В.И. Аркин
ЦЭМИ РАН, Москва

А.Д. Сластников
ЦЭМИ РАН, Москва

Математическая модель приватизации унитарного предприятия в реальном секторе¹

Аннотация. В работе описывается модель, в рамках которой можно ставить и решать задачу оптимизации процесса приватизации унитарного предприятия. В модели предполагается возможность выбора момента приватизации, а также стохастический характер прибыли предприятия и ее скачкообразное изменение после приватизации. Предложенная схема позволяет найти оптимальный (с точки зрения NPV покупателя) момент приватизации и оптимальную (с точки зрения бюджетного эффекта) цену сделки. В случае когда прибыль предприятия до и после приватизации моделируется случайными процессами геометрического броуновского движения, в работе получена явная формула для оптимального момента приватизации и оптимальной цены приватизации. Выведены условия, при выполнении которых существует оптимальная схема приватизации, исследован характер зависимостей оптимального момента приватизации и оптимальной цены приватизационной сделки от величины налоговой нагрузки, а также параметров прибыли (среднего темпа роста и волатильности) предприятия от и после приватизации. Показано, что характер зависимости оптимального момента приватизации и оптимальной цены приватизации от величины налоговой нагрузки существенно определяется некоторым показателем, характеризующим соотношение между ожидаемой приведенной прибылью предприятия до и после приватизации и инвариантным относительно налоговой системы.

Ключевые слова: *приватизация, унитарные предприятия, бюджетный эффект, неопределенность, срок приватизации, цена сделки приватизации.*

Классификация JEL: C61, D81, G38.

DOI: 10.31737/2221-2264-2019-43-3-1

1. Введение

Приватизация в России, начавшаяся с 1990-х годов, породила ряд проблем, связанных с ее эффективностью, формами и методами проведения. Возникла проблема оптимизации процесса приватизации, которую можно рассматривать в двух аспектах. Первый аспект связан с выбором объектов для приватизации и исследованием необходимости и эффективности их приватизации, другой — с оптимизацией отдельных элементов механизма приватизации, когда решение о приватизации принято. Этой проблеме посвящена данная статья о моделировании и анализе механизмов приватизации предприятий.

Мы не будем подробно останавливаться на общем описании целей, форм и методов проведения приватизации, на эту тему имеется обширная литература². Отметим, что в современной России политика в сфере приватизации имеет два системных подхода — структурный

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-010-00666). Авторы благодарят анонимного рецензента, замечания которого способствовали улучшению текста статьи.

² См., например, (Приватизация в современном мире..., 2014) и многочисленные ссылки в ней.

и бюджетный. Структурный подход связан с сокращением прямого участия государства в экономике, структурными преобразованиями в отдельных секторах, стимулированием развития компаний, возможным привлечением стратегических инвесторов. Бюджетный — нацелен на использование приватизации как источника дополнительных доходов бюджета. Причем в последние годы бюджетный подход стал рассматриваться как доминирующий, а обеспечение максимальной бюджетной эффективности приватизации каждого объекта государственной собственности входит в программы приватизации многих регионов и муниципальных образований. Такой подход был поддержан и представителями бизнеса в качестве альтернативы повышению налогов как способа пополнения бюджета (Приватизация в современном мире..., 2014, т. 2, с. 232–234).

Исследования по различным моделям приватизации получили новый импульс, когда начали происходить радикальные преобразования экономических систем в России и странах Восточной Европы.

Одним из основных направлений исследований стало сопоставление эффективности управления предприятиями, находящимися в государственной и частной собственности. Основополагающим теоретическим результатом здесь считается теорема Sappington–Stiglitz (Sappington, Stiglitz, 1987), которая утверждает, что при выполнении определенных условий (стремление государства максимизировать общественное благосостояние, симметричность информации, риск-нейтральность, совершенство конкуренции частных агентов) форма собственности не имеет значения для эффективных решений. При нарушении этих условий (в частности, разного отношения агентов к риску) приватизация не сможет обеспечить эффективного общественного производства.

Несколько иной взгляд на эффективность приватизации проводится в работе (Shapiro, Willig, 1990). В ней принимается во внимание неполнота и несимметричность информации, идущей от различных предприятий, а также наличие разных целей и мотивов у менеджеров, собственников и государственных чиновников. В этих условиях лучший результат может принести переход от государственной собственности к частной.

Вопрос о выполнении упомянутых выше идеальных условий в разных экономических и политических системах остается открытым и порождает множество дискуссий между сторонниками приватизации и ее противниками. Подробный анализ аргументов за и против приватизации можно найти, например, в работах (Полтерович, 2012; Приватизация в современном мире..., 2014).

Как отмечает большинство исследователей, для предприятий государственного сектора характерен конфликт интересов, поскольку государство выступает одновременно как собственник, менеджер и регулятор. В (Полтерович, 2012) автор выделяет следующие основ-

ные моменты, порождающие неэффективность государственного управления предприятиями.

1. Покровительство государства и защита госпредприятия от конкуренции приводит к привлечению менее квалифицированных менеджеров.
2. Отсутствие субъектной заинтересованности в успешном развитии госпредприятия и контроля со стороны владельцев капитала снижает качество государственного управления.
3. Недостаток информации о предприятии у госчиновников открывает возможности для использования управления в личных целях менеджеров (агентская проблема).
4. Слабая защита от злоупотреблений на государственных предприятиях — контролеры сами стремятся извлечь ренту из своего положения и склонны к коррупции.
5. Использование административных и политических связей в процессе конкуренции с частными компаниями препятствует развитию частного сектора.
6. Управление государственной собственностью требует расходов из бюджета, которые не всегда отражаются в издержках предприятия и тем самым искусственно завышают его эффективность.

Что касается эмпирической проверки гипотезы о преимущественной эффективности частной формы собственности перед государственной, однозначных результатов здесь не существует.

Многочисленные проводившиеся эмпирические исследования различались между собой выбором отраслей, масштабом наблюдения, рассматриваемым периодом и пр. Обширный перечень соответствующих работ по сравнительному анализу хозяйственной эффективности частных и государственных компаний можно найти, например, в монографии (Приватизация в современном мире..., 2014, с. 98–104). В подавляющем большинстве исследований, относящихся, правда, к прошлому столетию, выявлено превосходство частных компаний над государственными. Высокая эффективность государственных компаний проявляется лишь в узком кругу отраслей, в основном в электроэнергетике и водоснабжении, где конкуренция достаточно мала. Однако с начала 2000-х годов тенденция в оценках немного изменилась, и тезис о большей эффективности частных предприятий стал находить все меньше подтверждений. Как отмечает большинство исследователей, эффективность приватизированных предприятий во многом зависит от институциональных и организационных факторов, сопровождавших процесс приватизации, а также от конкретной отрасли (см., например, (Gasmi et al., 2011; Cook, Uchida, 2008)). Особенно это относится к переходным экономикам, где на первый план в процессе приватизации выдвигаются методы ее проведения (быстрая или постепенная, стратегия продаж и т.п.), а также наличие надежной правовой и институциональной среды. Как отмечается в работе (Estrin et al.,

2009), эффект приватизации предприятий был положительным в странах Восточной Европы, но в России и странах СНГ он был нулевым или даже отрицательным, хотя многие возникшие частные предприятия показали себя эффективнее государственных.

Другое значительное направление современных исследований по приватизации связано с вопросами реструктуризации приватизируемых предприятий, в частности с влиянием приватизации на развитие конкуренции, рынки труда, капитала и т.п. Краткий обзор работ по этому направлению и соответствующие ссылки можно найти, например, в (Андерсон, 2004). Однако это направление лежит в стороне от тематики данной статьи, поэтому в разд. 2 мы подробнее остановимся на работах более близких к изучаемым здесь проблемам. Предлагаемая нами модель, в рамках которой можно оптимизировать отдельные аспекты процесса приватизации, излагается в разд. 3. Нахождению оптимальной приватизации в предложенной модели посвящен разд. 4, а исследование ее свойств (а именно зависимостей от параметров прибыли предприятия и налоговой системы) приводится в разд. 5.

2. Обзор некоторых моделей по оптимизации приватизации

Работ, связанных с оптимизацией процесса приватизации предприятий, не так много в научной литературе. Особенно это касается вопроса оптимизации сроков приватизации, который является одним из основных, рассматриваемых в данной статье.

Хотя проблеме оптимального выбора времени принятия инвестиционных решений посвящена обширная литература (например, по теории реальных опционов (Dixit, Pindyck, 1994)), но соответствующих исследований в рамках именно приватизации достаточно мало. Одной из первых работ считается (Katz, Owen, 1993), в которой авторы предложили модель оптимального графика приватизации отрасли промышленности. В качестве критерия выступает объем продукции отрасли на заданном конечном интервале времени, при этом накладывается ряд ограничений на уровень занятости, рост производительности труда и перераспределение трудовых ресурсов, сокращенных в процессе приватизации. Один из выводов этой работы состоит в неоптимальности мгновенной (шоковой) приватизации, по крайней мере в рамках отрасли. Стоит отметить, что вопрос выбора между постепенной и мгновенной приватизацией является дискуссионным (Katz, Owen, 2000; Svejnar, 2002).

Модель оптимизации момента приватизации отдельной фирмы разрабатывалась в (Li et al., 2005). Авторы показали, что оптимальный выбор времени, когда следует проводить приватизацию, зависит от таких параметров, как издержки, неопределенность, риск, а также показателей деятельности фирмы до и после приватизации, скорости перестройки фирмы после приватизации, которые, в свою очередь, зависят от внешних условий и от характеристик фирмы.

На уровне отдельных предприятий достаточно простая модель определения оптимальных сроков приватизации рассмотрена в работе (Андерсон, 2004). Ее особенностями являются детерминированный характер потока чистого дохода предприятия и наличие налогообложения, причем налоговые ставки различаются до и после приватизации. Предполагая, что после приватизации поток чистого дохода изменяется, автор выписывает условия первого порядка для момента приватизации, при котором чистый дисконтированный доход предприятия до и после приватизации (на бесконечном горизонте времени) максимален. В работе также проводится сравнительный анализ влияния на оптимальный момент приватизации характера изменения чистого дохода (после приватизации), а также некоторых налоговых ставок.

В (Chavanasporn, Ewald, 2012) авторы построили стохастическую модель, в которой фирма, находящаяся под контролем государства, передает на некоторое время долю своего бизнеса частной фирме для выполнения определенного проекта. Для определения оптимального момента входа частной фирмы в госсектор авторы используют метод реальных опционов, рассматривая в качестве критерия дисконтированный чистый доход (NPV) частной фирмы. Прибыль государственной фирмы описывается случайным процессом типа Орнштейна–Уленбека и меняется после приватизации. В работе обсуждаются возможности решения соответствующей оптимизационной задачи и приводятся некоторые численные результаты. Авторы также рассматривают целевую функцию государства как дисконтированную прибыль от государственной части фирмы (всей фирмы до момента приватизации и ее доли после этого момента) с учетом инвестиций, сделанных в момент приватизации. В работе ставится задача нахождения такой доли приватизации, при которой эта функция будет максимальной, и такое оптимальное значение доли вычисляется для конкретного примера.

Методы реальных опционов использовались для исследования ситуации, когда государство имеет возможность отложить приватизацию компании на какое-то время в ожидании наступления некоторых благоприятных событий, когда ценность компании для инвесторов станет более высокой. Так, ряд работ посвящен оптимизации времени размещения Initial Public Offering³ (IPO) на рынке в ходе приватизации, когда компания в каждый момент времени решает, оставаться ли ей в прежнем статусе или же становиться публичной (выходя на IPO), получая при этом определенные преимущества (Brada, Ma, 2007; Benninga et al., 2005; Draho, 2000). Существенную роль в этих исследованиях играет неопределенность денежных потоков компании и факторы риска. Показано, в частности, что неоптимальное определение сроков приватизации может привести к значительным потерям для государства и инвесторов (Brada, Ma, 2007).

Упомянем также ряд работ по частичной приватизации в смешанной олигополии, где сосуществуют компании с разными формами

³ Первоначальное публичное предложение акций.

собственности. Одна из основных рассматриваемых в этих исследованиях проблем — выбор долей собственности, принадлежащих государству и частному инвестору. В рамках различных моделей равновесного типа (например, олигополии Курно) проблема оптимизации доли приватизации (по критерию взвешенной суммы прибыли и выпуска продукции) рассматривалась, например, в статьях (Matsumura, 1998; Huang et al., 2006; Chen et al., 2009). Общим моментом, характерным для большинства таких работ, является вывод о том, что ни полная приватизация, ни ее отсутствие не будут оптимальными. Достаточно подробный обзор работ в этом направлении можно найти, например, в (Фридман, 2017).

3. Описание модели

В качестве объекта приватизации рассматривается унитарное предприятие (УП), функционирующее в рамках российской системы налогообложения. Деятельность унитарных предприятий в России регламентируется Федеральным законом № 161-ФЗ от 14.11.2002 г. Согласно этому закону унитарное предприятие — это коммерческая организация, не наделенная правом собственности на имущество, закрепленное за ней собственником, которым является государство (в лице федерального центра, субъекта РФ или муниципального образования). Имущество УП является неделимым и не может быть распределено по вкладам (долям, паям), в том числе между работниками предприятия. После выплаты всех полагающихся налогов и иных обязательных платежей унитарные предприятия перечисляют в бюджет определенную долю оставшейся у них чистой прибыли. Величина этой доли устанавливается собственником предприятия: для федеральных УП она должна быть не менее 50% (Постановление Правительства РФ № 1224 от 12.10.2018 г.), такая же доля установлена и для многих муниципальных УП.

К началу 2018 г. в России насчитывалось более 18,6 тыс. унитарных предприятий. Примерами наиболее известных УП являются Гознак, Почта России, Мосфильм, ВГТРК, Мосгортранс, Московский метрополитен. Значительная часть УП работает в сферах ЖКХ (тепло- и водоснабжении, водоотведении, управлении жилым фондом), торговле и оказании услуг. Что касается перспектив развития УП, то в декабре 2018 г. Государственная дума приняла в первом чтении законопроект, подготовленный Федеральной антимонопольной службой (ФАС), который предусматривает запрет на создание новых и ликвидацию либо реорганизацию существующих УП⁴. Основным аргументом ФАС по свертыванию УП является то, что их деятельность оказывает негативное влияние на конкуренцию и влечет их монополизацию. Исключение могут составить предприятия, созданные для обеспечения обороны и национальной безопасности, в сферах естественных монополий, культуры и некоторых других.

⁴ См. <https://fas.gov.ru/publications/17134>.

3.1. Модель

В рамках предлагаемой схемы государство желает продать предприятие в частный сектор. Предполагается, что покупатель обладает определенной свободой при выборе времени сделки (момента приватизации). После приватизации меняется прибыль предприятия (и соответствующие налоговые поступления в бюджет), кроме того, государство получает доход и непосредственно от сделки.

Прибыль предприятия до приватизации в момент t моделируется случайным процессом π_t^1 , $0 \leq t < \tau$, а после приватизации — случайным процессом $\pi_{t,\tau}^2$, $t \geq \tau$, которые заданы на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ с потоком σ -алгебр $\mathbb{F}_t$, $t \geq 0$. Пусть P — цена приватизации, которую покупатель платит государству (в бюджет); M — дополнительные расходы покупателя, не идущие в бюджет (например, на оформление смены собственности, модернизацию и подготовку предприятия к перезапуску и т.д.). Функционирование предприятия рассматривается в непрерывном времени, и для простоты время жизни предприятия считается бесконечным.

При выборе момента приватизации τ покупатель исходит из показателя NPV от приватизированного предприятия, в который включены ожидаемая приведенная прибыль от предприятия (с учетом налогов), а также все его расходы на покупку предприятия:

$$N(\tau) = E \left(\int_{\tau}^{\infty} (1 - \gamma) \pi_{t,\tau}^2 e^{-\rho t} dt - (P + M) e^{-\rho \tau} \right), \quad (1)$$

где E — знак математического ожидания, γ — коэффициент налоговой нагрузки (доля всех налогов в прибыли), ρ — дисконт.

Хотя все процессы прибыли предприятия будут в дальнейшем предполагаться положительными, отметим, что описание интегральных налогов (и приведенной прибыли) имеет смысл и в случае, когда процессы прибыли не обязательно положительны⁵.

В соответствии с описанным во введении бюджетным приоритетом государственной политики в сфере приватизации мы рассматриваем в качестве критерия государства бюджетный эффект $B(\tau, P)$, представляющий собой ожидаемые приведенные (к нулевому моменту времени) поступления в бюджет от предприятия, приватизируемого в момент времени τ с ценой продажи P . Этот бюджетный эффект в модели состоит из трех частей:

- 1) заданная доля $\bar{\theta}$ ожидаемой приведенной прибыли предприятия до момента приватизации: $\bar{\theta} = \gamma + \theta(1 - \gamma)$, где γ — коэффициент налоговой нагрузки, θ — доля отчислений в бюджет оставшейся чистой прибыли;
- 2) доход от продажи предприятия в момент приватизации;
- 3) ожидаемые приведенные налоговые поступления в бюджет от уже приватизированного предприятия.

⁵ Это обстоятельство связано с существующим во многих налоговых системах (в том числе в российской) принципом переноса убытков на будущее, приводящим к частичному возмещению убытков (отрицательной прибыли). Подробный анализ различных схем возмещения убытков для более детальной модели налогообложения предприятий и их сравнение можно найти в (Аркин, Слестников, Аркина, 2002).

Таким образом,

$$B(\tau, P) = E \left(\int_0^{\tau} \tilde{\theta} \pi_t^1 e^{-\rho t} dt + P e^{-\rho \tau} + \int_{\tau}^{\infty} \gamma \pi_{t,\tau}^2 e^{-\rho t} dt \right). \quad (2)$$

3.2. Задача оптимизации

Описанная модель предполагает отсутствие конкуренции среди покупателей предприятия. В этой ситуации аукцион, являющийся основным способом приватизации государственного и муниципального имущества, становится невозможным, и сделка может проводиться непосредственно государством и потенциальным покупателем. Взаимодействие между государством и покупателем в процессе приватизации будет описываться следующей схемой двухуровневой оптимизации.

На нижнем уровне находится покупатель (частный инвестор), который при заданной цене приватизации P стремится максимизировать NPV (1) от предприятия, выбирая для этого оптимальный момент приватизации $\tau^*(P)$ как решение оптимизационной задачи:

$$N(\tau) \rightarrow \max_{\tau}, \quad (3)$$

где максимум берется по всем марковским (относительно потока $\mathbb{F}_t, t \geq 0$) моментам τ .

На верхнем уровне располагается государство, которое, зная принцип оптимального выбора покупателем момента приватизации $\tau^*(P)$ как функцию от цены P , выбирает оптимальную цену приватизации P^* так, чтобы максимизировать бюджетный эффект $B(\tau^*(P), P)$ по всем допустимым ценам P :

$$B(\tau^*(P), P) \rightarrow \max_P. \quad (4)$$

Описанная оптимизационная схема позволяет оценить потенциальные возможности механизма приватизации предприятий с точки зрения наполнения бюджета.

Решение $(\tau^*(P^*), P^*)$ задачи двухуровневой оптимизации (3)–(4) можно также интерпретировать как равновесие по Штакельбергу в приватизационной игре между частным инвестором (покупателем) и государством. В рамках такой теоретико-игровой интерпретации стратегией первого игрока (покупателя) является момент приватизации предприятия $\tau^*(P)$, а стратегией второго игрока (государства) — цена приватизации P . Предполагается, что второй игрок знает правила (принципы), по которым первый игрок находит свои оптимальные решения при любых стратегиях второго игрока.

Отметим, что в отличие от большинства работ по оптимизации момента приватизации, где выбор такого момента остается за государством, в данной схеме решение о сроке приватизации принимает покупатель, но государство влияет на это решение, назначая наиболее выгодную (с бюджетной точки зрения) цену приватизационной сделки.

4. Оптимальная приватизация

Для того чтобы найти решение в сформулированной выше задаче двухуровневой оптимизации, нам понадобятся некоторые формальные предположения.

4.1. Математические предположения

Будем считать, что поток прибыли предприятия до приватизации π_t^1 описывается процессом геометрического броуновского движения

$$\pi_t^1 = \pi_0^1 \exp\{(\alpha_1 - 0,5\sigma_1^2)t + \sigma_1 w_t^1\}, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

где начальное значение π_0^1 задано, $w_t^1, t \geq 0$ — винеровский процесс. Прибыль приватизированного предприятия описывается семейством геометрических броуновских движений $\pi_{t,\tau}^2$ (здесь параметр τ имеет смысл момента приватизации):

$$\pi_{t,\tau}^2 = \pi_{\tau,\tau}^2 \exp\{(\alpha_2 - 0,5\sigma_2^2)(t - \tau) + \sigma_2 w_{t-\tau}^2\}, \quad \tau \geq 0, t \geq \tau, \quad (6)$$

где $w_{t,\tau}^2, t \geq \tau, \tau \geq 0$ — семейство винеровских процессов с $w_{\tau,\tau}^2 = 0$, а начальное состояние прибыли (после приватизации) $\pi_{\tau,\tau}^2$ связано с последним состоянием прибыли до приватизации π_τ^1 соотношением

$$\pi_{\tau,\tau}^2 = k\pi_\tau^1, \quad k > 0 \quad (7)$$

(строго говоря, в правой части равенства (7) следовало бы писать $\pi_{\tau-0}^1$, но в силу непрерывности процесса геометрического броуновского движения $\pi_{\tau-0}^1 = \pi_\tau^1$).

Моделирование прибыли в виде процесса геометрического броуновского движения широко используется в теории реальных опционов и финансовой математике (см., например, (Dixit, Pindyck, 1994)). Такой вид процесса следует из достаточно общих предположений о структуре случайных процессов: положительности и непрерывности траекторий, независимости относительных приращений от прошлого и однородности их по времени. Параметры геометрического броуновского движения имеют естественную экономическую интерпретацию: они являются средним значением и дисперсией (волатильностью) мгновенного темпа роста процесса. Поскольку время жизни предприятия не ограничено, для корректности надо считать, что $\alpha_1, \alpha_2 < \rho$.

В момент приватизации происходит скачок прибыли — она мгновенно изменяется в k раз. Такой скачок можно связывать как с перестройкой деятельности предприятия после смены собственника, так и с определенными условиями приватизации, которые выдвигает государство. Например, если средние темпы роста прибыли до и после приватизации одинаковы ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$), величины средней прибыли (в момент t) неприватизированного предприятия и приватизированного (в момент $\tau \leq t$) отличаются в k раз:

$$\begin{aligned} E\pi_{t,\tau}^2 &= E\left(E\left(\pi_{t,\tau}^2 \mid \mathbb{F}_\tau\right)\right) = E\left(\pi_{\tau,\tau}^2 e^{\alpha(t-\tau)}\right) = E\left(k\pi_\tau^1 e^{\alpha(t-\tau)}\right) = \\ &= k\pi_0^1 e^{\alpha t} E\left(\exp\{-0,5\sigma_1^2\tau + \sigma_1 w_\tau^1\}\right) = k\pi_0^1 e^{\alpha t} = kE\pi_t^1. \end{aligned}$$

Отметим, что мы не предполагаем каких-либо дополнительных условий ни на величину коэффициента k , влияющего на стартовые условия приватизированного предприятия, ни на соотношение между параметрами прибыли до и после приватизации. Поэтому, как будет показано ниже, при некоторых условиях, налагаемых на параметры, проводить приватизацию не имеет смысла (с точки зрения критерия бюджетного эффекта). На рис. 1 условно изображена динамика прибыли предприятия до и после приватизации (в момент τ).

Рис. 1

Динамика прибыли предприятия до и после приватизации

В качестве допустимых цен приватизации P будем рассматривать все цены, превышающие некоторую (заданную) нижнюю границу $\underline{P} \geq 0$, т.е. множество $\{P : P \geq \underline{P}\}$.

4.2. Оптимальный момент и оптимальная цена приватизации

Сделанные предположения о динамике прибыли дают возможность найти решение задачи двухуровневой оптимизации (3)–(4) в явном виде. Из предположений (5)–(7) и свойств геометрического броуновского движения имеем:

$$\begin{aligned} N(\tau) &= E \left(E \left(\int_{\tau}^{\infty} (1-\gamma) \pi_{t,\tau}^2 e^{-\rho t} dt \middle| \mathbb{F}_{\tau} \right) - (P+M) e^{-\rho \tau} \right) = \\ &= E \left(\frac{1-\gamma}{\rho - \alpha_2} \pi_{\tau,\tau}^2 - (P+M) \right) e^{-\rho \tau} = \\ &= E \left(\frac{1-\gamma}{\rho - \alpha_2} k \pi_{\tau}^1 - (P+M) \right) e^{-\rho \tau}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} B(\tau, P) &= E \left(\int_0^{\infty} \tilde{\theta} \pi_t^1 e^{-\rho t} dt + \int_{\tau}^{\infty} (\gamma \pi_{t,\tau}^2 - \tilde{\theta} \pi_t^1) e^{-\rho t} dt + P e^{-\rho \tau} \right) = \frac{\tilde{\theta}}{\rho - \alpha_1} \pi_0^1 + \\ &+ E \left(\int_{\tau}^{\infty} E_{\tau} (\gamma \pi_{t,\tau}^2 - \tilde{\theta} \pi_t^1) e^{-\rho t} dt + P e^{-\rho \tau} \right) = \frac{\tilde{\theta}}{\rho - \alpha_1} \pi_0^1 + E \left(P + \left(\frac{\gamma k}{\rho - \alpha_2} - \frac{\tilde{\theta}}{\rho - \alpha_1} \right) \pi_{\tau}^1 \right) e^{-\rho \tau}. \end{aligned} \quad (9)$$

Замечание. Нетрудно показать, что формулы (8) и (9), играющие основную роль во всех дальнейших выкладках и соотношениях, остаются справедливыми, если вместо детерминированных величин k и M рассматривать случайные величины ξ и μ , не зависящие между собой и от винеровских процессов $w_t^1, w_{t,\tau}^2$ (а тем самым и от процессов прибыли $\pi_t^1, \pi_{t,\tau}^2$). Это означает, что изменение стартовых условий прибыли предприятия после приватизации, а также дополнительные

расходы покупателя могут носить случайный характер. При этом все дальнейшие формулы, начиная с (10), и выкладки остаются справедливыми, если понимать в них k и M как математические ожидания соответствующих величин (т.е. $k = E\xi$, $M = E\mu$).

С учетом соотношения (8) задача покупателя предприятия (3) представляет собой задачу оптимальной остановки разности геометрического броуновского движения π_t^1 и константы. Известно, что оптимальный момент остановки в такой задаче является первым моментом выхода случайного процесса за некоторый уровень (см., например, (Dixit, Pindyck, 1994) и (Аркин, Слостников, 2007) – для более общего случая). Таким образом, оптимальный момент приватизации равен первому моменту времени, когда текущая прибыль унитарного предприятия превысит некоторый уровень:

$$\tau^*(P) = \min\{t \geq 0 : \pi_t^1 \geq \pi^*(P)\}, \quad \pi^*(P) = \frac{\beta}{\beta-1} \times \frac{\rho-\alpha_2}{k(1-\gamma)}(P+M), \quad (10)$$

где β – положительный корень квадратного уравнения $0,5\sigma_1^2\beta(\beta-1) + \alpha_1\beta - \rho = 0$, причем $\beta > 1$, поскольку $\rho > \alpha_1$.

Чтобы избежать вырожденного случая $\tau^*(P) = 0$ (моментальная приватизация), будем считать, что $\pi_0^1 < \pi^*(P)$ для всех допустимых $P \geq \underline{P}$, что обеспечивает положительность (с вероятностью 1) оптимального момента приватизации.

Зная оптимальный момент приватизации, можно найти и оптимальную цену приватизации (с точки зрения бюджетного эффекта). Введем следующие обозначения:

$$B = \frac{\beta}{\beta-1}, \quad c_1 = \frac{\gamma k}{\rho-\alpha_2} - \frac{\tilde{\theta}}{\rho-\alpha_1}, \quad c_2 = \frac{\rho-\alpha_2}{k(1-\gamma)}, \quad c_3 = c_1 c_2 B = \frac{B}{1-\gamma} \left(\gamma - \frac{\rho-\alpha_2}{\rho-\alpha_1} \times \frac{\tilde{\theta}}{k} \right).$$

Из соотношений (8), (9) и формулы Фейнмана–Каца получаем

$$\begin{aligned} B(\tau^*(P), P) &= \frac{\pi_0^1 \tilde{\theta}}{\rho-\alpha_1} + E\left(P + c_1 \pi_{\tau^*(P)}^1\right) e^{-\rho \tau^*(P)} = \frac{\pi_0^1 \tilde{\theta}}{\rho-\alpha_1} + (P + c_1 \pi^*(P)) \left(\frac{\pi_0^1}{\pi^*(P)} \right)^\beta = \\ &= \frac{\pi_0^1 \tilde{\theta}}{\rho-\alpha_1} + \left(\frac{B c_2}{\pi_0^1} \right)^{-\beta} (P+M)^{-\beta} [P + c_1 c_2 B(P+M)] = \frac{\pi_0^1 \tilde{\theta}}{\rho-\alpha_1} + b(P) \left(\frac{B c_2}{\pi_0^1} \right)^{-\beta}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $b(P) = (P+M)^{-\beta} [(1+c_3)P + c_3 M]$. Таким образом, задача максимизации бюджетного эффекта (4) сводится к максимизации функции $b(P)$, определенной в (11).

Если $1+c_3 \leq 0$, то $b(P) < 0$ при всех $P \geq 0$. Поэтому $B(\tau^*(P), P) < \pi_0^1 \tilde{\theta}/(\rho-\alpha_1) = B(\infty, P)$ при всех $P \geq 0$, а это означает, что бюджетный эффект от предприятия без приватизации (этому формально соответствует бесконечный момент приватизации) будет больше, чем

с приватизацией. Если параметры модели удовлетворяют соотношению $1 + c_3 \leq 0$, или, что эквивалентно,

$$1 - \gamma\psi \leq \frac{1 - \gamma}{\beta}, \quad \psi = \frac{\rho - \alpha_2}{\rho - \alpha_1} \times \frac{\tilde{\theta}}{k\gamma}, \quad (12)$$

то проведение приватизации не принесет никаких дополнительных поступлений в бюджет (по сравнению с ее отсутствием). К обсуждению этой ситуации мы вернемся в следующем разделе.

Пусть теперь $1 + c_3 > 0$, тогда

$$b'(P) = -\beta(P + M)^{-\beta-1}[(1 + c_3)P + c_3M] + (P + M)^{-\beta}(1 + c_3) \propto \\ \propto -\beta[(1 + c_3)P + c_3M] + (1 + c_3)(P + M) = -(\beta - 1)(1 + c_3)P + M(1 + c_3 - \beta c_3),$$

где « $\propto$ » означает пропорциональность с точностью до положительного множителя.

Для дальнейшего анализа необходимо рассмотреть два случая.

А. Если

$$(\beta - 1)(1 + c_3)\underline{P} > M(1 + c_3 - \beta c_3), \quad (13)$$

то функция $b(P)$ убывает при $P \geq \underline{P}$ и оптимальная цена приватизации достигается на границе $P^* = \underline{P}$. Заметим, что условие (13) можно записать в виде

$$M\left(\gamma\psi - \gamma + \frac{1 - \gamma}{\beta}\right) < \underline{P}\left(1 - \gamma\psi - \frac{1 - \gamma}{\beta}\right), \quad (14)$$

где коэффициент ψ определен в (12).

Б. Если выполнено противоположное к (14) неравенство, то $b'(P)$ обращается в нуль в точке

$$P = P^* = \frac{1 - (\beta - 1)c_3}{(\beta - 1)(1 + c_3)}M = \frac{\gamma\psi - \gamma + (1 - \gamma)/\beta}{1 - \gamma\psi - (1 - \gamma)/\beta}M, \quad (15)$$

меняя при этом знак с положительного на отрицательный. Тем самым P^* из (15) является оптимальной ценой приватизации.

Объединяя приведенные выше результаты, приходим к следующей теореме.

Теорема. Оптимизационная задача (3)–(4) имеет решение в том и только том случае, когда выполнено неравенство

$$1 - \gamma\psi > (1 - \gamma)/\beta. \quad (16)$$

При этом решением задачи (3)–(4) является пара (τ^*, P^*) , где

$$\tau^* = \min\{t \geq 0 : \pi_t^1 \geq \pi^*\},$$

$$\pi^* = \frac{\beta}{\beta - 1} \times \frac{\rho - \alpha_2}{k(1 - \gamma)} \max\left\{\underline{P} + M, \frac{1 - \gamma}{1 - \gamma\psi - (1 - \gamma)/\beta}M\right\}, \quad (17)$$

$$P^* = \max\left\{\underline{P}, \frac{\gamma\psi - \gamma + (1 - \gamma)/\beta}{1 - \gamma\psi - (1 - \gamma)/\beta}M\right\}. \quad (18)$$

Таким образом, оптимальным временем приватизации является первый момент времени, когда поток текущей прибыли унитарного предприятия превзойдет уровень π^* , величина которого описывается в формуле (17), а оптимальная (с точки зрения рассмотренного выше критерия бюджетного эффекта) цена приватизации P^* описывается формулой (18).

Сделаем еще несколько замечаний по поводу условия (16), необходимого и достаточного, для того чтобы существовала оптимальная приватизация (как решение задачи (3)–(4)). Как уже отмечалось выше, для любой цены приватизации P существует оптимальный момент приватизации $\tau^*(P)$ как решение задачи покупателя предприятия (см. формулу (9)). Однако если нарушается неравенство (16), бюджетный эффект от предприятия без приватизации будет больше, чем с приватизацией (в момент $\tau^*(P)$).

5. Модельный анализ

В этом разделе покажем, какие выводы можно сделать из полученных в разд. 4 формул для оптимального момента и оптимальной цены приватизации. Возьмем унитарное предприятие в какой-то момент времени τ и рассмотрим два сценария. Согласно первому предприятию продолжает дальше оставаться государственным и его ожидаемая прибыль (до взятия налогов), приведенная к моменту τ , равна

$$\Pi_{\tau}^1 = E \left(\int_{\tau}^{\infty} \pi_t^1 e^{-\rho(t-\tau)} dt \mid \mathbb{F}_{\tau} \right) = \frac{\pi_{\tau}^1}{\rho - \alpha_1}.$$

Второй сценарий связан с приватизацией предприятия в момент τ , т.е. изменением в момент τ начальных условий и дальнейшего потока прибыли. В этом случае ожидаемая (доналоговая) прибыль приватизированного предприятия, приведенная к моменту τ , равна

$$\Pi_{\tau}^2 = E \left(\int_{\tau}^{\infty} \pi_{t,\tau}^2 e^{-\rho(t-\tau)} dt \mid \mathbb{F}_{\tau} \right) = \frac{\pi_{\tau,\tau}^2}{\rho - \alpha_2} = \frac{k\pi_{\tau}^1}{\rho - \alpha_2}.$$

Определим теперь величину $\lambda = \Pi_{\tau}^1 / \Pi_{\tau}^2 = (\rho - \alpha_2) / [k(\rho - \alpha_1)]$, равную отношению приведенных налоговых прибылей унитарного и приватизированного предприятия, которую с некоторой долей условности можно рассматривать как *показатель эффективности приватизации*. Этот показатель в отличие от ψ , определенной в (12), не зависит явным образом от налоговой системы (коэффициента налоговой нагрузки γ и доли выплат унитарного предприятия в бюджет после налогообложения θ) и связан с ψ соотношением

$$\gamma\psi = \lambda[\gamma + \theta(1 - \gamma)] = \lambda[\gamma(1 - \theta) + \theta]. \quad (19)$$

Величину $\varphi = 1/\psi = \gamma\Pi_{\tau}^2 / (\tilde{\theta}\Pi_{\tau}^1) = \gamma / (\tilde{\theta}\lambda)$ можно назвать коэффициентом *налоговой эффективности приватизации*, поскольку она показывает отношение поступлений в бюджет от приватизированного и от неприватизированного предприятий (здесь учитываются как налоги, так и выплаты из чистой прибыли унитарного предприятия, идущие в бюджет наряду

с налогами). Если $\varphi > 1$, функционирование предприятия после приватизации дает бюджету (без учета стоимости сделки) больше, чем функционирование унитарного предприятия, а при $\varphi < 1$ — меньше.

5.1. Существование оптимальной приватизации

Как отмечалось в сформулированной выше теореме, выполнение неравенства (16) является необходимым и достаточным условием существования оптимальной приватизации, т.е. решения оптимизационной задачи (3)–(4). При отсутствии оптимальной приватизации коэффициент налоговой эффективности приватизации φ должен быть меньше единицы, так как в этом случае

$$\varphi \leq \frac{\beta\gamma}{\beta-1+\gamma} = \frac{\beta\gamma}{\beta\gamma + (\beta-1)(1-\gamma)}.$$

Отсюда вытекает, что для существования оптимальной приватизации коэффициент налоговой эффективности φ не обязательно должен быть больше единицы, что, впрочем, понятно, так как в бюджетном эффекте учитывается еще и стоимость сделки приватизации.

Условие (16) существования оптимальной приватизации можно также записать (с учетом равенства (19)) в виде

$$\lambda < \lambda(\gamma) = \frac{\beta-1+\gamma}{\beta[\gamma(1-\theta)+\theta]}. \quad (20)$$

Для анализа соотношения (20) введем обозначения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\beta(1-\theta)}, \quad \lambda_2 = \frac{\beta-1}{\beta\theta}. \quad (21)$$

Заметим, что $\lambda'(\gamma) \propto \gamma(1-\theta) + \theta - (\beta-1+\gamma)(1-\theta) = 1 - \beta(1-\theta) \propto \lambda_1 - 1$, $\lambda(0) = \lambda_2$, $\lambda(1) = 1$, а величины λ_1 и λ_2 расположены по разные стороны от единицы, т.е. если $\lambda_1 < 1$, то $\lambda_2 > 1$, и наоборот, если $\lambda_2 < 1$, то $\lambda_1 > 1$.

На рис. 2 изображена область в пространстве показателей (λ, γ) , в которой существует оптимальная приватизация. Вид этой области существенно зависит от того, будет ли величина λ_1 , определенная в (21), больше или меньше единицы. В случае равенства $\lambda_1 = 1$ область существования оптимальной приватизации будет квадратом $\{(\lambda, \gamma) : 0 < \lambda < 1, 0 < \gamma < 1\}$.

Рис. 2

Область существования оптимальной приватизации (заштрихована)

Как видно из графиков, представленных на рисунке, оптимальная приватизация всегда существует, когда $\lambda < \min\{\lambda_2, 1\}$. Такая ситуация возникает, например, при больших значениях коэффициента скачка k , т.е. при значительном увеличении стартовой точки прибыли после приватизации предприятия. При больших значениях λ , когда $\lambda > \max\{\lambda_2, 1\}$, оптимальная приватизация не существует. Это соответствует ситуации, когда стартовые условия прибыли после приватизации ухудшаются, т.е. коэффициент k маленький.

Если λ принимает промежуточные значения $\min\{\lambda_2, 1\} < \lambda < \max\{\lambda_2, 1\}$, то для существования оптимальной приватизации требуется еще и ограничение на коэффициент налоговой нагрузки γ : снизу ($\gamma > \tilde{\gamma}$) при $\lambda_1 > 1$ или сверху ($\gamma < \tilde{\gamma}$) при $\lambda_1 < 1$, где

$$\tilde{\gamma} = \frac{\beta - 1 - \lambda\beta\theta}{\lambda\beta(1 - \theta) - 1}. \quad (22)$$

Случай $\lambda = 1$ можно интерпретировать как ситуацию, когда с прибылью предприятия ничего не происходит (т.е. $k = 1$), а меняется только форма собственности. Однако за смену формы собственности покупатель платит величину P^* в бюджет и несет дополнительные расходы в объеме M . В этом случае оптимальная приватизация либо всегда существует (если $\lambda_1 < 1$), либо не существует (если $\lambda_1 > 1$) независимо от величины налоговой нагрузки γ .

5.2. Зависимость от налоговой нагрузки

Выведем зависимости оптимальной цены приватизации P^* и оптимального момента приватизации предприятия τ^* от коэффициента налоговой нагрузки γ .

Поскольку указанные характеристики приватизации имеют смысл лишь при условии существования оптимальной приватизации, что не всегда имеет место, то область допустимого изменения коэффициента налоговой нагрузки γ существенно зависит от величины показателя λ и значений λ_1, λ_2 , определенных в (21) (см. рис. 2). Так, если $\lambda_1 \leq 1$, то оптимальная приватизация существует для $0 < \gamma < 1$ (при $0 < \lambda \leq 1$) или для $0 < \gamma < \tilde{\gamma}$ (при $1 < \lambda < \lambda_2$). Когда $\lambda_1 > 1$, областью изменения коэффициента налоговой нагрузки будет $\tilde{\gamma} < \gamma < 1$ (при $\lambda_2 < \lambda < 1$) или $0 < \gamma < 1$ (при $0 < \lambda \leq \lambda_2$).

Обозначим $\tilde{P} = \frac{\gamma\psi - \gamma + (1 - \gamma)/\beta}{1 - \gamma\psi - (1 - \gamma)/\beta} = -1 + \frac{1 - \gamma}{1 - \gamma\psi - (1 - \gamma)/\beta}$, тогда

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \gamma} \propto -\left(1 - \lambda[\gamma(1 - \theta) + \theta] - \frac{1 - \gamma}{\beta}\right) + (1 - \gamma)\left(\lambda(1 - \theta) - \frac{1}{\beta}\right) = -1 + \lambda.$$

Поскольку $P^* = \max\{P, \tilde{P}M\}$ (см. формулу (18)), поведение оптимальной цены приватизации P^* в зависимости от налоговой нагрузки полностью определяется величиной λ , связывающей потоки прибыли предприятия до и после приватизации. А именно P^* убывает (точнее, не возрастает) по γ , если $\lambda < 1$, не убывает по γ , если $\lambda > 1$, и не зависит от γ , когда $\lambda = 1$.

Как уже отмечалось выше, оптимальный момент приватизации τ^* характеризуется уровнем π^* . Поведение τ^* (случайного момента времени) полностью соответствует поведению (детерминированного) уровня π^* в том смысле, что если π^* возрастает, то случайные моменты времени τ^* также возрастают (причем для каждой реализации случайного процесса π_t^1), и, наоборот, при убывании π^* моменты τ^* также будут убывать (для каждой реализации процесса π_t^1). Поэтому зависимость оптимального момента приватизации τ^* от налоговой нагрузки γ полностью определяется зависимостью уровня π^* от γ . В отличие от исследованной выше зависимости оптимальной цены приватизации P^* зависимость π^* от γ носит более сложный характер, что будет детально рассмотрено ниже и отражено на рис. 3.

Для некоторого упрощения будем далее полагать, что нижняя граница цены приватизации отсутствует, т.е. $\underline{P} = 0$. Согласно формуле (17) оптимальный уровень π^* можно записать в виде

$$\pi^* = \frac{\beta}{\beta - 1} \times \frac{\rho - \alpha_2}{k} M \max \{1/\Gamma_1, 1/\Gamma_2\}, \quad (23)$$

где $\Gamma_1 = 1 - \gamma$, $\Gamma_2 = 1 - \lambda\theta - 1/\beta - \gamma[\lambda(1 - \theta) - 1/\beta]$. Очевидно, что Γ_1 всегда убывает (по γ), а Γ_2 возрастает по γ при $\lambda < \lambda_1$ и убывает при $\lambda > \lambda_1$. Кроме того, $\Gamma_2 < \Gamma_1$ при $\gamma = 0$, $\Gamma_2 = 0$ при $\gamma = \tilde{\gamma}$, т.е. на границе области существования оптимальной приватизации уровень π^* и оптимальный момент приватизации τ^* становятся бесконечными. Рассмотрим разные случаи принимаемых показателем λ значений.

1. Пусть $\lambda < \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$. В этом случае Γ_2 убывает по γ , а оптимальная приватизация существует при всех $0 < \gamma < 1$. Поэтому до некоторого порогового значения π^* будет убывать по γ , а затем – возрастать (рис. 3а).

2. Случай $\lambda_2 < \lambda < 1$ аналогичен предыдущему (поскольку здесь $\lambda < 1 < \lambda_1$), однако оптимальная приватизация существует лишь при $\tilde{\gamma} < \gamma < 1$, где $\tilde{\gamma}$ определено в (22). Вид зависимости изображен на рис. 3б.

3. При $\lambda_1 < \lambda < 1$ оптимальная приватизация существует при всех $0 < \gamma < 1$ (см. рис. 2б). Тогда Γ_2 убывает по γ , и нетрудно показать, что $\Gamma_2 < \Gamma_1$ при $0 < \gamma < \bar{\gamma}$ и $\Gamma_2 > \Gamma_1$ при $\bar{\gamma} < \gamma < 1$ для некоторого $\bar{\gamma}$. Таким образом, уровень π^* будет возрастающей (по γ) функцией, однако в некоторой точке у нее будет излом (рис. 3в).

4. При $1 < \lambda < \lambda_2$ оптимальная приватизация существует лишь при $0 < \gamma < \tilde{\gamma}$ (см. рис. 2б). Так как $\lambda_1 < 1 < \lambda$, то Γ_2 убывает по γ , и более того, $\Gamma_2 < \Gamma_1$ при $0 < \gamma < \tilde{\gamma}$. Поэтому максимум в формуле (23) достигается на $1/\Gamma_2$, тем самым уровень π^* будет возрастающей (по γ) функцией, определенной при $0 < \gamma < \tilde{\gamma}$ (рис. 3г).

Таким образом, если коэффициент налоговой нагрузки γ превышает некоторый порог, то оптимальный момент приватизации τ^* будет увеличиваться с ростом γ , а ниже этого порога момент τ^* может как уменьшаться, так и возрастать с ростом γ в зависимости от значения показателя λ .

Рис. 3

Зависимость оптимального уровня приватизации π^* от налоговой нагрузки γ для различных случаев: а) $\lambda < \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$; б) $\lambda_2 < \lambda < 1$; в) $\lambda_1 < \lambda < 1$; г) $1 < \lambda < \lambda_2$

5.3. Зависимость от параметров прибыли

Как видно из формул (17) и (18), оптимальная цена приватизации P^* и оптимальный момент покупки предприятия τ^* зависят от параметров прибыли предприятия до приватизации (среднего темпа роста α_1 и волатильности σ_1) и после приватизации (среднего темпа роста α_2) только через величины β и ψ . Точнее, P^* возрастает по ψ и убывает по β . Очевидно, что ψ возрастает по α_1 , убывает по α_2 и от волатильностей σ_1, σ_2 не зависит. Для вывода характера зависимости β от параметров прибыли запишем его в виде $\beta = 2\rho / F(\alpha_1, \sigma_1)$, где $F(\alpha_1, \sigma_1) = \alpha_1 - 0,5\sigma_1^2 + G(\alpha_1, \sigma_1)$, $G(\alpha_1, \sigma_1) = \sqrt{(\alpha_1 - 0,5\sigma_1^2)^2 + 2\sigma_1^2\rho}$. Тогда

$$\begin{aligned} \partial F / \partial \alpha_1 &= 1 + (\alpha_1 - 0,5\sigma_1^2) / G(\alpha_1, \sigma_1) > 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} &= -\sigma_1 + [-(\alpha_1 - 0,5\sigma_1^2)\sigma_1 + 2\sigma_1\rho] / G(\alpha_1, \sigma_1) \propto \\ &\propto [-G(\alpha_1, \sigma_1) - (\alpha_1 - 0,5\sigma_1^2) + 2\rho] / G(\alpha_1, \sigma_1) = \\ &= (4\rho^2 - 4\rho\alpha_1) / [G(\alpha_1, \sigma_1)(2\rho - \alpha_1 + 0,5\sigma_1^2 + G(\alpha_1, \sigma_1))] > 0. \end{aligned}$$

Так как $\rho > \alpha_1$, то β будет монотонно убывать по параметрам прибыли унитарного предприятия α_1 и σ_1 . Таким образом, оптимальная цена приватизации P^* будет возрастать с увеличением среднего темпа роста α_1 и волатильности σ_1 . В то же время P^* убывает с увеличением среднего темпа роста прибыли после приватизации α_2 и не зависит от ее волатильности σ_2 .

Что касается оптимального момента приватизации, то определяющий его уровень π^* убывает по β и возрастает по ψ . Отсюда и из приведенных выше выкладок следует, что оптимальный момент покупки предприятия τ^* увеличивается с ростом параметров прибыли α_1 и σ_1 и уменьшается, когда средний темп роста прибыли приватизированного предприятия α_2 возрастает.

6. Заключение

В статье предложена математическая модель, в рамках которой можно ставить и решать задачу оптимизации процесса приватизации унитарного предприятия. В основе модели лежат предположения о возможности выбора момента приватизации, а также о стохастическом характере прибыли предприятия и ее скачкообразном изменении после приватизации. В качестве базовой схемы выбора момента приватизации и цены приватизации взята двухуровневая оптимизация. На нижнем уровне в этой схеме находится покупатель предприятия, выбирающий такой момент покупки, который максимизирует его NPV от приватизированного предприятия. Верхний уровень остается за государством, которое, зная принцип поведения покупателя, предлагает ему такую цену приватизационной сделки, чтобы максимизировать бюджетный эффект от функционирования данного предприятия (до и после приватизации).

В случае когда прибыль предприятия до и после приватизации моделируется случайными процессами геометрического броуновского движения, в работе получена явная формула для оптимального момента приватизации и оптимальной цены приватизации. Проведено исследование условий их существования, а также их зависимостей от налоговой нагрузки и параметров прибыли предприятия (до и после приватизации). Показано, что характер зависимости оптимального момента приватизации и оптимальной цены приватизации от величины налоговой нагрузки существенно определяется некоторым показателем, характеризующим соотношение между ожидаемыми приведенными прибылями предприятия до и после приватизации и инвариантным относительно налоговой системы. Ряд выводов из анализа этих зависимостей не выглядят очевидными с интуитивной точки зрения. В частности, при возрастании налоговой нагрузки (не выше некоторого порогового значения) оптимальный момент приватизации может как уменьшаться, так и возрастать.

ЛИТЕРАТУРА

- Андерсон Дж. (2004). О приватизации государственной собственности // *Вопросы экономики*. № 12. С. 54–69.
- Аркин В.И., Сластников А.Д. (2007). Инвестиционные ожидания, стимулирование инвестиций и налоговые реформы // *Экономика и математические методы*. Т. 43. Вып. 2. С. 76–100.

- Аркин В.И., Сластников А.Д., Аркина С.В.** (2002). Стимулирование инвестиционных проектов с помощью механизма амортизации. М.: EERC.
- Полтерович В.М.** (2012). Приватизация и рациональная структура собственности. Часть 1. Приватизация: проблема эффективности // *Экономическая наука современной России*. № 4 (59). С. 7–23.
- Приватизация в современном мире: теория, эмпирика, «новое измерение» для России (2014). Радыгин А.Д. (ред.). М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС.
- Фридман А.А.** (2017). Частичная приватизация в моделях смешанной олигополии. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://mathecon.cemirssi.ru/seminar/2017/Fridman0205.pdf>, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: май 2019 г.).
- Benninga S., Helmantel M., Sarig O.** (2005). The Timing of Initial Public Offerings // *Journal of Financial Economics*. Vol. 75. P. 115–132.
- Brada J.C., Ma C.-Y.** (2007). The Optimal Timing of Initial Public Offerings in the Course of Privatization: Theory and an Illustrative Application // *Economic Systems*. Vol. 31 (2). P. 121–137.
- Chavanasporon W., Ewald C.-O.** (2012). Privatization of Businesses and Flexible Investment: A Real Option Approach // *Decisions in Economics and Finance*. Vol. 35 (1). P. 75–89.
- Chen C.-H., Mai C.-C., Liu Y.-L., Mai S.-Y.** (2009). Privatization and Optimal Share Release in the Chinese Banking Industry // *Economic Modelling*. Vol. 26. P. 1161–1171.
- Cook P., Uchida Y.** (2008). The Performance of Privatised Enterprises in Developing Countries // *Journal of Development Studies*. Vol. 44 (9). P. 1342–1353.
- Dixit A.K., Pindyck R.S.** (1994). Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton University Press.
- Draho J.** (2000). The Timing of Initial Public Offerings: A Real Option Approach. Working paper. DOI: 10.2139/ssrn.271351.
- Estrin S., Hanousek J., Kocenda E., Svejnar J.** (2009). The Effects of Privatization and Ownership in Transition Economies // *Journal of Economic Literature*. Vol. 47 (3). P. 1–30.
- Gasmi F., Maingard A., Noumba P., Recuero Virto L.** (2011). Empirical Evidence on the Impact of Privatization of Fixed-Line Operators on Telecommunications Performance – Comparing OECD, Latin American, and African Countries. IDEI Working Papers 660. Toulouse: Institut d'Économie Industrielle (IDEI).
- Huang C.-S., Lee J.-Y., Chen S.-S.** (2006). The Optimal Government Shareholding Strategy and the Cost Structure // *Seoul Journal of Economics*. Vol. 19 (2). P. 251–273.
- Katz B.G., Owen J.** (1993). Privatization: Choosing the Optimal Time Path // *Journal of Comparative Economics*. Vol. 17 (4). P. 715–736.
- Katz B.G., Owen J.** (2000). Choosing between Big-Bang and Gradualist Reforms: An Option Price Approach // *Journal of Comparative Economics*. Vol. 28 (1). P. 95–107.
- Li Sh., Ouyang M., Zhou D.** (2005). Modeling Privatization as a Firm Strategy in Transition Economies // *Journal of Business Research*. Vol. 58 (1). P. 37–44.

- Matsumura T.** (1998). Partial Privatization in Mixed Duopoly // *Journal of Public Economy*. Vol. 70. P. 473–483.
- Sappington D.E.M., Stiglitz J.E.** (1987). Privatization, Information and Incentives // *Journal of Policy Analysis and Management*. Vol. 6 (4). P. 567–582.
- Shapiro C., Willig R.D.** (1990). Economic Rationales for the Scope of Privatization. In: Suleiman E.N., Waterbury J. (eds) “*The Political Economy of Private Sector Reform and Privatization*”. Boulder: Westview Press.
- Svejnar J.** (2002). Transition Economies: Performance and Challenges // *Journal of Economic Perspectives*. Vol. 16. P. 3–28.

Поступила в редакцию 20.11.2018

REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Anderson J.** (2004). On Privatizing State Property. *Voprosy ekonomiki*, 12, 54–69 (in Russian).
- Arkin V.I., Slastnikov A.D.** (2007). Theory of Investment Expectations, Investment Incentives, and Tax Reform. *Economics and Mathematical Methods*, 43 (2), 76–100 (in Russian).
- Arkin V.I., Slastnikov A.D., Arkina S.V.** (2002). Investment Stimulation by a Depreciation Mechanism. Moscow: EERC.
- Benninga S., Helmantel M., Sarig O.** (2005). The Timing of Initial Public Offerings. *Journal of Financial Economics*, 75, 115–132.
- Brada J.C., Ma C.-Y.** (2007). The Optimal Timing of Initial Public Offerings in the Course of Privatization: Theory and an Illustrative Application. *Economic Systems*, 31 (2), 121–137.
- Chavanasorn W., Ewald C.-O.** (2012). Privatization of Businesses and Flexible Investment: A Real Option Approach. *Decisions in Economics and Finance*, 35 (1), 75–89.
- Chen C.-H., Mai C.-C., Liu Y.-L., Mai S.-Y.** (2009). Privatization and Optimal Share Release in the Chinese Banking Industry. *Economic Modelling*, 26, 1161–1171.
- Cook P., Uchida Y.** (2008). The Performance of Privatised Enterprises in Developing Countries. *Journal of Development Studies*, 44 (9), 1342–1353.
- Dixit A.K., Pindyck R.S.** (1994). Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton University Press.
- Draho J.** (2000). The Timing of Initial Public Offerings: A Real Option Approach. Working paper. DOI: 10.2139/ssrn.271351.
- Estrin S., Hanousek J., Kocenda E., Svejnar J.** (2009). The Effects of Privatization and Ownership in Transition Economies. *Journal of Economic Literature*, 47 (3), 1–30.
- Fridman A.A.** (2017). Partial Privatization in Mixed Oligopoly Models. Available at: <http://mathecon.cemi.rssi.ru/seminar/2017/Fridman0205.pdf> (accessed: May 2019, in Russian).
- Gasmi F., Maingard A., Nomba P., Recuero Virto L.** (2011). Empirical Evidence on the Impact of Privatization of Fixed-Line Operators on Telecommunications Performance – Comparing OECD, Latin American, and African Countries. IDEI Working Papers 660. Toulouse: Institut d'Économie Industrielle (IDEI).

- Huang C.-S., Lee J.-Y., Chen S.-S.** (2006). The Optimal Government Shareholding Strategy and the Cost Structure. *Seoul Journal of Economics*, 19 (2), 251–273.
- Katz B.G., Owen J.** (1993). Privatization: Choosing the Optimal Time Path. *Journal of Comparative Economics*, 17 (4), 715–736.
- Katz B.G., Owen J.** (2000). Choosing between Big-Bang and Gradualist Reforms: An Option Price Approach. *Journal of Comparative Economics*, 28 (1), 95–107.
- Li Sh., Ouyang M., Zhou D.** (2005). Modeling Privatization as a Firm Strategy in Transition Economies. *Journal of Business Research*, 58 (1), 37–44.
- Matsumura T.** (1998). Partial Privatization in Mixed Duopoly. *Journal of Public Economy*, 70, 473–483.
- Polterovich V.M.** (2012). Privatization and the Rational Ownership Structure. Part 1. Privatization: The Efficiency Problem. *Economic Science of Contemporary Russia*, 4 (59), 7–23 (in Russian).
- Privatizatsiya v sovremennom mire: teoriya, empirika, “novoye izmereniye” dlya Rossii (2014). Radygin A.D. (ed.). Moscow: Izdatel'skii dom “Delo” RANKhiGS (in Russian).
- Sappington D.E.M., Stiglitz J.E.** (1987). Privatization, Information and Incentives. *Journal of Policy Analysis and Management*, 6 (4), 567–582.
- Shapiro C., Willig R.D.** (1990). Economic Rationales for the Scope of Privatization. In: Suleiman E.N., Waterbury J. (eds) “*The Political Economy of Private Sector Reform and Privatization*”. Boulder: Westview Press.
- Svejnar J.** (2002). Transition Economies: Performance and Challenges. *Journal of Economic Perspectives*, 16, 3–28.

Received 20.11.2018

V.I. Arkin

Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

A.D. Slastnikov

Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Mathematical Model of Unitary Enterprise Privatization in the Real Sector⁶

Abstract. The paper describes a model, which allows setting and solving the optimization problem for the privatization process of a unitary enterprise. The model assumes the possibility to choose the moment of privatization, as well as the stochastic behavior of the enterprise's profits and its jump-change after privatization. The proposed scheme allows finding the optimal (in NPV criterion of the buyer) moment of privatization and the optimal (in budgetary effect criterion) privatization price. In the case when the profit before and after privatization is modeled by random processes of geometric Brownian motion, the explicit formulas are obtained for the optimal time of privatization and the optimal privatization price. We derive the conditions, under which the optimal scheme allows privatization, and study the dependencies of the optimal privatization time as well as the optimal privatization price on the tax burden and profit parameters (average growth rate and volatility) of the enterprise before and after privatization. It is shown that the dependence of both the optimal time of privatization

⁶ The study is supported by Russian Foundation for Basic Research (project 18-010-00666). The authors thank the anonymous reviewer for helpful comments.

and the optimal privatization price on the tax burden is essentially determined by a certain indicator characterizing the ratio between the expected profits of an enterprise before and after privatization (being invariant to the tax system).

Keywords: *privatization, unitary enterprises, budgetary effect, uncertainty, time of privatization, privatization price.*

JEL Classification: C61, D81, G38.

DOI: 10.31737/2221-2264-2019-43-3-1