V CONGRESSO INTERNACIONAL DAS **LICENCIATURAS** COINTER - PDVL 2018

INTEGRAIS MÚLTIPLAS EM COORDENADAS POLARES: fatos para utilização do Jacobiano

MULTIPLE INTEGRALS IN POLAR COORDINATES: facts for Jacobian use

Apresentação: Comunicação Oral

Pedro Alexandre Linhares Lima¹; Geovana Medeiros de Oliveira²; Isabel Bezerra Lima³;
Robson Abreu Fonseca⁴

DOI: <https://doi.org/10.31692/2358-9728.VCOINTERPDVL.2018.00088>

Resumo

Ao estudar cálculo, no que circunscreve os aspectos aprendidos à nível de educação superior, as integrais são construídas e solucionadas por várias técnicas disseminadas na literatura matemática. Um estudo específico sobre coordenadas polares, em se tratando de construção, definição, gráficos e aplicações, foi oportunizado neste trabalho, onde foi desenvolvida uma pesquisa no campo do Programa de Bolsa a Iniciação Científica (PIBIC), onde a aplicação na região definida em coordenadas polares e a utilização das integrais duplas, acarreta na necessidade da mudança de variável para solucionar problemas, daí proporemos a investigação sobre indícios que qualifiquem a utilização do Jacobiano. Os Problemas que envolvem as integrais múltiplas em coordenadas polares, rodeiam como principal eixo de abordagem as mudanças de variáveis, além do que, compreendem também o tratamento da questão de investigar, quais indícios apontam a montagem do Jacobiano para a finalidade de mudança de variáveis. No intuito de qualificar a inserção da mudança de variáveis, para perceber indicativos gráficos ou algébricos que viabilizem um tratamento específico ou não do Jacobiano para solução das integrais em estudo. Este trabalho circunscreve uma atividade de investigação bibliográfica e processual para uma construção-seleção dos conceitos, pautado nas discussões de Anton H; Bivens I. C; Davis S. L (2010), Gonçalves B. M; Flemming D. M (2013), e Wrede R. C; Spiegel M. S (2004), e para fundamentar com métodos de ensino e bases para a metodologia, utilizada neste trabalho foi referenciado Quivy e Campenhoudt (1995). Diante disso, foi possível concluir que, ao relacionar aspectos que integram os temas estudados em contextos históricos e sobrepostos, foi possível também levantar como os autores abordam os temas. Com tudo, foi identificado nos materiais componentes do trabalho, modelagem matemática, relacionando o raciocínio lógico da aprendizagem significativa e o

¹ Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – Campus Teresina Central, pedroalexandre406@gmail.com

² Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – Campus Teresina Central, geomedeiros1996@gmail.com

³ Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – Campus Teresina Central, isabelblima1@gmail.com

⁴ Mestre, Instituto Federal de Educação Ciências e Tecnologia do Piauí - Campus Teresina Central do Curso de Matemática, robson.fonseca@ifpi.edu.br

processo de aplicabilidade do Jacobiano.

Palavras-Chave: Ensino, integrais múltiplas, utilização do Jacobiano.

Abstract

When studying calculus, in what circumscribes the aspects learned at the level of higher education, the integrals are constructed and solved by several techniques disseminated in the mathematical literature. A specific study on polar coordinates, in terms of construction, definition, graphs and applications, was opportunized in this work, where a research was developed in the field of the Scholarship Program (PIBIC), where the application in the region defined in coordinates polar and the use of double integrals, necessitates the change of variable to solve problems, hence we propose research on indications that qualify the use of the Jacobian. The problems that involve multiple integrals in polar coordinates, surround as main axis of approach the changes of variables, besides which, they also understand the treatment of the question of investigating, which indications point the assembly of the Jacobian for the purpose of change of variables. In order to qualify the insertion of the change of variables, to perceive graphical or algebraic indicatives that enable a specific or non-Jacobian treatment to solve the integrals under study. This work circumscribes an activity of bibliographic and procedural research for a construction-selection of concepts, based on the discussions of Anton H; Bivens I.C; Davis S. L (2010), Gonçalves B. M; Flemming D. M (2013), and Wrede R.C; Spiegel M. S (2004), and to base with teaching methods and bases for the methodology, used in this work was referenced Quivy and Campenhoudt (1995). Therefore, it was possible to conclude that, by relating aspects that integrate the themes studied in historical and overlapping contexts, it was also possible to find out how the authors approach the themes. With everything, it was identified in the work materials, mathematical modeling, relating the logical reasoning of meaningful learning and the Jacobian applicability process.

Keywords: As mesmas palavras-chave traduzidas em inglês.

Introdução

O presente trabalho visa levantar aspectos históricos, definições e aplicações do Jacobiano em integrais múltiplas em coordenadas polares para mudança de variável desenvolvido no âmbito do Programa de Bolsa a Iniciação Científica (PIBIC). O trabalho se propôs a identificar a relação entre as aplicações em diferentes espaços onde ocorrem as mudanças de coordenadas, bem como, indicar fatos que norteiam a aplicação do Jacobiano nas integrais aplicadas.

Em aspectos preliminares faremos algumas definições, para em seguida apontarmos hipóteses e suspeitas que nortearão o corpo deste trabalho. Montando uma linha de pesquisa, objetivando refletir o método matemático adequado na obtenção das características a serem

levantadas.

Como principal eixo de abordagem das pesquisas, trataremos da questão de investigar, quais indícios apontam a montagem do Jacobiano para mudança de variáveis em integrais múltiplas em coordenadas polares? Existem indícios algébricos a serem levantados? Como os autores, Anton H; Bivens I. C; Davis S.L (2010), Gonçalves B.M; Flemming D.M (2013), e Wrede R. C; Spiegel M. S (2004), abordam ou se valem destes temas? Após uma investigação bibliográfica, histórica e conteudista, montar-se-á estratégias perseguindo a condição de montar um roteiro para identificação de características aplicáveis e facilitadoras, para solução de problemas.

Fundamentação Teórica

Segundo Gonçalves B.M; Flemming D.M (2013), na integração de funções de uma variável, a fórmula de mudança de variável ou substituição é usada para transformar uma integral dada em outra mais simples. Temos:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt$$

onde $a = g(c)$ e $b = g(d)$.

Quando utilizamos essa fórmula para calcular uma integral definida, a mudança de variável vem acompanhada por uma correspondente mudança nos limites de integração.

Para as integrais duplas, podemos utilizar um procedimento análogo. Por meio de uma mudança de variáveis,

$$x = x(u, v) \text{ e } y = y(u, v) \quad (1)$$

uma integral dupla sobre um região R do plano xy pode ser transformada em uma integral dupla sobre uma região R' do plano uv .

Se a transformação leva pontos distintos de R' a pontos distintos de R , dizemos que ela é uma aplicação um por um.

Nesse caso, a correspondência entre as regiões R e R' é bijetora, e podemos retornar de R para R' pela transformação inversa.

$$u = u(x, y) \text{ e } v = v(x, y). \quad (2)$$

Considerando que as funções em (1) e (2) são contínuas, com derivadas parciais contínuas em R' e R , respectivamente, temos,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \quad (3)$$

Onde $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ é o determinante jacobiano de x e y em relação a u e v .

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Segundo Anton H; Bivens I. C; Davis S.L (2010), a expressão Jacobiano é denominada para mudança de variável, em homenagem a Carl Gustav Jakob Jacobi, matemático Alemão que fez o primeiro estudo sério sobre a mudança de variáveis em integrais múltiplas, em meados do século XIX. O determinante é dado por:

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

O jacobiano que aparece em (3) pode ser interpretado como uma medida de quanto a transformação (2) modifica área de uma região. Esse fato será abordado em coordenadas polares, a seguir.

As equações,

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad (4)$$

que nos dão as coordenadas cartesianas de um dado ponto em termos de suas coordenadas polares, podem ser vistas como uma transformação que leva pontos (x, y) do plano xy .

O determinante jacobiano nesse caso é dado por,

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}$$

e a fórmula (2) pode ser expressa por,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (5)$$

A seguir daremos uma interpretação geométrica que permite visualizar a expressão (5) para o caso de uma função contínua $f(x, y)$.

Vamos considerar duas regiões R e R' dos planos xy e $r\theta$, respectivamente, que se relacionam pelas equações (4).

Dividindo região R' em pequenos retângulos por meio de retas $r = \text{constante}$ e $\theta = \text{constante}$, a região R fica dividida em pequenas regiões, como mostra a imagem, a seguir, que usualmente chamamos de retângulo polar. **Imagem 1** Retângulo polar. Fonte: Gonçalves B. M; Flemming D. M (2013).

O retângulo de área $\Delta A' = \Delta r \Delta \theta$, evidenciando na região R' , está em correspondência com o ‘retângulo polar’ de área ΔA , demarcada na região R . Da geometria elementar, temos que ΔA é dado por,

$$\begin{aligned}
 \Delta A &= \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta \theta - \frac{1}{2}r^2 \Delta \theta \\
 &= \frac{1}{2}[(r + \Delta r)^2 - r^2] \Delta \theta \\
 &= \frac{r + (r + \Delta r)}{2} \Delta r \Delta \theta \\
 &= \bar{r} \Delta r \Delta \theta \\
 &= \bar{r} \Delta A'.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Onde $\bar{r}$ é o raio médio entre r e $r + \Delta r$.

Essa expressão permite visualizar o papel do jacobiano que no caso é r , como um fator de ampliação (ou redução) local para áreas.

Numeramos, agora, os ‘retângulos polares’ no interior de R de 1 a n e tomamos um ponto arbitrário (x_k, y_k) no n -ésimo retângulo. Esse ponto pode ser escrito como,

$$(r_k \cos \theta, r_k \sin \theta) \quad (6)$$

onde (r_k, θ_k) é um ponto do retângulo correspondente em R' .

Metodologia

A metodologia proposta para esta pesquisa, é tratá-la como uma atividade de investigação bibliográfica e processual para uma construção-seleção dos conceitos. Assim como discute Quivy e Campenhoudt (1995, p. 149), (apud. Gerhardt, 2009, p.53), onde:

Ele é composto de conceito e hipóteses que estão interligados para formar conjuntamente um quadro de análise coerente. A conceitualização, ou a construção de conceitos, constitui uma construção abstrata que tenta dar conta do real. Nesse sentido, ela não dá conta de todas as dimensões e aspectos do real, mas somente o que expressa o essencial, segundo o ponto de vista do pesquisador. Trata-se, portanto, de uma construção-seleção. A construção de um conceito consiste em designar dimensões que o constituem e em precisar os indicadores graças aos quais essas dimensões poderão ser mensuradas.

Contudo, suspeitando das variáveis levantadas e com intuito de construir ideias acerca da seleção dos indicativos da pesquisa pensa-se, para atingir tais objetivos:

1. Levantamento histórico sobre os temas a serem abordados neste trabalho, com pesquisas bibliográficas em diferentes meios de publicação de pesquisas, a luz das referências, para relacionar os temas, definições e aplicações;
2. Coletar ações sobre interpretação ou abordagem dos temas levantados e referências bibliográficas, por meio de investidas algébricas e interpretativas, sobre conteúdos e problemas;
3. Qualificar percepções junto ao método, possivelmente elaborado, na tentativa de oferecer abordagens diferenciadas para ressignificação de conteúdos para contextualização de aplicação ou aprendizagem.

Resultados e Discussões

Nota-se uma relação contundente entre os temas, desde construção e definição de utilização do Jacobiano, a luz das interpretações, gráficas, algébricas e aplicáveis das integrais

duplas em coordenadas polares para mudança de variáveis na sua solução. A seguir exemplificaremos essa relação, com problemas que garantem a aplicabilidade em diferentes espaços onde ocorrem as mudanças de coordenadas.

Exemplo 1: Calcular $I = \iint_R (x - y) dx dy$, sendo R o paralelogramo limitado pelas retas

$$x - y = 0, x - y = 1, y = 2x \text{ e } y = 2x - 4.$$

Imagem 2 do exemplo 1: Região de integração R . Fonte: Gonçalves B.M; Flemming. D. M

Solução: A imagem 2, mostra a região de integração R . Observando essa figura vemos que para calcular a integral dada diretamente usando as variáveis x e y , precisamos dividir R em três sub-regiões e usar proposições.

Esse trabalho pode ser evitado por meio de uma mudança de variáveis adequada. Fazendo

$$u = x - y, v = 2x \quad (7)$$

a região R , que é um paralelogramo inclinado em relação a ambos os eixos x e y , transforma-se em um paralelogramo R' , que pode ser visualizado na figura 7.30, é delimitado pelas retas $u = 0$, $u = 1$, $v = -2u$ e $v = -2u + 8$.

Temos

$$R': \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ -2u \leq v \leq -2u + 8 \end{cases}$$

Precisamos também do jacobiano de x, y em relação a u e v . Das equações (7), vem que,

$$x = \frac{v}{2} \text{ e } y = \frac{v}{2} - u$$

Assim,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

Utilizando a fórmula (3) obtemos,

$$\begin{aligned}
 & \iint_R (x - y) \cdot dx dy \\
 &= \iint_R (u) \cdot \frac{1}{2} \cdot dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-2x}^{-2u+8} u \, dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-2x}^{-2u+8} u \, dx dy u(-2u + 8 + 2u) \, du \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

Exemplo 2: Calcular $I = \iint_R [(x - 2)^2 + (y - 2)^2] dx dy$, onde R é a região delimitada pela circunferência $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Solução: Nesse exemplo vamos ilustrar a utilização de duas transformações sucessivas para o cálculo da integral.

Inicialmente, vamos transformar a região dada em um círculo com centro na origem. Fazemos

$$x - 2 = u, \quad y - 2 = v$$

Temos, então,

$$x = u + 2, \quad y = v + 2$$

A região R' do plano uv em correspondência com a região R é delimitada pela circunferência,

$$u^2 + v^2 = 4$$

As regiões R e R' estão ilustradas na imagem 3.

Imagem 3 do exemplo 2: regiões R e R' . Fonte: Wrede R. C; Spiegel M. S (2004).

O Jacobiano de xy em relação a u e v é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Portanto, usando (3), vem

$$I = \iint_{R'} (u^2 + v^2) \, du \, dv.$$

Podemos agora resolver a integral I com o auxílio das coordenadas polares. Procedendo de forma análoga ao Exemplo 1 da Subseção 7.7.7. temos,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) \cdot r \, dr \, d\theta \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

Exemplo 3: Calcule a área da região limitada pelas seguintes curvas: a curva polar $r(\theta) = \theta$, onde a curva polar $r(\theta) = 2\theta$ onde, $0 \leq \theta \leq 2\theta$, e pelo eixo x positivo.

Solução; Temos que a região do plano xy é,

Imagem 4 do exemplo 3: região limitada pelas curvas. Fonte: Anton H; Bivens I. C; Davis S.L (2010).

$$B\{(r, \theta): \theta \leq \theta \leq 2\theta; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Sabemos que em coordenadas cartesianas teríamos que a área seria dada pela integral dupla da função $f(x, y) = 1$. Calcularemos em coordenadas polares devido o conjunto B , no plano $r\theta$, descrever um retângulo, que é uma região bem mais simples de trabalhar. Para

fazermos essa mudança, devemos considerar o jacobiano da mudança polar que é r . Portanto, ficamos com,

$$\begin{aligned} A &= \iint_B r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\theta}^{2\theta} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{\theta}^{2\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4\theta^2 - \theta^2) d\theta \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{\theta^3}{3} \right]_{\theta}^{2\theta} = \frac{1}{2} (2\pi)^3 = 4\pi^3 \end{aligned}$$

Com forma a tentar correlacionar requisitos entre os assuntos. Foi feito com os exemplos apresentados uma relação entre os temas de cálculo que norteiam essa pesquisa, de forma que os futuros usuários ou estudantes, possam encontrar significado na contextualização e aplicação dos conteúdos. Tornando o ensino, aprendizagem ou pesquisas futuras, fluente e participativo junto aos cenários de aplicação dos temas.

Conclusões

O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou uma análise teórica, de modo que pode-se concluir possíveis contribuições, onde se enquadram no intuito de qualificar a inserção da mudança de variáveis para integrais duplas em coordenadas polares, onde possibilitou a percepção de indicativos gráficos ou algébricos que viabilizaram um tratamento específico ou não do Jacobiano, para solução das integrais em estudo, que as investidas sobre as suspeitas levantadas, possam ser discutidas como esta prática pode ser utilizada no ambiente acadêmico de forma efetiva e permanente. Proporcionando efeitos sobre a aplicabilidade ou ensino e aprendizagem destes temas.

Concluimos também que, ao arrolar indícios que relacionam os temas estudados em aspectos históricos e aplicados, foi possível levantar como as referências enxergam os conteúdos. Todavia, foi identificado nos discursos, modelagem matemática junto ao raciocínio lógico da significação, ou para construção e utilização do Jacobiano.

Referências

ANTON H; BIVENS I.C; DAVIS S.L. “Cálculo - Volume II - 10.ed.”. Bookman, 2010.

GONÇALVES B. M; FLEMMING D.M. “**Cálculo B - 2.ed.**”. Bookman, 2013.

WREDE R.C ; SPIEGEL M.S. “**Cálculo Avançado - 2.ed.**”. Bookman, 2004.