Л.Н. Слуцкий

Институт экономики РАН, Москва

Графические статистические методы для исследования причинных зависимостей. Байесовские сети¹

Аннотация. Возрождение интереса к статистической теории причинности, начиная с 1990-х годов, вызвано, на наш взгляд, двумя обстоятельствами. Первое — осознание того факта, что марковские свойства допускают, хотя бы частично, статистическое тестирование причинных связей, априорно заданных исследователем; второе — введение в статистику Дж. Перлом (Pearl, 1995) оператора *do*, что способствовало формальной теоретико-вероятностной трактовке понятия причинности как результата внешнего вмешательства в механизм генерации случайных величин. Настоящая работа преследует три основные цели: 1) изложить на достаточно строгом математическом уровне основные идеи и понятия современной статистической теории причинности, основанной на графическом представлении причинно-следственных связей; 2) продемонстрировать, как графические методы статистической теории причинности можно использовать в задачах экономики и экономической политики; 3) показать, как эти методы можно эффективно применять для решения задачи нахождения косвенных факторов, оказывающих влияние на экономический показатель. С этой целью нами был разработан новый метод представления байесовской сети в виде слоев относительно исследуемого показателя.

Ключевые слова: байесовские сети, коэффициенты путей, марковские свойства, ориентированные графы, причинно-следственные связи.

Классификация JEL: C11, C19, C390.

1. Введение

В основе современной статистической теории причинности², основанной на графическом представлении связей между случайными величинами, лежит ряд областей знаний: математическая статистика, теория графов, эконометрика и философия. С исторической и прикладной точек зрения становление статистической теории причинности восходит к работе американского генетика С. Райта (Wright, 1921), который исследовал влияние одних случайных величин на другие. Райт считал, что случайная величина X может влиять на другую случайную величину Y посредством различных цепочек причинно-следственных связей. Затем Райт объединял все цепочки на одной диаграмме, добавляя, по необходимости, новые возможные связи между переменными из различных цепочек. Важно отметить, что, используя диаграмму, представленную на рис. 1, мы можем проследить причинно-следственные связи не только от X к Y , но и между другими переменными, например от X к X_2 .

На следующем шаге Райт нормализовывал все рассматриваемые переменные³ $X_1, \dots, X_p$, т.е. $X'_j = (X_j - \hat{\mu}_j) / \hat{\sigma}_j$, где $\hat{\mu}_j$ — среднее

¹ Автор выражает благодарность анонимному рецензенту за ценные советы и рекомендации по улучшению статьи.

² Альтернативой графическим методам в теории причинности является модель Рубина (Rubin causal model) (Rubin, 1974, 2005), основанная на концепции «потенциального результата» (potential outcome). В работе (Perl, 2009) показано, что оба подхода, хотя и используют различную терминологию, основываются на одних и тех же фундаментальных принципах.

Рис. 1

Две причинно-следственные цепочки

$X \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow Y$ и $X \rightarrow X_3 \rightarrow Y$

с добавлением связи от X_1 к X_3

арифметическое, $\hat{\sigma}_j$ – стандартная ошибка X_j , $j=1, \dots, p$. Затем он строил регрессии, соответствующие причинно-следственным связям, для каждой переменной, имеющей входящие стрелки. Так, например, согласно рис. 1, для переменных X_1 и X_3 мы можем построить регрессии:

$$X_1 = b_{X, X_1} X + \varepsilon', \quad (1)$$

$$X_3 = b_{X, X_3} X + b_{X_1, X_3} X_1 + \varepsilon''. \quad (2)$$

Коэффициенты регрессии в уравнениях (1) и (2) Райт называл коэффициентами путей. Таким образом, каждой стрелке на диаграмме будет однозначно соответствовать определенное число. Если у нас имеется причинно-следственная цепочка $X_i = X_{i_1}, \dots, X_{i_m} = X_j$ от X_i к X_j , мы можем рассмотреть произведение соответствующих коэффициентов путей

$$b_{X_{i_1}, \dots, X_{i_m}} = b_{X_{i_1}, X_{i_2}} \cdots b_{X_{i_{m-1}}, X_{i_m}}. \quad (3)$$

Произведение $b_{X_{i_1}, \dots, X_{i_m}}$, согласно Райту, представляет собой эффект, оказываемый переменной X_i на X_j вдоль пути $X_i = X_{i_1}, \dots, X_{i_m} = X_j$.

Несмотря на кажущуюся простоту рассуждений Райта, он предвосхитил на несколько десятилетий развитие статистической теории причинности⁴.

В разд. 2 дается описание байесовских сетей, представляющих ориентированные ациклические графы на случайных величинах, обладающие марковскими свойствами. В разд. 3 устанавливается связь между байесовскими сетями и рекурсивными структурными уравнениями, изучавшимися в трудах Комиссии Коулса (Simon, 1953). В разд. 4 приведена статистическая теория причинности, основанная на графических методах и базирующаяся на теоретико-вероятностном подходе. Основным понятием здесь является оператор *do* (Pearl, 1995), позволяющий рассчитывать влияние эффекта от государственного вмешательства (интервенции) в экономику (см. пример 1). Теорема 2 содержит формулу для оценки коэффициента полного эффекта, которая представляет современное воплощение идей Райта. Специалистов по статистике, возможно, заинтересует п. 4.4, посвященный байесовским расчетам на сетях. В разд. 5 рассматривается задача, возникающая периодически в экономике, – задача определения факторов, оказывающих влияние на экономический показатель. Такие факторы можно разделить на прямые и косвенные. Предложенный нами метод пред-

³ Райт не делал никаких предположений о вероятностной природе случайных величин $X_1, \dots, X_p$. Все его рассуждения носят чисто эвристический характер.

⁴ Созданная Райтом методология коэффициентов путей нашла широкое применение в задачах социологии и психологии, где требуется определить влияние латентных переменных, т.е. переменных, которые не могут быть измерены стандартными методами, как, например, талант, интеллект и т.д. Обзор по этим вопросам можно найти в монографиях (Goldberger, Duncan, 1973; Morgan, Winship, 2015).

ставления байесовской сети в виде слоев относительно исследуемого показателя может быть использован для практического решения данной задачи.

2. Марковские свойства на ориентированных графах

В этом разделе мы дадим описание теоретико-вероятностного аппарата, необходимого для построения статистической теории причинности.

2.1. Ориентированные ациклические графы

Рассмотрим ориентированный граф, состоящий из *ориентированных ребер (стрелок)* и *вершин*. Последовательность следующих друг за другом стрелок, так что конец одной стрелки является началом следующей, называется (*ориентированным*) *путем*. Мы будем рассматривать только *ациклические графы*, т.е. графы, не содержащие замкнутых путей. Диаграмма, представленная на рис. 1, является примером ациклического графа. Если существует стрелка, ведущая из вершины X в вершину Y , то вершина X называется *прямой причиной* для вершины Y , а вершина Y — *прямым следствием* вершины X . Все вершины графа, для которых существуют пути, ведущие в вершину Y , и которые не являются ее прямыми причинами, называются *косвенными причинами* для вершины Y , а вершина Y — *косвенным следствием* для этих вершин. Так, например, на рис. 1 вершина X_1 будет прямой причиной для вершин X_2 , X_3 и косвенной для вершины Y .

Рассматриваемые нами ациклические графы в качестве своих вершин будут иметь нормальные случайные величины. Хотя это и не обязательно для дальнейшие рассуждений, будем предполагать, что нормальные величины являются одномерными, т.е. скалярами. Для дальнейшего изложения нам потребуются некоторые свойства нормальных случайных величин.

Рассмотрим n -мерный вектор, $n > 1$, $X = (X_1, \dots, X_n)'$, компонентами которого будут случайные нормальные величины. Ковариационной матрицей вектора X называется симметрическая $n \times n$ -матрица $\text{cov}(X)$ с элементом $\text{cov}(X_i, X_j)$, стоящим на пересечении строки i и столбца j , $i, j = 1, \dots, n$. Вероятностная плотность $p(X)$ нормального вектора X полностью определяется матрицей $\text{cov}(X)$ и математическими ожиданиями всех его компонент. Если $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$, то нормальные величины X_i и X_j будут независимыми.

Разобьем компоненты X произвольным образом на две непустые группы X' и X'' . В таком случае плотность $p(X)$ нормального вектора X можно записать в виде функции $p(X', X'')$ ⁵. Если x'' — конкретный набор чисел, который может принять случайный вектор X'' , то *условной плотностью* $p(X' | X'' = x'')$ будет функция $p(X', x'')$ от X' , нормализованная константой, равной $\int p(X', x'') dX'$. Нормальная случайная величина с плотностью $p(X' | X'' = x'')$ называется *условной случайной величиной* и обозначается $X' | X'' = x''$, или $X' | x''$. *Маргинальная*

⁵ Строго говоря, $p(X', X'')$ — это функция не от нормальных величин X' и X'' , а от возможных принимаемых ими значений.

плотность $p(X')$ нормального вектора X' равна $\int p(X', X'') dX''$. Если совместная плотность X' и X'' равна произведению их маргинальных плотностей, т.е. $p(X', X'') = p(X')p(X'')$, то X' и X'' будут независимыми случайными векторами. Фундаментальным понятием статистической теории причинности, основанной на графическом представлении случайных величин, является условная независимость векторов. Рассмотрим тройку нормальных векторов (X_1, X_2, X_3) . Скажем, что X_1 и X_2 *условно независимы* по X_3 , если $p(X_1, X_2 | x_3) = p(X_1 | x_3)p(X_2 | x_3)$ для любого конкретного вектора x_3 . Условная независимость записывается в виде $X_1 \perp X_2 | X_3$.

Следующая задача, которая нас будет интересовать, это регрессия X_1 по остальным переменным $X_2, \dots, X_n$. Переменную X_1 можно записать, причем единственным образом, в виде

$$X_1 = b_0 + b_2 X_2 + \dots + b_n X_n + \varepsilon, \quad (4)$$

где случайная ошибка $\varepsilon = X_1 - b_0 - b_2 X_2 - \dots - b_n X_n$ имеет математическое ожидание $E(\varepsilon) = 0$, и $\text{cov}(\varepsilon, X_j) = 0, j = 2, \dots, n$ ⁶.

Из (4) следует, что существует связь между условными независимыми случайными величинами и коэффициентами регрессии: переменные X_1 и $X_2, \dots, X_k, k < n$, условно независимы по остальным переменным $X_{k+1}, \dots, X_n$, $X_1 \perp X_2, \dots, X_k | X_{k+1}, \dots, X_n$ тогда и только тогда, когда коэффициенты при переменных $X_2, \dots, X_k$ в регрессии X_1 по переменным $X_2, \dots, X_n$ равны нулю.

2.2. Байесовские сети

Рассмотрим ориентированный ациклический граф $G = G(X)$, где $X = (X_1, \dots, X_n)$ — множество вершин графа. Обозначим через $pa(X_i)$ ⁷ множество прямых причин для вершины $X_i, i = 1, \dots, n$. Например, на графе, представленном на рис. 1, мы имеем $pa(X) = \emptyset$, $pa(X_1) = X$, $pa(X_2) = X_1$, $pa(X_3) = X, X_1$, $pa(Y) = X_2, X_3$.

Граф G называется *байесовской сетью*, если

$$X_i \perp X_j | pa(X_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где $X_j \notin pa(X_i)$ — любая вершина графа, не являющаяся следствием вершины X_i ⁸. В таком случае говорят, что прямые причины, образующие $pa(X_i)$, *блокируют* вершину X_i , т.е. вся информация о X_i , имеющаяся в графе G , за исключением следствий X_i , содержится в $pa(X_i)$ ⁹. Если $pa(X_i) = \emptyset$, то X_i и X_j будут независимыми случайными величинами.

Следующее свойство позволяет экстрагировать прямые причины для вершины X_i : при регрессии X_i по всем регрессорам, не являющимся следствиями X_i , все регрессоры с ненулевыми коэффици-

⁶ В действительности верна формула, приведенная в (Андерсон, 1963): $(b_2, \dots, b_n) = c\Sigma_1^{-1}$, где $c = (\text{cov}(X_1, X_2), \dots, \text{cov}(X_1, X_n))$ и $\Sigma_1 = \text{cov}(X_2, \dots, X_n)$. При этом предполагается, что случайные величины $X_2, \dots, X_n$ линейно независимые.

⁷ Обозначение «ра» — это сокращение от английского слова parents.

⁸ Если любая вершина графа, кроме X_i , либо принадлежит множеству $pa(X_i)$, либо является его следствием, то свойство (5) к вершине X_i применить нельзя.

⁹ Метод для определения условно независимых подмножеств графа G (d -separation) можно найти в монографии (Pearl, 2009).

циентами будут прямыми вершинами для X_i . Однако при регрессии X_i по любому множеству регрессоров, содержащему $pa(X_i)$, и не являющихся следствиями X_i , все регрессоры, не входящие в $pa(X_i)$, будут иметь нулевые коэффициенты¹⁰.

Предположим, что граф на рис. 1 будет байесовской сетью. Тогда мы можем заключить, что $X_2 \perp X, X_3 \mid X_1; X_3 \perp X_2 \mid X, X_1; Y \perp X, X_1 \mid X_2, X_3$.

Свойство (5) также называется *локальным марковским свойством*. Это вызвано следующими соображениями. Марковским свойством в теории стационарных процессов называется свойство условного распределения наблюдения X_i по всем предыдущим наблюдениям $X_1, \dots, X_{i-1}$ быть независимым от всех наблюдений, кроме последнего. Другими словами, при определении условного распределения можно отбросить все наблюдения, кроме последнего: $p(X_i \mid X_1, \dots, X_{i-1}) = p(X_i \mid X_{i-1})$. Аналогичным образом свойство (5) можно записать в виде

$$p(X_i \mid X') = p(X_i \mid pa(X_i)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где X' любое подмножество вершин графа, содержащее $pa(X_i)$ и не являющееся его следствиями¹¹. Таким образом, все вершины X' в (6), кроме принадлежащих $pa(X_i)$, можно отбросить, не изменяя при этом само распределение $p(X_i \mid X')$.

Марковское свойство (6) позволяет записать плотность $p(X)$ в виде произведения условных плотностей

$$p(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n p(X_i \mid pa(X_i)). \quad (7)$$

В том случае когда $pa(X_i) = \emptyset$ для некоторого i , то $p(X_i \mid \emptyset)$ совпадает с маргинальным распределением $p(X_i)$ случайной величины X_i .

Тождество (7) объясняет также эпитет «локальный» при марковском свойстве: распределение $p(X_1, \dots, X_n)$ всех вершин $X_1, \dots, X_n$ полностью определяется на локальных подмножествах $\{X_i \cup pa(X_i)\}$, $i = 1, \dots, n$.

Покажем, как можно построить байесовскую сеть для данного набора случайных величин $X_1, \dots, X_n$. По формуле для условной вероятности запишем

$$p(X_1, \dots, X_n) = p(X_1 \mid X_2, \dots, X_n) p(X_2 \mid X_3, \dots, X_n) \dots p(X_{n-1} \mid X_n) p(X_n). \quad (8)$$

В каждом сомножителе $p(X_i \mid X_{i+1}, \dots, X_n)$ в правой части формулы (8) уберем все случайные величины из набора $X_{i+1}, \dots, X_n$, которые не влияют на условную плотность $p(X_i \mid X_{i+1}, \dots, X_n)$. Оставшиеся случайные величины будут образовывать множество $pa(X_i)$. Отсюда можно заключить, что

$$p(X_i \mid X_{i+1}, \dots, X_n) = p(X_i \mid pa(X_i)). \quad (9)$$

Мы показали, что для построенной байесовской сети выполняется свойство (7).

Приведенная выше процедура построения байесовской сети зависит от, вообще говоря, произвольной нумерации вершин графа G .

¹⁰ Мы допускаем, что часть или даже все регрессоры с нулевыми коэффициентами также могут быть прямыми вершинами для X_i .

¹¹ Свойство (6) можно лишь условно назвать марковским, так как, в отличие от стационарных процессов, мы не предполагаем естественной упорядоченности вершин графа.

Различные байесовские сети, соответствующие одному и тому же распределению $p(X_1, \dots, X_n)$, называются *эквивалентными*. Существует довольно простой метод, описанный в монографии (Pearl, 2009), характеризующий эквивалентные байесовские сети. Например, байесовские сети, представленные на рис. 2, эквивалентны для любого распределения $p(X_1, X_2, X_3)$, для которого $X_1 \perp X_3 | X_2$. Однако инверсия стрелок на рис. 1 не приведет к эквивалентной байесовской сети.

Рис. 2

Эквивалентные байесовские сети ($X_1 \perp X_3 | X_2$) с противоположно направленными стрелками

3. Представление байесовских сетей в виде системы рекурсивных структурных уравнений

Идеи Райта нашли дальнейшее развитие в работах Г. Саймона (Simon, 1952, 1953), который рассматривал рекурсивные системы структурных уравнений как выражение причинных связей между переменными.

Разобьем n вершин графа на группы следующим образом. В первую группу войдут вершины $X_1, \dots, X_{k_1}$, не имеющие прямых причин. Мы назовем их экзогенными. Очевидно, что найдется хотя бы одна вершина, обладающая этим свойством. Во вторую группу поместим вершины $X_{k_1+1}, \dots, X_{k_2}$, $k_1 + 1 \leq k_2$, которые в качестве своих причин имеют только вершины из первой группы. В группу m , $m > 1$, войдут вершины графа, которые в качестве своих причин (прямых или косвенных) имеют только вершины из предыдущих $(m - 1)$ групп¹². Для каждой переменной из группы m можем записать регрессионное уравнение по всем ее прямым вершинам. Таким образом, мы получим рекурсивную систему уравнений:

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \alpha_1 + \varepsilon_1, \\ X^{(2)} &= \alpha_2 + A_{21}X^{(1)} + \varepsilon_2, \\ X^{(3)} &= \alpha_3 + A_{31}X^{(1)} + A_{32}X^{(2)} + \varepsilon_3, \end{aligned} \quad (10)$$

где $X^{(m)}$ — вектор, образованный вершинами группы m ; α_i — вектора свободных членов; A_i — матрицы коэффициентов; ε_i — вектора случайных ошибок. Число уравнений в системе (10) равно числу вершин в самой длинной причинно-следственной цепочке графа. Ошибки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ являются взаимно независимыми как между различными группами, так и внутри каждой группы. Последнее утверждение эквивалентно марковскому свойству байесовской сети. Этот факт легко может быть доказан, основываясь на результатах п. 2.1. Мы также заметим, что каждая вершина графа войдет, в качестве независимой переменной, только в одно уравнение системы (10).

¹² Переменная группы m характеризуется тем свойством, что самая длинная причинно-следственная цепочка, идущая от экзогенной переменной до этой переменной, имеет ровно m вершин.

А если задана система (10), мы получим байесовскую сеть: для каждой, не являющейся экзогенной, переменной X_i мы включим в $pa(X_i)$ все переменные с коэффициентами, отличными от нуля, в уравнении для X_i ¹³.

Таким образом, можно сделать вывод, что рекурсивная система регрессионных уравнений (10) полностью характеризует байесовскую сеть, заданную на графе G .

Важность представления байесовских сетей в аналитической форме в виде рекурсивной системы структурных уравнений заключается прежде всего в том, что, переходя от группы более низкого порядка к следующей, мы можем воспроизвести механизм последовательного формирования переменных. На байесовской сети это соответствует продвижению вдоль причинно-следственных цепочек.

4. Статистическая теория причинности

4.1. Аксиоматика

После того как в предыдущих разделах был подготовлен необходимый математический аппарат, мы можем перейти к изучению причинных связей между переменными. Сначала мы сформулируем группу аксиом, на основе которых будет строиться статистическая теория причинности для данного множества переменных $X_1, \dots, X_n$ ¹⁴.

Аксиома 1. *Между двумя переменными X_1 и X_2 может существовать только одна причинная связь, ведущая от причины к следствию.*

Из аксиомы 1 следует, что мы не рассматриваем обратные связи между переменными. Это условие представляется на первый взгляд слишком ограничительным. Делались различные попытки его обойти. Так, например, в (Pearl, 2009) утверждается, что обратная связь между переменными обуславливается влиянием на них одной или нескольких переменных и задача, таким образом, сводится к нахождению этих новых переменных. Другой подход, основанный на рассмотрении цепных графов, т.е. графов, в которых также допускаются неориентированные связи, можно найти в монографии (Cowell et al., 2003).

Аксиома 2. *Не существуют замкнутых причинно-следственных цепочек.*

Другими словами, аксиома 2 утверждает, что никакая переменная не может быть своей собственной, пусть даже косвенной, причиной.

Аксиома 3. *Причинно-следственные связи обладают марковским свойством, т.е. любая переменная X_1 условно независима по ее прямым причинам с любой другой переменной X_2 , за исключением, когда существует цепочка причинно-следственных связей от X_1 к X_2 . В случае когда множество прямых причин является пустым, условная независимость заменяется на обычную (маргинальную) независимость.*

¹³ Исследователь может, по своему усмотрению, также включить в $pa(X_i)$ переменные с нулевыми коэффициентами.

¹⁴ Предложенная нами группа аксиом является довольно упрощенной. Более подробное обсуждение по данному вопросу содержится в монографии (Spirtes et al., 2000), где также приводится обширная литература по данному вопросу.

В то время как аксиомы 1 и 2 реализуются в ациклических графах, аксиома 3 служит основой для построения байесовских сетей.

Определение. Вершина X_i является *причиной* для X_j , если существует причинно-следственная цепочка, ведущая от X_i к X_j .

При построении причинно-следственных диаграмм разрешается рассматривать потенциальные причины, т.е. связи, о достоверности которых у исследователя имеются сомнения. Таким связям соответствуют регрессоры с нулевыми коэффициентами в структурных уравнениях. Как отмечал Дж. Перл в ряде своих работ (см., например, (Pearl, 2009)), при построении причинно-следственной диаграммы решающим является не наличие стрелок, а их отсутствие. Метод тестирования, описанный в следующем подразделе, позволяет избавиться от лишних стрелок и построить минимальную диаграмму, соответствующую данному набору вершин $X_1, \dots, X_n$.

Следует отметить, что имеется существенная разница между байесовской сетью, соответствующей данному распределению $p(X_1, \dots, X_n)$, и причинно-следственной диаграммой, представленной байесовской сетью. В то время как в первом случае байесовская сеть, с точностью до эквивалентности, определяется статистическими свойствами распределения $p(X_1, \dots, X_n)$, в случае причинно-следственной диаграммы байесовская сеть определяется экономической теорией и будет единственным представителем класса эквивалентности, соответствующего распределению $p(X_1, \dots, X_n)$. В качестве примера рассмотрим две эквивалентные байесовские сети, соответствующие одному и тому же распределению, представленные на рис. 2. Очевидно, что, при условии выполнения аксиом 1–3, не более чем одна из них может представлять собой причинно-следственную закономерность для данного набора факторов X_1, X_2, X_3 .

4.2. Тестирование байесовской сети

Именно марковское свойство байесовских сетей явилось основанием для возрождения теории причинности в начале 1990-х годов. Несмотря на то что ряд исследователей (Tinbergen, 1940; Wold, 1954), стоящих у истоков эконометрики, активно изучали причинные связи в своих работах, к началу 1960-х годов окончательно сформировалось мнение, что понятие причинно-следственной закономерности выходит за рамки статистической науки. В настоящее время большинство современных авторов считают, что, несмотря на то что априорное установление причинных зависимостей должно быть основано на экономической или любой другой теории, они тем не менее допускают, хотя и частичную, статистическую проверку¹⁵.

Предположим, что исследователь, основываясь на экономической теории, пришел к выводу, что причинно-следственная зависимость между группой факторов может быть представлена байесовской диаграммой, изображенной на рис. 1. Тогда, как

¹⁵ Мы отсылаем читателя к монографии (Pearl, 2009), где содержится обсуждение и приведена обширная библиография по истории формирования различных взглядов на статистическую природу теории причинности.

мы это уже отмечали в п. 2.2, должны выполняться соотношения $X_2 \perp X, X_3 | X_1; X_3 \perp X_2 | X, X_1; Y \perp X, X_1 | X_2, X_3$. Но каждое из этих соотношений допускает статистическую проверку на значимость регрессоров на требуемом уровне значимости. Например, мы хотим проверить верность свойства $Y \perp X, X_1 | X_2, X_3$. Тогда из результатов разд. 2 следует, что при регрессии Y по X, X_1, X_2, X_3 коэффициенты регрессии при переменных X, X_1 должны быть равны нулю. Таким образом, можно применить F -статистику для проверки нулевой гипотезы, что коэффициенты при X, X_1 равны одновременно нулю¹⁶.

4.3. Оператор *do*

Оператор *do*, получивший позже название *интервенция*, был введен в теорию байесовских сетей специалистом по искусственному интеллекту Дж. Перлом (Pearl, 1995) и, по всей видимости, заимствован из языков программирования. Оператор закрепляет за переменной X некоторое значение x_0 (записывается $do(X = x_0)$), а затем изучается совместное распределение остальных переменных системы. На первый взгляд, данная процедура ничем не отличается от знакомого в теории вероятности рассмотрения условного распределения этих переменных при $X = x_0$. Однако это не так. Рассмотрим байесовскую сеть, представленную на рис. 3. Мы хотим изучить совместное распределение переменных X_1, X_2, X_4, X_5 при условии $X_3 = x_0$: $p(X_1, X_2, X_4, X_5 | X_3 = x_0)$. Предположим, что все переменные могут принимать только конечное число значений. Чтобы получить представление о распределении $p(X_1, X_2, X_4, X_5 | X_3 = x_0)$, каждый раз, когда X_3 будет принимать значение x_0 , будем регистрировать значения других переменных. Таким образом, после достаточно большого числа наблюдений мы сможем получить довольно полную картину о распределении $p(X_1, X_2, X_4, X_5 | X_3 = x_0)$.

Например, если переменные X_1, X_3 связаны сильной положительной зависимостью (коэффициент корреляции $\rho_{X_1, X_3} \approx 1$), то при большом значении x_0 можно утверждать, что наблюдаемые значения X_1 также будут, в основном, близки к максимальным. При применении же оператора *do*, независимо от того, какое значение было присвоено X_3 , распределение X_1 не изменится.

Рис. 3

Байесовская сеть для переменных $X_1, \dots, X_5$ до действия оператора *do*.

Рис. 4

Байесовская сеть, представленная на рис. 3, после интервенции $do(X_3 = x_0)$.

¹⁶ Надо учитывать, что при проверке нескольких нулевых гипотез вероятность ошибки первого рода, хотя бы для одной из гипотез, возрастает. Для более точного определения уровня значимости следует воспользоваться неравенством Бонферрони (Феллер, 1984). Это замечание в равной степени применимо ко всем другим аналогичным конструкциям, приведенным в статье.

На рис. 4 показана байесовская сеть после интервенции $X_3 = x_0$. При сравнении рис. 3 и 4 легко убедиться, что на рис. 4 отсутствует стрелка от X_1 к X_3 . Действительно, зафиксировав значение $X_3 = x_0$, мы тем самым аннулировали действие переменной X_1 на X_3 ¹⁷. Если записать исходное распределение $p(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ по формуле (7) в виде

$$p(X_1, \dots, X_5) = \prod_{i=1}^5 p(X_i | pa(X_i)) = \quad (11)$$

$$= p(X_1)p(X_2 | X_1)p(X_3 | X_1)p(X_4 | X_1, X_2, X_3)p(X_5 | X_4),$$

то при $X_3 = x_0$ имеем

$$p(X_1, X_2, X_4, X_5 | X_3 = x_0) \propto p(X_1)p(X_2 | X_1)p(x_0 | X_1) \times \quad (12)$$

$$\times p(X_4 | X_1, X_2, x_0)p(X_5 | X_4).$$

Формула (12) для распределения $p(X_1, X_2, X_4, X_5 | X_3 = x_0)$ получается подстановкой x_0 вместо X_3 в (11). Выражение $p(x_0 | X_1)$ при фиксированном x_0 является функцией от X_1 и вычисляется по формуле

$$p(x_0 | X_1) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp[-(x_0 - b_0 - b_1 X_1)^2 / 2\sigma^2], \quad (13)$$

где параметры b_0, b_1, σ определяются из регрессии X_3 по X_1 .

Исходя из байесовской сети, представленной на рис. 4, распределение $p(X_1, X_2, X_4, X_5)$ после интервенции $X_3 = x_0$ можно записать, как

$$p(X_1, X_2, X_4, X_5 | do(X_3 = x_0)) = p(X_1)p(X_2 | X_1)p(X_4 | X_1, X_2, x_0)p(X_5 | X_4). \quad (14)$$

Мы убедились, что формулы для распределений $p(X_1, X_2, X_4, X_5 | X_3 = x_0)$ и $p(X_1, X_2, X_4, X_5 | do(X_3 = x_0))$ действительно различаются.

Распределение (14) отличается от первоначального распределения (11) отсутствием условного распределения $p(X_3 | X_1)$. Это вполне естественно, так как если $X_3 \equiv x_0$, то $p(X_3 | X_1) = 1$. Аналогичные рассуждения приводят к общей формуле для распределения $p(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$ после интервенции $X_i = x_0$:

$$p(X_1, \dots, X_n | do(X_i = x_0)) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p(X_j | pa(X_j)). \quad (15)$$

При этом надо помнить, что в формуле (15) везде вместо X_i должно быть x_0 . Формула (15) для $p(X_1, \dots, X_n | do(X_i = x_0))$ может быть записана в эквивалентной форме

$$p(X_1, \dots, X_n | do(X_i = x_0)) = p(X_1, \dots, X_n) / p(X_i | pa(X_i)). \quad (16)$$

Верна следующая теорема.

Теорема 1. *Вершина X_i является причиной для X_j , если существуют хотя бы два значения $a, b, a \neq b$, так что выполняется*

$$p(X_j | do(X_i = a)) \neq p(X_j | do(X_i = b)). \quad (17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вероятностный граф, который получается, если убрать все стрелки, ведущие в X_i . Из теории структурных уравнений, приведенных в разд. 3, следует, что X_j будет линейной комбинацией случайных ошибок и экзогенных переменных,

¹⁷ Важно понимать, что при изменении стрелок меняется не только архитектура байесовской сети, но и сами переменные как случайные величины. Так, распределение переменной X_4 на рис. 4 не совпадает с ее первоначальным распределением на рис. 3. Это особенно заметно, если обратиться к структурным уравнениям из разд. 3, которые дают описание формирования регрессоров.

включая и X_j . Так как все слагаемые в этой сумме независимы, то X_i служит причиной для X_j тогда и только тогда, когда коэффициент при X_i не равен нулю. Но это равносильно условию (17).■

Теорема 1 утверждает, что причинность проявляется в реакции одного объекта при воздействии на другое. Это свойство важно для философского понимания причинности, а именно, согласно Перлу, причинность в статистике является онтологическим объектом, в то время как эпистемологичность — лишь следствие.

Оператор *do* позволяет измерять причинность. Предположим, мы хотим измерить влияние X_i на X_j . Для этого мы определим сначала маргинальное распределение $p(X_j | do(X_i = x))$ по формуле

$$p(X_j | do(X_i = x)) = \int p(X_1, \dots, X_n | do(X_i = x)) dX_1 \dots dX_{j-1} dX_{j+1} \dots dX_n, \quad (18)$$

а затем рассмотрим разность

$$TE(X_i; X_j) = E[p(X_j | do(X_i = x + 1))] - E[p(X_j | do(X_i = x))]. \quad (19)$$

Выражение $TE(X_i; X_j)$ представляет собой *коэффициент полного эффекта действия* X_i на X_j (Rosenbaum, Rubin, 1983). Легко убедиться, что коэффициент полного эффекта не зависит от x . В том случае, когда X_i является прямой причиной для X_j , $TE(X_i; X_j)$ равен коэффициенту при X_i в регрессии X_j по $pa(X_j)$.

Коэффициент полного эффекта $TE(X_i; X_j)$ можно легко вычислить, воспользовавшись коэффициентами Райта $b_{X_i, \dots, X_{i_m}}$ для расчета эффекта, оказываемого переменной X_i на X_j вдоль пути $X_i = X_{i_1}, \dots, X_{i_m} = X_j$. Верна следующая легко доказуемая теорема.

Теорема 2. Коэффициент полного эффекта действия X_i на X_j равен сумме произведений коэффициентов регрессии вдоль всех путей, ведущих от X_i к X_j :

$$TE(X_i; X_j) = \sum_{X_{i_1}, \dots, X_{i_j}} b_{X_i, X_{i_2}} \dots b_{X_{i_{j-1}}, X_{i_j}}. \quad (20)^{18}$$

Продemonстрируем применение теоремы 2 на простом примере, который также содержит все необходимые ингредиенты для ее доказательства.

Пример 1. Предположим, что байесовская сеть на рис. 3 представляет собой архитектуру причинно-следственных связей между набором макроэкономических факторов $X_1, \dots, X_5$. Экономиста интересует, как результат государственного вмешательства на показатель X_1 скажется на факторе X_5 . В данном случае правительственная интервенция заключается в фиксировании показателя X_1 на некотором уровне $X_1 = x_0$. Также экономист хочет знать, как будет меняться распределение X_5 в зависимости от значения уровня x_0 .

Маргинальное распределение X_5 после интервенции определяется из формул (15) и (18). Коэффициент полного эффекта действия X_1 на X_5 можно получить либо из формулы (19), либо путем следующих рассуждений.

¹⁸ В случае нормированных переменных из формулы (20) следует, что коэффициент полного эффекта действия X_i на X_j равен сумме коэффициентов Райта вдоль всех путей, ведущих от X_i к X_j .

Запишем байесовскую сеть в виде системы четырех структурных уравнений¹⁹:

$$X_2 = a_1 X_1 + \varepsilon_2, \quad (21)$$

$$X_3 = b_1 X_1 + \varepsilon_3, \quad (22)$$

$$X_4 = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + \varepsilon_4, \quad (23)$$

$$X_5 = d_1 X_4 + \varepsilon_5. \quad (24)$$

Нас интересует коэффициент полного эффекта действия X_1 на X_5 . Для этого мы подставим выражение для X_4 из уравнения (23) в уравнение (24):

$$X_5 = d_1(c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + \varepsilon_4) + \varepsilon_5. \quad (25)$$

Затем сделаем подстановку для X_2, X_3 из уравнений (21), (22) в (25):

$$\begin{aligned} X_5 &= d_1(c_1 X_1 + c_2(a_1 X_1 + \varepsilon_2) + c_3(b_1 X_1 + \varepsilon_3) + \varepsilon_4) + \varepsilon_5 = \\ &= (d_1 c_1 + d_1 c_2 a_1 + d_1 c_3 b_1) X_1 + \varepsilon', \end{aligned} \quad (26)$$

где ε' — линейная комбинация ошибок $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$. Коэффициент полного эффекта действия X_1 на X_5 равен

$$TE(X_1; X_5) = d_1 c_1 + d_1 c_2 a_1 + d_1 c_3 b_1. \quad (27)$$

Таким образом, мы показали, что коэффициент полного эффекта действия X_1 на X_5 равен сумме произведений коэффициентов регрессии вдоль всех трех путей, ведущих из X_1 в X_5 : $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5, X_1 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5, X_1 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5$.

Коэффициент полного эффекта действия оценивает результат воздействия на Y переменной X , и при этом, анализируя цепочки от X к Y , мы получаем ясное понимание процесса образования причинно-следственных связей, ведущих от X к Y . В частности, мы можем ранжировать цепочки по вкладу их влияния на коэффициент полного эффекта, а внутри каждой цепочки определить точный вклад каждой из переменных.

4.4. Вычисления на байесовских сетях

Локальные свойства байесовских сетей позволяют использовать МНК или любой другой метод, используемый в регрессионном анализе для оценки коэффициентов, при оценке распределения вершин графа $p(X_1, \dots, X_n)$.

Предположим, что у нас имеются $N, N > n$ наблюдений $(x_{11}, \dots, x_{n1}), (x_{12}, \dots, x_{n2}), \dots, (x_{1N}, \dots, x_{nN})$. Напомним, что знак “ $\wedge$ ” над переменной означает статистическую оценку. Распределение $\hat{p}(X_1, \dots, X_n)$ вычисляется по следующему алгоритму.

Шаг 1. Рассчитываются $\hat{\mu}_i = \bar{x}_i = \sum_{k=1}^N x_{ik}$ и $\hat{\sigma}_i^2 = \sum_{k=1}^N (x_{ik} - \bar{x}_i)^2 / (N - 1)$ для каждой вершины X_i , у которой нет прямой причины. В таком случае

$$\hat{p}(X_i) = N(\bar{x}_i; \hat{\sigma}_i^2). \quad (28)$$

¹⁹ Для простоты вычислений мы предположили, что все переменные имеют математическое ожидание, равное нулю, $E(X_i) = 0, i = 1, \dots, 5$.

Шаг 2. Для любой другой вершины X_j осуществляется регрессия X_j по $pa(X_j)$: $X_j = \alpha_j + \beta_j pa(X_j) + \varepsilon_j$. Отсюда получаем

$$\hat{p}(X_j | pa(X_j)) = N(\hat{\alpha}_j + \hat{\beta}_j pa(X_j); \hat{\sigma}_j^2), \quad (29)$$

где $\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j, \hat{\sigma}_j^2$ – оценки регрессии.

Шаг 3. По формуле (7) вычисляется

$$\hat{p}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n \hat{p}(X_i | pa(X_i)). \quad (30)$$

В заключении раздела кратко опишем схему байесовских расчетов на сетях, откуда, впрочем, и происходит название «байесовские сети». Байесовская методология заключается в задании некоего априорного распределения $p_{pr}(\theta)$ ²⁰ вектора параметров θ и распределения $p(Z; \theta)$ наблюдаемого вектора Z , а затем, по ходу поступления новых наблюдений $Z_1, \dots, Z_N$, происходит уточнение $p_{pr}(\theta)$ по формуле Байеса:

$$p_{post}(\theta | Z_1, \dots, Z_N) \propto L(\theta | Z_1, \dots, Z_N) p_{pr}(\theta), \quad (31)$$

где L – функция правдоподобия.

Обычно предполагается, что наблюдения $Z_1, \dots, Z_N$ условно независимы по θ , и формула (30) сводится к виду

$$p_{post}(\theta | Z_1, \dots, Z_N) \propto L(\theta | Z_1) \dots L(\theta | Z_N) p_{pr}(\theta). \quad (32)$$

В нашем случае в качестве вектора параметров θ выступает полный набор параметров $\mu, \alpha, \beta, \sigma^2$, соответствующих формулам (27) и (28) для генеральных совокупностей, по всем вершинам $X_1, \dots, X_n$. При задании $p_{pr}(\theta)$ логично предположить, что маргинальные априорные распределения, соответствующие различным вершинам, независимы. Отсюда следует, что достаточно задать априорные распределения для каждой вершины отдельно:

– для вершин в формуле (28) –

$$p_{pr}(\theta_i) = p_{pr}(\mu_i, \sigma_i^2); \quad (33)$$

– для вершин в формуле (29)²¹ –

$$p_{pr}(\theta_i) = p_{pr}(\alpha_i, \beta_i, \sigma_i^2); \quad (34)$$

– априорное распределение для θ –

$$p_{pr}(\theta) = \prod_{i=1}^n p_{pr}(\theta_i). \quad (35)$$

Из формул (28) и (29) следует, что

$$L(\theta | (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})) = \prod_{i=1}^n L(\theta_i | x_{ij}, pa(x_{ij})), \quad j = 1, \dots, N. \quad (36)$$

Окончательно из (32) и (36) получаем формулу для апостериорного распределения для θ по первому наблюдению:

$$\begin{aligned} p_{post}(\theta | (x_{11}, \dots, x_{n1})) &\propto L(\theta | (x_{11}, \dots, x_{n1})) \prod_{i=1}^n p_{pr}(\theta_i) = \\ &= \prod_{i=1}^n L(\theta_i | x_{i1}, pa(x_{i1})) \prod_{i=1}^n p_{pr}(\theta_i) \propto \prod_{i=1}^n p_{post}(\theta_i | x_{i1}, pa(x_{i1})). \end{aligned} \quad (37)$$

²⁰ Более подробную информацию о различных способах задания априорных распределений можно найти в следующих статьях (Айвазян, 2008; Шемякин, 2012; Слуцкий, 2015).

²¹ Обычно предполагается, что вектор коэффициентов регрессии $(\alpha_i, \beta_i)'$ не зависит от дисперсии σ_i^2 , т.е. $p_{pr}(\theta_i) = p_{pr}(\alpha_i, \beta_i) p_{pr}(\sigma_i^2)$.

Главный вывод, который можно сделать из формулы (37), это то, что глобальное апостериорное распределение для θ определяется как произведение локальных апостериорных распределений для θ_i , $i=1, \dots, n$, по всем вершинам X_i , $i=1, \dots, n$.

5. Применение байесовских сетей в эконометрических расчетах

Рассмотрим следующую задачу. Исследователь хочет определить, влияет ли фактор X на переменную Y . Он определил для себя набор факторов $M = \{X_1, \dots, X_n\}$, включая X , которые могут быть потенциальными причинами для Y . Стандартный подход для решения данной задачи — рассмотреть регрессию Y по полному набору переменных $X, X_1, \dots, X_n$ и, если t -статистика отвергает нулевую гипотезу о том, что коэффициент при X равен нулю, считается, что фактор X влияет на Y . Если же нулевая гипотеза не отвергается, то считаем, что X не оказывает²² влияния на Y . В свете вышеизложенной теории последнее заключение является, вообще говоря, неверным. Единственный вывод, который можно сделать, что X не будет прямой причиной для Y . Однако X в качестве косвенной причины может оказывать весьма значительное влияние на Y .

Так как архитектура байесовской сети может быть весьма сложной, а число переменных — неограниченно, то для практического решения подобных задач предлагаем ввести понятие *слоя* (относительно) переменной Y . В первый слой $pa(Y)$ входят вершины из M , являющиеся прямыми причинами для Y , во второй слой $pa^2(Y)$ — прямые причины для вершин $pa(Y)$. Таким образом, в слой k , $pa^k(Y)$, входят вершины, которые являются прямыми причинами для вершин из слоя $pa^{k-1}(Y)$. Для удобства изложения введем нулевой слой $pa^0(Y) = Y$. Заметим, что различные слои могут иметь непустое пересечение. Исследователь должен субъективно определить такое минимальное число k , что влияние вершины вдоль причинно-следственной цепочки от X к Y , содержащей больше чем k стрелок, незначительно.

Рассмотрим множество $M_k = \bigcup_{j=0}^k pa^j(Y)$, являющееся объединением первых $k+1$ слоев. Если $X \notin M_k$, можно сделать вывод, что вершина X не влияет на Y . В противном случае мы рассмотрим все причинно-следственные цепочки, ведущие из X в Y и лежащие в M_k , т.е. имеющие не более k стрелок. Обозначим через $N(X; Y)$ множество вершин, принадлежащих этим цепочкам. Очевидно, что $N(X; Y) \setminus \{X\} \subseteq M_{k-1}$. Теперь рассмотрим множество $N'(X; Y) = pa(N(X; Y) \setminus \{X\})$. Легко убедиться, что $N'(X; Y) \subseteq M_k$. Полученный таким образом граф $N'(X; Y)$, вообще говоря, не будет байесовской сетью. Тем не менее мы можем применить формулу (20) для расчета коэффициента полного эффекта действия X на Y , так как для этого достаточно, чтобы переменная X была независима от ошибок регрессий для всех промежуточных вер-

²² В данном исследовании мы не рассматриваем возможного эффекта мультиколлинеарности.

шин по их прямым причинам, что, очевидно, следует из определения слоя.

Пример 2. Предположим, что исследователь решил ограничиться цепочками причинно-следственных связей с числом переменных, не превосходящих трех, т.е. имеющих не более одной промежуточной переменной. Таким образом, рассматриваются два слоя относительно Y : $pa(Y)$ и $pa^2(Y)$. Если $X \notin (M_2 = pa(Y) \cup pa^2(Y))$, то можно сделать вывод, что X на Y не влияет. Если $X \in M_2$, то возможны три случая.

1. $X \in pa(Y)$, но $X \notin pa^2(Y)$. Тогда осуществляется обычная регрессия Y по $pa(Y)$, и с помощью t -статистики решается вопрос о влиянии X на Y . Коэффициент полного эффекта действия X на Y равен коэффициенту регрессии при X .

2. $X \notin pa(Y)$, но $X \in pa^2(Y)$. Предположим, что имеются две причинно-следственные цепочки от X к Y : $X \rightarrow X_1 \rightarrow Y$ и $X \rightarrow X_2 \rightarrow Y$ (рис. 5)²³. Тогда производятся отдельно регрессии X_1 по $\{X \cup pa(X_1)\}$ и X_2 по $\{X \cup pa(X_2)\}$. И здесь возможны три варианта:

а) t -статистика не отвергает нулевую гипотезу о том, что коэффициент при X равен нулю в каждой из двух регрессий. Это означает, что фактор X не влияет значительно на Y ;

б) t -статистика отвергает нулевую гипотезу только в одной регрессии. Предположим, что нулевая гипотеза была отвергнута во второй регрессии. В этом случае исследователь делает вывод, что существует причинная связь между X и Y косвенно через X_1 (рис. 6). Коэффициент полного эффекта $TE(X;Y)$ переменной X на Y равен произведению коэффициентов регрессии:

$$TE(X;Y) = b_{X,X_1} b_{X_1,Y}; \quad (38)$$

в) t -статистика отвергает нулевую гипотезу в обеих регрессиях. В этом случае коэффициент полного эффекта $TE(X;Y)$ определяется по формуле (20):

$$TE(X;Y) = b_{X,X_1} b_{X_1,Y} + b_{X,X_2} b_{X_2,Y}. \quad (39)$$

3. $X \in (pa(Y)) \cap pa^2(Y)$. Этот случай отличается от предыдущего добавлением прямой причины от X к Y . Определение влияния X на Y состоит из двух шагов. На первом шаге мы находим прямое действие X на Y , как это делалось в первом случае. Обозначим получен-

Рис. 5

Фактор X влияет на переменную Y косвенно через X_1 и X_2

Рис. 6

Фактор X влияет на переменную Y косвенно через X_1

²³ Мы предполагаем, что в случаях 2 и 3 обе переменные X_1 и X_2 влияют на Y .

ный коэффициент $k'(X;Y)$. На втором шаге косвенное влияние X на Y устанавливается как во втором случае. Предположим, что в результате мы получили коэффициент $k''(X;Y)$. Коэффициент полного эффекта рассчитывается по формуле

$$TE(X;Y) = k'(X;Y) + k''(X;Y). \quad (40)$$

6. Заключение

Как математический объект байесовские сети представляют наиболее законченный и элегантный раздел теории вероятностных графов. Однако с прикладной точки зрения они имеют ряд существенных недостатков.

Во-первых, это касается отсутствия обратной связи между переменными. Многие уже сделано современными исследователями в этом направлении (Cowell et al., 2003; Pearl, 2009). Однако цельной теории, как в случае байесовских сетей, насколько автору известно, до сих пор не создано. Сюда же относятся задачи, связанные с латентными и инструментальными переменными.

Во-вторых, марковское свойство предполагает независимость ошибок всех регрессий переменных графа по их прямым причинам, что редко бывает возможным в экономике. Предложенный автором подход, основанный на рассмотрении последовательных слоев относительно исследуемого показателя, является попыткой практического решения этой проблемы.

Существует огромная литература по графическим методам статистической теории причинности. Например, в монографии (Perl, 2009) приведено несколько сот статей по данной тематике. Как правило, они носят теоретический характер; прикладные исследования в основном посвящены проблемам социологии и психологии (достаточно большой обзор литературы на эту тему можно найти в монографии (Morgan, Winship, 2015)); имеется также ряд прикладных эконометрических статей, например (Zhang et al., 2006; Bryant et al., 2006).

ЛИТЕРАТУРА

- Айвазян С.А.** (2008). Байесовский подход в эконометрическом анализе // *Прикладная эконометрика*. Т. 9 (1). С. 93–130.
- Андерсон Т.** (1963). Введение в многомерный статистический анализ. М.: Физматгиз.
- Слупкин Л.Н.** (2015). Определение априорного распределения в байесовском анализе при наличии исходной информации, основанное на минимизации информационной метрики // *Прикладная эконометрика*. Т. 40 (4). С. 129–141.
- Феллер В.** (1984). Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир.

- Шемякин А.Е.** (2012). Новый подход к построению объективных априорных распределений: информация Хеллингера // *Прикладная эконометрика*. Т. 28 (4). С. 124–137.
- Bryant H.L., Bessler D.A., Haigh M.S.** (2006). Causality in Futures Markets // *Journal of Futures Markets*. Vol. 26(11). P. 1039–1057.
- Cowell R.G., David A.P., Lauritzen S.L., Spiegelhalter D.J.** (2003). Probabilistic Networks and Expert Systems. Corrected edition. New York: Springer.
- Goldberger A.S., Duncan O.D.** (eds) (1973). Structural Equation Models in the Social Sciences. New York: Seminar Press.
- Morgan S.L., Winship C.** (2015). Counterfactuals and Causal Inference: Methods and Principles for Social Research. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press.
- Pearl J.** (1995). Causal Diagrams for Empirical Research. *Biometrika*. Vol. 82. P. 669–710.
- Pearl J.** (2009). Causality: Models, Reasoning, and Inference. Second edition. Cambridge: Cambridge University Press.
- Rosenbaum P.R., Rubin D.B.** (1983). The Central Role of the Propensity Score in Observational Studies for Causal Effects // *Biometrika*. Vol. 70. P. 41–55.
- Rubin D.** (1974). Estimating Causal Effects of Treatments in Randomized and Nonrandomized Studies // *Journal of Educational Psychology*. Vol. 66 (5). P. 688–701.
- Rubin D.** (2005). Causal Inference Using Potential Outcomes // *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 100 (469). P. 322–331.
- Simon H.** (1952). On the Definition of the Causal Relation // *The Journal of Philosophy*. Vol. 49. No. 16. P. 517–528.
- Simon H.** (1953). Causal Ordering and Identifiability // *Studies in Econometric Method*. New York: Wiley and Sons.
- Spirtes P., Glymour C.N., Scheines R.** (2000). Causation, Prediction, and Search. Second edition. Cambridge: MIT Press.
- Tinbergen J.** (1940). Econometric Business Cycle Research // *Review of Economic Studies*. Vol. 7. P. 73–90.
- Wold H.** (1954). Causality and Econometrics // *Econometrica*. Vol. 22. P. 162–177.
- Wright S.** (1921). Correlation and Causation // *Journal of Agricultural Research*. Vol. 20. P. 557–585.
- Zhang J., Bessler D.A., Leatham D.** (2006). Does Consumer Debt Cause Economic Recession? Evidence Using Directed Acyclic Graphs // *Applied Economics Letters*. Vol. 13. P. 401–407.

Поступила в редакцию 4 сентября 2016 года

REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Aivazian S.A.** (2008). Bayesian Methods in Econometrics. *Applied Econometrics*, 9 (1), 93–130 (in Russian).
- Anderson T.W.** (1963). An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).

- Bryant H.L., Bessler D.A., Haigh M.S.** (2006). Causality in Futures Markets. *Journal of Futures Markets*, 26 (11), 1039–1057.
- Cowell R.G., David A.P., Lauritzen S.L., Spiegelhalter D.J.** (2003). Probabilistic Networks and Expert Systems. Corrected edition. New York: Springer.
- Feller W.** (1984). An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. 1. Moscow: Mir (in Russian).
- Goldberger A.S., Duncan O.D.** (eds) (1973). Structural Equation Models in the Social Sciences. New York: Seminar Press.
- Morgan S.L., Winship C.** (2015). Counterfactuals and Causal Inference: Methods and Principles for Social Research. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press.
- Pearl J.** (1995). Causal Diagrams for Empirical Research. *Biometrika*, 82, 669–710.
- Pearl J.** (2009). Causality: Models, Reasoning, and Inference. Second edition. Cambridge: Cambridge University Press.
- Rosenbaum P.R., Rubin D.B.** (1983). The Central Role of the Propensity Score in Observational Studies for Causal Effects. *Biometrika*, 70, 41–55.
- Rubin D.** (1974). Estimating Causal Effects of Treatments in Randomized and Nonrandomized Studies. *Journal of Educational Psychology*, 66 (5), 688–701.
- Rubin D.** (2005). Causal Inference Using Potential Outcomes. *Journal of the American Statistical Association*, 100 (469), 322–331.
- Shemyakin A.** (2012). A New Approach to Construction of Objective Priors: Hellinger Information. *Applied Econometrics*, 28 (4), 124–137 (in Russian).
- Simon H.** (1952). On the Definition of the Causal Relation. *The Journal of Philosophy*, 49, 16, 517–528.
- Simon H.** (1953). Causal Ordering and Identifiability. *Studies in Econometric Method*. New York: Wiley and Sons.
- Slutskin L.** (2015). Definition of a Prior Distribution in Bayesian Analysis by Minimizing Kullback–Leibler Divergence under Data Availability. *Applied Econometrics*, 40 (4), 129–141 (in Russian).
- Spirtes P., Glymour C.N., Scheines R.** (2000). *Causation, Prediction, and Search*. Second edition. Cambridge: MIT Press.
- Tinbergen J.** (1940). Econometric Business Cycle Research. *Review of Economic Studies*, 7, 73–90.
- Wold H.** (1954). Causality and Econometrics. *Econometrica*, 22, 162–177.
- Wright S.** (1921). Correlation and Causation. *Journal of Agricultural Research*, 20, 557–585.
- Zhang J., Bessler D.A., Leatham D.** (2006). Does Consumer Debt Cause Economic Recession? Evidence Using Directed Acyclic Graphs. *Applied Economics Letters*, 13, 401–407.

Received 4.09.2016

L.N. SlutskinInstitute of Economics of the Russian Academy of Sciences (IE RAS),
Moscow, Russia**Graphical Statistical Methods for Studying
Causal Effects. Bayesian Networks**

Abstract. Revival of interest to statistical causality theory from the beginning of the 1990s was brought about, in our opinion, by two reasons. First, realization of the fact that Markovian properties allow, though partial, statistical testing of causal relations a priori determined by a researcher. Second, introduction to statistics of operator “do” by Judea Pearl (Pearl, 1995). The latter contributed to a great extent to basing causality theory upon formal probability theory and understanding causal effects as external interference in data generating process. The paper has three major objectives: 1) to present, on a sufficiently rigorous mathematical level, basic concepts and ideas of modern statistical causality theory based on graphical representation of Bayesian networks; 2) to demonstrate how graphical methods of statistical causality theory can be applied to economics and economic policy by means of “do” operator; 3) to show how those methods may be effectively used for determining indirect causes of economic factors. For this purpose we developed a new method of representing the Bayesian graph as a sequence of layers about the factor under consideration.

Keywords: *Bayesian networks, path coefficients, Markov conditions, oriented graphs, causation.*

JEL Classification: C11, C19, C390.