ОПТИМІЗАЦІЯ ВИСОТИ СТАЛЕВОЇ ЗВАРНОЇ ДВОТАВРОВОЇ БАЛКИ НА ДІЛЯНКАХ БІЛЯ ОПОР

Янін О.Є., - к.т.н., доцент,

Херсонський Державний Аграрний Університет, м. Херсон
yanin_a@ukr.net, ORCID ID 0000-0003-0230-8669

Новікова С.М., - старший викладач,

Херсонський Державний Аграрний Університет, м. Херсон
novikova_svetla@ukr.net, ORCID ID 0000-0003-0012-521X

Анотація. У статті наведені результати оптимізації за витратами сталі однопролітної шарнірно-обпертої балки при рівномірно-розподіленому навантаженні за рахунок зменшення її висоти біля опор. Визначався найменший нахил нижнього поясу виходячи з того, щоб у будь-якому місці за довжиною балки була забезпечена міцність за нормальними напруженнями. Запропонована методика визначення висоти балки на опорі, яка задовольняє умові міцності на зріз та відповідає мінімальним витратам сталі на балку. Ефективність зменшення висоти балки на ділянках біля опор оцінювалась коефіцієнтом, який являє собою відношення мінімальної висоти балки з умови міцності на зріз до висоти балки посередині прольоту. Зменшення висоти балки на ділянках біля опор рекомендується при відносно малих навантаженнях та гнучкостях стінки і відносно великих прольотах.

Ключові слова: оптимізація, згин, висота балки, гнучкість стінки, нахил нижнього поясу, міцність на зріз.

Вступ. В умовах ринкової економіки достатньо актуальним стає зменшення витрат матеріалу на будівельні конструкції. При їх масовому серійному виготовленні економічний ефект, отриманий за рахунок економії матеріалу, може зіграти важливу роль. Тому доцільно розглянути можливість проектування сталевих зварних балок виходячи з мінімальних витрат сталі.

Аналіз останніх джерел досліджень і публікацій. Задачі раціонального проектування сталевих балок, що працюють на згин вирішуються у ряді праць провідних вітчизняних та закордонних вчених [1-4]. Зокрема, для економії матеріалу пропонується зменшувати розміри поперечного перерізу балки у місцях зменшення згинальних моментів. Частіше виконується зменшення ширини або товщини поясів, оскільки такий варіант є найбільш простий. При рівномірному розподіленні навантаження найбільш вигідне місце зміни розмірів поясів знаходиться на відстані приблизно $1/6$ прольоту балки від опори [5-7]. Зменшення висоти балки може привести до необхідності збільшення товщини стінки біля опор для сприйняття дотичних напруг, що у деяких випадках є технологічно недоцільним. [5-7].

Виділення не розв'язаних раніше частин загальної проблеми. Актуальним є дослідження можливості підбору параметрів зменшення висоти балки біля опор виходячи із забезпечення технологічних та економічних вимог при незмінній товщині стінки. Доцільно також визначити місце у прольоті, де вигідно почати зменшення висоти балки.

Постановка завдання Розглянемо однопролітну шарнірно-обперту балку, завантажену рівномірно-розподіленим лінійним навантаженням (рис.1).

Рис. 1. Схема балки

Припустимо, що її складений двотавровий поперечний переріз підібраний по максимальному згинальному моменту посередині прольоту ($M_{\max}$) із умови міцності за нормальними напруженнями [8]. З віддаленням від середини прольоту до опор згинальні моменти (M) зменшуються. Отже зменшується потрібний момент опору

$$W_{\text{нотр}} = \frac{M}{R_y \gamma_c}, \quad (1)$$

де R_y – розрахунковий опір сталі стиску, розтягу та згину за межею текучості;
 γ_c – коефіцієнт умов роботи.

Тому, з метою економії сталі можна зменшувати розміри поперечного перерізу балки на приопорних ділянках [5]. Це досягається, зокрема, за рахунок зменшення її висоти (h). Для рішення задачі, складемо функцію витрат сталі та визначимо її мінімум. Це дозволить підібрати оптимальну висоту балки у опор і ухил нижнього поясу при мінімальних витратах матеріалу.

Основний матеріал і результати. Виходячи з умови міцності на зріз, прийнята висота балки на опорі повинна задовольняти умові [5]

$$h_1 \geq \frac{n Q_{\max}}{R_s \gamma_c t_w} = h_{s,\min} \quad (2)$$

де R_s – розрахунковий опір сталі на зріз;
 $h_{s,\min}$ – мінімальна висота балки із умови міцності на зріз.

Якщо розрізна балка обпирається на нижче розташовану конструкцію за допомогою опорного ребра, привареного до торця, то в опорному поперечному перерізі дотичні напруження сприймає тільки стінка і $n=1,5$.

Якщо опорне ребро заведено між полками на деякій відстані від торця, то в опорному поперечному перерізі дотичні напруження сприймає як стінка, так і полиці. Тоді $n=1,5$.

З рис.1 видно, що висота балки на відстані Z від опори

$$h_z = h_1 + VZ, \quad (3)$$

де $V=\tan\alpha$ нахил нижнього поясу балки на при опорних ділянках.

Несуча здатність балки (максимальний згинальний момент, який може прийняти поперечний переріз) на відстані Z від опори

$$M_{uz} = W_z R_y \gamma_c, \quad (4)$$

де W_z –момент опору поперечного перерізу на відстані Z від опори;

$$W_z = \frac{I_z}{0.5h_z}; \quad (5)$$

I_z – відповідний момент інерції;

$$I_z = \frac{t_\omega h_z^3}{12} + 2b_f t_f \left(\frac{h_z}{2} \right)^2. \quad (6)$$

Формула для I_z є наближеною так як у ній прийнято, що $h_0 \approx h$.

Тоді

$$M_{uz} = R_y \gamma_c \left(\frac{t_\omega h_z^2}{6} + b_f t_f h_z \right) \quad (7)$$

З урахуванням формули (3)

$$M_{uz} = R_y \gamma_c \left[\frac{t_\omega (h_1 + VZ)^2}{6} + b_f t_f (h_1 + VZ) \right]. \quad (8)$$

При фіксованому h_1 та зменшенні нахилу нижнього поясу V , витрати сталі на балку знижуються. Тому слід знайти найменше значення V , при якому в будь-якому місці за довжиною балки була б забезпечена міцність за нормальними напруженнями, тобто виконана умова

$$\frac{M_z}{W_z} \leq R_y \gamma_c \quad (9)$$

або

$$M_z \leq W_z R_y \gamma_c = M_{uz}, \quad (10)$$

де M_z - згинальний момент від розрахункового навантаження на відстані Z від опори;

$$M_z = \frac{1}{2} q Z (L - Z). \quad (11)$$

З'ясуємо як виглядає графік функції M_{uz} . Для цього знаходимо її першу та другу похідні

$$\frac{dM_{uz}}{dZ} = R_y \gamma_c \left[\frac{t_\omega (h_1 + VZ)V}{3} + b_f t_f V \right]; \quad (12)$$

$$\frac{d^2 M_{uz}}{dZ^2} = R_y \gamma_c \frac{t_\omega V^2}{3}. \quad (13)$$

При будь-якому $Z > 0$ друга похідна $\frac{d^2 M_{uz}}{dZ^2} > 0$. Тому графік функції M_{uz} є вгнутий по відношенню до вертикальної осі ординат, яка направлена вниз (див. рис.1). Графік функції M_z є випуклий по відношенню до тієї ж осі тому що $\frac{d^2 M_z}{dZ^2} = -q < 0$ при будь-якому Z .

З формули (8) випливає, що при фіксованому Z та зменшенні V , M_{uz} зменшується. Це означає, що графік функції M_{uz} наближається до горизонтальної осі абсцис по мірі зниження V .

При цьому можна знайти таке значення $V=V_0$, при якому графік функції M_{uz} доторкнеться графіка функції M_z у деякій точці A на відстані Z від опори. У цій точці буде виконуватись рівність

$$M_{uz} = M_z. \quad (14)$$

З графіків функцій M_{uz} та M_z (перший – вгнутий, а другий – випуклий) випливає, що у решті точок по довжині балки буде виконуватись умова міцності за нормальними напруженнями

$$M_z \leq M_{uz}. \quad (15)$$

Якщо далі зменшувати V (тобто приймати $V < V_0$), то у точці A M_{uz} стане менше ніж M_z , тобто міцність забезпечена не буде. Тому, значення $V=V_0$, при якому у точці A $M_z = M_{uz}$ є мінімально допустимим та відповідає мінімуму витрат сталі при фіксованій висоті балки на опорі h_1 .

Коли обидва графіка доторкаються один до іншого у точці A , їх перші похідні у цій точці однакові:

$$\frac{dM_z}{dZ} = \frac{dM_{uz}}{dZ} \quad (16)$$

Розв'язавши спільно рівняння (14) і (16) можна знайти мінімально допустиме значення $V=V_0$ та величину $Z=Z_0$. Відповідна система двох рівнянь з двома невідомими V_0 та Z_0 має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}qZ_0(L-Z_0) = R_y\gamma_c \left[\frac{t_\omega(h_1 + V_0Z_0)^2}{6} + b_ft_f(h_1 + V_0Z_0) \right] \\ \frac{1}{2}q(L-2Z_0) = R_y\gamma_c \left[\frac{t_\omega(h_1 + V_0Z_0)V_0}{3} + b_ft_fV_0 \right] \end{cases} \quad (17)$$

Після її розв'язання отримаємо:

$$V_0 = \frac{qL}{2R_y\gamma_cb_ft_f} \left[(1+p) - \sqrt{(2+p)(p+Q_1)} \right], \quad (18)$$

$$Z_0 = \frac{0,5qL - R_y\gamma_cV_0b_ft_f(1+p)}{\frac{1}{3}R_y\gamma_ct_\omega V_0^2 + q}, \quad (19)$$

де

$$p = \frac{h_1t_\omega}{3b_ft_f}; \quad Q_1 = \frac{4R_y\gamma_ch_1b_ft_f}{qL^2}. \quad (20)$$

Розв'язання системи рівнянь (17) у загальному вигляді являє собою достатньо складну алгебраїчну задачу. Спростити його можна за допомогою комп'ютерної програми MathCAD. Для цього слід застосувати команди Given та Find.

При деякому значенні $Z=X$ (див.рис.1) висота балки h_z буде дорівнювати величині h , яка отримана при підборі поперечного перерізу посередині прольоту по максимальному згинальному моменту. Тоді (див. формулу (3))

$$h_z = h_1 + V_0X = h; \quad (21)$$

$$X = \frac{h - h_1}{V_0}. \quad (22)$$

При $Z>X$ висота балки залишається постійною та дорівнює h . Тому і несуча здатність балки між точками В та В' у середній частині прольоту буде постійною та рівною

$$M_{uz, \max} = R_y \gamma_c \left[\frac{t_\omega h^2}{6} + b_f t_f h \right]. \quad (23)$$

Ця величина небагато більша за $M_{\max}$, тому що підбір розмірів поперечного перерізу виконується з деяким запасом міцності.

Висота балки на опорі h_1 , яка задовольняє умові міцності на зріз (див. формулу (2)), може приймати різні значення. Тому можна спробувати знайти таке з них, при якому витрати сталі на балку будуть мінімальними. Для цього слід задатися рядом значень h_1 з деяким кроком, і при кожному з них знайти свої значення V_0 та X , які відповідають доторканню графіків функцій M_{uz} та M_z .

Функція витрат сталі на половину балки має вигляд:

$$m_\delta = \rho_{cm} \left\{ t_\omega \left[(h - 2t_f) \left(\frac{L}{2} - X \right) + X \left(\frac{h + h_1}{2} - 2t_f \right) \right] + \right. \\ \left. + b_f t_f \left[L - X + \sqrt{X^2 + (h - h_1)^2} \right] \right\}, \quad (24)$$

де $\rho_{ст}$ – питома вага сталі.

Задача була розв'язана за допомогою комп'ютерної програми MathCAD при контрольних вихідних даних. Побудований графік залежності m_δ від h , який має чітко виражений мінімум. Його загальний вигляд наведений на рис.2.

Рис. 2. Загальний вигляд графіку залежності m_δ від h

Якщо значення h_1 , що відповідає цьому мінімуму ($h_{1, \text{опт}}$) менше за мінімальну висоту балки з умови міцності на зріз (див. формулу (2)),

$$h_{s, \min} = \frac{n Q_{\max}}{R_s \gamma_c t_\omega}, \quad (25)$$

то, як видно з графіка, мінімальним витратам сталі відповідає $h_1 = h_{s,min}$ (приймати $h_1 < h_{s,min}$ не можна). У протилежному випадку мінімальним витратам сталі відповідає $h_1 = h_{1,опт}$.

Ефективність зменшення висоти балки на ділянках біля опор тим більша, чим менше $h_{s,min}$ порівняно з h , тобто чим менше відношення

$$k = \frac{h_{s,min}}{h} . \quad (26)$$

У цьому випадку графік функції несучої здатності балки M_{uz} буде розташований ближче до епюри згинальних моментів від розрахункового навантаження M_z (див. рис 1), що відповідає меншим витратам сталі.

З'ясуємо, при яких параметрах балки коефіцієнт “К” є відносно невеликий. У відповідності з традиційним підходом висоту балки посередині прольоту знаходять виходячи з мінімуму витрат сталі по формулі [7]

$$h = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \lambda_{\omega} W_{номп}} , \quad (27)$$

де λ_{ω} - задана постійна гнучкість стінки;

$W_{потр}$ – потрібний момент опору з умови міцності за нормальними напруженнями;

$$W_{номп} = \frac{M_{max}}{R_y \gamma_c} = \frac{qL^2}{8R_y \gamma_c} , \quad (28)$$

$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} . \quad (29)$$

З формул (27) та (28) отримаємо

$$h = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \lambda_{\omega} \frac{qL^2}{8R_y \gamma_c}} . \quad (30)$$

З урахуванням того, що

$$Q_{max} = \frac{qL}{2} \text{ та } t_{\omega} = \frac{h}{\lambda_{\omega}} \quad (31)$$

з формули (25) маємо

$$h_{s,min} = \frac{nqL}{2R_s \gamma_c} \frac{\lambda_{\omega}}{h} . \quad (32)$$

Підставляємо $h_{s,min}$ та h у формулу (26)

$$k = \frac{h_{s,min}}{h} = \frac{nqL}{2R_s\gamma_c} \frac{\lambda_\omega}{h^2} = 2n^3 \sqrt{\frac{4}{9} \frac{qR_y^2 \lambda_\omega}{LR_s^3 \gamma_c}} \quad (33)$$

Висновки. З формули (33) видно, що чим менше лінійне навантаження q та гнучкість стінки λ_ω та чим більше проліт L , тим K менше. Тому, зменшення висоти балки на ділянках біля опор рекомендується при відносно малих навантаженнях та гнучкостях стінки та відносно великих прольотах.

Встановлено, що чим менше n , тим менше K . Тому, опорний вузол балки рекомендується конструювати таким чином, щоб опорне ребро не приварювалось до торця (коли $n=1.5$), а було заведене між полицями на деякій відстані від торця (коли $n=1.2$).

Література

1. Металеві конструкції: підруч. [для студ. вищ. навч. закл.] / Нілов О.О., Пермяков В.О., Шимановський О.В. та ін.. – К.: Вид-во «Сталь», 2010. – 869 с.
2. Зорин З.Я. Стальные конструкции. Проектирование на стадии КМД / З.Я. Зорин, А.А. Новицкий. – Киев: Сталь, 2015 – 268 с.
3. Гоголь М.В. Регулювання зусиль у металевих конструкціях / М.В. Гоголь, М.Р. Більський, С.І. Віхоть, М.М. Гоголь // Вісник національного університету «Львівська політехніка» «Теорія і практика будівництва». – Львів, 2012. - №737. – С.64-70.
4. Максимов Ю.С. Исследование несущей способности стальных двутавровых балок с вертикально гофрированной стенкой / Ю.С. Максимов, Г.М. Остриков, В.В. Долинский // Строительная механика и расчет сооружений. 1983. - №1. – С. 68-70.
5. Металлические конструкции. Общий курс: Учебник для вузов /Е.И. Беленя, В.А. Балдин, Г.С. Ведеников и др.; Под. общ. ред. Е.И. Беленя. 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1986. – 560 с., ил.
6. Металлические конструкции. Н.С. Стрелецкий, А.Н. Гениев, Е.И. Беленя, В.А. Балдин, Е.Н. Лессиг ; Под. общ. ред. Н.С. Стрелецкого. 3-е изд., перераб. – М.: Стройиздат, 1961. – 776 с., ил.
7. Муханов К.К. Металлические конструкции. Учебник для вузов. Изд. 3-е, испр. и доп. М., Стройиздат, 1978. 572 с.
8. ДБН В.2.6-198:2014. Сталеві конструкції. Норми проектування». – Київ: Міністерство регіонального розвитку та будівництва України, 2014. – 199с.

References

- [1] Nilov O.O., Permyakov V.O., Shymanovskyy O.V, “Metalevi konstruktsiyi: pidruch. [dlya stud. vyshch. navch. zakl.]”, Kyev, Stal, 2010.
- [2] Z.YA. Zoryn, A.A. Novytsky, “Stalnye konstruktsyy. Proektyrovanye na stadyy KMD”, Kyev, Stal, 2015.
- [3] M.V. Hohol, M.R. Bilsky, S.I. Vikhot, M.M. Hohol, “Rehulyuvannya zusyl u metalevykh konstruktsiyakh”, Visnyk natsionalnoho universytetu «Lvivska politekhnika» «Teoriya i praktyka budivnytstva» vol. 737, Lviv, 2012.
- [4] YU.S. Maksymov, H.M. Ostrykov, V.V. Dolynskyy “Yssledovanye nesushchey sposobnosty stalnykh dvutavrovyykh balok s vertykalno hofryrovannoy stenкой”, Stroytel'naya mekhanyka y raschet sooruzheniy, pp. 68-70, vol. 1, 1983.

- [5] E.Y. Belenya, V.A. Baldyn, H.S. Vedenykov, “Metallycheskiye konstruktsyy. Obshchyy kurs: Uchebnyk dlya vuzov”, M.: Stroyizdat, 1986.
- [6] N.S. Streletskyy, A.N. Henyev, E.Y. Belenya, V.A. Baldyn, E.N. Lessyh, “Metallycheskiye konstruktsyy”, M.: Stroyizdat, 1961.
- [7] K.K. Mukhanov, “Metallycheskiye konstruktsyy”, M., Stroyizdat, 1978.
- [8] DBN V.2.6-198:2014. Stalevi konstruktsiyi. Normy proektuvannya». – Kyiv: Ministerstvo rehionalnoho rozvytku ta budivnytstva Ukrayiny, 2014.

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫСОТЫ СТАЛЬНОЙ СВАРНОЙ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ НА УЧАСТКАХ ВОЗЛЕ ОПОР

Янин А.Е., - к.т.н., доцент,

Херсонский Государственный Аграрный Университет г. Херсон
yanin_a@ukr.net, ORCID ID 0000-0003-0230-8669

Новикова С.Н., - старший преподаватель,

Херсонский Государственный Аграрный Университет г. Херсон
novikova_svetla@ukr.net, ORCID ID 0000-0003-0012-521X

Аннотация. В статье приведены результаты оптимизации по расходу стали однопролетной шарнирно-опертой балки, загруженной равномерно-распределенной линейной нагрузкой. Предполагалось, что ее составное двутавровое поперечное сечение подобрано по максимальному изгибающему моменту посередине пролета из условия прочности по нормальным напряжениям. Учтено, что при удалении от середины пролета к опорам, изгибающие моменты уменьшаются. Соответственно уменьшается необходимый момент сопротивления.

Исследование опиралось на то, что в целях экономии стали можно уменьшать размеры поперечного сечения балки на участках возле опор. Это достигалось за счет уменьшения ее высоты.

Были учтены ограничения на высоту балки на опоре, исходя из условия прочности на срез.

Определялся минимальный уклон нижнего пояса исходя из того, чтобы в любом месте по длине балки была обеспечена прочность по нормальным напряжениям. Это связано с тем, что при фиксированной высоте балки на опоре и уменьшении уклона нижнего пояса, расход стали на балку снижается. Для решения такой задачи, получена аналитическая формула для несущей способности балки в виде максимального изгибающего момента, который может воспринять поперечное сечение на определенном расстоянии от опоры.

Уклон нижнего пояса подбирался таким образом, чтобы изгибающий момент от нагрузки в каждой точке пролета не превышал несущей способности балки.

Предложена методика определения высоты балки на опоре, которая удовлетворяет условию прочности на срез и соответствует минимальному расходу стали на балку. Для этого составлена функция расхода стали на половину балки и определялся ее минимум. Приведены рекомендации к решению этой задачи с помощью компьютерной программы. Построен график зависимости функции расхода стали от высоты балки, который имеет минимум.

Эффективность уменьшения высоты балки на участках вблизи опор оценивалась коэффициентом, который представляет собой отношение минимальной высоты балки из условия прочности на срез к высоте балки посередине пролета. Чем меньше этот коэффициент, тем ближе к эпюре изгибающих моментов от расчетной нагрузки будет расположен график функции несущей способности. В таком случае расход стали будет меньше.

Установлено, что при уменьшении линейной нагрузки на балку и гибкости стенки, а также при увеличении пролета, указанный коэффициент становится меньше. Поэтому,

уменьшение высоты балки на участках вблизи опор рекомендуется выполнять при относительно малых нагрузках и гибкости стенки и относительно больших пролетах.

Ключевые слова: оптимизация, изгиб, высота балки, гибкость стенки, уклон нижнего пояса, прочность на срез.

HEIGHT OPTIMIZATION OF A STEEL WELDED I-BEAM IN AREAS AT THE SUPPORTS

Yanin A.E., - PhD, Assistant Professor,

Kherson State Agrarian University, Kherson

yanin_a@ukr.net, ORCID ID 0000-0003-0230-8669

Novikova S.N., - Senior Lecturer,

Kherson State Agrarian University, Kherson

novikova_svetla@ukr.net, ORCID ID 0000-0003-0012-521X

Abstract. The article presents the results of optimization of the consumption of steel of a single-span articulated beam loaded with a uniformly distributed linear load. It was assumed that its composite I-beam cross section was selected according to the maximum bending moment in the middle of the span from the condition of strength at normal stresses. It is taken into account that when moving away from the middle of the span to the supports, bending moments decrease. Accordingly, the necessary moment of resistance decreases.

The study relied on the fact that in order to save steel, it is possible to reduce the cross-sectional dimensions of the beam in areas near the supports. This was achieved by reducing its height.

The restrictions on the height of the beam on the support were taken into account, based on the condition of shear strength.

The minimum slope of the lower belt was determined based on the fact that in any place along the length of the beam strength at normal stresses was ensured. This is due to the fact that with a fixed height of the beam on the support and a decrease in the slope of the lower belt, the consumption of steel on the beam decreases. To solve this problem, an analytical formula is obtained for the bearing capacity of the beam in the form of a maximum bending moment, which can perceive a cross section at a certain distance from the support.

The slope of the lower belt was selected so that the bending moment from the load at each point of span did not exceed the load-bearing capacity of the beam.

A technique is proposed for determining the height of the beam on the support, which satisfies the condition of shear strength and corresponds to the minimum consumption of steel on the beam. For this, the function of steel consumption for half the beam was compiled and its minimum was determined. Recommendations are given for solving this problem using a computer program. The graph of the dependence of the function of steel consumption from the beam height was constructed. This graph has a minimum.

The effectiveness of reducing the height of the beam in areas near the supports was estimated by a coefficient that is the ratio of the minimum height of the beam from the condition of shear strength to the height of the beam in the middle of the span. The smaller this coefficient, the closer to the plot of bending moments from the calculated load will be a graph of the bearing capacity function. In this case, the steel consumption will be less.

It was found that with a decrease in the linear load on the beam and the flexibility of the wall, as well as with an increase in span, this coefficient becomes smaller. Therefore, it is recommended to reduce the height of the beam in areas near the supports at relatively small loads and wall flexibility and relatively large spans.

Key words: optimization, bending, beam height, wall flexibility, lower belt slope, shear strength.