ДВЕ ФАЗЫ 11-ЛЕТНЕГО ЦИКЛА И ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ЕГО ФОРМЫ

Иванов В.Г.

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия

TWO PHASES OF 11-YEAR CYCLE AND PARAMETERISATION OF ITS FORM

Ivanov V.G.

The Central Astronomical Observatory of RAS at Pulkovo, St. Petersburg, Russia

As it was shown in [1–3], the curve of the 11-year cycle of solar activity tends to a universal form at the second part of the descending phase. In that time the dynamic system that describes the cycle is simplified, which can be explained by magnetic field diffusion processes dominance in this phase. We present a parameterization of the cycle form that takes into account this feature of the cycle and described by a system of simple differential equations.

DOI: 10.31725/0552-5829-2021-139-142

Поиски эмпирических зависимостей, описывающих форму 11-летнего цикла солнечной активности, восходят к XIX веку, и за последние 150 лет были сделаны многочисленные попытки аппроксимировать эту зависимость (см., например, [4, 5] и ссылки в этих работах). Такие попытки, как правило, носят формально-математический характер: ищутся функции с минимальным числом параметров, которые описывают поведение пятенного индекса.

Между тем, 11-летний цикл имеет некоторые физические особенности, которые следует учитывать при его описании. Его можно разделить на две качественно различные фазы. На фазе роста («взрывной») происходит быстрый рост активности, а на фазе спада («диффузионной») – её более плавное затухание.

Как показано в [1–3], на фазе спада кривая активности стремится к универсальной форме, слабо зависящей от мощности цикла. Такое поведение, как указано в [2], можно объяснить тем, что в это время происходит диффузия тороидальных магнитных полей, их генерация подавлена, динамика системы упрощается, и её можно описать дифференциальным уравнением первого порядка [3]

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{A}{(F + \alpha)^2} F. \quad (1)$$

Свойство универсальности диффузионной фазы проиллюстрировано на рис. 1, где каждая из циклических кривых сдвинута по времени на Δt_i относительно своего минимума. (Здесь и далее в качестве индекса актив-

ности мы будем использовать среднемесячные значения рекалиброванного ряда чисел Вольфа S_N [6] за 1749–2021 годы, сглаженные гауссовым фильтром с $\sigma = 12$ месяцев.) Как было показано в [1, 3], сдвиги Δt_i можно подбирать таким образом, чтобы соответствующие части кривых почти совпали.

Рис. 1. Циклические кривые для 11-летних циклов 1–22, сдвинутые на Δt_i до совмещения фаз спада.

Поставим задачу найти дифференциальное уравнение, описывающее такую особенность цикла. Начнём с простейшей системы с сосредоточенными параметрами, которую можно получить усреднением уравнений $\alpha\omega$ -динамо по зоне генерации (см., например, [7]):

$$\begin{aligned} \frac{dB_\varphi}{dt} &= \omega B_p - \frac{B_\varphi}{\tau_d}, \\ \frac{dB_p}{dt} &= \frac{\alpha}{L} B_\varphi - \frac{B_p}{\tau_d}, \end{aligned} \quad (2)$$

где B_φ и B_p – усреднённые напряжённости тороидального и полоидального полей, ω , α , τ_d и L – характерные значения дифференциального вращения, альфа-эффекта, времени омической диффузии и размеров зоны генерации соответственно. Зададим также начальные условия $B_\varphi(0) = 0$ и $B_p(0) = B_{p0}$.

Решение уравнения (2) – затухающие колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\alpha\omega}}$.

Для того чтобы описать две фазы цикла, введём в уравнение (2) функции $h_i(t)$, подавляющие определённые члены уравнения в нужное время:

$$\begin{aligned} \frac{dB_\varphi}{dt} &= h_\omega(t)\omega B_p - h_{\tau\varphi}(t)\frac{B_\varphi}{\tau_d}, \\ \frac{dB_p}{dt} &= h_\alpha(t)\frac{\alpha}{L} B_\varphi - h_{\tau p}(t)\frac{B_p}{\tau_d}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для описания диффузионной фазы нам достаточно потребовать, чтобы $h_\omega \approx 0$, $h_{\tau\varphi} \approx 1$, а для описания взрывной – $h_\omega \approx 1$, $h_{\tau\varphi} \approx 0$. Определим «функцию подавления» $h(t; c, n) = \frac{1}{1 + (ct)^n}$ и положим $h_\omega(t) = 1 - h_{\tau\varphi}(t) = h(t; c, n)$, где параметры c и n будут найдены ниже. В общем случае могли бы быть введены и функции h_α и $h_{\tau p}$, однако мы будем считать их тождественно равными единице.

Таким образом, мы определили семейство кривых, заданных системой дифференциальных уравнений (3) с шестью параметрами: n , ω , α/L , τ_d , c , B_{p0} . Для обеспечения гладкости решения будем считать, что пятенный индекс пропорционален $(B_\phi)^2$.

Можно показать, что $(B_\phi)^2$ не зависит от отношения $\alpha/L\omega$, которое мы, таким образом, можем положить равным единице. Мы также будем предполагать, что параметры n , τ_d , c характеризуют систему целиком и не изменяются от цикла к циклу (и при этом будем считать n целым), а i -й цикл описывают параметры $B_{p0,i}$ и T_i (таким образом, $\omega_i = (\alpha/L)_i = 2\pi/T_i$).

На рис. 2 изображены фазовые диаграммы и семейства кривых, описывающие форму цикла для различных наборов параметров. Из диаграмм (а) и (в) видно, что на фазе спада (при $d(B_\phi)^2/dt < 0$) фазовые кривые «слипаются», и динамика системы, как и следовало ожидать, упрощается. Это же видно на графиках (б) и (г), на которых описывающие 11-летний цикл кривые, при определённом подборе сдвигов Δt_i , на фазе спада практически совмещаются, т.е. имеют форму, не зависящую от параметров цикла (ср. с рис. 1).

Рис. 2. Семейства кривых, описываемых системой (3). (а) Фазовая диаграмма для величин $(B_\phi)^2$ и $d(B_\phi)^2/dt$ и параметров $n = 4$, $c = 0.5 \text{ yr}^{-1}$, $\tau_d = 11 \text{ yr}$, $T = 11 \text{ yr}$ и $B_{p0,i} = 100, 110, \dots, 150$; (б) соответствующие формы циклических кривых для сдвигов $\Delta t_i = 0, 0.75, \dots, 4.5 \text{ yr}$; (в) фазовая диаграмма для тех же n , c , τ_d и $T_i = 10, 11, \dots, 15 \text{ yr}$, $B_{p0,i} = 100$; (г) соответствующие формы циклических кривых для сдвигов $\Delta t_i = 0, (1/3)^2, \dots, (5/3)^2 \text{ yr}$.

Введём величину $(\Delta_i)^2$ – среднеквадратичное отклонение наблюдаемой формы i -го цикла от формы, описываемой системой (3). Задача поиска характеристик уравнения делится, таким образом, на два этапа: 1) поиск параметров n , τ_d , c , минимизирующих сумму $(\Delta_i)^2$ по всем циклам и 2) поиск параметров $B_{p0,i}$ и T_i , минимизирующих $(\Delta_i)^2$ для i -го цикла.

Минимизация даёт $n = 4$, $\tau_d = 5.4$ yr, $c = 0.13$ yr⁻¹, а параметры отдельных циклов приведены в таблице. В таблице также приведены величины Δ_i для нашей параметризации и, для сравнения, соответствующие отклонения Δ_i^* в случае одной из традиционно используемых для описания 11-летнего цикла кривых, задаваемых функцией Пирсона 3-го вида Ft^3e^{-bt} , которая также имеет два свободных параметра – F и b [4]. Номера циклов, для которых $\Delta_i > \Delta_i^*$, отмечены звёздочкой.

Таблица.

i	T_i	$B_{p0,i}$	Δ_i	Δ_i^*	i	T_i	$B_{p0,i}$	Δ_i	Δ_i^*
					13	24.2	61	3.76	5.45
2	20.8	92	4.93	6.84	14	26.3	54	5.69	7.58
3*	18.0	109	8.06	5.55	15	25.1	69	10.24	12.36
4*	25.2	95	13.49	7.81	16	21.8	65	3.37	6.66
5	26.7	38	5.56	7.15	17	25.2	92	6.97	9.26
6	44.2	31	7.52	8.47	18	21.4	106	2.59	8.55
7	55.5	61	9.73	11.67	19	20.8	122	7.76	13.46
8*	20.2	103	7.20	3.99	20*	25.7	83	5.09	3.16
9	29.7	97	6.86	8.74	21	22.2	112	7.15	13.14
10*	25.1	90	7.76	4.73	22	20.8	99	6.08	11.44
11	20.2	89	3.71	8.74	23	24.4	79	5.10	9.21
12	24.7	57	5.80	8.26	24	23.9	49	7.00	8.97

Мы видим, что наша параметризация описывает форму цикла в среднем лучше традиционной (для 18 циклов из 23), особенно в эпоху регулярных наблюдений, начиная с 11-го цикла (для 13 циклов из 14).

Таким образом, мы построили двухпараметрическое описание формы 11-летнего цикла, которое, имея примерно ту же точность, что и традиционные, обладает перед ними определёнными преимуществами. Оно, во-первых, естественным образом воспроизводит деление цикла на «взрывную» и «диффузионную» фазы, а также универсальность формы кривой спада, и, во-вторых, описывается системой дифференциальных уравнений, параметрам которой может быть придан физический смысл.

Данная работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 19-02-00088 и Госзадания.

Литература

1. Ivanov V.G., E.V. Miletsky // *Geomagnetism and Aeronomy*, 2014, v. 54, pp. 907–914.
2. Cameron R.H. and M. Schüssler // *Astron.; Aph.*, 2016, v. 591, A46.
3. Ivanov V.G. // *Geomagnetism and Aeronomy*, 2018, v.58, No.7, pp.930–936.
4. Витинский Ю.И., М. Конецкий, Г.В. Кукулин. Статистика пятнообразовательной деятельности Солнца. – М: Наука, 1986.
5. Hathaway D.H., R.M. Wilson, and R.J. Reichmann // *Sol. Phys.*, 1994, v.151, pp. 177–190.
6. Clette F., L. Svalgaard, J.M. Vaquero, and E.W. Cliver // *Space. Sci. Rev.*, 2014, v. 186, pp. 35–103; <http://www.sidc.be/silso/datafiles>
7. Прист Э.Р. Солнечная магнитогидродинамика. – М.: Мир, 1985.