НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЯТЕННОЙ ЦИКЛИЧНОСТИ СОЛНЦА

Наговицын Ю.А.^{1,2}, Певцов А.А.^{3,1}

¹Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия

²Государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Санкт-Петербург, Россия

³National Solar Observatory, Boulder, CO 80303, USA

NONLINEAR MATHEMATICAL MODEL OF SUNSPOT CYCLICITY OF THE SUN

Nagovitsyn Yu.A.^{1,2}, Pevtsov A.A.^{3,1}

¹Central Astronomical observatory at Pulkovo of RAS, St. Petersburg, Russia

²State University of Aerospace Instrumentation, St. Petersburg, Russia

³National Solar Observatory, Boulder, CO 80303, USA

It is proposed that the solar cyclicity process could be described in the framework of an external quasi-sinusoidal influence on an oscillator with cubic nonlinearity and linear damping (Duffing oscillator). To demonstrate this, the empirical amplitude-frequency dependence was used in comparison with the theoretical dependence obtained by the Krylov-Bogolyubov averaging method [Krylov and Bogolyubov, 1947]. The empirical data included a new version 2.0 of the sunspot number series SN [Clette et al., 2014] starting from 1700 and the version of the group number series GN by Svalgaard and Schatten [2016], scaled in SN, for the 17th century. The result obtained has better internal consistency than the earlier result [Nagovitsyn, 1997] for version 1.0 SN.

DOI: 10.31725/0552-5829-2018-307-310

Введение. Построение математической модели солнечной цикличности имеет более чем столетнюю историю. Наиболее часто использовался мультигармонический подход в различных модификациях. В [1] была представлена математическая модель солнечной цикличности на основе уравнения Дуффинга с кубической нелинейностью и линейным демпфированием. К сожалению, данные, имеющиеся к тому времени, были недостаточны. Так, не было достаточно надежных данных 17 века. Основная ветвь амплитудно-частотной зависимости раздваивалась, причем более высокая ветвь соответствовала только 20-му веку, начиная с 30-х годов. В данной работе проводится анализ современных данных солнечной активности в рамках модели, основанной на уравнении Дуффинга.

Данные и их обработка. Для интервала 1700–2017 используем версию 2.0 чисел Вольфа SN [2]. Для 1610–1699 используем версию Свальгаарда-Шаттена GN [3]. Для совмещения используем соотношение $SN = 18.3GN$, $\rho = 0.94$. Согласно предыдущим работам, добавим на ветви спада цикла 4 дополнительный слабый цикл с $SN = 27$. Создадим знакопеременный ряд – (см. рис. 1а).

Рис. 1.

Рис. 2.

Для амплитудно-частотного анализа пойдем методом, близким к Empirical Mode Decomposition [5] и предложенным в [1]. Для вычисления частот и амплитуд цикла j , соответствующих ряду на рис. 1 а), используем моменты его экстремумов – максимумов и минимумов – T_j и значения в этих экстремумах W_j . Оценим частоты ν_j и амплитуды a_j как:

$$\nu_j = 100 / (T_{j+1} - T_{j-1}), \quad a_j = \frac{1}{4} (|W_j - W_{j-1}| + |W_{j+1} - W_j|) \quad (1)$$

Далее, для более длительных периодов колебаний сформируем аддитивную медленную компоненту:

$$W_j^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{W_{j+1} + W_{j-1}}{2} + W_j \right), \quad T_j^{(1)} = \frac{1}{2} (T_{j+1} + T_{j-1}). \quad (2)$$

для нее также оценим амплитуды и частоты по (1) и еще более медленную компоненту по (2), и так далее. Таким образом мы нашли локальные значения частот и амплитуд для всего альтернированного ряда цикличности.

Слабонелинейная колебательная система с внешним периодическим воздействием. Уравнение Дуффинга – это уравнение вида:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + bx^3 + c\dot{x} = E \sin vt \quad (3)$$

динамической осциллирующей системы с хаотичным поведением. Для таких систем разработаны асимптотические методы решения (точных решений уравнение (3) не имеет). Важным способом представления решения (3) является амплитудно-частотная зависимость решения $a = a(v)$, характеризующая как бы «портрет» системы в принятых приближениях. Так, в первом приближении по [6] она выглядит для уравнения (3) с $b > 0$ как изображено на рис. 2. Здесь штрих-пунктирной линией изображена так называемая скелетная кривая – решение (3) с нулевой правой частью (невозмущенные колебания). Точками – участок BD – неустойчивое решение. При увеличении частоты внешней силы и достижении амплитуды точки В происходит замечательное явление: «срыв» амплитуды на нижнюю ветвь в точку С. Дальнейшее развитие может происходить двояко: при увеличении частоты будет задействована нижняя ветвь, а при уменьшении – в точке D амплитуда скачком перейдет на верхнюю ветвь.

Экспериментальная амплитудно-частотная зависимость. Эмпирические частоты и амплитуды получены, нанесем их на общий график. Оказалось, что для основной компоненты наименьший разброс точек обеспечивает сдвиг текущих частот вперед, так что изменения амплитуд на половину 22-летнего цикла запаздывают по отношению к изменениям частот (аналогичный эффект наблюдался и при рассмотрении обычного, знакопеременного 11-летнего цикла [7]). Это может быть понято, если, имея в виду наличие члена, описывающего демпфирование в (3), т.е. $c\dot{x}$, предпо-

ложить, что отклик на внешнее возбуждение в процессе динамо осуществляется не мгновенно, а передается системе за время порядка 11-летнего цикла. Полученная амплитудно - частотная зависимость приведена на рис. 3. Серыми кружками и стрелками приведен эпизод дальтоновского минимума от цикла № 2 до цикла № 7 по цюрихской нумерации. Такое поведение близко к изображенному на рис. 2 поведению срыва амплитуды

Рис. 3.

при достижении высоких значений на основной ветви амплитудно-частотной зависимости уравнения Дуффинга. Заметим здесь, что крайними для срыва амплитуды являются значения частоты $\nu_0 = 5.8$ (период около 17.2 лет) и амплитуды $a_0 = 230$. Первая величина дает верхнее значение для частот циклов основной ветви на (рис. 2, точка В), вторая же кладет предел для амплитуды циклов. Из этого следуют выводы: первый, что амплитуда циклов не может быть как угодно большой, и второй – при превышении частоты внешнего воздействия величины $\nu_0 = 5.8$ зависимость $a = a(\nu)$ соответствует нижней ветви (D-N на рис. 2) – т.е. глобальным минимумам. В целом же экспериментальная амплитудно-частотная зависимость солнечной цикличности, построенная по SN версии 2.0, близка к теоретической для уравнения (3), и солнечная цикличность может быть представлена как осциллятор (солнечное динамо), возбуждаемый внешней квазисинусоидальной силой. Заметим, что для знакопеременного ряда чисел Вольфа на графике амплитудно-частотной зависимости (рис. 3) обычному 11-летнему циклу солнечной активности будет соответствовать период в 22 года и частота $\nu = 4.5$.

Вхождение цикличности в режим глобальных минимумов. Рассмотрим, как цикличность входила в Маундеровский минимум, т.е. во второй половине 17 века, по вековым изменениям текущих частот (1) – см. рис. 4.

Рис. 4.

Мы видим, что вхождению в Маундеровский минимум соответствует резкое увеличение частоты за пределы $\nu_0 = 5.8$, что приводит к попаданию на нижнюю ветвь зависимости $a = a(\nu)$. Дальтоновскому минимуму также соответствует превышение граничной частоты.

Результаты. Амплитудно-частотная зависимость, построенная с использованием новых версий 2.0 *SN* и *GN*, в 22-летнем «знакопеременном» варианте согласуется с поведением, описываемым математической моделью дуффинговского осциллятора. На основе этой модели, переход с ветви соответствующей циклам с высокой амплитудой на ветвь циклов с низкой амплитудой должен происходить в циклах с коротким периодом около 8.6 лет. Действительно, такие условия наблюдались в период глобальных минимумов солнечной активности (минимумы Маундера и Дальтона). Другое важное заключение – амплитуда солнечного цикла ограничена и до тех пор, пока солнечное динамо остается в том же общем режиме как в настоящее время, амплитуда солнечных циклов не должна значительно превышать максимума наблюдавшегося в цикле 19.

Природа внешней квазисинусоидальной силы ведущей к неустойчивости солнечной цикличности в данной работе не рассматривалась. Однако заметим, что в качестве такой силы могут выступать, например, временные изменения дифференциального вращения или меридиональной циркуляции. Другие возможные механизмы включают взаимодействие циклов двух популяций пятен и взаимодействие циклов крупномасштабного и пятенного поля.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 16-02-00090) и программы ПРАН № 28.

Литература

1. Nagovitsyn, Yu.A. // *Astronomy Letters*, 1997, V. 23, Issue 6, pp.742-748.
2. Clette, F. et al. // *Space Science Reviews*, 2014, Vol. 186, Issue 1-4, pp. 35-103.
3. Svalgaard, Leif; Schatten, Kenneth H. // *Solar Physics*, 2016, V. 291, pp. 2653-2684.
4. Usoskin, I.G. et al. // *Astronomy and Astrophysics*, 2003, V. 403, pp.743-748.
5. Huang, N.E. et al. // *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 1998, vol. 454, pp. 903–995.
6. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний – Гос. Изд-во Физ.- Мат. Литературы, 1958.
7. Hathaway, D. // *Solar Physics*, 1994, V. 151, no. 1, p. 177-190.
8. Krylov, N.M., Bogolyubov, N.N. *Introduction to non-linear mechanics* – Princeton Univ. Press, 1947.