
- Savic D., Pedrycz P.** (1991). Evaluation of Fuzzy Linear Regression Models // *Fuzzy Sets and Systems*. Vol. 39. P. 51–63.
- Smimou K.** (2006). Estimation of Canadian Commodity Market Risk Premiums under Price Limits: Two-Phase Fuzzy Approach // *Omega*. Vol. 34. P. 477–491.
- Tanaka H., Ishibuchi H.** (1991). Identification of Possibilistic Linear Systems by Quadratic Membership Functions of Fuzzy Parameters // *Fuzzy Sets and Systems*. Vol. 41. P. 145–160.
- Tanaka H., Uegima S., Asai K.** (1982). Linear Regression Analysis with Fuzzy Model // *IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics*. Vol. 12. P. 903–907.
- Terceño A., Barberà-Marín G., Vigier H., Laumann Y.** (2011). Stability of Beta Coefficients of Sector and Subsector Portfolios in an Uncertain Environment // *Computer Science and Information Systems*. Vol. 2. P. 859–880.
- Zadeh L.** (1965). Fuzzy Sets // *Information and Control*. Vol. 8. P. 338–353.
- Zimmermann H.** (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Поступила в редакцию 10.04.2018 г.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Bargiela A., Pedrycz W., Nakashima T.** (2007). Multiple Regression with Fuzzy Data. *Fuzzy Sets and Systems*, 158, 2169–2188.
- Bawa V., Lindenberg E.** (1977). Capital Market Equilibrium in a Mean Lower Partial Moment Framework. *Journal of Financial Economics*, 5, 189–200.
- Campobasso F., Fanizzi A., Bilancia M.** (2010). The Pricing of Risky Securities in a Fuzzy Least Square Regression Model. In: “*Proceedings of the 11th IFCS Biennial Conference and 33rd Annual Conference of the Gesellschaft für Klassifikation e.V.*”. Dresden, 639–646.
- Celminš A.** (1987a). Least Squares Model Fitting to Fuzzy Vector Data. *Fuzzy Sets and Systems*, 22, 245–269.

- Celminš A.** (1987b). Multidimensional Least-Squares Model Fitting of Fuzzy Models. *Math. Modeling*, 9, 669–690.
- Diamond P.** (1988). Fuzzy Least Squares. *Information Sciences*, 46, 141–157.
- Dubois D., Prade H.** (2000). Fundamentals of Fuzzy Sets. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Estrada J.** (2002). Systematic Risk in Emerging Markets: the D-CAPM. *Emerging Markets Review*, 3, 365–379.
- Grzegorzewski P.** (1998). Metrics and Orders in Space of Fuzzy Numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 97, 83–94.
- Harlow W., Rao R.** (1989). Asset Pricing in a Generalized Mean-Lower Partial Moment Framework: Theory and Evidence. *Journal of Financial and Quant. Analysis*, 24(3), 285–311.
- Hogan W., Warren J.** (1974). Toward the Development of an Equilibrium Capital-Market Model Based on Semivariance. *Journal of Financial and Quant. Analysis*, 9 (1), 1–11.
- Kihoon H., Satchell S.** (2014). The Sensitivity of Beta to the Time Horizon When Log Prices Follow an Ornstein-Uhlenbeck Process. *The European Journal of Finance*, 20, 264–290.
- Kocadagli O.** (2013). A Novel Nonlinear Programming Approach for Estimating CAPM Beta of an Asset Using Fuzzy Regression. *Expert Systems with Applications*, 40, 858–865.
- Kofman A.** (1982). Introduction to the Theory of Fuzzy Sets. Moscow: Radio i svjaz' (in Russian).
- Kraus A., Litzenberger R.** (1976). Skewness Preference and Valuation of Risk Assets. *Journal of Finance*, 31, 1085–1100.
- Laumann Y.** (2015). Analysis of Beta Coefficients in the Brazilian Stock Market Using Fuzzy Linear Regression Methodology. *Fuzzy Economic Review*, 2, 3–17.
- Levy R.** (1971). On the Short-Term Stationarity of Beta-Coefficients. *Financial Analysis Journal*, 27, 55–62.
- Moussa A., Kamdem J., Shapiro A., Terraza M.** (2014). CAPM with Fuzzy Returns and Hypothesis Testing. *Insurance: Mathematics and Economics*, 55, 40–57.
- Östermark R.** (1989). Fuzzy Linear Constraints in the Capital Asset Pricing Model. *Fuzzy Sets and Systems*, 30, 93–102.
- Pegat A.** (2013). Fuzzy Modeling and Control. Moscow: BINOM. Laboratorija znanii (in Russian).
- Popov T.S.** (2015). Econometric Models with Fuzzy Data. Masters paper. Moscow: NRU HSE (in Russian).
- Price K., Storn R.** (1997). Differential Evolution-A Simple Evolution Strategy for Fast Optimization. *Dr. Dobb's Journal*, 22 (4), 18–24.
- Sánchez J., Gómez A.** (2003). Applications of Fuzzy Regression in Actuarial Analysis. *Journal of Reproduction and Infertility (JRI)*, 70 (4), 665–699.
- Sánchez J., Gómez A.** (2003). Estimating a Term Structure of Interest Rates for Fuzzy Financial Pricing by Using Fuzzy Regression Methods. *Fuzzy Sets and Systems*, 139, 313–331.
- Sánchez J., Gómez A.** (2004). Estimating a Fuzzy Term Structure of Interest Rates Using

- Fuzzy Regression Techniques. *European Journal of Operational Research*, 154, 804–818.
- Savic D., Pedrycz P.** (1991). Evaluation of Fuzzy Linear Regression Models. *Fuzzy Sets and Systems*, 39, 51–63.
- Shvedov A.S.** (2016). Estimating the Means and the Covariances of Fuzzy Random Variables. *Applied Econometrics*, 42, 121–138 (in Russian).
- Smimou K.** (2006). Estimation of Canadian Commodity Market Risk Premiums under Price Limits: Two-Phase Fuzzy Approach. *Omega*, 34, 477–491.
- Tanaka H., Ishibuchi H.** (1991). Identification of Possibilistic Linear Systems by Quadratic Membership Functions of Fuzzy Parameters. *Fuzzy Sets and Systems*, 41, 145–160.
- Tanaka H., Uegima S., Asai K.** (1982). Linear Regression Analysis with Fuzzy Model. *IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics*, 12, 903–907.
- Terceño A., Barberà-Marín G., Vigier H., Laumann Y.** (2011). Stability of Beta Coefficients of Sector and Subsector Portfolios in an Uncertain Environment. *Computer Science and Information Systems*, 2, 859–880.
- Veldaykov V.N., Shvedov A.S.** (2014). Hypothesis Testing in Regression Models with Fuzzy Data. *Higher School of Economics Economic Journal*, 18, 3, 508–524 (in Russian).
- Veldaykov V.N., Shvedov A.S.** (2014). On Fuzzy Least-Squares Regression Analysis. *Higher School of Economics Economic Journal*, 18, 2, 328–344 (in Russian).
- Zadeh L.** (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8, 338–353.
- Zimmermann H.** (2001). *Fuzzy Set Theory and its Applications*. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Received 10.04.2018

A.P. Brychykova

National Research University Higher School of Economics,
Moscow, Russia

Capital Asset Pricing Model Using Fuzzy Data and Application for the Russian Stock Market

Abstract. Capital Asset Pricing Model (CAPM) is one of the main models for building an optimal investment portfolio. To deal with the variability of the definition of profitability, vagueness or inaccuracy of data, gaps in variables, the theory of fuzzy sets can be used. A series of calculations and comparison of the parameters of the stock asset valuation model for the Russian stock market using classical and fuzzy regression is given in this paper. The paper also provides an overview of foreign works on fuzzy data. The possibility of using fuzzy regression to determine the relationship between the expected return of a financial asset and its risk through CAPM is analyzed, the problem of the sensitivity of the obtained beta-factors when changing the length of the assessment period is considered. According to the quality parameters of the model fit, the application of fuzzy regression with a fuzzy free term shows a definite improvement compared to the classical regression. The beta-coefficients of the fuzzy regression turn out to be more stable when the length of the estimation period changes in comparison with the classical regression.

Keywords: *fuzzy sets, fuzzy regression, capital asset pricing model, stock market.*

JEL Classification: G12, G17, C32, C61.

DOI: 10.31737/2221-2264-2019-43-3-3