Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
Katedra matematiky

ŘADY

Jaroslav Vlček
Jiří Vrbický
Jakub Stryja

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ | KATEDRA MATEMATIKY A DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STAVEBNÍ | KATEDRA MATEMATIKY

https://doi.org/10.31490/9788024843926
ISBN 978-80-248-4392-6

Ostrava 2020

Obsah

1 Úvod **1**
1.1 Řady v základním kurzu matematiky . . . 1
1.2 Rozdělení řad . . . 1
1.3 Poděkování . . . 2
1.4 Předmluva ke druhému vydání . . . 2

2 Číselné řady **3**
2.1 Základní pojmy . . . 3
2.2 Řady s kladnými členy . . . 7
2.3 Alternující řady . . . 11
2.4 Operace s řadami . . . 14
2.5 Neřešené úlohy . . . 16

3 Funkční řady **18**
3.1 Posloupnosti funkcí . . . 18
3.2 Funkční řady . . . 22
3.3 Neřešené úlohy . . . 27

4 Mocninné řady **29**
4.1 Základní vlastnosti . . . 29
4.2 Vyjádření funkce mocninnou řadou . . . 35
4.3 Vybrané aplikace mocninných řad . . . 41
4.4 Neřešené úlohy . . . 45

5 Fourierovy řady **49**
5.1 Základní pojmy a vztahy . . . 49
5.2 Trigonometrické řady . . . 52
5.3 Fourierovy řady . . . 54
5.4 Sinový a kosinový rozvoj . . . 58
5.5 Fourierův rozvoj na obecném intervalu . . . 60
5.6 Vybrané aplikace . . . 64
5.7 Neřešené úlohy . . . 69

Kapitola 1

Úvod

1.1 Řady v základním kurzu matematiky

S pojmem řada se většina čtenářů pravděpodobně setkala ještě před otevřením tohoto skripta. Nejspíše již na střední škole v souvislosti s úlohami řešenými pomocí geometrické řady, zcela jistě však v úvodním vysokoškolském kurzu matematické analýzy. Stačí připomenout vyjádření funkce Taylorovou řadou nebo zavedení Riemannova určitého integrálu jako limity jistých nekonečných součtů.

Tento studijní text si klade za cíl shrnout základní poznatky o řadách (číselných i funkčních). Předpokládá se, že čtenář získal základní přehled v diferenciálním a integrálním počtu funkcí jedné reálné proměnné; k očekávaným výchozím znalostem patří téma *posloupnosti*, s nímž se může student seznámit například ve skriptu [DS96]. Některé z aplikací funkčních řad se týkají diferenciálních rovnic, což by podle našeho názoru nemělo působit komplikace, neboť v základních kursech matematiky zpravidla toto téma předchází výkladu o řadách.

Vzhledem k omezenému rozsahu nejsou zařazeny některé oblasti, které zejména v aplikacích problematiku významně doplňují (podrobnější výklad k numerickým metodám založeným na použití řad, řady v komplexním oboru). V uvedených případech však jsou k dispozici specializované učební texty nebo je možné čerpat z další literatury, jejíž citované tituly jsou uvedeny v závěru skripta.

1.2 Rozdělení řad

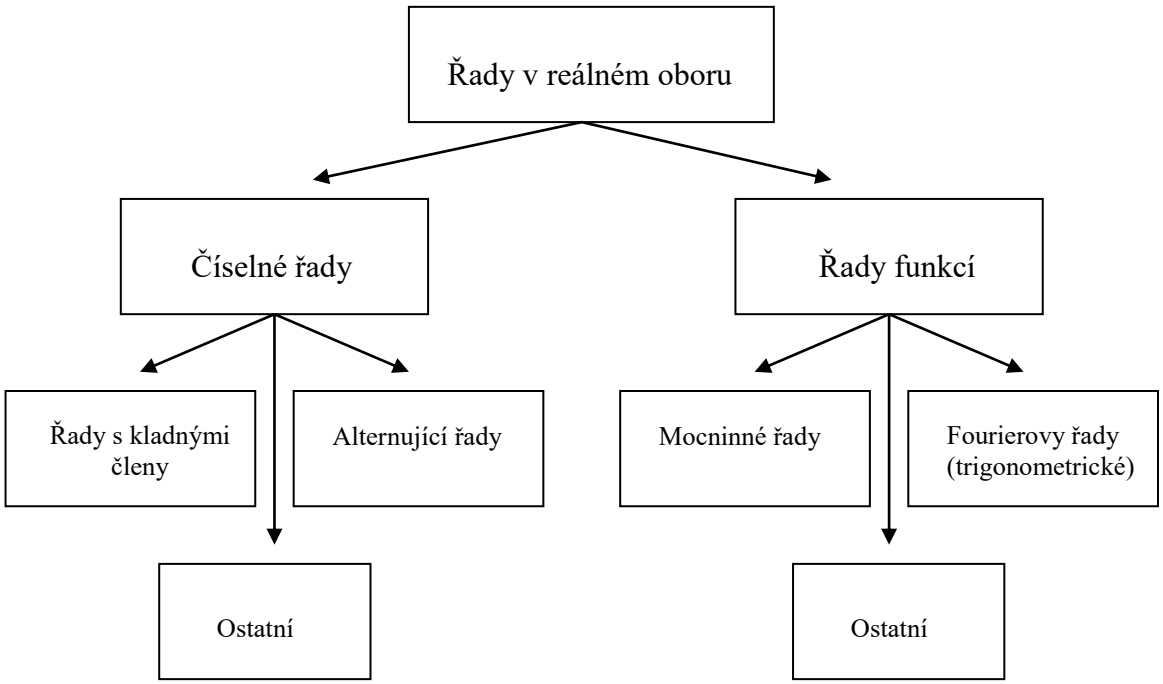
Řadu můžeme intuitivně chápat jako součet členů nějaké posloupnosti sčítanců, a to buď čísel (číselná řada) nebo funkcí (funkční řada). V obou kategoriích lze vymezit významné podskupiny, kterými se budeme zabývat zejména se zřetelem k jejich aplikacím. Rozdělení řad z hlediska nejdůležitějších typů zařazených do základního kurzu matematiky ukazuje schéma na obr. 1.1, kterému v podstatě odpovídá členění skripta: číselným řadám je věnována následující kapitola, ostatní jsou postupně zaměřeny na funkční řady obecně a na dva jejich nejvýznamnější typy - řady mocninné a trigonometrické. Hlavní otázky, kterými je třeba se zabývat, jsou zřejmé:

(a) zda existuje součet řady,

(b) pokud existuje, jak ho lze určit,

(c) jaké vlastnosti má sčítání nekonečného počtu objektů (na rozdíl od téže operace s konečným počtem sčítanců),

(d) jaké jsou možnosti a způsoby využití řad.



Obrázek 1.1: Rozdělení řad

1.3 Poděkování

Pečlivé recenze textu se ochotně ujala doc. RNDr. Věra Dobrovská, CSc. z Katedry matematiky a deskriptivní geometrie. Patří jí náš vřelý dík za svědomitou korekturu a cenné připomínky, které přispěly ke zdárnému završení naší práce.

Ostrava, duben 2000.

Jaroslav Vlček, Jiří Vrbický.

1.4 Předmluva ke druhému vydání

Po dvaceti letech od vytvoření tištěné verze skripta „Řady“ jsme se rozhodli připravit vydání tohoto studijního textu v elektronické verzi, a to v doplněné a upravené podobě. Záměrem bylo mimo jiné zaplnit tematickou mezeru v elektronických studijních materiálech, které aktuálně nabízejí Katedra matematiky a deskriptivní geometrie (FS) a Katedra matematiky (FaSt) v rámci společné E-studovny (mdg.vsb.cz/portal).

Problematice řad není sice v současných studijních plánech věnován samostatný předmět, poznatky z této oblasti však v různé míře najdou uplatnění v celém kurzu výuky matematiky na technických oborech. Ponechali jsme v původní podobě odkazy na studijní literaturu s vědomím, že v dnešních podmínkách je dostupnost doplňujících zdrojů k tomuto tématu dostatečně široká. Přejeme si, aby náš učební text přispěl všem uživatelům ke zdárnému zvládnutí vysokoškolské matematiky.

Ostrava, únor 2020.

Jaroslav Vlček, Jiří Vrbický, Jakub Stryja.

Kapitola 2

Číselné řady

2.1 Základní pojmy

2.1.1 Definice. Mějme dánu posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_1^\infty = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Formálně vytvořený součet jejích členů

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

nazýváme číselnou řadou.

2.1.2 Posloupnost částečných součtů $\{s_i\}_1^\infty$ řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ vznikne postupným zvyšováním počtu sečtených členů řady:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$s_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_i = s_{i-1} + a_i = \sum_{n=1}^{i} a_n.$$

2.1.3 Zbytek řady. Každou číselnou řadu můžeme zapsat jako součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots = s_i + r_i,$$

kde $r_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots$ je zbytek řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ po i-tém členu.

2.1.4 Definice. Mějme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ s posloupností částečných součtů $\{s_i\}$. Jestliže

$$\lim_{i\to\infty} s_i \left\{ \begin{array}{l} = s \in \mathcal{R} \\ = \infty(-\infty) \\ \text{neexistuje} \end{array} \right\}, \text{ říkáme, že řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\{ \begin{array}{l} \text{konverguje a má součet } s, \\ \text{diverguje a má součet } \infty\ (-\infty), \\ \text{diverguje a nemá součet (osciluje).} \end{array} \right\}$$

2.1.5 Příklady. K zadané řadě utvořte posloupnost částečných součtů a rozhodněte o její konvergenci.

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Řešení. (a) Nejprve řadu upravíme rozkladem na parciální zlomky:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Nyní vyjádříme obecný člen posloupnosti částečných součtů

$$s_i = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{i}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{i+1}\right) = 1 - \frac{1}{i+1}.$$

Řada konverguje, neboť má součet, který určíme jako limitu

$$s = \lim_{i\to\infty} \left(1 - \frac{1}{i+1}\right) = 1.$$

(b) Pro řadu $\sum\limits_{1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \ldots$ je

$$s_i = \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{i+1}{i}\right) = \ln(i+1).$$

Řada diverguje, protože

$$\lim_{i\to\infty} s_i = \lim_{i\to\infty} \ln(i+1) = \infty.$$

(c) Zadaná řada $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ má posloupnost částečných součtů

$$s_i = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots,$$

která nemá limitu. Jedná se tedy o divergentní oscilující řadu.

2.1.6 Věta (nutná podmínka konvergence). Je-li řada $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{2.1}$$

Důkaz. Řada $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ konverguje k součtu s, proto $s_n \to s$, $s_{n+1} \to s$. Protože $a_n = s_{n+1} - s_n$, musí na základě vlastností konvergentních posloupností platit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = 0.$$

□

2.1.7 Poznámky.

1. Podmínka (2.1) je sice nutná, nikoli však postačující. Její splnění konvergenci řady samo o sobě nezaručuje, jak je vidět na příkladu 2.1.5 (b), kde

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0,$$

ale řada diverguje.

2. Určení součtu řady jako limity posloupnosti částečných součtů není zpravidla možné, neboť se jen výjimečně podaří vyjádřit obecně i-tý člen posloupnosti $\{s_i\}$, jako tomu bylo v příkladu 2.1.5 (a). O některých metodách stanovení součtu konvergentní řady pojednává kapitola 4.1.

2.1.8 Geometrická řada s kvocientem q je řada

$$\sum_1^\infty q^{n-1} = \sum_0^\infty q^n = 1 + q + q^2 + \dots .$$

Pro i-tý částečný součet platí vzorec

$$s_i = \frac{1-q^i}{1-q},$$

neboť

$$s_i \cdot (1-q) = 1 + q + q^2 + \dots + q^{i-1} - \left(q + q^2 + \dots + q^i\right) = 1 - q^i.$$

Je-li $|q| < 1$, **geometrická řada konverguje** a platí

$$\sum_1^\infty q^{n-1} = \frac{1}{1-q},$$

protože

$$s = \lim_{i\to\infty} s_i = \lim_{i\to\infty} \frac{1-q^i}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Pro $|q| \geq 1$ je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} q^{n-1} \neq 0$$

a **geometrická řada diverguje**.

2.1.9 Harmonická řada je definována předpisem

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots .$$

Tato řada je **divergentní**, přestože $a_n \to 0$ pro $n \to \infty$. Platí totiž:

$$s_{2i} - s_i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2i} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{i}\right) =$$

$$= \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \dots + \frac{1}{2i} \geq i \cdot \frac{1}{2i} = \frac{1}{2}. \tag{2.2}$$

Kdyby harmonická řada konvergovala, muselo by platit

$$\lim_{i\to\infty} s_{2i} = \lim_{i\to\infty} s_i, \quad \text{tj.} \quad \lim_{i\to\infty} (s_{2i} - s_i) = 0,$$

což je spor s (2.2).

2.1.10 Věta. Nechť $k \in \mathcal{N}$. Pak řady $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ a $\sum\limits_{n=k+1}^\infty a_n$ současně konvergují, resp. divergují.

Důkaz. Zřejmě můžeme psát

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \sum_{n=k+1}^\infty a_n.$$

Označíme obvyklým způsobem $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ a pro $i \geq k+1$ dále

$$\sigma_i = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_i,$$

takže $\sigma_i = s_i - s_k$.

Konvergentní případ: je-li $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = s$, pak $\lim\limits_{i\to\infty} \sigma_i = s - s_k$. Naopak, je-li $\lim\limits_{i\to\infty} \sigma_i = \sigma$, pak $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = \lim\limits_{i\to\infty} (\sigma_i + s_k) = \sigma + s_k$.

Divergentní případ: jestliže posloupnost $\{s_i\}$ diverguje, potom diverguje i posloupnost $\{\sigma_i\} = \{s_i - s_k\}$, neboť v opačném případě by podle předchozího konvergovala i posloupnost $\{s_i\}$, což je spor s předpokladem; obdobně z divergence $\{\sigma_i\}$ plyne i divergence posloupnosti $\{s_i\} = \{\sigma_i + s_k\}$. $\square$

2.1.11 Důsledek. Liší-li se dvě řady v **konečném** počtu členů (jinými slovy: řady jsou si rovny pro skoro všechna n), pak současně konvergují (divergují).

2.1.12 Vlastnosti konvergentních řad. Mějme konvergentní řady $\sum_1^\infty a_n = s$ a $\sum_1^\infty b_n = t$.

1. Je-li $\forall n \in \mathcal{N} : a_n \leq b_n$, pak $s \leq t$.
2. $\sum_1^\infty a_n + \sum_1^\infty b_n = \sum_1^\infty (a_n + b_n) = s + t$.
3. $\sum_1^\infty ca_n = c\sum_1^\infty a_n = cs \quad \forall c \in \mathcal{R}$.

Důkaz. Uvedené vztahy napíšeme pomocí limit posloupností částečných součtů. Tvrzení plyne ze známých vět o limitách konvergentních posloupností. □

2.1.13 Definice. Jsou-li $\sum_1^\infty a_n$, $\sum_1^\infty b_n$ řady, přičemž $\forall n \in \mathcal{N} : \ a_n \leq b_n$. Pak říkáme, že

1. řada $\sum_1^\infty a_n$ je **minorantou** řady $\sum_1^\infty b_n$ nebo obráceně
2. řada $\sum_1^\infty b_n$ je **majorantou** řady $\sum_1^\infty a_n$.

2.1.14 Příklady.

(a) Dokažte divergenci řady

$$\sum_1^\infty \frac{n}{5n-3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{7} + \frac{1}{4} + \frac{4}{17} + \dots .$$

(b) Určete součet řady

$$\sum_1^\infty \frac{2-(-1)^n}{2^n} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots .$$

Řešení.

(a) Řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{5n-3} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

(b) Zadanou řadu můžeme napsat jako součet dvou řad[1]:

$$\sum_1^\infty \frac{2-(-1)^n}{2^n} = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_1^\infty \left(-\frac{1}{2}\right)^n .$$

Obě jsou geometrické a konvergují $\left(|q| = \frac{1}{2} < 1\right)$. Hledaný součet bude (viz 2.1.8)

$$s = s_1 + s_2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{7}{3}.$$

[1] Tento krok je samozřejmý jen zdánlivě; jde o přerovnání členů řady, které je korektní jen v některých případech (tento mezi ně patří). Blíže viz 2.4.5 a 2.5.9.

2.2 Řady s kladnými členy

2.2.1 Definice. Řada $\sum\limits_1^\infty a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, v níž je každé $a_n \geq 0$, se nazývá **řada s kladnými (nezápornými)**[2] **členy**.

2.2.2 Poznámky.

1. Řada s kladnými členy buď konverguje nebo diverguje k ∞, protože její posloupnost částečných součtů je vždy neklesající.
2. Následující věty se nazývají **kriteria konvergence řad s kladnými členy**. Jedná se o postačující podmínky konvergence.

2.2.3 Srovnávací kriterium. Řada $\sum\limits_1^\infty a_n$ s kladnými členy konverguje, existuje-li k ní konvergentní majoranta. Řada $\sum\limits_1^\infty a_n$ diverguje, existuje-li k ní divergentní minoranta.

Důkaz. Plyne z věty 2.1.12. □

2.2.4 Příklady.

(a) Řada $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n3^n}$ konverguje, neboť

$$\frac{1}{n3^n} \leq \frac{1}{3^n} \quad \forall\, n \in \mathcal{N}\,,$$

a majoranta $\sum\limits_1^\infty \left(\frac{1}{3}\right)^n$ konverguje (geometrická řada, $|q| = \frac{1}{3} < 1$).

Ukážeme odhad zbytku zadané řady (například po pátém členu) pomocí této geometrické majoranty:

$$s = \sum_1^\infty \frac{1}{n3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{4\cdot 3^4} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots = s_5 + r_5,$$

kde

$$r_5 = \frac{1}{6\cdot 3^6} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{8\cdot 3^8} + \ldots \leq \frac{1}{6\cdot 3^6} + \frac{1}{6\cdot 3^7} + \frac{1}{6\cdot 3^8} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{6\cdot 3^6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) = \frac{1}{6\cdot 3^6}\sum_1^\infty \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{4\cdot 3^6} \doteq 3,43\cdot 10^{-4}.$$

Výsledná hodnota udává horní odhad chyby, které se dopustíme, nahradíme-li (aproximujeme-li) součet zadané řady součtem jejích prvních pěti členů.

(b) Řada $\sum\limits_1^\infty \frac{n}{2n^2-1}$ diverguje, neboť

$$\frac{n}{2n^2-1} \quad > \quad \frac{n}{2n^2} \quad = \quad \frac{1}{2n},$$

přičemž minoranta $\frac{1}{2}\sum \frac{1}{n}$ diverguje (harmonická řada).

[2] Vynecháme-li v dané řadě nulové členy, nezměníme tím nic na konvergenci ani součtu řady. Místo řad s nezápornými členy můžeme uvažovat jen řady s kladnými členy. To je důležité např. u podílového kriteria, kde dělíme členem a_n, viz 2.2.7.

2.2.5 Odmocninové (Cauchyho) kriterium. Nechť pro řadu $\sum_1^\infty a_n$ existuje

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Pak platí: (a) je-li $L < 1$, řada konverguje,
(b) je-li $L > 1$, řada diverguje.

Důkaz. (a) Uvažujme číslo k tak, že $L < k < 1$. Pak pro skoro všechny členy posloupnosti $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ platí, že $\sqrt[n]{a_n} < k$, tj. $0 \le a_n < k^n$. To však znamená, že řada $\sum k^n$ je konvergentní majorantou řady $\sum a_n$, která proto konverguje podle srovnávacího kriteria.

(b) Mějme nyní $L > 1$; pak pro skoro všechna n bude $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ neboli $a_n \ge 1$. To však znamená, že limita posloupnosti $\{a_n\}$ se nerovná nule. Řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence, a proto diverguje. □

2.2.6 Příklad. (a) Řada

$$\sum_1^\infty \left(\frac{2n+5}{3n-2}\right)^n$$

konverguje, protože

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n-2} = \frac{2}{3} < 1.$$

(b) Řada $\sum_1^\infty \arctan^n n$ diverguje, protože

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2} > 1.$$

2.2.7 Podílové (d'Alembertovo) kriterium. Nechť pro řadu $\sum_1^\infty a_n$ existuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Pak platí: (a) je-li $L < 1$, řada konverguje,
(b) je-li $L > 1$, řada diverguje.

Důkaz. (a) Nechť $k \in (L, 1)$. Pak pro skoro všechna n je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k$, tj. existuje $n_0 \in \mathcal{N}$ tak, že $\forall m > n_0$:

$$\begin{aligned} a_{m+1} &< ka_m, \\ a_{m+2} &< ka_{m+1} < k^2 a_m, \\ &\dots \\ a_{m+N} &< k^N a_m \quad \text{atd.} \end{aligned}$$

Vidíme, že řada $a_m \sum_1^\infty k^N$ je konvergentní majorantou řady $\sum_1^\infty a_n$, která podle srovnávacího kriteria musí konvergovat.

(b) Pro $L > 1$ musí pro skoro všechna n platit

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1, \quad \text{tj.} \quad a_{n+1} \ge a_n.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy neklesající a kladná, a proto nemůže splnit nutnou podmínku konvergence $a_n \to 0$ pro $n \to \infty$. □

2.2.8 Příklady. (a) Řada $\sum\limits_1^\infty \frac{5^n}{n!}$ konverguje, protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0 \ < \ 1.$$

(b) Řada $\sum\limits_1^\infty \frac{5^n}{n^5}$ diverguje, protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)^5} \cdot \frac{n^5}{5^n} = 5 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^5 = 5 \ > \ 1.$$

2.2.9 Poznámka. Při použití odmocninového nebo podílového kriteria může nastat také případ $L = 1$, kdy nelze o konvergenci rozhodnout. Pak je nutno použít některé další kriterium.

2.2.10 Integrální kriterium. Nechť funkce $f(x)$[3] je na intervalu $\langle 1, \infty)$ spojitá, kladná a klesající, přičemž $f(n) = a_n \ \forall n \in \mathcal{N}$. Pak řada $\sum\limits_1^\infty a_n$ konverguje, právě když konverguje nevlastní integrál $\int\limits_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz. Podle předpokladů věty je $\forall k \in \mathcal{N}$

$$a_k \geq \int\limits_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq a_{k+1} \quad \text{(viz obr. 2.1)}.$$

Sečteme tyto nerovnosti pro $k = 1, 2, 3, \ldots, i$:

$$\sum_{k=1}^{i} a_k \geq \int\limits_1^{i+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{i} a_{k+1}$$

tj.

$$s_i \geq \int\limits_1^{i+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq s_{i+1} - a_1.$$

($\Rightarrow$) Je-li $\sum\limits_1^\infty a_n$ konvergentní, pak

$$\lim_{i\to\infty} s_i = \lim_{i\to\infty} s_{i+1} = s \quad \Rightarrow \quad s \geq \int\limits_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \geq s - a_1,$$

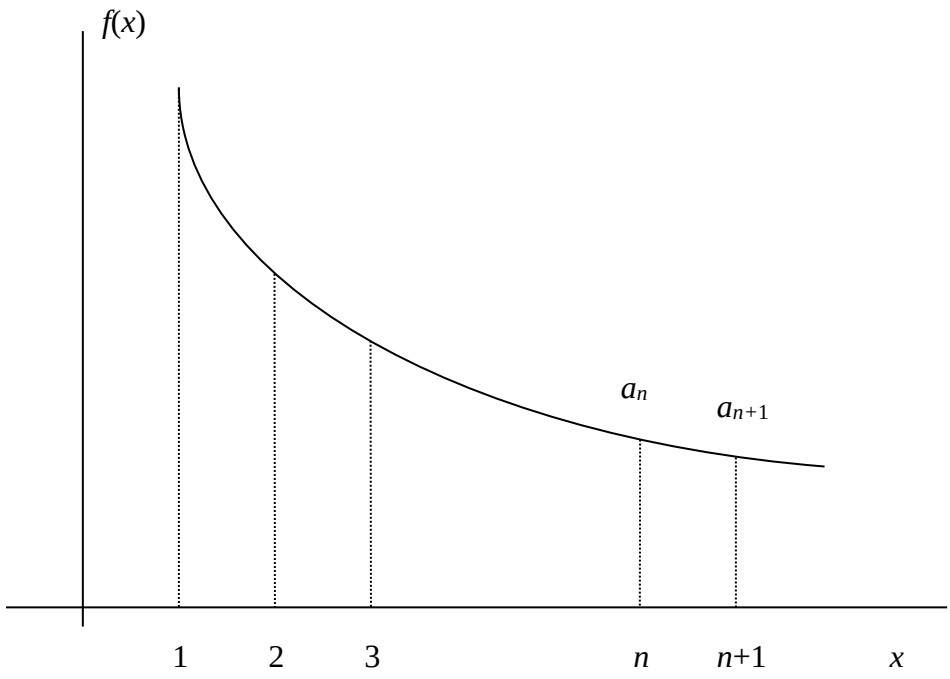
to znamená, že nevlastní integrál konverguje.

($\Leftarrow$) Konverguje-li integrál $\int\limits_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, platí také, že

$$s - a_1 \leq \int\limits_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

To znamená, že součet s je konečný a řada konverguje. □

[3] Kriterium lze zobecnit pro funkci spojitou, nezápornou a nerostoucí na intervalu $\langle a, \infty)$, kde $a > 0$. V tomto případě zkoumáme konvergenci integrálu $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.



Obrázek 2.1: K integrálnímu kriteriu

2.2.11 Odhad zbytku řady na základě integrálního kriteria má velmi názornou podstatu - viz obr. 2.1. Ta vyplývá z geometrické interpretace hodnoty určitého integrálu jako obsahu plochy mezi souřadnou osou a křivkou pro zadaný interval integrační proměnné:

$$\int_{i+1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \le s - s_i \le \int_{i}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{kde} \quad s - s_i = r_i = \sum_{n=i+1}^{\infty} a_n.$$

2.2.12 Příklad. Vyšetříme konvergenci řady $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ pro libovolné $k > 0$.

Řešení. Posloupnosti $\left\{\frac{1}{n^k}\right\}$ přiřadíme kladnou monotónně klesající funkci $f(x) = \frac{1}{x^k}$, $x \in \langle 1, \infty)$ a vypočteme nevlastní integrál:

$$I = \int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^k} = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x^k} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-k}\left(\frac{1}{b^{k-1}} - 1\right) \quad \forall\, k \ne 1,$$

tj.

$$I = \begin{cases} \infty, & k \in (0,1) \quad \ldots \quad \text{řada diverguje,} \\ \frac{1}{k-1}, & k \in (1,\infty) \quad \ldots \quad \text{řada konverguje.} \end{cases}$$

Speciálně, pro $k = 1$ jde o harmonickou řadu a dostáváme:

$$I = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b\to\infty} [\ln x]_1^b = \infty$$

a řada diverguje.

Pro ilustraci provedeme odhad zbytku řady $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ po čtvrtém členu na základě 2.2.11:

$$\int_{5}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} \le r_4 \le \int_{4}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}, \quad \text{tj.} \quad 0,02 \le r_4 \le 0,03125.$$

2.3 Alternující řady

2.3.1 Řady s obecnými členy se vyznačují tím, že znaménka jejich členů jsou libovolná, například

$$2 - \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \frac{6}{5} + \frac{7}{6} + \dots .$$

Studium těchto řad je spojeno s pojmem absolutní konvergence, který má klíčový význam v úvahách o přerovnávání řad a v teorii funkčních řad.

2.3.2 Definice. Mějme řadu s obecnými členy $\sum a_n$. Konverguje-li řada $\sum |a_n|$, pak říkáme, že řada $\sum a_n$ **konverguje absolutně**[4]. Nekonverguje-li řada $\sum |a_n|$, avšak řada $\sum a_n$ ano, pak říkáme, že řada $\sum a_n$ **konverguje relativně (neabsolutně)**.

2.3.3 Věta. Jestliže konverguje řada $\sum\limits_1^\infty |a_n|$, pak konverguje i řada $\sum\limits_1^\infty a_n$.

Důkaz. Řadu $\sum a_n$ rozdělíme na řadu jejích kladných členů $a_n^{(+)}$ a řadu jejích záporných členů $a_n^{(-)}$ a použijeme srovnávací kriterium na každou z nich zvlášť:

1. $\sum\limits_1^\infty a_n^{(+)} \le \sum\limits_{n=1}^\infty |a_n|$, proto řada kladných členů konverguje; označme její součet $s^{(+)}$,
2. také $-\sum\limits_1^\infty a_n^{(-)}$ je řada s kladnými členy vybraná z konvergentní řady $\sum\limits_{n=1}^\infty |a_n|$; proto konverguje a její součet označíme $s^{(-)}$.

Spojením obou výsledků dostáváme $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n = s^{(+)} - s^{(-)}$. Tento součet je konečný, a proto řada konverguje. □

2.3.4 Příklad. Rozhodněte, zda zadané řady konvergují absolutně:

$$\text{(a)} \quad \sum_1^\infty \frac{\cos n}{n^2}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+4}.$$

Řešení.

(a) Zadaná řada konverguje absolutně, protože

$$|a_n| = \left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2},$$

přičemž majorantní řada $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^2}$ konverguje (viz příklad 2.2.12).

(b) Nyní je

$$|a_n| = \frac{n}{n^2+4} \quad \text{a řada absolutních hodnot} \sum_1^\infty \frac{n}{n^2+4} \quad \text{diverguje}$$

podle integrálního kriteria. Proto zadaná řada nekonverguje absolutně (konverguje relativně). Jde o příklad tzv. alternující řady.

2.3.5 Alternující řada vznikne z posloupnosti kladných čísel $\{a_n\}_1^\infty$, vytvoříme-li součet jejích členů se střídavými znaménky:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots = \sum_1^\infty (-1)^{n+1} a_n.$$

[4] Pro řady s kladnými členy jsou pojmy konvergence a absolutní konvergence shodné.

2.3.6 Leibnizovo kriterium konvergence alternujících řad. Nechť pro alternující řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ platí:

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

(2) $\{a_n\}_1^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost, tj. platí nerovnosti $a_{n+1} \leq a_n$ pro $\forall n \in \mathcal{N}$.

Pak je tato řada konvergentní.

Důkaz. Uvažujme částečný součet sudého počtu členů, v němž $a_1 > 0$ (pro $a_1 < 0$ by důkaz probíhal obdobně):

$$s_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2m-1} - a_{2m} =$$
$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}.$$

Podle předpokladu (2) je každý rozdíl $a_{2k-2} - a_{2k-1} \geq 0$, tj. $s_{2m} \leq a_1$, a posloupnost je tudíž shora omezená. Současně je neklesající, jelikož platí

$$s_{2m} - s_{2m-2} = a_{2m-1} - a_{2m} \geq 0\,.$$

Má tedy limitu

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = s.$$

Vezmeme-li nyní posloupnost lichých částečných součtů, platí pro ni

$$s_{2m+1} = s_{2m} + a_{2m+1},$$

a tedy dle předpokladu (1) dostaneme

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = s + 0 = s.$$

Shrnutím obou výsledků obdržíme

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = \lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_m = s = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n,$$

a proto alternující řada za uvedených předpokladů konverguje. □

2.3.7 Poznámky.

1. Leibnizovo kriterium slouží k ověření relativní (neabsolutní) konvergence.

2. Důsledkem úvah uplatněných v důkazu je důležitá skutečnost, že u konvergentní alternující řady je vždy $|s| < |a_1|$. Protože také zbytek r_i po i-tém členu alternující řady je sám o sobě alternující řadou, platí
$$s = s_i + r_i = s_i + \sum_{n=i+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n,$$
přičemž $|r_i| \leq a_{i+1}$. Tato vlastnost je s výhodou využívána k odhadu chyby při aproximaci součtu řady (viz příklad 2.3.9).

2.3.8 Příklady. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řad:

$$\text{(a)} \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{0}^{\infty} \cos n\pi, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Řešení.

(a) Posloupnost $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ je klesající posloupnost a platí pro ni

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Řada proto konverguje podle Leibnizova kriteria. Nekonverguje však absolutně, neboť

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

Harmonická řada je její minorantou a divergence řady absolutních hodnot je tudíž zřejmá podle srovnávacího kriteria.

(b) Pro oscilující řadu

$$\sum_{0}^{\infty} \cos n\pi = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

není splněna nutná podmínka konvergence (2.1), neboť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje. Řada diverguje.

(c) Pomocí integrálního kriteria se snadno přesvědčíme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ splňuje předpoklady integrálního kriteria a dále platí

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} < \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = [\arctan x]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Zadaná alternující řada tedy konverguje absolutně.

2.3.9 Příklad. Kolik členů řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots$$

musíme vzít, abychom aproximovali její součet $s = \mathrm{e}^{-1}$ s chybou menší než $\varepsilon = 10^{-5}$? (Jde o Maclaurinův rozvoj funkce e^x pro $x = -1$.)

Řešení. Ověření konvergence pomocí Leibnizova kriteria si čtenář snadno provede sám. Při aproximaci požadujeme, aby zbytek r_i při ponechání i členů řady byl menší než povolená chyba ε. Využijeme-li vlastnosti v poznámce 2.3.7 (2), bude:

$$|r_i| \leq a_{i+1} < \varepsilon, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{1}{(i+1)!} < 10^{-5}.$$

První číslo $i \in \mathcal{N}$, pro něž $(i+1)! > 100000$, je $i = 8$ ($9! = 362880$). Je tedy nutno vzít prvních 9 členů řady ($n = 0, 1, 2, \dots, 8$)

$$\sum_{n=0}^{8} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{2119}{5760} \doteq 0,36788.$$

2.4 Operace s řadami

2.4.1 Násobení řad. Součinem řad $\sum a_n$, $\sum b_n$ nazýváme řadu $\sum c_n$, pro jejíž členy platí:

$$c_1 = a_1 b_1, \quad c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1, \quad \dots \quad ,$$

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1, \quad \dots \quad .$$

2.4.2 Věta. Jsou-li řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ absolutně konvergentní se součty s, t, pak také jejich součin je absolutně konvergentní řada a její součet je $s \cdot t$.

Důkaz. Patří mezi pracnější; jeho ideu lze nalézt například v [H90]. □

2.4.3 Příklady. Najděte řadu, která je součinem zadaných řad. Je-li to možné, určete její součet.

$$\text{(a)} \quad \sum_1^\infty \frac{1}{5^{n-1}}, \quad \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{5^{n-1}}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Řešení.

(a) Postupným výpočtem obdržíme řadu

$$\sum_1^\infty \frac{1}{5^{n-1}} \cdot \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{5^{n-1}} = 1 + 0 + \frac{1}{5^2} + 0 + \frac{1}{5^4} + \dots = \sum_0^\infty \frac{1}{25^n}.$$

Obě zadané geometrické řady jsou absolutně konvergentní, takže absolutně konverguje i jejich součin. V souladu s předchozí větou je

$$\sum_1^\infty \frac{1}{5^{n-1}} = \frac{5}{4}, \quad \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{5^{n-1}} = \frac{5}{6} \quad \text{a} \quad \sum_0^\infty \frac{1}{25^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{25}} = \frac{25}{24}.$$

(b) Řada $\sum\limits_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konverguje, avšak nikoli absolutně (srv. příklad 2.3.8 (a)). Ukážeme, že zadaný součin (její druhá mocnina) diverguje:

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \left(\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^2 = \sum_1^\infty (-1)^n c_n,$$

kde

$$(-1)^n c_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}} = (-1)^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}};$$

odhad absolutní hodnoty tohoto výrazu je

$$c_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{1-\frac{k}{n}}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) > \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 1.$$

Protože $c_n \geq 1 \ \ \forall n \in \mathcal{N}$, je také

$$\lim_{n\to\infty} c_n \geq 1$$

a součinová řada podle Leibnizova kriteria diverguje.

2.4.4 Přerovnání členů řady. Budeme hledat odpověď na otázku, zda dvě (konvergentní) *nekonečné řady*, které se liší pouze pořadím svých členů, mají stejný součet. Je přitom zřejmé, že pro součet *konečného* počtu sčítanců je tato otázka zodpovězena platností komutativního zákona.

Mějme řadu $\sum\limits_1^\infty a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ a bijektivní zobrazení $\nu : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$. Říkáme, že řada

$$a_{\nu(1)} + a_{\nu(2)} + a_{\nu(3)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\nu(n)}$$

vznikla přerovnáním řady $\sum\limits_1^\infty a_n$.

2.4.5 Věta. Nechť řada $\sum\limits_1^\infty a_n$ absolutně konverguje. Pak každá řada $\sum\limits_1^\infty a_{\nu(n)}$, která vznikla jejím přerovnáním, rovněž absolutně konverguje, a to ke stejnému součtu.

Důkaz. viz například [L69], str. 50. □

2.4.6 Příklad. Alternující řada $\sum\limits_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje podle Leibnizova kriteria, ale nekonverguje absolutně (řada absolutních hodnot je harmonická). Ukážeme, že jejím přerovnáním získáme konvergentní řadu s jiným součtem.

Řešení.

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = s,$$

dále je

$$\frac{1}{2}.\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{s}{2}.$$

Sečteme-li obě rovnosti, obdržíme

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2}s.$$

Tato nová řada však může vzniknout i přerovnáním původní řady se součtem s a to tak, že napíšeme vždy dva kladné členy a jeden záporný člen. Nyní však má součet o polovinu větší.

Uvedené zjištění zobecňuje následující věta, kterou uvádíme bez důkazu.

2.4.7 Věta (Riemannova). Konverguje-li řada $\sum a_n$ neabsolutně, pak lze její členy přerovnat tak, aby nově vzniklá řada konvergovala k předem stanovenému součtu, případně aby divergovala.

2.5 Neřešené úlohy

2.5.1 Rozhodněte o konvergenci řad:

$$\text{a)}\ \sum_1^\infty \frac{\ln(n+1)}{n}, \qquad \text{b)}\ \sum_1^\infty \frac{1}{n^2+8}, \qquad \text{c)}\ \sum_1^\infty \frac{4n+1}{2^n},$$

$$\text{d)}\ \sum_1^\infty \frac{5^{n-1}}{n!}, \qquad \text{e)}\ \sum_1^\infty \frac{n!}{n^n}, \qquad \text{f)}\ \sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},$$

$$\text{g)}\ \sum_1^\infty n^3 \mathrm{e}^{-n}, \qquad \text{h)}\ \sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt[n]{6}}.$$

2.5.2 Určete součet řady (pokud existuje):

$$\text{a)}\ \sum_1^\infty \frac{2\cdot 3^n - 3\cdot 2^n}{6^n}, \qquad \text{b)}\ \sum_1^\infty \frac{1}{4n^2-9}, \qquad \text{c)}\ \sum_1^\infty \frac{4^{4n-1}}{3^{5n+1}}.$$

(Doporučení: v případě b) vyjádřete s_i rozkladem na parciální zlomky.)

2.5.3 Dokažte následující **modifikované srovnávací kriterium**:

Nechť $\sum a_n$, $\sum b_n$ jsou řady s kladnými členy a dále nechť pro skoro všechna n platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Konverguje-li řada $\sum b_n$, pak konverguje i řada $\sum a_n$.
Diverguje-li řada $\sum a_n$, pak diverguje i řada $\sum b_n$.

2.5.4 V případech, kdy selhávají jednoduchá kriteria konvergence řad s kladnými členy (srovnávací, podílové, odmocninové), lze uplatnit tzv. **Raabeho kriterium**, jehož důkaz je například v [H90]:

Nechť pro řadu $\sum\limits_1^\infty a_n$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L$. Pak platí:
(a) *je-li $L > 1$, řada konverguje,*
(b) *je-li $L < 1$, řada diverguje.*

Vyšetřete pomocí tohoto kriteria konvergenci řady $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^2}$.

2.5.5 Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řad:

$$\text{a)}\ \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}, \qquad \text{b)}\ \sum_2^\infty \frac{(-1)^n}{n\ln n}, \qquad \text{c)}\ \sum_1^\infty \frac{1-(-1)^n}{n^2},$$

$$\text{d)}\ \sum_1^\infty (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \text{e)}\ \sum_1^\infty \frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{n^2}, \qquad \text{f)}\ \sum_1^\infty (-1)^{n+1}\frac{n}{\sqrt{n^2+49}}.$$

2.5.6 Dokažte následující tvrzení: konverguje-li řada $\sum\limits_1^\infty a_n$ absolutně, pak pro každé $\varphi \in \mathcal{R}$ konvergují řady

$$\sum_1^\infty a_n \cos n\varphi\ , \qquad \sum_1^\infty a_n \sin n\varphi\ .$$

Platí i obrácená věta?

2.5.7 Aproximujte s povolenou chybou ε součet zadané řady (použijte vhodný způsob odhadu zbytku).

$$\text{a)} \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{3^n} \text{ pro } \varepsilon = 10^{-2}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n10^{n-1}} \text{ pro } \varepsilon = 10^{-5},$$

$$\text{c)} \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4^n(n-1)!} \text{ pro } \varepsilon = 10^{-4}.$$

2.5.8 Ověřte absolutní konvergenci alternující řady

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \dots$$

a určete pomocí vhodného přerovnání její součet, víte-li, že (viz příklad 5.5.5 (d))

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2.5.9 Zdůvodněte správnost postupu v řešeném příkladu 2.1.14 (b).

2.5.10 Výsledky.

2.5.1 a) diverguje, b) konverguje, c) konverguje, d) konverguje, e) konverguje, f) diverguje, g) konverguje, h) diverguje

2.5.2 a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{18}$, c) diverguje

2.5.3 Návod: vynásobte nerovnosti

$$\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2}, \quad \dots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

a použijte srovnávací kriterium 2.2.3.

2.5.4 konverguje

2.5.5 a) konverguje absolutně, b) konverguje, c) konverguje absolutně, d) diverguje, e) konverguje absolutně, f) diverguje

2.5.6 Řady konvergují absolutně na základě srovnávacího kriteria. Obrácená věta neplatí, neboť například řada $\sum \frac{\cos n\pi}{n}$ konverguje, ale nikoli absolutně.

2.5.7 a) $s = 0,44$, b) $s = 1,05360$, c) $s = 0,3210$

2.5.8 $s = \frac{\pi^2}{12}$

2.5.9 Obě řady konvergují absolutně. Původní řada vznikne přerovnáním – střídavě bereme členy z jedné a druhé řady. Správnost plyne z věty o přerovnání řad.

Kapitola 3

Funkční řady

3.1 Posloupnosti funkcí

3.1.1 Úvodní poznámka. Problematiku funkčních posloupností uvádíme pouze v rozsahu nezbytném k zavedení pojmů konvergence a stejnoměrné konvergence řad. Zároveň slouží k demonstrování podmínek, za kterých se přenášejí vlastnosti členů posloupnosti funkcí na limitní funkci.

3.1.2 Posloupnost funkcí na množině M je zobrazení množiny přirozených čísel do množiny funkcí definovaných na M. Píšeme:

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{f_1(x),\, f_2(x),\, f_3(x),\, \ldots, f_n(x),\, \ldots\}.$$

Definiční obor D posloupnosti $\{f_n(x)\}$ je průnik definičních oborů všech jejích členů.

3.1.3 Příklady posloupností funkcí a jejich definičních oborů:

(a)

$$\left\{\frac{x}{1+n^2x^2}\right\}_1^{\infty} = \left\{\frac{x}{1+x^2},\, \frac{x}{1+4x^2},\, \frac{x}{1+9x^2}, \ldots\right\}, \quad D = \mathcal{R};$$

(b)

$$\left\{\sqrt[n]{x-1}\right\}_1^{\infty} = \left\{x-1,\, \sqrt{x-1},\, \sqrt[3]{x-1}, \ldots\right\}, \quad D = \langle 1, \infty).$$

3.1.4 Bodová konvergence. Konverguje-li v bodě $x_0 \in D$ číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}_1^{\infty}$, říkáme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}$ konverguje v bodě x_0. Jestliže pro každé $x_0 \in P \subset D$ konverguje číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}$, říkáme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}$ konverguje na množině P bodově. Píšeme:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

3.1.5 Poznámky.

1. Symbolem $f(x)$ jsme označili **limitní funkci** posloupnosti $\{f_n(x)\}$, jejíž obor hodnot na množině P tvoří limity číselných posloupností pro každý bod $x_0 \in P$.

2. Místo zápisu v definici můžeme pro označení bodové konvergence použít zjednodušeného tvaru $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ na P.

3. V dalším textu budeme všude předpokládat, že P je interval nebo sjednocení konečného počtu intervalů.

3.1.6 Příklad. Vyšetříme limitu posloupnosti

$$\left\{\frac{x}{1+x^n}\right\}_1^\infty .$$

Řešení. Definičním oborem posloupnosti je množina $\mathcal{R}\setminus\{-1\}$. Při výpočtu limity je vhodné rozlišit několik případů s ohledem na vlastnosti funkcí

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^n} :$$

1. pro $|x| > 1$ je zcela jistě $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, jak se lze přesvědčit použitím L'Hospitalova pravidla;
2. pro $x = 1$ je zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = \frac{1}{2}$;
3. jestliže bude $-1 < x < 1$, dostáváme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x$, protože ve jmenovateli je limita x^n rovna nule.

Shrnutím dílčích výsledků je limitní funkce na množině $P = \mathcal{R}\setminus\{-1\}$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} x & \text{pro } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 1, \\ 0 & \text{pro } |x| > 1, \end{cases}$$

jejíž graf je na obr. 3.1.

3.1.7 Poznámka. Jak je z obrázku patrno, je limitní funkce v této úloze nespojitá, třebaže posloupnost je tvořena spojitýmu funkcemi. To znamená, že při bodové konvergenci se vlastnosti členů (spojitost, integrovatelnost, diferencovatelnost) nepřenáší automaticky na limitní funkci. Aby se uvedené vlastnosti zachovávaly, musí být konvergence „kvalitnější“ - takzvaně stejnoměrná.

3.1.8 Definice. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}$ **konverguje stejnoměrně** k funkci $f(x)$ na intervalu P_s, existuje-li pro každé $\varepsilon > 0$ číslo $n_0 \in \mathcal{N}$ tak, že pro každé $n > n_0$ a pro všechna $x \in P_s$ platí: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Píšeme:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{s}{=} f(x) \text{ na } P_s \qquad \text{nebo} \qquad f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ na } P_s.$$

3.1.9 Poznámky.

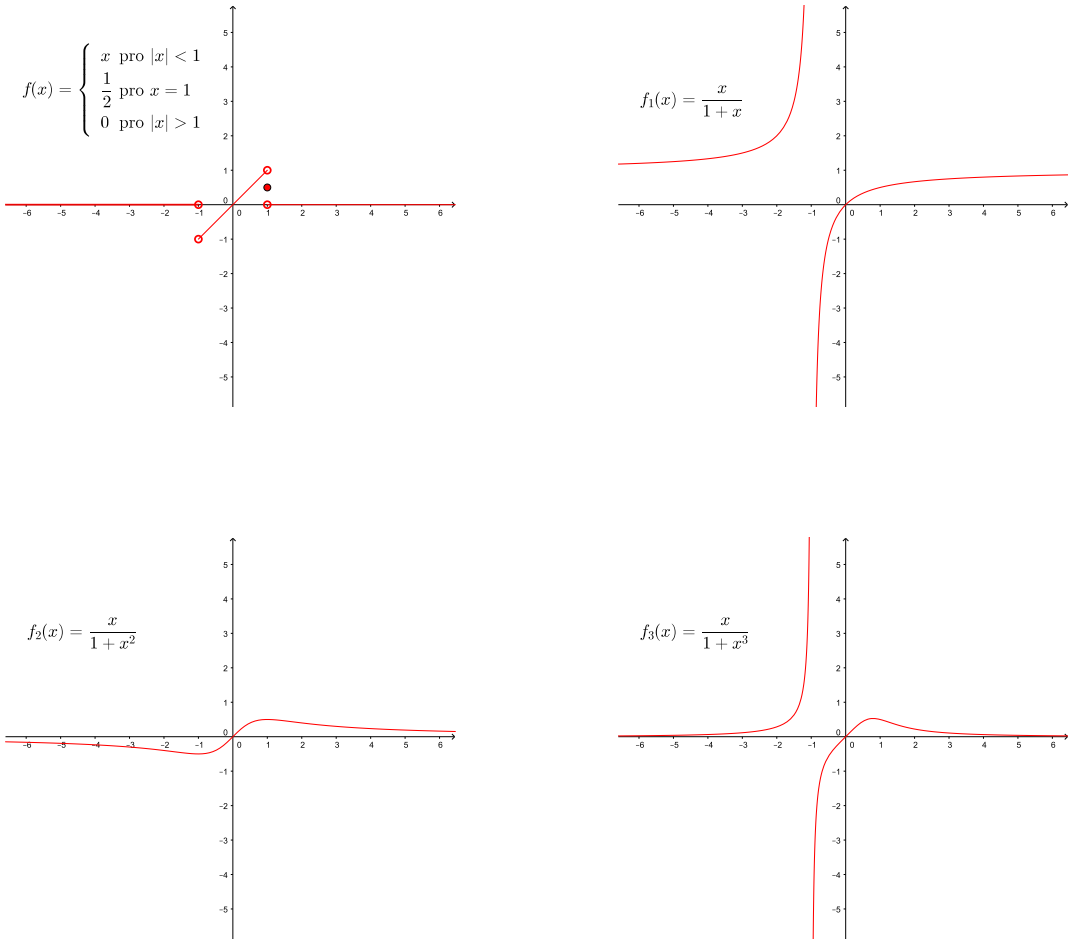
1. Na rozdíl od bodové konvergence je v případě stejnoměrné konvergence číslo n_0 stejné pro každé $x \in P_s$. To je dobře patrno, porovnáme-li formální zápis obou definic:

$$\begin{array}{llll} \forall\, x \in P & \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathcal{N} \quad \forall\, n > n_0 : & |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon & \text{(bodová)}, \\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathcal{N} \quad \forall\, n > n_0 \quad \forall\, x \in P_s : & & |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon & \text{(stejnoměrná)}. \end{array}$$

2. Ze stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí plyne bodová konvergence, přičemž je buď $P_s \subset P$ nebo $P_s = P$ a limitní funkce je na intervalu P_s pro oba typy stejná. Opačné tvrzení neplatí. Pokud je posloupnost funkcí bodově konvergentní, nemusí být stejnoměrně konvergentní.

3.1.10 Příklad. Vyšetříme stejnoměrnou konvergenci posloupnosti z úlohy 3.1.6:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^n} \to f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{(viz obr. 3.1)}.$$



Obrázek 3.1: ↖ limitní funkce $f(x)$, ↗ $f_1(x) = \frac{x}{1+x}$, ↙ $f_2(x) = \frac{x}{1+x^2}$, ↘ $f_3(x) = \frac{x}{1+x^3}$

Řešení.

1. Uvažujme nejprve interval $\langle K, \infty)$, kde $K > 1$. V něm platí:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{1+x^n} < \frac{x}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \leq \frac{1}{K^{n-1}}.$$

Zjistíme, zda a za jakých podmínek je tento rozdíl menší než libovolně zvolené číslo $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{K^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow K^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > 1 - \frac{\ln \varepsilon}{\ln K}.$$

Uvažujeme-li $\varepsilon < 1$, je tento výsledek kladný. Vidíme, že **nezávisle na** $x \in \langle K, \infty)$ a pro libovolně malé ε existuje $n_0 = \lceil 1 - \frac{\ln \varepsilon}{\ln K} \rceil$ takové, že pro $n > n_0$ je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (symbol $\lceil .. \rceil$ zde označuje celou část vnitřního výrazu). Ve smyslu předchozí definice je tudíž konvergence stejnoměrná na každém intervalu $P_s = \langle K, \infty)$, $K > 1$.

2. Mějme nyní $x \in \langle -k, k \rangle$, $0 < k < 1$, na němž je limitní funkce $f(x) = x$, a proto

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{1+x^n} - x \right| = \left| \frac{-x^{n+1}}{1+x^n} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{|1+x^n|} \leq \frac{k^{n+1}}{1-k^n} < k^{n+1}.$$

Protože tento výsledek platí nezávisle na x, můžeme podobnou úvahou jako v předchozím případě potvrdit stejnoměrnou konvergenci.

3. Pro $x \in (-\infty, -K)$, $K > 1$ se stejnoměrná konvergence ověří obdobně jako v případě 1.

Závěr: posloupnost funkcí konverguje stejnoměrně na každém intervalu, který nebsahuje žádný z bodů $x = -1$, $x = 1$. Pro ilustraci jsou na obr. 3.1 b,c,d uvedeny grafy prvních tří členů zkoumané posloupnosti. Další sudé členy jsou si navzájem podobné, liché mezi sebou rovněž.

3.1.11 Poznámka. Vyšetřování stejnoměrné konvergence funkčních posloupností podle definice nemusí být jednoduché a vyžaduje znalost limitní funkce. Proto bývá v praxi často používána níže uvedená Bolzanova–Cauchyova podmínka (viz též příklad 3.1.15). Souvislost mezi stejnoměrnou konvergencí posloupnosti funkcí a operacemi integrování a derivování jejích členů vyjadřují další dvě věty uvedené rovněž bez důkazu.

3.1.12 Bolzanova–Cauchyova podmínka stejnoměrné konvergence. Posloupnost funkcí $f_n(x)$ je na intervalu P_s stejnoměrně konvergentní právě tehdy, když pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathcal{N}$ takové, že pro každá dvě $m, n \in \mathcal{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$ a každé $x \in P_s$ platí $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

3.1.13 Věta. Konverguje-li posloupnost spojitých funkcí $f_n(x)$ na intervalu $P_s = \langle a, b\rangle$ stejnoměrně k funkci $f(x)$, pak

1. limitní funkce $f(x)$ je rovněž spojitá,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

3.1.14 Věta. Nechť $\{f_n(x)\}$ je posloupnost funkcí diferencovatelných na intervalu $P_s = \langle a, b\rangle$, přičemž alespoň pro jedno $c \in P_s$ posloupnost $\{f_n(c)\}$ konverguje. Konverguje-li posloupnost $\{f_n'(x)\}$ stejnoměrně na $\langle a, b\rangle$, pak také $\{f_n(x)\}$ konverguje stejnoměrně a platí:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

3.1.15 Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{\mathrm{e}^{-nx}\}$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $P_s = \langle k, \infty)$, $k > 0$.

Řešení. Nechť $m, n \in \mathcal{N}$, $m < n$. Pak podle Bolzanovy–Cauchyovy podmínky 3.1.12 bude

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |\mathrm{e}^{-nx} - \mathrm{e}^{-mx}| = \mathrm{e}^{-mx}|\mathrm{e}^{(m-n)x} - 1| \leq \mathrm{e}^{-mx}.$$

Má-li dále pro všechna $x \in P_s$ (tj. $x \geq k$) platit $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, musí být

$$\mathrm{e}^{-mx} < \mathrm{e}^{-mk} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad m > \left\lceil -\frac{\ln \varepsilon}{k} \right\rceil = n_0.$$

Pro každé (libovolně malé) ε tedy existuje n_0 tak, že pro každá $n > m > n_0$ a každé $x \geq k > 0$ platí $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, a tudíž posloupnost konverguje stejnoměrně.

3.2 Funkční řady

3.2.1 Definice. Mějme posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}$. **Funkční řadou** nazveme formálně vytvořený součet jejích členů, který zapisujeme takto:

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Definičním oborem funkční řady je definiční obor posloupnosti jejích členů.

3.2.2 Příklady funkčních řad.

(a) Mocninná řada: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$.

(b) Trigonometrická řada: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots$.

3.2.3 Definice. Říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **konverguje v bodě** x_0, má-li součet číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$. Množina M všech bodů, v nichž řada konverguje, se nazývá **obor konvergence**. Píšeme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x) \text{ na } M.$$

Funkce $s(x)$ se nazývá **součet řady** (součtová funkce). Pokud v některém bodě x_0 definičního oboru řady buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = \infty$ $(-\infty)$ nebo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ neexistuje, říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je v bodě x_0 **divergentní**.

3.2.4 Věta. Konverguje-li řada $\sum\limits_{1}^{\infty} f_n(x)$ na oboru M k funkci $s(x)$, je

$$s(x) = \lim_{i\to\infty} s_i(x),$$

kde $\{s_i(x)\}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Důkaz. Podle definice 3.2.3 konvergují pro každé $x_0 \in M$ posloupnosti $\{s_i(x_0)\}$ k limitám $s(x_0)$. Množina $\{s(x_0),\, x_0 \in M\}$ tvoří obor hodnot součtové funkce $s(x)$. □

3.2.5 Poznámky.

1. Předcházející věta umožňuje rozhodnout o důležitých vlastnostech řady pomocí její posloupnosti částečných součtů.

2. Stanovení součtové funkce $s(x)$ na základě této věty je zřídka proveditelné, neboť bývá obtížné stanovit i-tý člen posloupnosti $s_i(x)$.

3.2.6 Definice. Řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na intervalu M_a **konverguje absolutně**, jestliže pro každé $x \in M_a$ konverguje (bodově) řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

3.2.7 Vyšetřování oboru konvergence. Obvyklý postup spočívá v určení oboru absolutní konvergence na základě některých kriterií pro číselné řady s kladnými členy (kapitola 2.2). Výsledkem je interval, jehož krajní body – jsou-li vlastní – je nutno vyšetřit zvlášť. Konkrétní možnosti jsou zřejmé z následujících příkladů.

3.2.8 Příklad. Vyšetřete obor konvergence a určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx} = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-3x} + \dots .$$

Řešení. Použijeme odmocninové kriterium a označíme

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{e}^{-nx}} = \mathrm{e}^{-x}.$$

Podle znění kriteria 2.2.5 musí být v případě konvergence $L(x) = \mathrm{e}^{-x} < 1$, tj. $x > 0$. Řada konverguje absolutně pro $x \in (0, \infty)$. Pravý krajní bod je nevlastní a stačí tedy vyšetřit konvergenci v levém krajním bodě. Pro $x = 0$ dostáváme $\sum \mathrm{e}^0 = \infty$. V tomto bodě je řada divergentní, takže

$$M = M_a = (0, \infty).$$

Zadaná řada je geometrická s kvocientem $\mathrm{e}^{-x} < 1$ na M. Její součet je

$$s(x) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

3.2.9 Příklad. Vyšetřete obor konvergence řady

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^{n-1}} = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2^2}\cos 3x + \dots .$$

Řešení. Protože pro každé reálné x platí

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{2^{n-1}}\right| \le \frac{1}{2^{n-1}},$$

je číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ konvergentní majorantou zadané funkční řady. Na základě srovnávacího kriteria 2.2.3 je hledaný obor konvergence $M = M_a = \mathcal{R} = (-\infty, \infty)$.

3.2.10 Příklad. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{n!x^n}{3^n} = \frac{x}{3} + \frac{2!x^2}{3^2} + \frac{3!x^3}{3^3} + \dots .$$

Řešení. Podílové kriterium uplatníme pro výraz

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!x^n}\right| = \frac{|x|}{3} \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

(viz kriterium 2.2.7). Protože pro každé $x \in \mathcal{R}$ je $L(x) > 1$, řada diverguje všude v reálném oboru s výjimkou bodu $x = 0$, kde $\sum\limits_{1}^{\infty} 0 = 0 = s(0)$.

3.2.11 Příklad. Určete obor konvergence řady

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots .$$

Řešení. Použijeme odmocninové kriterium obdobně jako v příkladu 3.2.8:

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = |x|.$$

Řada konverguje absolutně pro $|x| < 1$. Dostáváme interval $(-1, 1)$. Pokračujme vyšetřením krajních bodů:

$x = -1 \quad \dots \quad \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje relativně (harmonická řada, Leibnizovo kriterium),

$x = 1 \quad \dots \quad \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (harmonická řada).

Závěr: obor konvergence řady $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ je interval $M = \langle -1, 1)$, obor absolutní konvergence je interval $M_a = (-1, 1)$.

3.2.12 Poznámka. Stanovení součtu funkční řady (neboli součtové funkce) často vyžaduje aplikovat operace derivování nebo integrování na celý nekonečný součet. Korektnost těchto kroků je podmíněna stejnoměrnou konvergencí řady. Také vztah mezi vlastnostmi jednotlivých členů řady a vlastnostmi součtové funkce je zprostředkován stejnoměrnou konvergencí.

3.2.13 Definice. Říkáme, že na intervalu $M_s = \langle a, b\rangle$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **konverguje stejnoměrně k součtu** $s(x)$, právě když posloupnost částečných součtů $\{s_i(x)\}$ konverguje na M_s k funkci $s(x)$ stejnoměrně.

3.2.14 Poznámka. Konverguje-li řada na intervalu M_s stejnoměrně, konverguje k téže součtové funkci $s(x)$ také bodově, ale ne naopak. Obecně je $M_s \subseteq M$. K vyšetřování oboru stejnoměrné konvergence není definice příliš vhodná, a proto se používá vhodných kriterií, jako je například následující.

3.2.15 Věta (Weierstrassovo kriterium stejnoměrné konvergence). Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na intervalu $\langle a, b\rangle$ k funkci $s(x)$ stejnoměrně, existuje-li pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ k této řadě konvergentní číselná majoranta s nezápornými členy, tj. platí-li:

$$\forall\, x \in M_s = \langle a, b\rangle \ : \ |f_n(x)| \le a_n \quad \forall\, n \in \mathcal{N} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

Důkaz. Podle srovnávacího kriteria je jisté, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na $\langle a, b\rangle$ absolutně bodově. Označme její součet $s(x)$. Dále označme $\sigma = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a odpovídajícím způsobem i posloupnosti částečných součtů: $\{s_i(x)\}$ pro funkční řadu a $\{\sigma_i\}$ pro její číselnou majorantu.

Zvolíme-li libovolné číslo $\varepsilon > 0$, pak k němu jistě existuje $n_0 \in \mathcal{N}$ takové, že

$$\forall\, i > n_0 \ : \ |\sigma_i - \sigma| = |a_{i+1} + a_{i+2} + \dots| = a_{i+1} + a_{i+2} + \dots < \varepsilon\,,$$

protože $\sigma_i \to \sigma$. Proto také vzhledem k předpokladům věty platí pro každé $i > n_0$, $i \in \mathcal{N}$ a pro každé $x \in \langle a, b\rangle$:

$$|s_i(x) - s(x)| = |f_{i+1}(x) + f_{i+2}(x) + \dots| \le |f_{i+1}(x)| + |f_{i+2}(x)| + \dots \le$$

$$\le |a_{i+1} + a_{i+2} + \dots| < \varepsilon.$$

Posloupnost částečných součtů $\{s_i(x)\}$ tedy konverguje stejnoměrně a s ní podle definice 3.2.13 řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, což jsme měli dokázat. □

3.2.16 Příklad. Vrátíme-li se k úloze 3.2.9, je patrné, že použití srovnávacího kriteria (na neohraničeném intervalu) v podstatě představuje realizaci Weierstrassovy věty. Proto řada

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^{n-1}} \text{ konverguje stejnoměrně na } \mathcal{R}.$$

3.2.17 Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2x^2}$.

1. *Určení intervalu* – podílové kriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{1+(n+1)^2x^2} \cdot \frac{1+n^2x^2}{x^n} \right| = |x|.$$

   Z podmínky $L(x) = |x| < 1$ obdržíme interval $(-1, 1)$.

2. *Konvergence v krajních bodech*:

$$x = -1 \quad \dots \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \quad \text{konverguje absolutně,}$$

$$x = 1 \quad \dots \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \quad \text{konverguje (integrální kriterium).}$$

   Závěr: $M = M_a = \langle -1, 1\rangle$[1].

3. *Stejnoměrná konvergence* – Weierstrassovo kriterium:
   Uvažujme nejprve $x \in \langle 0, k\rangle$, kde $0 < k < 1$. Pak je

$$\frac{x^n}{1+n^2x^2} < x^n < k^n, \tag{3.1}$$

   takže geometrická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k^n$ bude konvergentní číselnou majorantou zadané řady. Ta proto konverguje stejnoměrně na každém intervalu $M_s = \langle 0, k\rangle$, $0 < k < 1$.

   Pro $x \in \langle -1, 0\rangle$ nelze ke zkoumané funkční řadě nalézt žádnou konvergentní číselnou majorantu, neboť výraz x^n alternuje a relace (3.1) neplatí.

3.2.18 Věta (spojitost součtu a integrování funkční řady). Nechť řada spojitých funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k součtu $s(x)$ na intervalu $M_s = \langle a, b\rangle$. Pak platí:

(1) součet $s(x)$ je rovněž spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$,

[1] U kladných řad je konvergence vždy absolutní.

(2) pro $a \le \alpha \le \beta \le b$ je

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum_1^\infty f_n(x)\right) \mathrm{d}x \;=\; \sum_1^\infty \left(\int_\alpha^\beta f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) \;=\; \int_\alpha^\beta s(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. (1) Podle předpokladů věty je každý částečný součet

$$s_i(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_i(x)$$

spojitý, protože jde o konečný součet spojitých funkcí. Protože je

$$s(x) = \lim_{i\to\infty} s_i(x),$$

jde podle věty 3.1.13 rovněž o spojitou funkci.

(2) Obdobným způsobem jako v případě 1. se využije vlastností posloupnosti částečných součtů a věty 3.1.13. □

3.2.19 Příklad. Je dána funkce $s(x) = \sum\limits_1^\infty n\mathrm{e}^{-nx}$. Vypočtěte integrál $E = \int\limits_{\ln 2}^1 s(x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Ukážeme nejprve, že řada $\sum\limits_1^\infty n\mathrm{e}^{-nx}$ splňuje předpoklady předchozí věty.

1. Její členy $f_n(x) = n\mathrm{e}^{-nx}$ jsou spojité na $\mathcal{R}$.
2. Dokážeme, že tato řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle k, \infty)$, $k > 0$. Předně je snadné najít obor konvergence $M = M_a = (0, \infty)$ stejně jako v příkladu 3.2.8. Pro stejnoměrnou konvergenci uvažme, že pro každé $x \in M$

   $$f_n'(x) = -n^2\mathrm{e}^{-nx} < 0 \quad \Rightarrow \quad f_n(x) \text{ je klesající na } M.$$

   Zvolíme-li libovolné $k > 0$, bude pro každé $x \ge k$

   $$f_n(x) = n\mathrm{e}^{-nx} \le n\mathrm{e}^{-nk},$$

   tedy řada $\sum\limits_{n=1}^\infty n\mathrm{e}^{-nk}$ je konvergentní majorantou zadané funkční řady (například podle odmocninového kriteria). Podle Weierstrassova kriteria 3.2.15 pak řada $\sum\limits_{n=1}^\infty n\mathrm{e}^{-nx}$ konverguje stejnoměrně na libovolném intervalu $\langle k, \infty)$, $k > 0$.

Nyní můžeme aplikovat tvrzení 2. z předchozí věty, neboť číslo k lze jistě zvolit tak, aby $k < \ln 2$:

$$\begin{aligned} E &= \int_{\ln 2}^1 s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_1^\infty n \int_{\ln 2}^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \sum_1^\infty \left[-\mathrm{e}^{-nx}\right]_{\ln 2}^1 = \sum_1^\infty \left(-\mathrm{e}^{-n\ln e} + \mathrm{e}^{-n\ln 2}\right) \\ &= \sum_1^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_1^\infty \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{\mathrm{e}}}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}. \end{aligned}$$

3.2.20 Věta (derivování funkční řady). Nechť $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n(x)$ je řada spojitých funkcí diferencovatelných na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť pro nějaké $c \in \langle a, b\rangle$ konverguje číselná řada $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n(c)$. Dále předpokládejme, že řada derivací $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n'(x)$ konverguje na $\langle a, b\rangle$ stejnoměrně k součtu $\sigma(x)$. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n(x)$ konverguje na $\langle a, b\rangle$ rovněž stejnoměrně, přičemž platí $\sigma(x) = s'(x)$.

Důkaz. Věta je důsledkem věty 3.1.14. □

3.2.21 Poznámka. Tuto větu lze formulovat i jinak. Často se užívá následující stručné znění, které platí za stejných předpokladů: stejnoměrně konvergentní řadu diferencovatelných funkcí lze derivovat člen po členu, tj.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_1^\infty f_n(x)\right) = \sum_1^\infty \frac{\mathrm{d}f_n(x)}{\mathrm{d}x}.$$

3.2.22 Příklad. Určete součet řady

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots .$$

Řešení. Členy této mocninné řady jsou diferencovatelné na $\mathcal{R}$, takže

$$\sum_1^\infty f_n'(x) = \sum_1^\infty x^{n-1}.$$

Tato řada je geometrická a konverguje na intervalu $(-1,1)$ k součtu $\sigma(x) = \frac{1}{1-x}$. Tato konvergence je stejnoměrná na každém uzavřeném intervalu $M_s = \langle -k, k\rangle$, $0 < k < 1$ (k ověření lze použít Weierstrassova kriteria). Pro libovolně zvolené $c \in M_s$ konverguje i původní řada, jak ukazuje výsledek příkladu 3.2.11. Tím jsme ověřili předpoklady předchozí věty a pro součet $s(x)$ tedy platí

$$s'(x) = \sigma(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Integrováním obdržíme pro libovolné $x \in \langle -k, k\rangle$:

$$s(x) = \int \sigma(x)\,\mathrm{d}x = -\ln(1-x) + C = -\ln(1-x),$$

neboť z evidentní podmínky $s(0) = 0$ plyne $C = 0$.

3.3 Neřešené úlohy

3.3.1 Určete a znázorněte limitní funkci pro posloupnosti zadané n-tým členem:

$$\text{a)}\ \frac{n^2x}{1+n^2x^2}, \qquad \text{b)}\ \frac{nx}{1+n^2x^2}, \qquad \text{c)}\ \frac{x}{1+\mathrm{e}^{-nx}}.$$

3.3.2 Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti 3.3.1 a).

3.3.3 Určete obor konvergence řady:

$$\text{a)}\ \sum_1^\infty n\ln^n x, \qquad \text{b)}\ \sum_1^\infty \frac{1}{n^2+x^2}, \qquad \text{c)}\ \sum_1^\infty \frac{(-1)^n(x-1)^n}{n^2},$$

$$\text{d)}\ \sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n^3}, \qquad \text{e)}\ \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{(x+2)^n}, \qquad \text{f)}\ \sum_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{nx}}{n!}.$$

3.3.4 Je dána řada $\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, která na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ konverguje k součtu

$$s(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}.$$

a) Dokažte, že se jedná o konvergenci stejnoměrnou.

b) Rozhodněte, zda funkce $\sigma(x) = s'(x) = \frac{x-\pi}{2}$ je na uvedeném intervalu součtem řady, která vznikne derivováním řady původní.

3.3.5 Rozhodněte, zda funkce $F(x)$ definovaná funkční řadou je na svém definičním oboru spojitá:

$$\text{a)} \quad F(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}, \qquad \text{b)} \quad F(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

3.3.6 Je dána geometrická řada

$$\sum_{0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in \langle -1, 1).$$

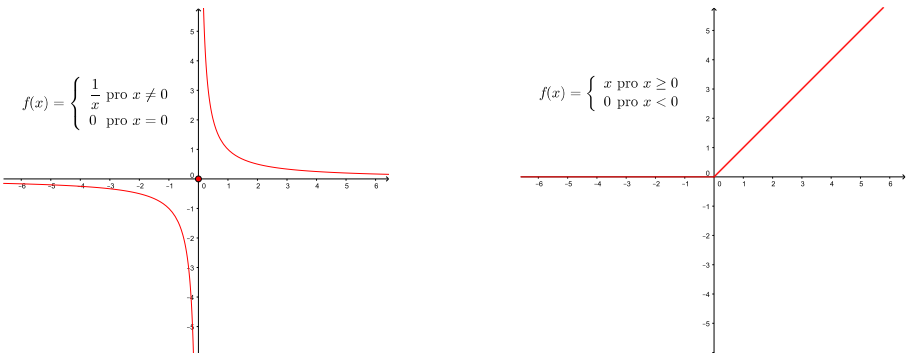
Pomocí vhodných operací (derivování, integrování) ukažte, že pro $x \in (-1, 1)$ platí:

$$\text{a)} \quad \sum_{0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

3.3.7 Výsledky:

3.3.1 Výsledné limitní funkce jsou na obr. 3.2:

$$\text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases} \qquad \text{b)} \quad f(x) = 0 \qquad \text{c)} \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0, \\ 0 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$



Obrázek 3.2: Grafy limitních funkcí k příkladu 3.3.1 a), c)

3.3.2 Konverguje stejnoměrně na libovolném intervalu neobsahujícím nulu.

3.3.3 a) (e^{-1}, e), b) $\mathcal{R}$, c) $\langle 0, 2 \rangle$, d) $\mathcal{R}$, e) $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$, f) $\mathcal{R}$.

3.3.4 a) Užitím Weierstrassova kriteria. b) Derivovaná řada nekonverguje na $\langle 0, \pi \rangle$ stejnoměrně; $\sigma(x)$ není jejím součtem.

3.3.5 V obou případech jde o řady spojitých funkcí, které stejnoměrně konvergují na celém reálném oboru. Jejich součet je proto rovněž spojitá funkce na $\mathcal{R}$.

Kapitola 4

Mocninné řady

4.1 Základní vlastnosti

4.1.1 Definice. Funkční řadu tvaru

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

nazýváme **mocninnou řadou**. Číslo x_0 se nazývá **střed řady**, a_n jsou reálné koeficienty.

4.1.2 Poznámky.

1. Mocninné řady jsou nejrozšířenější třídou funkčních řad. Významným rysem je neomezená diferencovatelnost jejich členů (mocninných funkcí). Platí pro ně přirozeně všechna obecnější tvrzení uváděná v předchozí kapitole, některá z nich - jak ukážeme - ve zjednodušené formě.

2. Posloupnost částečných součtů mocninné řady je tvořena polynomy

$$s_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n;$$

   sama o sobě bývá mocninná řada označována jako polynom nekonečného stupně. To je také důvod, proč u těchto řad sčítáme od $n = 0$. Tak tomu bude i tehdy, nebudou-li kvůli stručnosti sčítací meze uvedeny.

3. Speciálně pro $x_0 = 0$ obdržíme řadu

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

4.1.3 Příklady mocninných řad.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+5)^n}{n!}$; střed $x_0 = -5$, koeficienty $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)2^n}$; střed $x_0 = 3$, koeficienty $a_n = \dfrac{1}{(n+1)2^n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^n x^n$; střed $x_0 = 0$, koeficienty $a_n = (n+1)^n$.

4.1.4 Obor konvergence mocninné řady. Bodovou konvergenci můžeme vyšetřit metodami odvozenými pro obecné funkční řady, jak jsme viděli v příkladech 3.2.10 a 3.2.11. Lze však postupovat i efektivněji, a to na základě následujících vět.

4.1.5 Věta. Každá mocninná řada konverguje ve svém středu.

Důkaz. Položíme-li $x = x_0$ ve vyjádření řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots = s(x)\ ,$$

obdržíme $s(x_0) = a_0$. Řada má součet, tedy konverguje. □

4.1.6 Věta (Abelova). Konverguje-li mocninná řada $\sum a_n(x-x_0)^n$ v bodě x_1, pak konverguje absolutně pro všechna x, pro která platí $|x-x_0| < |x_1-x_0|$.

Důkaz. V bodě x_1 dostáváme číselnou řadu $\sum a_n(x_1-x_0)^n$, která je podle předpokladu konvergentní, a proto její n-tý člen splňuje nutnou podmínku konvergence

$$\lim_{n\to\infty} |a_n(x_1-x_0)^n| = 0\ .$$

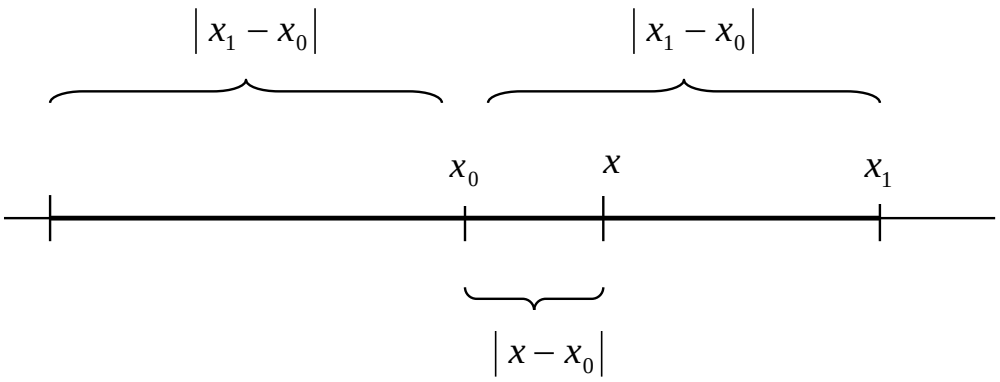
Posloupnost $\{|a_n(x_1-x_0)^n|\}$ je tudíž omezená, takže

$$\exists\, K \in \mathcal{R} \quad \forall\, n \quad : \quad |a_n(x_1-x_0)^n| < K\ .$$

Nyní použijeme srovnávací kriterium na původní mocninnou řadu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x_1-x_0)^n| \left|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right|^n < K \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right|^n .$$

Aby získaná majorantní geometrická řada konvergovala, musí být její kvocient menší než jedna, tj. $|x-x_0| < |x_1-x_0|$ (viz obr. 4.1). To je podmínka pro absolutní konvergenci původní řady, kterou jsme měli dokázat. □



Obrázek 4.1: K důkazu Abelovy věty.

Najdeme-li nejvzdálenější bod od středu x_0, kde řada ještě konverguje, určíme tak obor konvergence. Při této příležitosti připomínáme pojem supremum (symbol sup).

4.1.7 Definice. Mějme řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s oborem konvergence M. Číslo

$$r = \sup_{x\in M} \{x - x_0\}$$

nazýváme **poloměr konvergence** této řady.

4.1.8 Důsledek Abelovy věty spočívá v tom, že obor absolutní konvergence mocninné řady je vždy interval souměrný podle středu konvergence s poloměrem podle předchozí definice.

4.1.9 Poznámky.

1. Řada může konvergovat (absolutně konvergovat) i v krajních bodech intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$. To je nutno zjistit vyšetřováním konvergence příslušných číselných řad.

2. Obor konvergence se může redukovat na jediný bod (střed x_0, je-li $r = 0$) nebo naopak může jít o celou reálnou osu ($r = \infty$).

Jednotlivé možnosti precizuje následující věta.

4.1.10 Věta (Cauchyho – Hadamardova). Nechť pro mocninnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, resp. $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Pak pro poloměr konvergence platí:

(1) $r = \infty$, je-li $\rho = 0$,

(2) $r = \frac{1}{\rho}$, je-li $0 < \rho < \infty$,

(3) $r = 0$, je-li $\rho = \infty$.

Důkaz. Pro $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ vyjdeme z odmocninového kriteria:

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho|x - x_0| \,.$$

Z podmínky konvergence $L(x) < 1$ dostáváme:

(1) Je-li $\rho = 0$, pak je podmínka splněna pro každé $x \in (-\infty, \infty)$, jinými slovy, řada konverguje s poloměrem $r = \infty$.

(2) Je-li $0 < \rho < \infty$, musí být $|x - x_0| < \frac{1}{\rho} = r$; oborem (absolutní) konvergence je proto interval s krajními body $x_0 - r$, $x_0 + r$.

(3) Je-li $\rho = \infty$, neplatí vztah $\rho|x - x_0| < 1$ pro žádné $x \neq x_0$. Výjimkou je právě střed x_0, ve kterém mocninná řada konverguje vždy (věta 4.1.5).

Důkaz pro $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ se provede obdobně na základě podílového kriteria. □

4.1.11 Příklady. Vyšetříme obor konvergence mocninných řad z příkladu 4.1.3.

(a) Koeficienty řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+5)^n}{n!}$$

obsahují faktoriál, proto bude výhodné použít podílového limitního vztahu pro poloměr konvergence:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Podle předcházející věty odpovídá tomuto výsledku poloměr konvergence $r = \infty$. Zadaná řada konverguje pro všechna reálná x a tedy $M = (-\infty, \infty)$.

(b) Pro následující řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)2^n}$$

lze použít jak podílovou, tak odmocninovou variantu. Podle druhé z nich

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = \frac{1}{2},$$

takže poloměr konvergence je $r = \frac{1}{\rho} = 2$. Řada se středem $x_0 = 3$ konverguje absolutně na intervalu $(1, 5)$.

V krajních bodech vyšetříme konvergenci dosazením:

$x = 1 \quad \dots \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ konverguje relativně (integrální, Leibnizovo kriterium),

$x = 5 \quad \dots \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ diverguje (harmonická řada).

Závěr: oborem absolutní konvergence zadané řady je interval $M_a = (1, 5)$, oborem konvergence je interval $M = \langle 1, 5)$.

(c) V případě řady $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^n x^n$ je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty\,.$$

Podle věty 4.1.10 (3) tato řada konverguje jen ve svém středu $x_0 = 0$, neboť $r = 0$.

4.1.12 Příklad. Určete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+2(-1)^n)^n}{3^n}(x-1)^n = 1 + \frac{x-1}{3} + \frac{5^2(x-1)^2}{3^2} + \frac{(x-1)^3}{3^3} + \frac{5^4(x-1)^4}{3^4} + \dots\,.$$

Řešení. Řada má střed v bodě $x_0 = 1$; pro posloupnost koeficientů platí:

$$a_n = \frac{(3+2(-1)^n)^n}{3^n} = \begin{cases} \left(\frac{5}{3}\right)^n & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Je vidět, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ neexistuje, ale můžeme psát

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{5}{3} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ \frac{1}{3} & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

V takovémto případě uvažujeme pro výpočet poloměru konvergence větší z obou limit (obecně: největší ze získaných limit – „limes superior[1]“). Pro

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{5}{3}$$

je poloměr $r = \frac{3}{5} \sum_0^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ a řada konverguje absolutně na intervalu $\left(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

V levém krajním bodě $x = \frac{2}{5}$ dostáváme alternující řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+2(-1)^n)^n}{3^n} \left(-\frac{3}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3+2(-1)^n)^n}{5^n}\,.$$

[1] Na rozdíl od limity posloupnosti, která nemusí vždy existovat, limes superior existuje vždy (může nabývat hodnoty ∞).

Posloupnost absolutních hodnot jejích koeficientů $(3+2(-1)^n)^n\,5^{-n}$ není nerostoucí, a proto nelze použít Leibnizovo kriterium. Posloupnost částečných součtů má i-tý člen

$$s_i = 1 - \frac{1}{5} + 1 - \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{\left(3+2(-1)^i\right)^i}{5^i} = \begin{cases} \frac{i+1}{2} - \sum\limits_{n=1}^{(i+1)/2} \frac{1}{5^{2n-1}} & \text{pro } i \text{ liché,} \\ \frac{i+2}{2} - \sum\limits_{n=1}^{i/2} \frac{1}{5^{2n-1}} & \text{pro } i \text{ sudé,} \end{cases}$$

takže $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = \infty$ a řada diverguje.

V pravém krajním bodě $x = \frac{8}{3}$ obdržíme obdobným způsobem řadu s kladnými členy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+2(-1)^n)^n}{5^n} = 1 + \frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{5^3} + 1 + \frac{1}{5^5} + 1 + \frac{1}{5^7} + \ldots .$$

Tato řada je divergentní, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence (2.1).

Výsledný obor konvergence je tedy interval $M = M_a = \left(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

4.1.13 Věta (stejnoměrná konvergence mocninných řad). Mocninná řada se středem x_0 a poloměrem konvergence r konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu $M_s = \langle x_0 - \tilde{r}, x_0 + \tilde{r}\rangle$, kde $0 < \tilde{r} < r$.

Důkaz. Mějme řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, která splňuje předpoklady věty. Konverguje proto v bodě $x_0+\tilde{r}$ absolutně a tudíž pro každé x, pro které $|x-x_0| < \tilde{r}$ platí:

$$|a_n(x-x_0)^n| \quad \leq \quad |a_n|\tilde{r}^n \ .$$

Číselná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\tilde{r}^n$ je tedy konvergentní majorantou pro každé takové x a stejnoměrná konvergence na intervalu $\langle x_0 - \tilde{r}, x_0 + \tilde{r}\rangle$ plyne z Weierstrassova kriteria 3.2.15. □

4.1.14 Věta (integrování a derivování mocninné řady člen po členu). Je-li $r > 0$ poloměr konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ a $s(x)$ její součet, pak pro $0 < \tilde{r} < r$ platí:

(1) Součet $s(x)$ je spojitá funkce.

(2) Pro každé $x \in M_s = \langle x_0 - \tilde{r}, x_0 + \tilde{r}\rangle$ je

$$\int_{x_0}^{x} s(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{x} (t-x_0)^n\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{0}^{\infty} a_n \left[\frac{(t-x_0)^{n+1}}{n+1}\right]_{x_0}^{x} = \sum_{0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

a funkce

$$S(x) = \int_{x_0}^{x} s(t)\,\mathrm{d}t$$

je primitivní funkcí k funkci $s(x)$ na intervalu $\langle x_0 - \tilde{r}, x_0 + \tilde{r}\rangle$.

(3) Pro každé $x \in M_s = \langle x_0 - \tilde{r}, x_0 + \tilde{r}\rangle$ je

$$s'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}.$$

Důkaz. Členy každé mocninné řady jsou mocninné funkce, a proto jsou jednotlivě neomezeně diferencovatelné. Derivováním (integrováním) obdržíme opět řadu mocninných funkcí o tomtéž středu a se stejným poloměrem konvergence. Proto platí ve smyslu předchozího tvrzení 4.1.13 všechny předpoklady vět 3.2.18 a 3.2.20 o obecných funkčních řadách. Z nich plynou tvrzení věty přímo jako důsledky. □

4.1.15 Příklad. Určete součet řady

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{2n+1}}{2n+1}.$$

Řešení. Snadno zjistíme, že $\rho = r = 1$. Tato řada se středem $x_0 = 1$ konverguje na intervalu $M_a = (0,2)$ absolutně a na intervalu $M = \langle 0,2 \rangle$ bodově (v krajních bodech na základě Leibnizova kriteria, protože v obou vychází alternující řada). Na oboru $M_s = \langle 1-\tilde{r}, 1+\tilde{r} \rangle$, $0 < \tilde{r} < 1$ je konvergence stejnoměrná. Pro $x \in M_s$ budeme hledat součet

$$s(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{2n+1}}{2n+1}.$$

Derivováním řady člen po členu obdržíme geometrickou řadu, kterou snadno sečteme:

$$s'(x) = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^{2n} = \frac{1}{1+(x-1)^2}.$$

Odtud

$$s(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{1+(t-1)^2} = [\arctan(t-1)]_1^x = \arctan(x-1).$$

4.1.16 Příklad. Určete součet číselné řady $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$.

Řešení. Snadno se přesvědčíme (odmocninovým kriteriem), že jde o konvergentní řadu. Pro určení jejího součtu si zvolíme vhodnou mocninnou řadu, tj. takovou, která má jednoduchou formu a je podle potřeby konvergentní. Uvažujme například řadu $\sum\limits_{1}^{\infty} nx^n$, která konverguje absolutně pro $x \in (-1,1)$, tedy také v bodě $x = \frac{1}{4}$, kde obdržíme zadanou číselnou řadu.

Určíme tedy

$$s(x) = \sum_{1}^{\infty} nx^n, \quad x \in (-1,1)$$

úpravou na geometrickou řadu. Použijeme k tomu integraci, které však musí předcházet úprava vydělením obou stran proměnnou x:

$$\frac{s(x)}{x} = \sum_{1}^{\infty} nx^{n-1},$$

$$\int_0^x \frac{s(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Derivováním obdržíme zpětně

$$\frac{s(x)}{x} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{tj.} \quad s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Součtem číselné řady je hodnota

$$s\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{9}.$$

4.2 Vyjádření funkce mocninnou řadou

4.2.1 Úvodní poznámka. V této kapitole se budeme zabývat úlohou, v níž se k zadané funkci (s požadovanými vlastnostmi) hledá její vyjádření mocninnou řadou. Jde tedy o úkol opačný než nalezení součtu mocninné řady. Ukážeme, že řešení uvedeného problému spočívá ve vytvoření Taylorova rozvoje funkce v okolí zadaného bodu. Jedná se o problematiku částečně známou z úvodního kurzu matematické analýzy, kterou nyní zařadíme do kontextu teorie mocninných řad.

V této kapitole se budeme zabývat funkcemi, které mají v jistém bodě x_0 a jeho okolí derivace všech řádů.

4.2.2 Věta. Nechť řada $\sum a_n(x-x_0)^n$ konverguje v intervalu (x_0-r, x_0+r) k součtu $s(x)$. Pak má funkce $s(x)$ na tomto intervalu derivace všech řádů a platí:

$$a_0 = s(x_0), \quad a_n = \frac{s^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \forall\, n \in \mathcal{N}.$$

Důkaz. Uvědomíme-li si, že mocninnou řadu lze uvnitř jejího oboru konvergence bez omezení derivovat, dostáváme pro n-tou derivaci součtové funkce

$$s^{(n)}(x) = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}_{n!}\cdot a_n \;+\; (n+1)n\dots 2\cdot a_{n+1}(x-x_0)+\dots .$$

Odtud dosazením $x = x_0$ plyne tvrzení věty. □

4.2.3 Definice. Mějme funkci $f(x)$ s derivacemi libovolného řádu v bodě x_0. Pak mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

nazýváme **Taylorovou řadou** (**Taylorovým rozvojem**) funkce $f(x)$ v bodě x_0. Je-li speciálně $x_0 = 0$, nazývá se tento rozvoj **Maclaurinův**, tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots .$$

4.2.4 Zbytek v Taylorově rozvoji. V definici se nehovoří o tom, pro která další $x \neq x_0$ řada také konverguje, jinými slovy, jak vypadá obor konvergence Taylorova rozvoje. K této otázce obrátíme nyní pozornost, a to nejprve prostřednictvím tzv. zbytku v rozvoji.

Každá Taylorova řada může být zapsána jako superpozice **Taylorova polynomu** $T_m(x)$ jistého stupně m (m-tý částečný součet řady) a **zbytku po m-tém členu**, který označíme $R_m(x)$:

$$f(x) \quad = \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{T_m(x)} \quad + \quad \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{R_m(x)} .$$

Chování posloupnosti zbytků $\{R_m(x)\}$ předurčuje aproximační vlastnosti Taylorova polynomu; k této důležité skutečnosti se později vrátíme v příkladu 4.2.9. V neposlední řadě lze na základě vlastností této posloupnosti formulovat nutnou a postačující podmínku konvergence Taylorova rozvoje, jak ukazuje následující věta. Není ovšem příliš praktická, lépe se v praxi osvědčuje z ní plynoucí tvrzení 4.2.6.

4.2.5 Věta (nutná a postačující podmínka konvergence Taylorova rozvoje). Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivace libovolného řádu, pak pro x z libovolného intervalu I je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

právě tehdy, platí-li pro zbytek $R_m(x)$ v tomto Taylorově rozvoji

$$\lim_{m\to\infty} R_m(x) = 0 \quad \forall\, x \in I.$$

Důkaz. Viz například [J55], věta 154. □

4.2.6 Věta. Nechť má funkce $f(x)$ tyto vlastnosti:

(1) Na intervalu I existují její derivace všech řádů.

(2) Existují čísla c, M taková, že

$$\forall\, x \in I \ : \left| f^{(n)}(x) \right| \le cM^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Potom Taylorův rozvoj 4.2.3 konverguje v každém bodě $x_0 \in I$ k funkci $f(x)$.

Důkaz. Z předpokladů věty vyplývá pro zbytek[2], že

$$|R_m(x)| \quad \le \quad \frac{cM^{m+1}}{(m+1)!}|x - x_0|^{m+1}.$$

Označme $b = M|x - x_0|$ pro každé $x \in I$. Protože pro libovolné b je

$$\lim_{m\to\infty} \frac{b^{m+1}}{(m+1)!} = 0,$$

platí také $\lim\limits_{m\to\infty} R_m(x) = 0$ a tvrzení věty je důsledkem věty předchozí. □

4.2.7 Příklad. Dokažte, že Taylorův rozvoj funkce $f(x) = 3^x$ konverguje k této funkci na každém intervalu $I = \langle -k, k\rangle$, $k > 0$ je libovolné pevné reálné číslo.

Řešení. Budeme postupovat podle předchozí věty a vypočteme nejprve derivace

$$f'(x) = 3^x \ln 3, \quad f''(x) = 3^x(\ln 3)^2, \quad \dots \quad , f^{(n)}(x) = 3^x(\ln 3)^n \ .$$

Je vidět, že na intervalu I platí

$$\left| f^{(n)}(x) \right| = 3^x(\ln 3)^n \le 3^k(\ln 3)^n \ ,$$

protože funkce 3^x je rostoucí na $\mathcal{R}$. Označíme-li $c = 3^k$, $M = \ln 3$, jsou předpoklady věty 4.2.6 splněny a tvrzení je dokázáno.

4.2.8 Poznámka. V praxi obvykle určujeme obor konvergence Taylorova rozvoje až tehdy, známe-li jeho koeficienty. Používáme postup popsaný v předchozí kapitole (poloměr konvergence atd.).

[2] Bystrý student ví, že jde o tzv. Lagrangeovo vyjádření zbytku Taylorovy řady.

4.2.9 Příklad. Napište Taylorův rozvoj funkce $f(x) = x\ln x$ se středem $x_0 = 1$ a určete jeho obor konvergence. Graficky znázorněte aproximační polynomy do 3. stupně včetně. Určete chybu při aproximaci $\ln 4$ polynomem 5. stupně.

Řešení. Pro derivace zadané funkce platí ($f(1) = 0$):

$$\begin{array}{rclrcl} f' & = & \ln x + 1 & f'(1) & = & 1 \\ f'' & = & \frac{1}{x} & f''(1) & = & 1 \\ f''' & = & -\frac{1}{x^2} & f'''(1) & = & -1 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ f^{(n)} & = & (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}} & f^{(n)}(1) & = & (-1)^n (n-2)!\,, \quad (n \geq 2). \end{array}$$

Hledaný rozvoj má tvar

$$x\ln x = (x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-2)!}{n!}(x-1)^n = (x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}(x-1)^n.$$

Pro určení poloměru konvergence použijeme podílový tvar Cauchyho – Hadamardova kriteria (viz 4.1.10):

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1\,.$$

Protože poloměr konvergence je $r = 1/\rho = 1$, řada konverguje absolutně na intervalu $(x_0 - r, x_0 + r) = (0, 2)$. Snadno lze ověřit absolutní konvergenci i v krajních bodech 0 a 2. Výsledek můžeme zapsat takto:

$$x\ln x = x - 1 + \frac{(x-1)^2}{1\cdot 2} - \frac{(x-1)^3}{2\cdot 3} + \frac{(x-1)^4}{3\cdot 4} + \ldots \quad \forall\, x \in \langle 0, 2\rangle.$$

Na obr. 4.2 je znázorněna funkce $f(x) = x\ln x$ a Taylorovy polynomy

$$T_1(x) = x - 1, \quad T_2(x) = x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2, \quad T_3(x) = x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3,$$

$$T_5(x) = x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4 - \frac{1}{20}(x-1)^5$$

pro $x \in \langle 0, 2\rangle$.[3]

V bodě $x = 2$ je $f(2) = 2\ln 2 = \ln 4$ a tedy

$$\ln 4 \approx T_5(2) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{41}{30} \doteq 1,37\,.$$

Chybu určíme odhadem zbytku v alternující číselné řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ - viz poznámku 2.3.7:

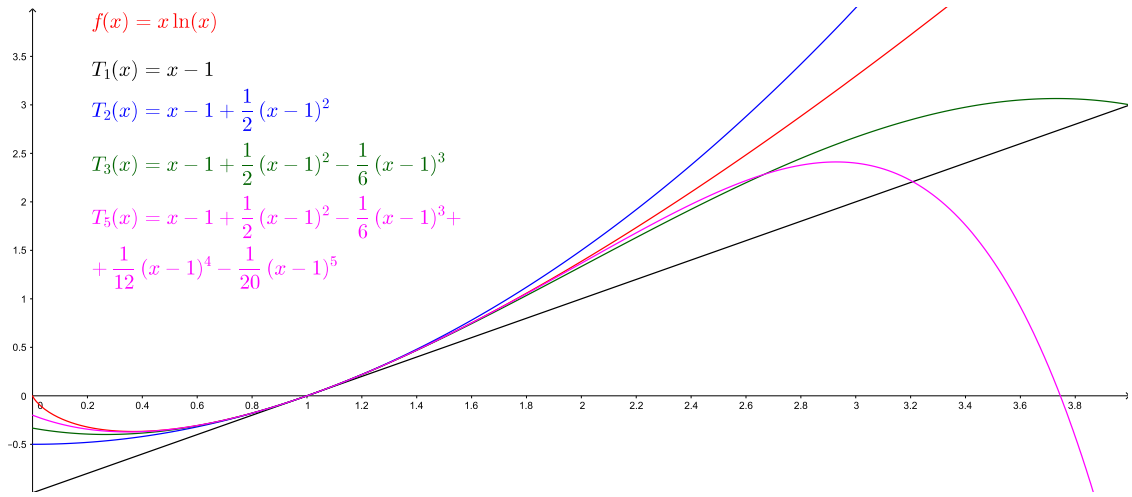
$$\varepsilon = |R_5(2)| \leq |a_5| = \frac{1}{30} \doteq 0,03\,.$$

4.2.10 Reprezentace funkce Taylorovým rozvojem představuje obrácený problém k úloze, v níž k zadané řadě hledáme její součet. Vyjádříme-li nějakou funkci mocninnou řadou, je nezbytné určit obor, na němž rozvoj konverguje zpět k původní funkci. Položíme-li v předchozím příkladě $x = 3$, je $f(3) = 3\ln 3 = \ln 27$, avšak tuto hodnotu nelze aproximovat vypočteným rozvojem. Bod $x = 3$ totiž nepatří do oboru konvergence $\langle 0, 2\rangle$. Pro získání řady konvergentní v bodě $x = 3$ by bylo nutno vybrat jiný střed rozvoje (například $x_0 = 2,5$).

Jinou důležitou okolnost si uvědomíme při pohledu na chování funkce $x\ln x$ a jejího rozvoje v bodě $x = 0$. Zatímco funkce zde není definována, řada konverguje, a to k hodnotě

$$-1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots = -1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = -1 + 1 = 0$$

[3] Z obrázku 4.2 je vidět, že mimo obor konvergence $\langle 0, 2\rangle$ se Taylorovy polynomy chovají úplně jinak než aproximovaná funkce $x\ln x$.



Obrázek 4.2: Funkce $f(x) = x\ln x$ a její aproximační polynomy $T_1(x), T_2(x), T_3(x), T_5(x)$ v okolí bodu $x_0 = 1$.

(viz příklad 2.1.5 (a)). Tento výsledek je totožný s hodnotou pravostranné limity funkce $f(x) = x\ln x$ v bodě $x = 0$, jak se lze přesvědčit aplikací L'Hospitalovy věty:

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+} x = 0.$$

Lze dokázat, že tato situace nastane tehdy, jedná-li se o odstranitelný bod nespojitosti, tj. bod, v němž funkce sice není definována, ale má v něm vlastní limitu. Pro každý takový bod x^* je nutno psát

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \begin{cases} f(x), & x \neq x^*, \\ \lim\limits_{x\to x^*} f(x), & x = x^*, \end{cases}$$

V běžné praxi se obvykle neelementární výraz na pravé straně ztotožňuje s funkcí $f(x)$, takže výsledek má podobu, jakou jsme viděli již v předchozí úloze.

4.2.11 Maclaurinovy rozvoje důležitých elementárních funkcí lze snadno odvodit na základě definice, tj. **přímou metodou**. Některé nejznámější si čtenář jistě vybaví:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_0^{\infty} \tfrac{x^n}{n!} &&= 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \dots\,, && x \in (-\infty, \infty)\,; \\
\sin x &= \sum_0^{\infty} (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &&= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \dots\,, && x \in (-\infty, \infty)\,; \\
\cos x &= \sum_0^{\infty} (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} &&= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \dots\,, && x \in (-\infty, \infty)\,.
\end{aligned}$$

Je zřejmé, že Maclaurinova řada pro $\cos x$ vznikne derivováním rozvoje funkce $\sin x$, opačný postup se provede integrováním. Využijeme-li rozvoj exponenciální funkce, snadno získáme rozvoje funkcí hyperbolických :

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) &&= \sum_0^{\infty} \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &&= x + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \dots\,, && x \in (-\infty, \infty)\,; \\
\cosh x &= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) &&= \sum_0^{\infty} \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} &&= 1 + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + \dots\,, && x \in (-\infty, \infty)\,.
\end{aligned}$$

Velmi jednoduše rozvineme do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$ nejjednodušší racionální funkce, budeme-li na ně nahlížet jako na součty geometrických řad:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^n\,, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_0^\infty (-1)^n x^n\,, \quad x \in (-1,1). \tag{4.1}$$

Jde zároveň o speciální případ významného typu rozvojů, který odvodíme v následujícím odstavci.

4.2.12 Binomický rozvoj je Maclaurinův rozvoj funkce

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

pro libovolné reálné číslo α. Derivováním získáme postupně

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \quad \dots$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Binomický rozvoj napíšeme ve tvaru

$$(1+x)^\alpha = \sum_0^\infty \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_0^\infty \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Symbolem $\binom{\alpha}{n}$ značíme zobecněné kombinační číslo; ukázka jeho výpočtu je součástí následujícího příkladu.

Určíme ještě obor konvergence binomického rozvoje. Vzhledem k manipulaci s kombinačními čísly bude výhodné vyšetřovat podíl

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\binom{\alpha}{n+1} \cdot \binom{\alpha}{n}^{-1}\right| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|;$$

pak

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1, \qquad \text{a proto } r = 1.$$

Každá binomická řada konverguje absolutně na intervalu $(-1,1)$. Konvergence v krajních bodech závisí na čísle α (viz neřešený příklad 4.4.8).

4.2.13 Příklad. Odvodíme Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Řešení. Výsledkem bude binomický rozvoj funkce $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$, tj. pro $\alpha = -\frac{1}{2}$, přičemž zaměníme x za $-x$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n x^n =$$

$$= 1 - \binom{-\frac{1}{2}}{1}x + \binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2 - \binom{-\frac{1}{2}}{3}x^3 + \dots = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots\,.$$

Při výpočtu koeficientů je například

$$\binom{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{6} = -\frac{5}{16}.$$

4.2.14 Nepřímé metody určování rozvojů funkcí do mocninných řad využívají obvykle operací derivování a integrování, s nimiž jsme se seznámili v kapitole 4.1. Demonstrujeme je následujícími dvěma ukázkami, z nichž je také patrna efektivita tohoto postupu ve srovnání s hledáním rozvoje podle definice.

1. Chceme-li určit Maclaurinův rozvoj funkce

$$f(x) = \arctan x,$$

vyjdeme ze vztahu pro její derivaci $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, kterou můžeme zapsat jako geometrickou řadu s kvocientem $-x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_0^\infty (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

K požadovanému výsledku dospějeme integrací:

$$\arctan x = \int_0^x \sum_0^\infty (-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}\left[t^{2n+1}\right]_0^x =$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad x \in (-1, 1\rangle.$$

(Ověřte konvergenci v pravém krajním bodě.)

2. Máme-li najít Maclaurinův rozvoj funkce

$$f(x) = \left(\frac{x}{x-2}\right)^2,$$

upravíme zlomek na tvar $f(x) = x^2 \frac{1}{(x-2)^2}$ a využijeme vztah $\frac{1}{(x-2)^2} = -\left(\frac{1}{x-2}\right)'$. Opět si vypomůžeme geometrickou řadou:

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{x^n}{2^n} \quad \text{pro } \left|\frac{x}{2}\right| < 1.$$

Pak

$$f(x) = x^2 \frac{1}{(x-2)^2} = -x^2\left(-\frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{x^n}{2^n}\right)' = x^2\left(\sum_0^\infty \frac{x^n}{2^{n+1}}\right)' =$$

$$= x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} + \dots\right)' = x^2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{2x}{2^3} + \frac{3x^2}{2^4} + \dots\right) = \sum_1^\infty \frac{n x^{n+2}}{2^{n+1}}$$

pro $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, tj. $x \in (-2, 2)$.

4.3 Vybrané aplikace mocninných řad

4.3.1 Úvod. Základním rysem typických aplikací mocninných řad je reprezentace funkce jejím rozvojem. Ten určíme některým z postupů popsaných v předchozí kapitole nebo využijeme vhodnou literaturu, například [R95]. Získanou řadu lze pak použít při aproximaci funkčních hodnot (příklady 4.2.9, 4.3.2), k přibližnému výpočtu integrálů či reprezentaci některých vyšších transcendentních funkcí (příklady 4.3.3, 4.3.4) a podobně. Obvyklé je rovněž zjišťování součtů číselných řad využitím řad mocninných (příklad 4.1.16). V jednodušších případech lze Taylorovy řady využít i k řešení počátečních úloh pro obyčejné diferenciální rovnice, jak ukážeme v příkladech 4.3.6 a 4.3.7.

4.3.2 Aproximace funkce - příklad. Chceme-li počítat přibližné hodnoty logaritmů reálných čísel, nabízí se velmi jednoduchý Maclaurinův rozvoj funkce $\ln(1+x)$, který však konverguje pouze pro $x \in (-1, 1\rangle$ (ověřte!). Lze ho tedy použít jen na čísla menší nebo rovna dvěma. Hledejme rozvoj vhodný pro aproximaci logaritmů čísel větších než 2.

Řešení. Víme, že

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum_0^\infty (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Proto bude

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_0^\infty (-1)^n \int_0^x t^n \,\mathrm{d}t = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \,.$$

Řada konverguje ještě v bodě $x = 1$ (podle Leibnizova kriteria), tj. na intervalu $(-1, 1\rangle$.

Při hledání odpovědi na zadaný aproximační problém využijeme toho, že pro $x \in (-1, 1)$ leží podíl $\frac{1+x}{1-x}$ v intervalu $(0, \infty)$. Zaměříme se proto na rozvoj funkce $\ln \frac{1+x}{1-x}$. Integrací (4.1) dostaneme

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \left(-\sum_1^\infty \frac{x^n}{n} \right) = 2 \sum_1^\infty \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

pro $x \in (-1, 1)$. Protože pro libovolné kladné $t = \frac{1+x}{1-x}$ je $x = \frac{t-1}{t+1} \in (-1, 1)$, je náš požadavek splněn. Máme-li například určit $\ln 19$, položíme $t = 19$, tj. $x = \frac{9}{10}$, a dostáváme

$$\ln 19 = 2 \sum_1^\infty \frac{0,9^{2n-1}}{2n-1} = 2 \left(0,9 + \frac{0,9^3}{3} + \frac{0,9^5}{5} + \frac{0,9^7}{7} + \ldots \right).$$

4.3.3 Přibližný výpočet určitého integrálu - příklad. Určíme hodnotu integrálu

$$I = \int_0^{0,5} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} \qquad \text{s chybou menší než } \varepsilon = 10^{-4}.$$

Řešení. Funkci $\frac{1}{1+x^4}$ lze sice rozložit na parciální zlomky, ale v tomto případě ji budeme reprezentovat Maclaurinovým rozvojem, neboť jedna z integračních mezí je 0. Opět s výhodou využijeme podobnost se součtem geometrické řady:

$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_0^\infty \left(-x^4\right)^n = \sum_0^\infty (-1)^n x^{4n}, \quad x \in (-1, 1).$$

Řada jistě konverguje stejnoměrně pro $x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \subset (-1, 1)$, takže ji můžeme integrovat člen po členu a dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \sum_0^\infty (-1)^n \int_0^{0,5} x^{4n}\,\mathrm{d}x = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{4n+1} \left[x^{4n+1}\right]_0^{0,5} = \\ &= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(4n+1)2^{4n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \dots . \end{aligned}$$

Výsledná číselná řada je alternující, takže podle 2.3.7 pro odhad chyby platí $|r_i| \le a_{i+1}$ (absolutní hodnota zbytku po i-tém členu je menší než tento člen). Chceme-li, aby chyba nepřesáhla hodnotu ε, musí být

$$|r_i| \le a_{i+1} < \varepsilon,$$

tedy

$$\frac{1}{(4i+5)2^{4i+5}} < 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad i \ge 2.$$

Při výpočtu se proto můžeme omezit na částečný součet pro $i = 2$:

$$I \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} \doteq 0,4940.$$

4.3.4 Příklad. Funkce

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

souvisí s distribuční funkcí[4] gaussovského rozdělení spojité náhodné proměnné. Má široké použití ve statistice a teorii pravděpodobnosti. Integrál však nemá primitivní funkci vyjádřitelnou konečným počtem elementárních funkcí. Pro tabelaci jejích hodnot je možno použít reprezentaci mocninnou řadou. K tomu použijeme Maclaurinův rozvoj funkce e^t (viz 4.2.11), v němž provedeme záměnu $t \leftrightarrow -t^2$:

$$\mathrm{e}^{-t^2} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots\ , \ t \in \mathcal{R}.$$

Integrací obdržíme potřebnou řadu:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

4.3.5 Řešení diferenciálních rovnic užitím mocninných řad. Mějme dánu počáteční úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu ve tvaru

$$y' = f(x, y), \quad \text{resp.} \quad F(y', y, x) = 0, \qquad y(x_0) = y_0,$$

kde $y(x)$ je hledaná funkce. Je-li zadán bod $[x_0, y_0]$, kterým řešení prochází, tvoří rovnice spolu s podmínkou $y(x_0) = y_0$ tzv. **počáteční** neboli **Cauchyho úlohu**. Naším cílem bude nalézt řešení této úlohy[5] v okolí bodu x_0 ve tvaru mocninné řady se středem v tomto bodě. Uvedeme dva typické postupy.

[4] Z angl. error function, blíže viz např. [R95].

[5] Podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení viz například ve [VV97], kap. 1.

(a) Hledanou funkci vyjádříme **obecnou mocninnou řadou**

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

se středem x_0 a neznámými koeficienty a_n, $n = 0, 1, 2, \dots$. Předpokládáme-li, že v jistém okolí bodu x_0 tato řada konverguje, lze po dosazení rozvoje do zadané rovnice postupně počítat neznámé a_0, a_1, a_2, ... porovnáním koeficientů u mocnin $(x - x_0)^k$ téhož stupně k. Přitom je evidentně $a_0 = y(x_0) = y_0$ přímo ze zadání. Každý výraz obsahující nezávisle proměnnou x je nutno předem upravit na polynom (obecně na nekonečný rozvoj) vzhledem k mocninnám $x - x_0$. Jako ukázku této metody uvádíme řešený příklad 4.3.6.

(b) Jiný způsob spočívá v reprezentaci hledaného řešení přímo **Taylorovým rozvojem**

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots .$$

I nyní je první člen rozvoje dán počáteční podmínkou. První derivaci určíme ze zadané diferenciální rovnice a další derivace získáme postupným derivováním této rovnice a dosazováním předchozích hodnot, jak ukazuje příklad 4.3.7. Rozšíření tohoto postupu na rovnice vyšších řádů demonstruje příklad 4.3.8.

Bližší pohled na základní numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic, ale také pro výpočet integrálů, lze nalézt ve specializované literatuře, jakou je například [P85].

4.3.6 Příklad – metoda neurčitých koeficientů. Aproximujte polynomem 4. stupně řešení úlohy

$$y' - y = \frac{1}{x}, \qquad y(1) = -1$$

v okolí bodu $x_0 = 1$.

Řešení. Neznámou funkci zapíšeme jako mocninnou řadu se středem $x_0 = 1$, v níž je ze zadání $a_0 = -1$:

$$y(x) = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2 + a_3(x - 1)^3 + a_4(x - 1)^4 + \dots .$$

Derivováním obdržíme

$$y'(x) = a_1 + 2a_2(x - 1) + 3a_3(x - 1)^2 + 4a_4(x - 1)^3 + \dots .$$

Pravou stranu rovněž vyjádříme rozvojem s mocninami $x - 1$ prostřednictvím geometrické řady:

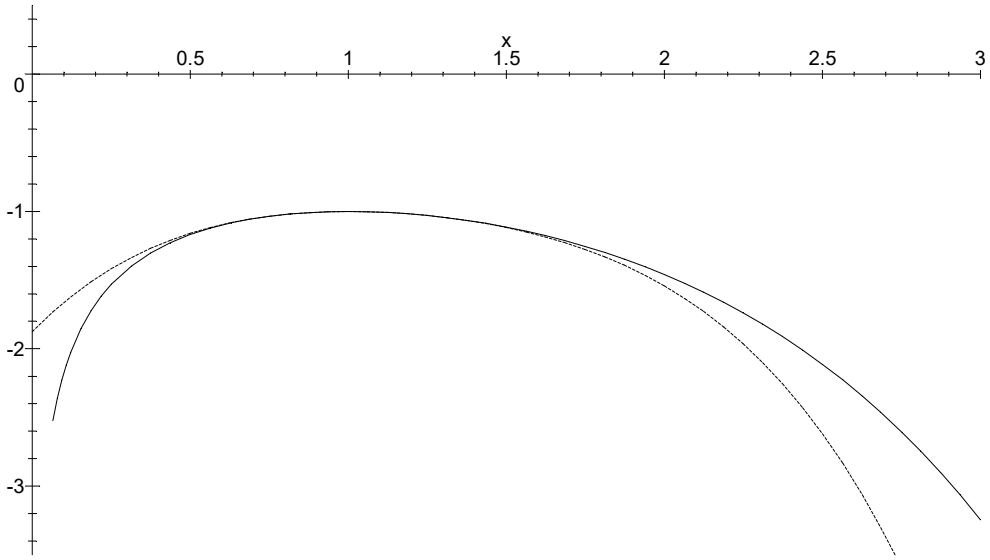
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1 + (x - 1)} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n (x - 1)^n = 1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3 + (x - 1)^4 - \dots .$$

Dosadíme uvedené výrazy do původní rovnice a postupně obdržíme vztahy pro koeficinety $a_1, \dots, a_4$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} a_1 - a_0 & = & 1 & \Rightarrow & a_1 & = & 0\,, \\ 2a_2 - a_1 & = & -1 & \Rightarrow & a_2 & = & -\frac{1}{2}\,, \\ 3a_3 - a_2 & = & 1 & \Rightarrow & a_3 & = & \frac{1}{6}\,, \\ 4a_4 - a_3 & = & -1 & \Rightarrow & a_4 & = & -\frac{5}{24} \\ & \text{atd.} & & & & & \end{array}$$

Výsledkem bude následující aproximace polynomem čtvrtého stupně:

$$y(x) \approx T_4(x) = -1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{6}(x - 1)^3 - \frac{5}{24}(x - 1)^4.$$



Obrázek 4.3: Přesné řešení $y(x)$ (——) a jeho aproximace polynomem $T_4(x)$ (- - - -).

Snadno lze ukázat, že mocninná řada pro pravou stranu rovnice $\frac{1}{x}$ konverguje absolutně pro $x \in (0, 2)$. Lze proto očekávat, že poloměr konvergence řady představující řešení bude roven vzdálenosti středu $x_0 = 1$ k nejbližšímu „singulárnímu“ bodu, tj. bodu $x = 0$, kde není pravá strana spojitá.

Metodou variace konstanty lze získat analytické řešení v uzavřeném tvaru

$$y(x) = \mathrm{e}^x \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \;-\; \mathrm{e}^{x-1},$$

které ovšem musíme pro libovolné x vyčíslit numericky vzhledem k povaze integrálu. Na obr. 4.3 je znázorněno plnou čarou v intervalu $\langle 0, 3\rangle$ spolu s aproximací výše odvozeným polynomem 4. stupně. Rovněž je patrno, že přesnost aproximace klesá s rostoucí vzdáleností od bodu $x = 1$.

4.3.7 Příklad – metoda postupného derivování. Je dána počáteční úloha

$$y' = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\,, \quad y(2) = 2.$$

Aproximujte její řešení Taylorovým polynomem 5. stupně v okolí bodu $x_0 = 2$.

Řešení. Přímo ze zadání je

$$y'(2) = \frac{1}{2}\left(x_0^2 + y_0^2\right) = 4.$$

Dále postupujeme po jednotlivých derivacích:

$$\begin{aligned}
&y'' = x + yy', && y''(2) = 2 + 2\cdot 4 = 10;\\
&y''' = 1 + (y')^2 + yy'', && y'''(2) = 1 + 16 + 2\cdot 10 = 37;\\
&y^{(4)} = 3y'y'' + yy''', && y^{(4)}(2) = 3\cdot 4\cdot 10 + 2\cdot 37 = 194;\\
&y^{(5)} = 4y'y''' + 3(y'')^2 + yy^{(4)}, && y^{(5)}(2) = 4\cdot 4\cdot 37 + 3\cdot 100 + 2\cdot 194 = 1280.
\end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned}
y(x) &\approx y(2) + y'(2)(x-2) + \tfrac{y''(2)}{2!}(x-2)^2 + \ldots + \tfrac{y^{(5)}(2)}{5!}(x-2)^5 =\\
&= 2 + 4(x-2) + 5(x-2)^2 + \tfrac{37}{6}(x-2)^3 + \tfrac{97}{12}(x-2)^4 + \tfrac{32}{3}(x-2)^5\,.
\end{aligned}$$

4.3.8 Příklad. Aproximujte polynomem třetího stupně řešení úlohy

$$y'' - xy' + 2y = -(x^2+2)\sin x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Řešení. Aproximaci budeme hledat ve tvaru

$$y(x) \approx T_3(x) = \sum_0^3 \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n = y(0) + y'(0)(x) + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3. \tag{4.2}$$

První dva koeficienty jsou dány počátečními podmínkami, další postup je analogický jako v předchozím příkladě:

$$\begin{aligned} y'' &= xy' - 2y - (x^2+2)\sin x, & y''(0) &= 0, \\ y''' &= -y' + xy'' - 2x\sin x - (x^2+2)\cos x, & y'''(0) &= -3. \end{aligned}$$

o dosazení do (4.2) a úpravě dostáváme:

$$y(x) \approx x - \frac{x^3}{2}.$$

4.4 Neřešené úlohy

4.4.1 Určete obor konvergence řad:

a) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{(x+3)^n}{n2^n}$ b) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{(x-3)^n}{n^2}$ c) $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{(-1)^n(x+1)^n}{4^n(2n+1)!}$

d) $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{x^{2n}}{n2^n}$ e) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{n!(x-10)^n}{10^n}$ f) $\displaystyle\sum_0^\infty (-1)^n(x+1)^{n+1}$

g) $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{(2^n-1)x^n}{n+1}$ h) $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{[2+(-1)^n]^n}{n+1}(x+2)^n$

4.4.2 Stanovte součet mocninné řady:

a) $\displaystyle\sum_1^\infty (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ b) $\displaystyle\sum_1^\infty n(x-2)^{n-1}$ c) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

d) $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{3^n x^n}{n!}$ e) $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{(-1)^n(x+1)^n}{n+1}$

f) $\displaystyle\sum_0^\infty n^2 x^n$ g) $\displaystyle 1 + \sum_2^\infty (-1)^{n-1}\frac{(n-1)x^n}{n!}$

4.4.3 Určete (přesné) součty číselných řad z úlohy 2.5.7.

4.4.4 Určete součet číselné řady:

$$\text{a)}\ \sum_{1}^{\infty} n3^{-n} \qquad \text{b)}\ \sum_{0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} \qquad \text{c)}\ \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-1} \qquad \text{d)}\ \sum_{0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4.4.5 Aproximujte funkci $f(x) = \ln \sin x$ Taylorovým polynomem 4. stupně v okolí bodu $\frac{\pi}{2}$. Určete obor, na kterém Taylorova řada konverguje.

4.4.6 Vytvořte Maclaurinův rozvoj pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Graficky porovnejte její aproximaci na intervalu $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ prostřednictvím polynomů $T_2(x)$, $T_4(x)$ a $T_6(x)$.

4.4.7 Odvoďte Maclaurinovy rozvoje funkcí:

$$\text{a)}\ \sin^2 x \qquad \text{b)}\ \frac{x}{x^2+4} \qquad \text{c)}\ \arcsin x$$

4.4.8 Vyšetřete konvergenci binomického rozvoje

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \alpha \in \mathcal{R},\ \alpha \neq 0$$

(viz 4.2.12) v krajních bodech jeho oboru konvergence $(-1, 1)$.

4.4.9 Vyjádřete Maclaurinovým rozvojem funkce definované integrálem s proměnnou mezí (uveďte obor konvergence):

$$\text{a)}\ \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{b)}\ \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{c)}\ \int_0^x \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t$$

4.4.10 Užitím mocninných řad vypočtěte následující určité integrály s předepsanou přesností ε:

$$\text{a)}\ \int_0^{0,5} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \varepsilon = 10^{-5} \qquad \text{b)}\ \int_0^{0,2} x^5 \cos x\,\mathrm{d}x, \quad \varepsilon = 10^{-6}$$

$$\text{c)}\ \int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x, \quad \varepsilon = 10^{-3} \qquad \text{d)}\ \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}, \quad \varepsilon = 10^{-6} \quad \left(\text{substituce } x = \frac{1}{t}\right)$$

4.4.11 Najděte předepsanou aproximaci řešení počátečních úloh:

a) $y' + xy = x^3 - 2x + 1, \quad y(0) = 2$ (polynom 4. stupně)

b) $(1+x^2)y' + xy = \frac{1}{1+x^2}, \quad y(0) = 0$ (polynom 5. stupně)

Použijte metodu neurčitých koeficientů a Maclaurinův rozvoj pravé strany.

c) $xy'' - 2y = x^3 - 4x, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = 0$ (polynom 4. stupně)

d) $y' = y^3 - x, \quad y(0) = 1$ (polynom 4. stupně)

e) $y' + xy^2 = 2\cos x, \quad y(0) = 1$ (polynom 3. stupně)

f) $x^4 y'' - xy' - y = 0, \quad y(-1) = -2,\ y'(-1) = 0$ (polynom 4. stupně)

4.4.12 Výsledky

4.4.1 a) $\langle -5,-1)$, b) $\langle 2,4\rangle$, c) $(-\infty,\infty)$, d) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, e) $\{10\}$, f) $(-2,0)$,
g) $\langle -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$, h) $(-\frac{7}{3},-\frac{5}{3})$

4.4.2 a) $\ln(1+x)$, $x\in(-1,1\rangle$, b) $\frac{1}{(x-3)^2}$, $x\in(1,3)$,
c) $x+(1-x)\ln(1-x)$, $x\in\langle -1,1\rangle$, d) e^{3x}, $x\in(-\infty,\infty)$,
e) $\frac{\ln(x+2)}{x+1}$, $x\in(-2,0\rangle$, f) $\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$, $x\in(-1,1)$,
g) $(1+x)\mathrm{e}^{-x}$, $x\in(-\infty,\infty)$,

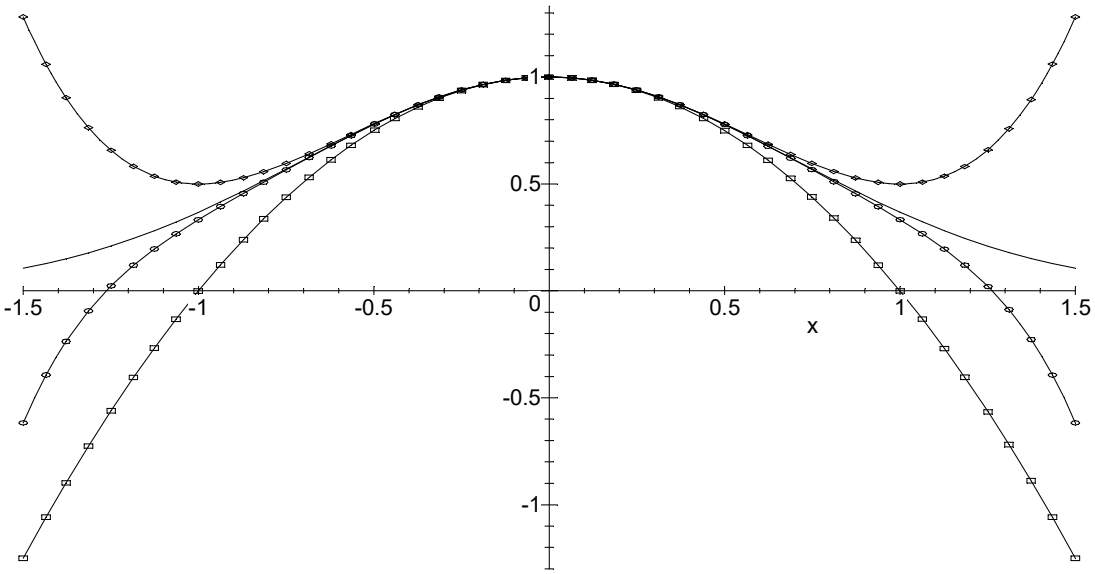
4.4.3 a) $\frac{7}{16}$, b) $-10\ln\frac{9}{10}$, c) $\frac{1}{4}\sqrt[4]{\mathrm{e}}$

4.4.4 a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{16}{9}$, c) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}-\frac{\ln 2}{3}$ d) $4-4\ln 2$

4.4.5 $T_4(x)=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{1}{12}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4$, $x\in(-\pi/2,\pi/2)$

4.4.6 Funkce a její interpolační polynomy jsou na obr. 4.4. Maclaurinův rozvoj má tvar

$$\mathrm{e}^{-x^2}=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}=1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\dots .$$



Obrázek 4.4: K příkladu 4.4.6: $f(x)$ —— , $T_2(x)$ $-\square-\square-$, $T_4(x)$ $-\diamond-\diamond-$, $T_6(x)$ $-\circ-\circ-$.

4.4.7

$$\text{a)}\quad \sin^2 x = \sum_1^\infty(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}\,,\quad x\in(-\infty,\infty)$$

$$\text{b)}\quad \frac{x}{x^2+4} = \sum_0^\infty(-1)^n\frac{x^{n+1}}{4^{n+1}}\,,\quad x\in(-2,2)$$

[6]

$$\text{c)}\quad \arcsin x = \sum_0^\infty\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=$$

$$= x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\dots\,,\quad x\in(-1,1)$$

[6] Pro lichá n se dvojitý faktoriál definuje jako součin $n!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-4)(n-2)n$ a pro sudá n jako $n!!=2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-4)(n-2)n$.

4.4.8 Pro $\alpha = k \in \mathcal{N}$ jde o polynom - rozvoj konverguje (v obou krajních bodech). Pro ostatní α platí:

$$x = -1 \ldots \begin{cases} \alpha > 0 & \ldots \text{ řada konverguje,} \\ \alpha < 0 & \ldots \text{ řada diverguje;} \end{cases}$$

$$x = 1 \ldots \begin{cases} \alpha > 0 & \ldots \text{ řada konverguje absolutně,} \\ \alpha \in (-1, 0) & \ldots \text{ řada konverguje,} \\ \alpha \leq 1 & \ldots \text{ řada diverguje.} \end{cases}$$

Návod: využijte Raabeho kriteria 2.5.4.

4.4.9

$$\text{a)} \quad \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\text{b)} \quad \sum_{1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n+1} x^n}{n^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\text{c)} \quad \sum_{1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

4.4.10 a) 0,49696 ; b) 0,000011 ; c) 0,071 ; d) 0,119198

4.4.11

$$\text{a)} \quad y(x) \approx 2 + x - 2x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{4}x^4$$

$$\text{b)} \quad y(x) \approx x - x^3 + x^5$$

$$\text{c)} \quad y(x) \approx 2 - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 - \tfrac{1}{3}(x-1)^3 + \tfrac{1}{2}(x-1)^4$$

$$\text{d)} \quad y(x) \approx 1 + x + x^2 + 2x^3 + \tfrac{13}{4}x^4$$

$$\text{e)} \quad y(x) \approx 1 + 2x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{5}{3}x^3$$

$$\text{f)} \quad y(x) \approx -2 - (x+1)^2 - (x+1)^3 - (x+1)^4$$

Kapitola 5

Fourierovy řady

5.1 Základní pojmy a vztahy

5.1.1 Úvod. Pro Fourierovy řady je specifické, že jsou tvořeny periodickými funkcemi. V obecném případě sčítáme členy tvaru

$$a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x, \quad n = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Číselné koeficienty a_n, b_n předurčují vlastnosti řady, zejména její konvergenci. Je-li T základní perioda, platí $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$. Většinu odvození provedeme pro $T = 2\pi$, tedy $\omega_n = n$, teprve v poslední kapitole výsledky zobecníme.

Kapitola o Fourierových řadách v tomto skriptu má sloužit zejména k seznámení s problematikou, neboť toto téma je různým způsobem dále rozvíjeno ve specializovaných předmětech, které se liší podle fakult či studijních oborů. Jde zejména o harmonickou analýzu signálů a dat, diskrétní Fourierovu transformaci nebo o některé metody řešení parciálních diferenciálních rovnic.

Úvodem připomeneme některé vlastnosti reálných funkcí, ze kterých budeme vycházet.

5.1.2 Integrovatelnost. Říkáme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b\rangle$ **integrovatelná**, je-li konečný integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.1.3 Spojitost a monotónnost. Řekneme-li, že funkce $f(x)$ je **po částech spojitá** na intervalu $\langle a, b\rangle$, znamená to, že je spojitá nebo že má konečný počet bodů nespojitosti prvního druhu. V těchto bodech musí existovat jednostranné limity, které ovšem mohou být různé. Je-li x_0 takový bod, budeme psát

$$f(x_0+) = \lim_{x\to x_0+} f(x), \qquad f(x_0-) = \lim_{x\to x_0-} f(x).$$

Funkce $f(x)$, která má na intervalu $\langle a, b\rangle$ po částech spojitou derivaci $f'(x)$, se nazývá **po částech monotónní**.

Platí, že každá funkce po částech spojitá na konečném intervalu je na něm integrovatelná. Opačné tvrzení však neplatí, jak ukazuje následující příklad.

5.1.4 Příklad. Vyšetřete na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ spojitost a integrovatelnost funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

Řešení. Funkce má bod nespojitosti $x = 1$, kde však nemá vlastní jednostranné limity:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1+} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = \infty.$$

Není tak na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ ani po částech spojitá. Ukážeme však, že je integrovatelná:

$$\int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}} = \int_{-2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}} =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt[3]{(x-1)^2}\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{2}{3}\sqrt[3]{(x-1)^2}\right]_{1}^{2} = -\frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{9}-1\right).$$

Jde o konvergentní integrál nevlastní vlivem funkce.

5.1.5 Ortogonalita. Funkce $f(x)$, $g(x)$ se nazývají **ortogonální** na intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_1^\infty$ nazýváme **ortogonálním systémem** na intervalu $\langle a, b\rangle$, jsou-li ortogonální každé dvě jeho různé funkce, tj. platí-li

$$\int_a^b f_m(x)f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\, m \neq n.$$

5.1.6 Příklady.

(a) Systém $\{x^n\}_1^\infty = \{x, x^2, x^3, \ldots\}$ není ortogonální na intervalu $\langle -1, 1\rangle$, protože

$$\int_{-1}^{1} x^m\, x^n\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^{m+n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\right]_{-1}^{1} = \begin{cases} 0 & \text{pro } m+n \text{ liché}, \\ \frac{2}{m+n+1} & \text{pro } m+n \text{ sudé}. \end{cases}$$

(b) Dokážeme na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ ortogonalitu systému

$$\{1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x, \ldots\}.$$

Řešení. Ihned je patrné, že

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dále vypočteme integrály

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx\,\mathrm{d}x,$$

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,\mathrm{d}x, \quad m \neq n.$$

Užitím známých součtových vzorců pro goniometrické funkce dostáváme

$$I_1 + I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$I_1 - I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x\,\mathrm{d}x = 0,$$

odkud $I_1 = I_3 = 0$. Pro integrál I_2 obdržíme dvojí integrací per partes:

$$I_2 = \left[-\frac{1}{n}\cos mx \cdot \cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{m}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{m}{n}\left[\frac{1}{n}\sin mx \cdot \sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{m}{n}\left(-\frac{m}{n}\right) I_2.$$

Platí tudíž $\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) I_2 = 0$, odkud $I_2 = 0$ pro každé $m \neq n$.

5.1.7 Periodicita. Funkce $f(x)$ je na množině M **periodická s periodou** T, platí-li $f(x+T) = f(x)$ pro každé $x \in M$.

5.1.8 Příklad. Dokažte následující vlastnost periodických funkcí:

$$\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro periodu } T \text{ a libovolné } \alpha.$$

Řešení.

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_T^{\alpha+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\alpha f(y+T)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_\alpha^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\alpha f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Použili jsme substituci $x = y + T$ a definiční vztah pro periodickou funkci.)

5.1.9 Periodické prodloužení funkce. Uvažujme funkci $f(x)$ definovanou na intervalu délky T, například pro $x \in \langle \alpha, \alpha+T \rangle$. **Periodické prodloužení** $\tilde{f}(x)$ funkce $f(x)$ vně tohoto intervalu definujeme předpisem

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \alpha < x < \alpha + T, \\ f(x - kT), & \alpha + kT < x < \alpha + (k+1)T, \qquad k \in \mathcal{Z},\ k \neq 0, \\ \frac{1}{2}\left[f(\alpha+) + f((\alpha+T)-)\right], & x = \alpha + kT. \end{cases}$$

Na rozhraní jednotlivých period mohou vzniknout body nespojitosti, v nichž zavádíme hodnoty $\tilde{f}(x)$ aritmetickým průměrem jednostranných limit funkce $f(x)$ na začátku a na konci základního intervalu. Tato speciální volba je výhodná v souvislosti s konvergencí Fourierových řad, jak ukážeme v kapitole 5.3.

5.1.10 Příklad. Vytvořte a graficky znázorněte periodické prodloužení funkce

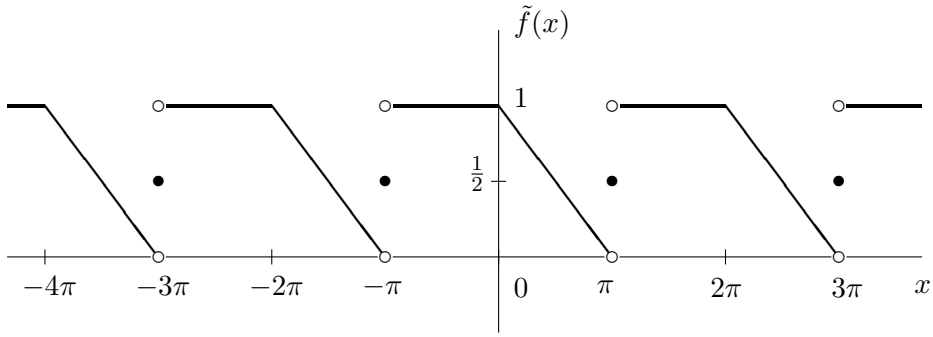
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle -\pi, 0 \rangle, \\ 1 - \frac{x}{\pi}, & x \in \langle 0, \pi \rangle. \end{cases}$$

Řešení. Prodloužení bude mít periodu $T = 2\pi$, v jejíž krajních bodech vypočteme jednostranné limity

$$\lim_{x \to \pi+} f(x) = f(-\pi+) = 1, \qquad \lim_{x \to \pi-} f(x) = f(\pi-) = 0.$$

V bodech nespojitosti oddělujících jednotlivé periody bude podle předchozí definice periodické prodloužení nabývat hodnot $\frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$. Funkci $\tilde{f}(x)$, jejíž graf je na obr. 5.1, zapíšeme takto:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1, & (2k-1)\pi < x < 2k\pi, \\ 1 + 2k - \frac{x}{\pi}, & 2k\pi < x < (2k+1)\pi, \qquad k \in \mathcal{Z}. \\ \frac{1}{2}, & x = (2k-1)\pi, \end{cases}$$



Obrázek 5.1: Periodické prodloužení funkce z příkladu 5.1.10.

5.2 Trigonometrické řady

5.2.1 **Trigonometrickou řadou** s periodou $T = 2\pi$ nazýváme funkční řadu

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,.$$

Výraz $\frac{a_0}{2}$ se nazývá **absolutní člen**, a_n, b_n jsou **koeficienty** trigonometrické řady.

5.2.2 **Poznámky.**

1. Funkce $\sin nx$, $\cos nx$, $n = 1, 2, \ldots$ jsou periodické s periodou $T_n = \frac{2\pi}{n}$, takže $T = 2\pi$ je jejich společná základní perioda. Dále jsou neomezeně diferencovatelné a integrovatelné na každém konečném intervalu. Je na místě připomenout také jejich ortogonalitu na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, kterou dokládá příklad 5.1.6 (b).

2. Vymezíme hlavní typy úloh, jimiž se hodláme dále zabývat:

   - vyšetření konvergence trigonometrické řady,
   - určení jejího součtu,
   - inverzní problém - nalézt k zadané funkci na zvoleném intervalu trigonometrickou řadu.

5.2.3 **Příklad.** Uvažujme trigonometrickou řadu s koeficienty $a_0 = 1$, $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right).$$

Vyšetříme její konvergenci například v bodech $x_1 = 0$ a $x_2 = \pi$.

(a) V bodě $x_1 = 0$ řada diverguje, protože číselná řada

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

získaná dosazením je harmonická.

(b) V bodě $x_2 = \pi$ dostáváme alternující řadu

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

která konverguje podle Leibnizova kriteria.

5.2.4 Konvergence trigonometrických řad. Bodová konvergence se vyšetřuje, jak jsme viděli v předchozím příkladě, metodami a kriterii platnými pro číselné řady. Pro důkladnější znalost vlastností součtové funkce musíme uvažovat **stejnoměrnou konvergenci**, kterou jsme zavedli v kapitole 3.2.

5.2.5 Věta. Nechť konverguje číselná řada

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)\,.$$

Pak trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,.$$

konverguje stejnoměrně pro všechna reálná x.

Důkaz. Jak známo, platí pro každé $x \in \mathcal{R}$

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| \cdot |\cos nx| + |b_n| \cdot |\sin nx| \leq |a_n| + |b_n|\,.$$

Proto je řada $\left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ konvergentní číselnou majorantou trigonometrické řady, která tudíž podle Weierstrassova kriteria 3.2.15 konverguje stejnoměrně pro všechna reálná x. □

5.2.6 Příklad. Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx + \frac{1}{n^3} \sin nx \right).$$

Řešení. Budeme postupovat podle věty 5.2.5; nejprve upravíme výraz s absolutními hodnotami:

$$|a_n| + |b_n| = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} = \frac{n+1}{n^3}.$$

Číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3}$ konverguje, což lze snadno ověřit například integrálním kriteriem. Proto je zadaná trigonometrická řada stejnoměrně konvergentní.

5.2.7 Věta. Nechť trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

konverguje na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ k součtové funkci $f(x)$ stejnoměrně. Pak platí:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, 3 \ldots\,.$$

Důkaz. Obě strany rovnosti

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

vynásobíme funkcí $\cos mx$ a integrujeme pro $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos mx \, \mathrm{d}x = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, \mathrm{d}x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, \mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, \mathrm{d}x \right).$$

Na pravé straně lze vzhledem ke stejnoměrné konvergenci řady integrovat člen po členu, přičemž zde v důsledku ortogonality (viz příklad 5.1.6 (b)) zůstane jediný nenulový člen pro $m = n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos mx \, \mathrm{d}x = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, \mathrm{d}x = \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2mx) \, \mathrm{d}x = \pi a_n.$$

Odtud plyne první z dokazovaných vzorců. V případě koeficientů b_n postupujeme analogicky, v úvodním kroku násobíme funkcí $\sin mx$. □

5.2.8 Poznámka. Předchozí větu nelze obrátit, neboť z existence integrálů pro koeficienty neplyne konvergence řady k výchozí funkci. Otázka konvergence řady je poněkud složitější, základní poznatky k této problematice obsahuje následující kapitola.

5.3 Fourierovy řady

5.3.1 Zavedení. Mějme funkci $f(x)$ integrovatelnou na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots$$

s koeficienty

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

se nazývá **Fourierův rozvoj** funkce $f(x)$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Píšeme

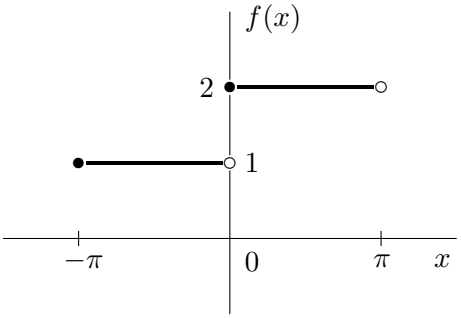
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) .$$

5.3.2 Poznámka. Symbol $\sim$ znamená, že řada nemusí být konvergentní, a v případě, že konvergentní je, nemusí být jejím součtem funkce $f(x)$. Po vyřešení jednoduché demonstrační úlohy se k této otázce vrátíme.

5.3.3 Příklad. Najděte Fourierův rozvoj funkce (viz obr. 5.2)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle -\pi, 0), \\ 2, & x \in \langle 0, \pi) \end{cases}$$

na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Sestrojte graf jejího periodického prodloužení.



Obrázek 5.2: Funkce z příkladu 5.3.3.

Řešení. Na základě vzorců pro Fourierovy koeficienty z článku 5.3.1 snadno vypočteme příslušné integrály, vezmeme-li v úvahu, že $f(x)$ je po částech spojitá:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \mathrm{d}x + \tfrac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 2\,\mathrm{d}x = 1 + 2 = 3, \\
a_n &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \cos nx\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 2\cos nx\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{n\pi} \left[\sin nx\right]_{-\pi}^{0} + \tfrac{2}{n\pi} \left[\sin nx\right]_{0}^{\pi} = 0, \\
b_n &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \sin nx\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 2\sin nx\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{n\pi} \left[\cos nx\right]_{-\pi}^{0} - \tfrac{2}{n\pi} \left[\cos nx\right]_{0}^{\pi} = \\
&= -\tfrac{1-(-1)^n}{n\pi} - 2\tfrac{(-1)^n-1}{n\pi} = \tfrac{1-(-1)^n}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Hledaný rozvoj zapíšeme ve tvaru

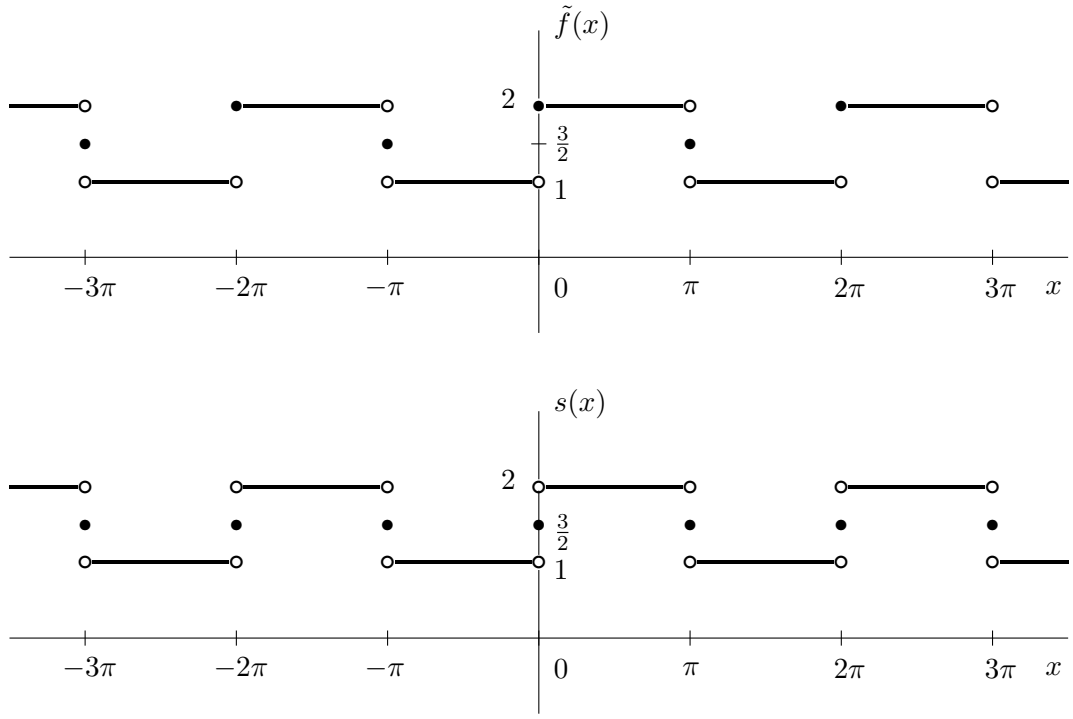
$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin nx = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \dots\right), \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Periodické prodloužení $\tilde{f}(x)$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ sestrojíme na základě definice 5.1.9, tedy včetně aritmetických průměrů jednostranných limit v koncových bodech period $(2k-1)\pi$, $k \in \mathcal{Z}$. Vidíme ho na obr. 5.3 nahoře.

Povšimněme si, že sama funkce $f(x)$ má bod nespojitosti I. druhu v bodě $x = 0$, a tedy i její prodloužení $\tilde{f}(x)$ v bodech $x = 2k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$ (uprostřed periody). Snadno se dosazením přesvědčíme, že nalezený rozvoj

$$s(x) = \frac{3}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin nx,$$

jehož graf je na obr. 5.3 dole, má v těchto bodech hodnotu $\frac{3}{2}$. Jde rovněž o aritmetický průměr jednostranných limit. Tento výsledek není náhodný, ale vyplývá z následující věty o konvergenci Fourierova rozvoje.



Obrázek 5.3: Periodické prodloužení funkce z příkladu 5.3.3 (nahoře), součtový graf (dole)

5.3.4 Dirichletova věta. Nechť má funkce $f(x)$ tyto vlastnosti:

(D1) je na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ integrovatelná,

(D2) má na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ konečný počet extrémů.

Pak k ní na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ existuje jednoznačně určený Fourierův rozvoj tvaru

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

s koeficienty definovanými v 5.3.1, který konverguje

- k funkci $f(x)$ v každém bodě intervalu $(-\pi, \pi)$, v němž je spojitá,
- k aritmetickým průměrům jednostranných limit v každém bodě nespojitosti uvnitř intervalu $(-\pi, \pi)$,
- k periodickému prodloužení $\tilde{f}(x)$ vně intervalu $(-\pi, \pi)$, resp. k aritmetickým průměrům jednostranných limit v jeho bodech nespojitosti.

Důkaz. Neuvádíme. □

5.3.5 Poznámky.

1. Formálně lze tvrzení Dirichletovy věty shrnout takto:

$$s(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi) \text{ a } x \text{ je bod spojitosti,} \\ \tilde{f}(x), & x \notin (-\pi, \pi) \text{ a } x \text{ je bod spojitosti,} \\ \frac{1}{2}\left[\tilde{f}(x_0+) + \tilde{f}(x_0-)\right], & x \notin (-\pi, \pi) \text{ a } x_0 \text{ je bod nespojitosti.} \end{cases}$$

2. Jak vyplývá z příkladu 5.1.8, věta platí pro Fourierův rozvoj na libovolném intervalu délky $T = 2\pi$, tj. pro $x \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle$.

3. Dirichletovy podmínnky (D1), (D2) bývají uváděny i v jiném ekvivalentním znění, často například takto:

(D1*) je na intervalu $\langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle$ po částech spojitá,

(D2*) je na intervalu $\langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle$ po částech monotónní.

4. Součet $s(x)$ je funkcí, k níž Fourierova řada konverguje. Její graf proto nazýváme **součtovým grafem**. Od periodického prodloužení se může lišit nejvýše hodnotami v izolovaných bodech nespojitosti.

5.3.6 Aproximace funkce trigonometrickým polynomem neboli n-tým částečným součtem Fourierovy řady je základem mnoha numerických metod. Pro bližší seznámení lze doporučit například [KK69], [ČV92] , zde se omezíme na grafickou demonstraci v rámci následujícího příkladu. K problematice se ještě vrátíme v kapitole 5.6.

5.3.7 Příklad. Najděte Fourierův rozvoj funkce z úlohy 5.1.10 na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Znázorněte součtovou funkci $s(x)$ a její aproximaci trigonometrickými polynomy $s_5(x)$, $s_{15}(x)$, $s_{50}(x)$. Použijte výsledku k určení součtu číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots .$$

Řešení. Připomeňme, že jde o funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle -\pi, 0 \rangle, \\ 1 - \frac{x}{\pi}, & x \in \langle 0, \pi \rangle, \end{cases}$$

jejíž periodické prodloužení je na obr. 5.1.

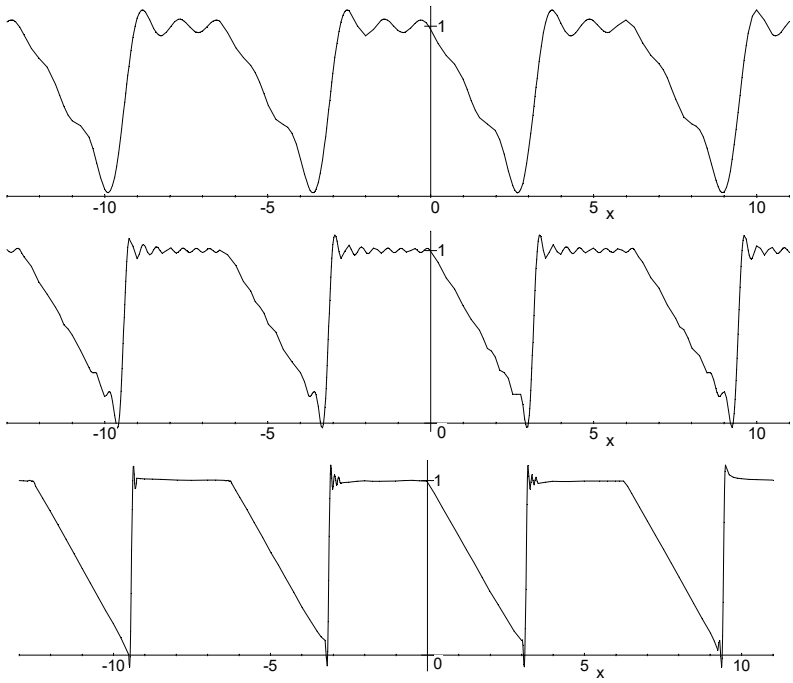
(1) Vypočteme koeficienty Fourierova rozvoje:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \mathrm{d}x + \tfrac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(1 - \tfrac{x}{\pi}\right) \mathrm{d}x = 1 + \tfrac{1}{\pi} \left[x - \tfrac{x^2}{2\pi}\right]_0^{\pi} = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}, \\
a_n &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \cos nx \, \mathrm{d}x + \tfrac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(1 - \tfrac{x}{\pi}\right) \cos nx \, \mathrm{d}x = \\
&= \tfrac{1}{n\pi} \left[\sin nx\right]_{-\pi}^{0} + \left[\tfrac{1}{n\pi} \left(1 - \tfrac{x}{\pi}\right) \sin nx - \tfrac{1}{n^2\pi^2} \cos nx\right]_0^{\pi} = \tfrac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}, \\
b_n &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \sin nx \, \mathrm{d}x + \tfrac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(1 - \tfrac{x}{\pi}\right) \sin nx \, \mathrm{d}x = \\
&= -\tfrac{1}{n\pi} \left[\cos nx\right]_{-\pi}^{0} - \left[\tfrac{1}{n\pi} \left(1 - \tfrac{x}{\pi}\right) \cos nx + \tfrac{1}{n^2\pi^2} \sin nx\right]_0^{\pi} = \tfrac{(-1)^n}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Fourierův rozvoj má tvar

$$f(x) \sim s(x) = \frac{3}{4} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos nx + \frac{(-1)^n}{n\pi} \sin nx \right).$$

(2) Graf součtové funkce $s(x)$ bude totožný s grafem periodického prodloužení $\tilde{f}(x)$ na obr. 5.1, neboť funkce $f(x)$ nemá uvnitř intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ žádné body nespojitosti. Grafy částečných součtů jsou na obr. 5.4. Všimněme si, že v okolí bodů nespojitosti vykazuje graf oscilace, které nevymizí ani při velkém počtu uvažovaných členů. Jde o tzv. Gibbsův jev diskutovaný v článku 5.6.3.



Obrázek 5.4: K příkladu 5.3.7: $s_5(x)$ (nahoře), $s_{15}(x)$ (uprostřed), $s_{50}(x)$ (dole)

(3) Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ obdržíme ze získaného rozvoje pro $x = \pi$:

$$s(\pi) = \frac{3}{4} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} \cdot (-1)^n = \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

(členy odpovídající sudým hodnotám n v předposledním výrazu se rovnají nule). Protože podle Dirichletovy věty konverguje řada v bodech nespojitosti k aritmetickému průměru jednostranných limit (bod $x = \pi$ je jedním z nich), musí současně platit $s(\pi) = \frac{1}{2}$. Porovnáním dostáváme

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$$

odkud

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5.4 Sinový a kosinový rozvoj

5.4.1 Sinový rozvoj. Je-li funkce $f(x)$ **lichá**, pak její Fourierův rozvoj obsahuje pouze sinové členy a platí:

$$f(x) \sim \sum_{1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Důkaz. Uvažujme stejně jako v předchozím výkladu Fourierův rozvoj funkce $f(x)$ na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$. Pro lichou funkci je také $f(x)\cos nx$ lichá funkce, a proto

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Současně $f(x)\cdot\sin nx$ bude sudá funkce, takže

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \dots\ .$$

V obou případech jde o důsledek vlastností určitého integrálu na intervalu souměrném podle bodu nula. □

5.4.2 Kosinový rozvoj. Je-li $f(x)$ **sudá** funkce, pak je její Fourierův rozvoj tvořen pouze kosinovými členy a platí:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Důkaz. Analogicky jako v důkazu předchozího tvrzení uvážíme, že tentokrát je $f(x)\cdot\sin nx$ lichá funkce, tudíž

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0, \quad n = 1, 2, \dots\ .$$

Naopak $f(x)\cos nx$ zůstane sudou funkcí a dostáváme

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \dots\ . \qquad \square$$

5.4.3 Sudé a liché prodloužení. Máme-li funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$, můžeme její rozvoj do Fourierovy řady na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ vytvořit v principu trojím způsobem.

1. Na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ doplníme pro $x \in \langle -\pi, 0\rangle$ funkci tak, abychom získali sudou funkci o periodě 2π. K ní pak vytvoříme obvyklým způsobem periodické prodloužení, které bude rovněž sudé. Podle článku 5.4.2 pak výpočtem obdržíme kosinový rozvoj.

2. Zadanou funkci doplníme pro $x \in \langle -\pi, 0\rangle$ tak, abychom získali funkci lichou. Periodizací obdržíme liché prodloužení, které podle 5.4.1 vede na sinový rozvoj.

3. Provedeme periodizaci přímo pro zadaný interval $\langle 0, \pi\rangle$. Výsledkem bude obecná Fourierova řada s periodou π. Řadám s jinou základní periodou než 2π je věnována kapitola 5.5.

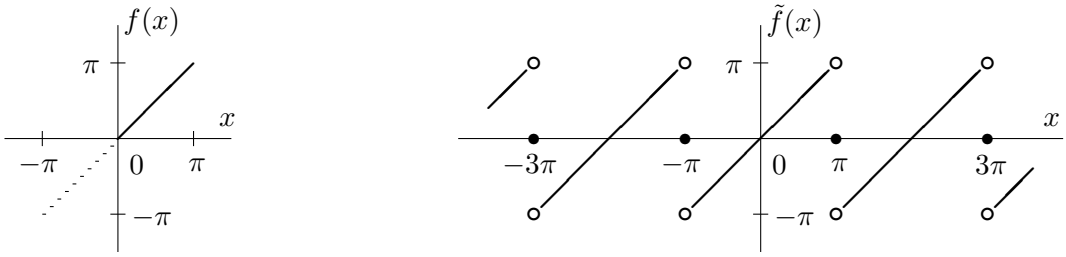
5.4.4 Příklad. Rozviňte funkci $f(x) = x$ do sinové a kosinové řady na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

Řešení.

1. Sinová řada odpovídá lichému periodickému prodloužení liché základní periody podle obr. 5.5. Výpočet bude zahrnovat jen koeficienty u sinových členů:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

   Sinový rozvoj má pak jednoduchý tvar



Obrázek 5.5: Liché prodloužení funkce $f(x) = x,\ x \in \langle 0, \pi \rangle$

$$f(x) \sim 2 \cdot \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx;$$

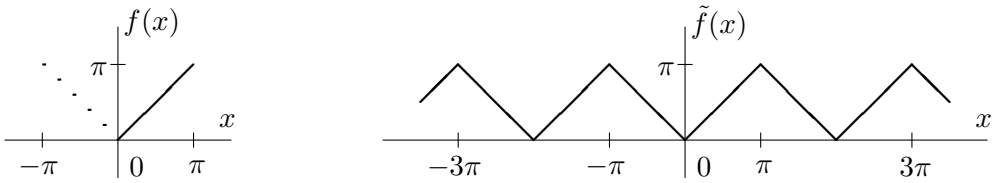
v bodech nespojitosti na rozhraní period konverguje k nule, která je aritmetickým průměrem jednostranných limit. Periodické prodloužení $\tilde{f}(x)$ je současně součtovou funkcí.

2. Pro kosinovou řadu počítáme pouze koeficienty a_0, a_n, neboť podle 5.4.2 jsou sinové složky rovny nule:

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{n\pi} \left[\tfrac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi, \\ a_n &= \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{\pi} \left[\tfrac{x}{n} \sin nx + \tfrac{1}{n^2} \cos nx \right]_0^{\pi} = \tfrac{2}{\pi} \tfrac{(-1)^n - 1}{n^2}. \end{aligned}$$

Rozvoj odpovídá sudému periodickému prodloužení, které vznikne periodizací sudé základní periody (obr. 5.6). Protože je tentokrát $\tilde{f}(x)$ spojitá funkce, je možno psát ve výsledku místo symbolu $\sim$ přímo rovnost:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx.$$



Obrázek 5.6: Sudé prodloužení funkce $f(x) = x,\ x \in \langle 0, \pi \rangle$

5.5 Fourierův rozvoj na obecném intervalu

5.5.1 Obecný trigonometrický ortogonální systém. V příkladu 5.1.6 (b) jsme ukázali, že systém

$$\{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots\}$$

je ortogonální na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Substitucí $x = \frac{\pi}{L} t$ obdržíme obecný trigonometrický systém na intervalu $\langle -L, L \rangle$ o délce $T = 2L$:

$$\left\{ 1,\ \cos \frac{\pi t}{L},\ \sin \frac{\pi t}{L},\ \cos \frac{2\pi t}{L},\ \sin \frac{2\pi t}{L},\ \ldots,\ \cos \frac{n\pi t}{L},\ \sin \frac{n\pi t}{L},\ \ldots \right\}.$$

Snadno lze dokázat, že provedená substituce zachová ortogonalitu systému. Upravíme-li popsaným způsobem vzorce 5.3.1, získáme následující zobecnění.

5.5.2 Fourierův rozvoj funkce s obecnou periodou. Mějme funkci $f(t)$ integrovatelnou na intervalu $\langle -L, L \rangle$. Řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right)$$

se nazývá Fourierův rozvoj funkce $f(t)$ na intervalu $\langle -L, L \rangle$ a pro jeho koeficienty platí vzorce

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} \, \mathrm{d}t, \quad n = 0, 1, 2, \ldots ;$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} \, \mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

5.5.3 Konvergence Fourierova rozvoje při uvedeném zobecnění se řídí stejnými zákonitostmi, jaké jsou formulovány v Dirichletově větě 5.3.4 pro interval $\langle -\pi, \pi \rangle$. To znamená, že pro funkci $f(t)$ bude platit na intervalu $\langle -L, L \rangle$, kde splňuje Dirichletovy podmínky, že

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right) = \begin{cases} f(t), & \text{je-li } f(t) \text{ spojitá,} \\ \frac{f(t+)+f(t-)}{2} & \text{v bodech nespojitosti.} \end{cases}$$

Vně intervalu $\langle -L, L \rangle$ řada konverguje k periodickému prodloužení $\tilde{f}(t)$, popřípadě k aritmetickým průměrům jednostranných limit v bodech nespojitosti.

5.5.4 Sudé a liché prodloužení funkce vně intervalu $\langle -L, L \rangle$ vytváříme stejně jako v případě základního intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Výsledkem bude opět kosinová nebo sinová řada. Způsob, jakým se aplikují vzorce pro Fourierovy koeficienty, předvedeme na konkrétní úloze.

5.5.5 Příklad. Je dána funkce $f(t) = (t-2)^2$, $t \in \langle 0, 2 \rangle$. Vyjádřete ji na zadaném intervalu

(a) obecnou Fourierovou řadou,

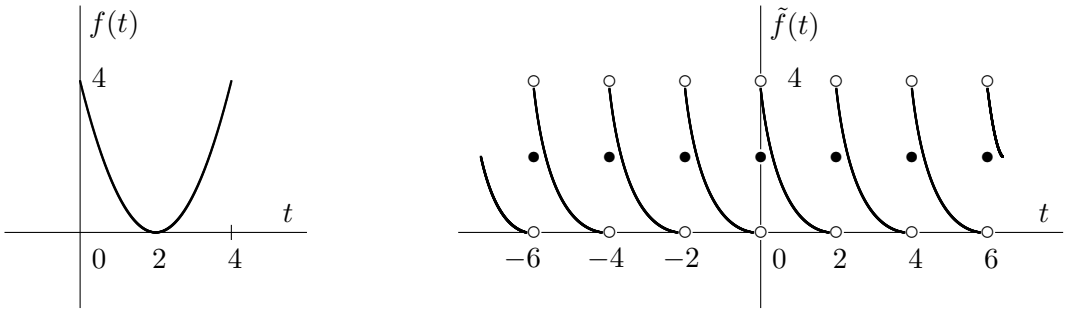
(b) sinovou řadou,

(c) kosinovou řadou.

(d) Použijte výsledek k určení součtu řady $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ve všech případech vytvořte grafy periodického prodloužení a zdůvodněte, proč budou současně součtovými grafy.

Řešení. Parabola $f(t) = (t-2)^2$ je na obr. 5.7 vlevo s vyznačeným úsekem v intervalu $\langle 0, 4 \rangle$. Zadaná funkce je spojitá, a proto její periodizací vzniknou body nespojitosti pouze na rozhraní period. Zde bude každá řada konvergovat k aritmetickým průměrům jednostranných limit. Periodické prodloužení bude totožné se součtovým grafem.



Obrázek 5.7: Obecné periodické prodloužení.

(a) V případě obecné Fourierovy řady opakujeme základní interval délky $T = 2$ a dojdeme k periodickému prodloužení, které je na obr. 5.7 vpravo. Fourierovy koeficienty spočítáme podle vzorců z článku 5.5.2 ($L = T/2 = 1$):

$$\begin{aligned}
a_0 &= \int_0^2 (t-2)^2 \,\mathrm{d}t = \tfrac{8}{3}, \\
a_n &= \int_0^2 (t-2)^2 \cdot \cos n\pi t \,\mathrm{d}t = \\
&= \left[\tfrac{(t-2)^2}{n\pi} \sin n\pi t - \tfrac{2}{n\pi}\left(-\tfrac{t-2}{n\pi} \cos n\pi t + \tfrac{1}{n^2\pi^2} \sin n\pi t\right)\right]_0^2 = \tfrac{4}{n^2\pi^2}, \\
b_n &= \int_0^2 (t-2)^2 \cdot \sin n\pi t \,\mathrm{d}t = \\
&= \left[-\tfrac{(t-2)^2}{n\pi} \cos n\pi t + \tfrac{2}{n\pi}\left(\tfrac{t-2}{n\pi} \sin n\pi t + \tfrac{1}{n^2\pi^2} \cos n\pi t\right)\right]_0^2 = \tfrac{4}{n\pi} \,.
\end{aligned}$$

Vyjádření funkce $f(t)$ obecným rozvojem má tvar

$$f(t) \sim \frac{4}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n\pi t}{n^2\pi^2} + \frac{\sin n\pi t}{n\pi} \right) , \quad t \in \langle 0, 2 \rangle.$$

(b) Abychom získali sinovou řadu, musíme k funkci $f(t)$ vytvořit liché periodické prodloužení. Jak vidíme na obr. 5.8, je jeho perioda $T = 4$, tj. $L = 2$. Při výpočtu koeficientů je nyní $a_0 = a_n = 0$ a dále počítáme opět opakovaně per partes:

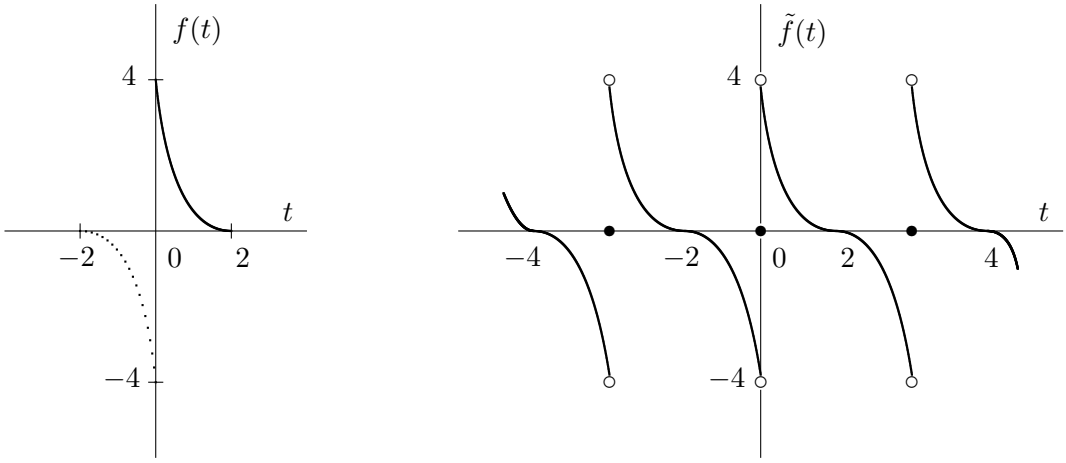
$$b_n = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 (t-2)^2 \sin \frac{n\pi t}{2} \,\mathrm{d}t = \ \ldots \ = \frac{8}{n\pi} - 16 \cdot \frac{1-(-1)^n}{n^3\pi^3} \,.$$

Výsledný sinový rozvoj napíšeme takto:

$$f(t) \sim 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} - 2 \cdot \frac{1-(-1)^n}{n^3\pi^3} \right) \sin \frac{n\pi t}{2} \,, \quad t \in \langle 0, 2 \rangle.$$

(c) Sudé periodické prodloužení na obr. 5.9 vede ke kosinovému rozvoji ($b_n = 0$). Také zde je $T = 4$, tj. $L = 2$:

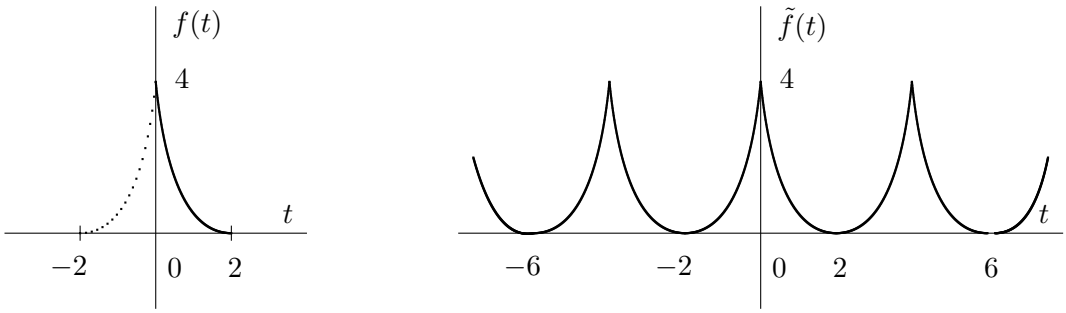
$$\begin{aligned}
a_0 &= 2 \cdot \tfrac{1}{2} \int_0^2 (t-2)^2 \,\mathrm{d}t = \tfrac{8}{3}, \\
a_n &= 2 \cdot \tfrac{1}{2} \int_0^2 (t-2)^2 \cos \tfrac{n\pi t}{2} \,\mathrm{d}t = \tfrac{16}{n^2\pi^2} \,.
\end{aligned}$$



Obrázek 5.8: Liché periodické prodloužení.

Kosinový rozvoj odpovídá spojité funkci $\tilde{f}(t)$ (viz obr. 5.9), a proto

$$f(t) = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{2}\,, \quad t \in \langle 0, 2 \rangle.$$



Obrázek 5.9: Sudé periodické prodloužení.

Povšimněme si, že rozvoje všech tří typů reprezentují funkci stejným způsobem na intervalu $(0, 2)$, kde konvergují k funkčním hodnotám. V krajních bodech jsou prvá dvě prodloužení nespojitá, takže obecná řada konverguje k hodnotě 2 a sinová řada k nule (aritmetické průměry jednostranných limit).

(d) K určení součtu číselné řady $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ můžeme použít buď rozvoj (a) nebo (c), v němž položíme $t = 0$. Konkrétně pro kosinovou řadu dostáváme

$$f(0) = \ 4 \ = \ \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,, \quad \text{odkud} \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5.6 Vybrané aplikace

5.6.1 Amplitudové a fázové spektrum. Mějme Fourierovu řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t), \quad \omega_n = \frac{n\pi}{L} = \frac{2n\pi}{T}.$$

Zavedeme-li novou dvojici koeficientů A_n, φ_n vztahy

$$a_n = A_n \sin \varphi_n, \quad b_n = A_n \cos \varphi_n,$$

dostáváme

$$a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t = A_n(\sin \varphi_n \cos \omega_n t + \cos \varphi_n sin \omega_n t) = A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n).$$

Je-li výchozí řada Fourierovým rozvojem některé funkce $f(t)$ na intervalu $\langle \alpha, \alpha + T \rangle$, můžeme psát

$$f(t) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n).$$

Získali jsme **amplitudově-fázový tvar** rozvoje ($A_0 = \frac{a_0}{2}$), který má uplatnění například při **harmonické analýze** signálů. Posloupnosti koeficientů $\{A_n\}_0^\infty$, $\{\varphi_n\}_1^\infty$ tvoří tzv. **amplitudové** a **fázové spektrum** funkce (signálu) $f(t)$. Snadno lze odvodit vztahy

$$A_n^2 = a_n^2 + b_n^2, \quad \sin \varphi_n = \frac{a_n}{A_n}, \quad \cos \varphi_n = \frac{b_n}{A_n},$$

z nichž složky spekter počítáme. Složky fázového spektra nabývají hodnot z intervalu $\langle -\pi, \pi)$, lze uvažovat i $\varphi_n \in \langle 0, 2\pi)$. Pro podrobnější výklad a praktické aplikace je možno doporučit například [ČV92], [US95].

5.6.2 Příklad. Určíme amplitudové a fázové spektrum periodické funkce $\tilde{f}(t)$ v příkladu 5.5.5 (a) (její graf je na obr. 5.7 vpravo).

Řešení. Fourierův rozvoj jsme našli ve tvaru

$$\tilde{f}(t) = \frac{4}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n\pi t}{n^2 \pi^2} + \frac{\sin n\pi t}{n\pi} \right), \quad t \in \mathcal{R}.$$

Máme tedy $a_0 = \frac{8}{3}$, $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}$, $b_n = \frac{4}{n\pi}$ a můžeme vypočítat amplitudové spektrum

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{4}{3}, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{4\sqrt{\pi^2 n^2 + 1}}{\pi^2 n^2}$$

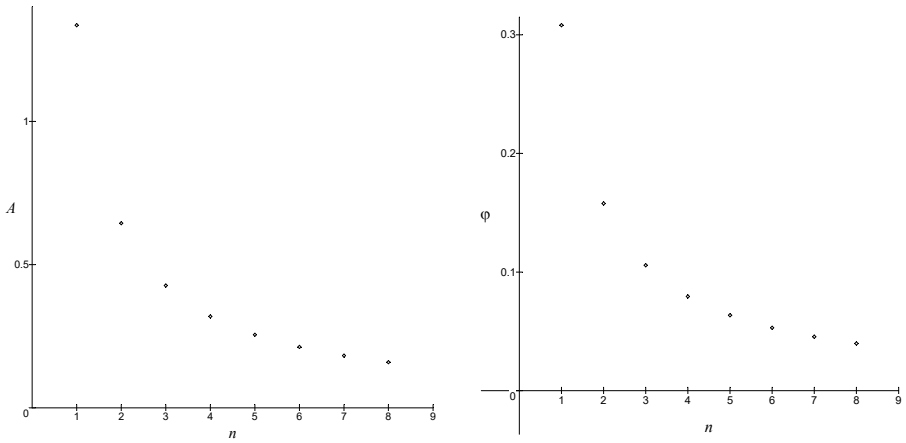
a také fázové spektrum:

$$\sin \varphi_n = \frac{a_n}{A_n} = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 n^2 + 1}}, \quad \cos \varphi_n = \frac{b_n}{A_n} = \frac{n\pi}{\sqrt{\pi^2 n^2 + 1}}.$$

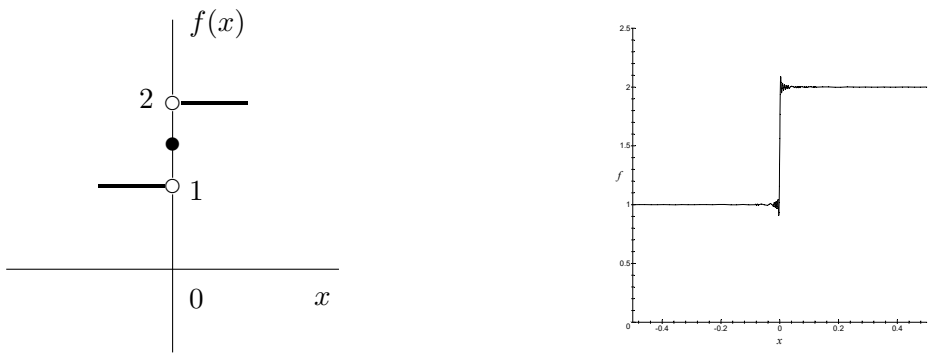
Protože je $a_n > 0$, $b_n > 0$, můžeme psát

$$\varphi_n = \arctan \frac{a_n}{b_n} = \arctan \frac{1}{n\pi}.$$

Grafy spekter jsou na obr. 5.10.



Obrázek 5.10: Amplitudové (vpravo) a fázové spektrum k příkladu 5.6.2.



Obrázek 5.11: Gibbsův jev.

5.6.3 Aproximace funkce trigonometrickým polynomem, Gibbsův jev. Použijeme-li k přibližnému vyjádření funkce m-tý částečný součet jejího Fourierova rozvoje, hovoříme o její aproximaci trigonometrickým polynomem. Vedle výhod této reprezentace, využívaných v některých numerických metodách, se můžeme setkat s jednou nepříjemnou vlastností, nazývanou **Gibbsův jev**. Jeho podstatou se nyní budeme zabývat.

Jak jsme již dříve ukázali, konverguje Fourierův rozvoj funkce v libovolném bodě nespojitosti k aritmetickému průměru jednostranných limit. V okolí takového bodu však konvergence není stejnoměrná[1] a dochází tak k „překmitu“ - nepřesnosti, kterou nelze odstranit. V praxi jsme projev Gibbsova jevu viděli na obr. 5.4, nyní budeme blíže demonstrovat jeho podstatu.

Pro jednoduchost se vrátíme k příkladu 5.3.3. Na obrázku 5.11 vlevo je část součtového grafu funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle -\pi, 0), \\ 2, & x \in \langle 0, \pi) \end{cases}$$

v okolí bodu nespojitosti $x = 0$; jde o výřez z obr. 5.3. Vpravo je aproximace na tomtéž intervalu pomocí pětiset členů Fourierova rozvoje, tj. výrazem

$$s_{500}(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{500} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin nx.$$

Oscilace v blízkém okolí bodu nula jsou dostatečně patrné. Nyní provedeme odhad jejich amplitudy a důkaz toho, že je nelze odstranit zvyšováním počtu členů aproximujícího trigonometrického

[1] Jako nepřímá ilustrace může sloužit rozbor stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí v příkladu 3.1.10.

polynomu. Budeme zkoumat m-tý částečný součet

$$\sigma_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin nx,$$

který dále upravíme:

$$\sigma_m(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{m} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{m} \int_0^x \cos(2n-1)t \, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{m} \cos(2n-1)t \right] \mathrm{d}t.$$

Dále použijeme známé součtové vzorce ([R95], I. díl, str. 78) k odvození vztahu

$$\sum_{n=1}^{m} \cos(2n-1)t = \frac{1}{2} \frac{\sin 2mt}{\sin t}$$

a nerovnost $1 < \frac{t}{\sin t}$, která plyne ze vztahu $\sin t < t$, $t \in (0, \pi)$. S jejich použitím dostáváme:

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2mt}{\sin t} \, \mathrm{d}t = \frac{2m}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2mt}{2mt} \cdot \frac{t}{\sin t} \, \mathrm{d}t > \frac{2m}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2mt}{2mt} \, \mathrm{d}t.$$

Po substituci $2mt = z$ získáme nerovnost

$$\sigma_m(x) > \frac{1}{\pi} \int_0^{2mx} \frac{\sin z}{z} \, \mathrm{d}z.$$

Zvolme nyní klesající posloupnost $x_m = \frac{\pi}{2m}$, jejíž členy se s rostoucím m blíží nule zprava. Integrál pak nabývá své maximální hodnoty pro její první člen a bude

$$\sigma_m(x) > \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin z}{z} \, \mathrm{d}z \doteq 0,59.$$

Přibližnou hodnotu integrálu můžeme určit použitím rozvoje do mocninné řady (viz příklad 4.4.9 a)). Získaný výsledek ukazuje, že v libovolné blízkosti bodu 0 lze vždy najít bod (volbou m) takový, že platí $\tilde{f}(x) > \frac{3}{2} + 0,59$. Protože očekávaná hodnota $\tilde{f}(x) = f(x) = 2$ pro $x \in (0, \pi)$ odpovídá odchylce 0,5 od střední hodnoty $\frac{3}{2}$, dosahuje chyba $\frac{9}{50} \approx 18\%$. Lze dokázat ([F69], str. 496), že tento výsledek má zcela obecnou platnost.

5.6.4 Periodické řešení diferenciálních rovnic. Mějme nehomogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$y'' + 2\kappa y' + \omega_0^2 y = f(t), \tag{5.1}$$

v níž κ a ω_0^2 jsou reálné konstanty. Je-li pravá strana harmonická funkce tvaru

$$f(t) = B \sin(\omega t + \varphi),$$

jde o rovnici nucených harmonických kmitů soustavy s vlastní frekvencí ω_0 a tlumením charakterizovaným veličinou κ. Řešení této úlohy (s příslušnými počátečními podmínkami) je známé z předchozího kurzu matematiky - viz například [VV97], kap. 3.9.

Uvažujme nyní situaci, kdy funkce $f(t)$ není periodická, avšak řešení, které hledáme, má splňovat periodické okrajové podmínky na zadaném intervalu $\langle 0, T \rangle$:

$$y(0) = y(T), \quad y'(0) = y'(T).$$

Lze dokázat, že v takovém případě má rovnice (5.1) periodické řešení s periodou T. K jeho získání je třeba vyjádřit pravou stranu $f(t)$ jejím Fourierovým rozvojem

$$f(t) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos \omega_n t + \beta_n \sin \omega_n t) \ , \quad t \in \langle 0, T \rangle,$$

kde $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$ a α_n, β_n jsou známé koeficienty. Také řešení $y(t)$ bude superpozicí nekonečně mnoha harmonických složek ve formě rozvoje

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \ , \quad t \in \langle 0, T \rangle.$$

Dosadíme-li do rovnice (5.1) toto řešení a jeho derivace

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n \omega_n \sin \omega_n t + b_n \omega_n \cos \omega_n t) \, ,$$

$$y''(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \omega_n^2 \cos \omega_n t + b_n \omega_n^2 \sin \omega_n t\right) ,$$

můžeme neznámé koeficienty a_0, a_n, b_n určit porovnáním členů stejného typu na levé a pravé straně:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \omega_n^2 \cos \omega_n t + b_n \omega_n^2 \sin \omega_n t\right) + 2\kappa \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n \omega_n \sin \omega_n t + b_n \omega_n \cos \omega_n t) +$$

$$+ \omega_0^2 \frac{a_0}{2} + \omega_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos \omega_n t + \beta_n \sin \omega_n t) \, .$$

Pro absolutní členy platí

$$\omega_0^2 \frac{a_0}{2} = \frac{\alpha_0}{2} \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{\alpha_0}{\omega_0^2}.$$

Porovnání koeficientů u kosinových členů vede k rovnici

$$-a_n \omega_n^2 + 2\kappa b_n \omega_n + \omega_0^2 a_n = \alpha_n,$$

v případě sinových členů dostáváme

$$-b_n \omega_n^2 - 2\kappa a_n \omega_n + \omega_0^2 b_n = \beta_n.$$

Odtud pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ obdržíme tyto vzorce:

$$a_n = \frac{\alpha_n(\omega_0^2 - \omega_n^2) - 2\kappa \omega_n \beta_n}{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\kappa^2 \omega_n^2}, \qquad b_n = \frac{\beta_n(\omega_0^2 - \omega_n^2) + 2\kappa \omega_n \alpha_n}{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\kappa^2 \omega_n^2}.$$

Nyní není problém napsat Fourierův rozvoj řešení $y(t)$. V praxi můžeme buď použít výsledné vzorce nebo na konkrétní zadání aplikovat popsaný algoritmus.

Získaný výsledek má platnost s výjimkou případu, kdy $(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\kappa^2 \omega_n^2 = 0$. Tato situace nastane při netlumených vlastních kmitech ($\kappa = 0$) a současně pro $\omega_0 = \omega_n$, tedy jsou-li funkce $\cos \omega_n t$ a $\sin \omega_n t$ řešením homogenní rovnice. V takovém případě se při superpozici uplatní neharmonická složka

$$t(\cos \omega_n t + \sin \omega_n t),$$

jejíž koeficienty stanovíme zvlášť po dosazení tohoto výrazu do rovnice (viz příklad 5.6.6).

5.6.5 Příklad. Najděte na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ periodické řešení rovnice

$$y'' + 30y = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} t, & t \in \langle 0, 1), \\ 0, & t \in \langle 1, 2 \rangle. \end{cases}$$

Řešení. Zřejmě je $\kappa = 0$, $\omega_0^2 = 30$. Pro Fourierův rozvoj funkce $f(t)$ na zadaném intervalu je $T = 2$, $\omega_n = n\pi$. Výpočtem odvodíme, že

$$f(t) \sim \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos n\pi t + \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin n\pi t \right) .$$

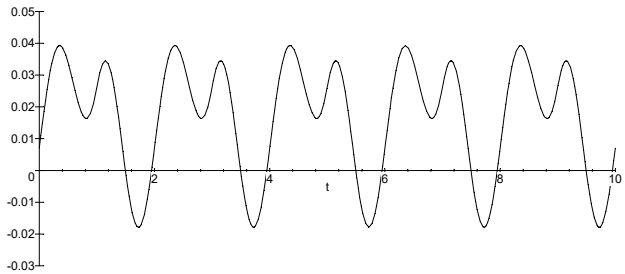
Máme tedy $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha_n = -\frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}$, $\beta_n = \frac{(-1)^n}{\pi n}$. Řešení diferenciální rovnice získáme ve tvaru řady

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t)\,,$$

pro jejíž koeficienty podle článku 5.6.4 platí:

$$a_0 = \frac{1}{60}, \quad a_n = \frac{\alpha_n}{30 - n^2\pi^2}, \quad b_n = \frac{\beta_n}{30 - n^2\pi^2}.$$

Na obr. 5.12 je graf řešení na intervalu $\langle 0, 10\rangle$, kterým demonstrujeme periodicitu.



Obrázek 5.12: Graf periodického řešení k příkladu 5.6.5.

5.6.6 Příklad. Najděte periodické řešení rovnice

$$y'' + y = \begin{cases} t, & t \in \langle 0, \pi\rangle, \\ 2\pi - t, & t \in \langle \pi, 2\pi\rangle. \end{cases}$$

Řešení. Vytvoříme-li periodické prodloužení pravé strany vně intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, obdržíme funkci $\tilde{f}(t)$ ve stejné podobě jakou vidíme na obr. 5.6 vpravo. Tam byla získána jako sudé prodloužení funkce $f(x) = x$ vně intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Fourierův rozvoj nalezený v příkladu 5.4.4 můžeme beze změny použít i v této úloze:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nt.$$

Je tedy $\omega_n = n$, $\alpha_0 = \pi$, $\alpha_n = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}$, $\beta_n = 0$ a dále $\kappa = 0$, $\omega_0^2 = 1$. Perioda hledaného řešení bude $T = 2\pi$:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\,.$$

Po dosazení do rovnice získáme pro $n \neq 1$ vztahy

$$a_0 = \alpha_0, \quad a_n = \frac{\alpha_n}{1 - n^2} = \frac{2}{\pi}\frac{1 - (-1)^n}{n^2(n^2 - 1)}, \quad b_n = 0.$$

Pro $n = 1$ je nutné uvažovat složku rozvoje ve tvaru

$$h_1(t) = t(a_1 \cos t + b_1 \sin t),$$

protože funkce $\cos t$, $\sin t$ jsou řešením homogenní rovnice $y'' + y = 0$. Výpočet koeficientů:

$$\begin{aligned} h_1'(t) &= (a_1 \cos t + b_1 \sin t) + t(-a_1 \sin t + b_1 \cos t), \\ h_1''(t) &= -2a_1 \sin t + 2b_1 \cos t - t(a_1 \cos t + b_1 \sin t). \end{aligned}$$

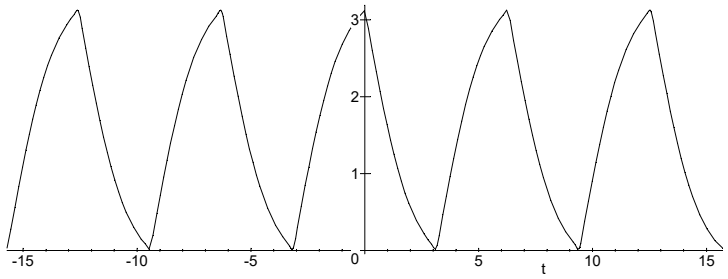
Po dosazení do rovnice a úpravě

$$-2a_1 \sin t + 2b_1 \cos t = -\frac{4}{\pi} \cos t,$$

odkud $a_1 = 0,\ b_1 = -\frac{2}{\pi}$. Výsledné řešení zapíšeme takto:

$$y(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} t \sin t + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2(n^2-1)} \cos nt.$$

Jeho graf je na obr. 5.13.



Obrázek 5.13: Graf periodického řešení k příkladu 5.6.6.

5.7 Neřešené úlohy

5.7.1 Dokažte, že pro každou periodickou funkci $f(x)$ a libovolnou reálnou kontantu c platí: je-li T perioda funkce, pak

$$\int_0^T f(x+c)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.7.2 Vyšetřete ortogonalitu systémů funkcí:

$$\text{a) } \{\sin nx\}_1^\infty,\ x \in \langle 0, \pi\rangle, \qquad \text{b) } \{\cos^n x\}_0^\infty,\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

5.7.3 Určete Fourierův rozvoj zadané funkce na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$:

$$\text{a) } f(x) = 1 - \frac{|x|}{\pi}, \qquad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -\pi, 0\rangle, \\ x, & x \in \langle 0, \pi\rangle \end{cases}$$

5.7.4 Najděte Fourierův rozvoj funkce na určeném intervalu:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0, 1\rangle, \\ 1, & x \in (1, 2); \end{cases} \qquad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, 1\rangle, \\ 0, & x \in \langle 1, 2\rangle; \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \langle 0, \pi\rangle, \\ 0, & x \in \langle \pi, 2\pi\rangle; \end{cases} \qquad \text{d) } f(x) = x^2, \quad x \in \langle 0, 1\rangle.$$

5.7.5 Je dána funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in \langle 0,1\rangle, \\ 0, & x \in (1,2). \end{cases}$$

Nakreslete grafy periodických prodloužení (obecné, sudé, liché) a vytvořte ve všech případech Fourierův rozvoj.

5.7.6 Vytvořte určený typ rozvoje:

a) $f(x) = 1 - x^2, \quad x \in \langle 0,1\rangle,$ sinová řada;

b) $f(x) = x^2, \quad x \in \langle 0,\pi\rangle,$ kosinová řada;

c) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0,1\rangle, \\ 2-x, & x \in \langle 1,2\rangle, \end{cases} \quad x \in \langle 0,2\rangle,$ kosinová řada;

d) $f(x) = \begin{cases} x-\pi, & x \in \langle 0,\pi\rangle, \\ 0, & x \in \langle \pi,2\pi\rangle, \\ x-2\pi, & x \in \langle 2\pi,3\pi\rangle \end{cases} \quad x \in \langle 0,3\pi\rangle,$ sinová i kosinová řada.

5.7.7 Určete amplitudové a fázové spektrum rozvoje z příkladu
a) 5.2.6, b) 5.5.5 (c), c) 5.3.3,

5.7.8 Najděte periodická řešení diferenciálních rovnic:

a) $y'' + 2y' + 2y = f(t); \quad f(t)$ stejná jako v příkladě 5.6.6,

b) $y'' + 4y = |t|, \quad t \in \langle -1,1\rangle,$

c) $y'' + 5y' + 4y = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0,\pi), \\ 0, & x \in \langle \pi,2\pi\rangle, \end{cases}$

d) $y'' + 9y = f(t),$ pravá strana stejná jako v příkladě c).

5.7.9 Výsledky.

5.7.1. Návod: použijte substituci $x + c = u$ a výsledek příkladu 5.1.8.

5.7.2. a) ortogonální systém, b) systém není ortogonální.

5.7.3.

$$\text{a) } \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad \text{b) } \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right).$$

5.7.4.

$$\text{a) } \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}, \quad \text{b) } \tfrac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{(-1)^n-1}{\pi^2 n^2}\cos n\pi x - \tfrac{(-1)^n}{\pi n}\sin n\pi x\right),$$

$$\text{c) } \tfrac{1}{\pi} + \tfrac{1}{2}\sin x - \tfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}, \quad \text{d) } \tfrac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{\cos 2\pi nx}{\pi^2 n^2} - \tfrac{\sin 2\pi nx}{\pi n}\right).$$

5.7.5. Obecné periodické prodloužení:

$$f(x) \sim \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos n\pi x + \frac{1}{\pi n}\sin n\pi x\right);$$

sudé prodloužení (kosinová řada):

$$f(x) \sim \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right) \cos \frac{n\pi x}{2};$$

liché prodloužení (sinová řada):

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2}\right) \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

5.7.6.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} + \frac{4}{\pi^3} \frac{1-(-1)^n}{n^3}\right) \sin n\pi x,$

b) $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx,$

c) $\frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right) \cos \frac{n\pi x}{2},$

d) sinová řada $\frac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n] \left(\frac{3}{n^2} \sin \frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{n}\right) \sin \frac{nx}{3},$

kosinová řada $\frac{6}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{3}\right) \cos \frac{nx}{3}.$

5.7.7. a) $A_n = \frac{1}{n^3}\sqrt{n^2+1}$, $\varphi_n = (-1)^n \arctan n$; protože je $\cos \varphi_n > 0$, bude $\varphi_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ pro n sudé a $\varphi_n \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ pro n liché.
b) $A_0 = \frac{4}{3}$, $A_n = \frac{16}{\pi^2 n^2}$, $\varphi_n = \frac{\pi}{2}$,
c) $A_0 = \frac{3}{2}$, $A_n = \frac{2}{n\pi}$ pro n liché, $A_n = 0$ pro n sudé, $\varphi_n = 0$ pro n liché (pro n sudé není definováno).

5.7.8.

a) $y(t) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^4+4} \left(\frac{n^2-2}{n^2} \cos nt - \frac{2}{n} \sin nt\right),$

b) $y(t) = \frac{1}{8} - \frac{2}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2(4-\pi^2 n^2)} \cos n\pi t,$

c) $y(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^4+17n^2+16} \left(5 \cos nt + \frac{n^2-4}{n} \sin nt\right),$

d) $y(t) = \frac{1}{18} + \frac{1}{4\pi} \sin t - \frac{1}{9\pi} t \cos 3t + \frac{1}{2\pi} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)(2-n-n^2)}.$

Literatura

[DS96] Dobrovská, V. - Stach, S.: *MATEMATIKA II. Diferenciální počet funkcí jedné a více proměnných.* VŠB–TU Ostrava, 1996

[ČV92] Častová, N. - Vlček, J.: *Funkce komplexní proměnné a integrální transformace.* VŠB-TU Ostrava, 1992

[F69] Fichtěngolc, G. M.: *Kurs differencialnovo i intěgralnovo isčislenija III.* Nauka, Moskva 1969

[H90] Holenda, J.: *Řady.* SNTL Praha, 1990 (Matematika pro vysoké školy technické, sešit XII)

[J55] Jarník, V.: *Diferenciální počet I.* NČSAV, Praha 1955

[KK69] Kufner, A. - Kadlec, J.: *Fourierovy řady.* Academia, Praha 1969

[L69] Laitoch, M.: *Posloupnosti a řady.* SPN Praha 1969 (pro Univerzitu J. E. Purkyně, Brno)

[P85] Přikryl, P.: *Numerické metody matematické analýzy.* SNTL Praha, 1985 (Matematika pro vysoké školy technické, sešit XXIV)

[R95] Rektorys, K. a spolupracovníci: *Přehled užité matematiky I, II.* Prometheus, Praha 1995

[US95] Uhlíř, J. - Sovka, P.: *Číslicové zpracování signálů.* ČVUT Praha, 1995

[VV97] Vlček, J. – Vrbický, J.: *Diferenciální rovnice. Matematika IV.* VŠB - TU Ostrava, Ostrava 1997

Název: Řady

Katedra: Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, Katedra matematiky

Autoři: Jaroslav Vlček, Jiří Vrbický, Jakub Stryja

Místo, rok, vydání: Ostrava, 2020, 2. vydání

Počet stran: 72

Vydala: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava

Neprodejné

ISBN 978-80-248-4392-6