АСИМПТОТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ З ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рашевський М.О.

Побудовано асимптотичні розв'язки задачі оптимального керування лінійними системами з повільно змінними параметрами. За допомогою принципу максимуму Понтрягіна та асимптотичного методу розв'язано задачу оптимальної корекції для системи із нестабільним спектром. Системи керування із нестабільним спектром та системи із точками повороту почали досліджуватися наприкінці минулого століття. Інтегрування таких систем потребує використання багатомасштабних методів побудови асимптотичного розв'язку. У статті досліджено випадок наявності у системі точок повороту. Дано оцінку різниці між точним та побудованим наближенням розв'язком. Проаналізовано вплив нестабільності спектру на розв'язок системи.

Ключові слова: система автоматичного керування, асимптотичні розв'язки, точка повороту, задача оптимальної корекції.

Вступ. Система оптимального керування, що описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(\tau, \varepsilon)}{d\tau} = A(\tau, \varepsilon)x(\tau, \varepsilon) + B(\tau, \varepsilon)u(\tau, \varepsilon) \quad (1)$$

неодноразово досліджувались [1; 2; 4; 6] у різних припущеннях про її коефіцієнти. Тут $x(\tau, \varepsilon)$ – невідомий n - вимірний вектор, $A(\tau, \varepsilon)$ та $B(\tau, \varepsilon)$ – відповідно $n \times n$ та $n \times r$ - матриці динамічних коефіцієнтів системи, що є функціями повільного часу $\tau = \varepsilon t$, $\tau \in [0; L]$, $L < +\infty$, $\varepsilon > 0$ – дійсний малий параметр; $u(\tau, \varepsilon)$ – r - вимірний вектор керування. Наступну задачу теорії оптимального керування називають задачею оптимальної корекції [5, стор. 370]. Необхідно вибрати керування $u(\tau, \varepsilon)$, що переводить систему (1) із початкового стану (точки x_0 n - вимірного простору)

$$x(0, \varepsilon) = x_0 \quad (2)$$

у точку

$$x(T, \varepsilon) = x_T \quad (3)$$

за фіксований час T , забезпечуючи при цьому мінімум функціоналу

$$I = \int_0^T (W(\tau, \varepsilon)x \cdot x + C(\tau, \varepsilon)u \cdot u) d\tau, \quad (4)$$

де $W(\tau, \varepsilon)$ та $C(\tau, \varepsilon)$ – додатно означені матриці. Припускалося, що матриці $A(\tau, \varepsilon)$, $B(\tau, \varepsilon)$, $W(\tau, \varepsilon)$ та $C(\tau, \varepsilon)$ зображуються асимптотичними рядами вигляду

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(\tau).$$

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Система (1) є системою рівнянь з

повільно змінними коефіцієнтами, тому, як правило, не зводиться до квадратур. Для побудови її розв'язку використовуються різні наближені методи. Одні з таких методів – асимптотичні, в яких будується наближення точного розв'язку за степенями малого параметра ε [1; 5; 6].

Сформульована задача вивчалася [5, стор. 370; 6, стор. 84] у зв'язку із практичними застосуваннями, зокрема у задачах корекції орбіт штучних супутників, керування в економічних системах тощо. При цьому вимагалось, щоб спектр матриці $A_0(\tau)$ був стабільним на досліджуваному проміжку, тобто щоб корені характеристичного рівняння

$$P(\lambda, \tau) \equiv \det \|A_0(\tau) - \lambda E\| = 0$$

зберігали постійну кратність і не дорівнювали нулю в жодній точці вказаного проміжку. Тут E – одинична матриця. У роботах [5; 6] побудовані асимптотичні розв'язки системи (1) у припущенні, що корені характеристичного рівняння є простими або тотожно кратними на $[0; L]$.

Точка досліджуваного проміжку, де будь-який із коренів полінома $P(\lambda, \tau)$ дорівнює нулю, називають точкою нестабільності спектру [2; 4], якщо два або більше коренів дорівнюють нулю (або збігаються), то говориться про точки повороту [3; 4; 5; 7; 8]; інші назви – перехідні точки, точки звороту. Останні не є особливими точками для розв'язку системи, а лише для його асимптотичного зображення. Тому проблема точок повороту у теорії

асимптотичного інтегрування систем розроблялася упродовж минулого століття [3; 4; 7; 8], найбільш інтенсивно у 60-80-х роках, і не втратила актуальності в нинішньому столітті. Саме цій проблемі присвячені ряд робіт В.П. Маслова, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, М.І. Шкіля, В.П. Яковця, П.Ф. Самусенка, А.І. Шафаревича та інших авторів. Вивчення систем керування із точками повороту розпочалося роботою [3]. Хоча спектральні особливості, як зазначалося вище, є лише особливостями для асимптотичного зображення розв'язку системи рівнянь, проте ці особливості є наслідком деяких ефектів, що виникають у випадку нестационарних систем через нестабільність у спектрі головної матриці. Зокрема, нестабільність є причиною виникнення так званих перехідних шарів [2]. Розглянута у [2] нестабільність є окремим випадком точки повороту, якщо два чи більше коренів збігаються, перетворюючись в нуль. Побудова асимптотичного розв'язку в цьому випадку ускладнюється порівняно із випадком стабільного спектру. Побудові асимптотичного розв'язку системи керування із точками повороту і присвячено статтю. При постановці задачі (1) – (4) головну роль відіграє спектр записаної далі матриці $D_0(\tau)$ (формула 7).

Мета. Метою дослідження є побудова асимптотичного зображення розв'язку системи (1) при умовах (2) – (4), тобто задачі оптимальної корекції при наявності нестабільності у спектрі головної матриці системи (1), що спричиняє точку повороту у системі (6).

Матеріали та методи. У цій роботі будується асимптотичне зображення розв'язку задачі за умови нестабільного спектру головної матриці системи, а саме – за наявності точки повороту $\tau = 0$. Надалі вимагатимемо виконання таких умов.

1⁰. Матриці $A_k(\tau)$, $B_k(\tau)$, $W_k(\tau)$, $C_k(\tau)$ є нескінченно диференційовними на сегменті $[0; L]$; $k \geq 0$.

2⁰. Корені $\lambda_1(\tau)$, $\lambda_2(\tau)$, ..., $\lambda_n(\tau)$ рівняння $P(\lambda, \tau) = 0$ є різними на $(0; L]$ і не дорівнюють нулю.

Застосовуючи принцип максимуму Понтрягіна до задачі (1), (2), введемо до розгляду гамільтоніан

$$H = (A(\tau, \varepsilon)x, \psi) + (B(\tau, \varepsilon)u, \psi) - (C(\tau, \varepsilon)u, u) - (W(\tau, \varepsilon)x, x),$$

де ψ – n -вимірний вектор спряжених змінних. Згідно із [5; 7] функція

$$u^0(\tau, \varepsilon) = (2C)^{-1}(\tau, \varepsilon) \cdot B'(\tau, \varepsilon) \cdot \psi \quad (5)$$

надає гамільтоніану максимального значення, отже її побудова є задачею дослідження; тут і далі значком t позначено транспонування. Розглянемо $2n$ -вимірний вектор $y(\tau, \varepsilon) = (x, \psi)^t$. З урахуванням виразу для u^0 , дістанемо векторно-матричне рівняння

$$\frac{dy(\tau, \varepsilon)}{dt} = D(\tau, \varepsilon)y, \quad (6)$$

$y(0, \varepsilon) = (x_0, 0)$. Тут

$$D(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} A & 0,5 \cdot BC^{-1}B' \\ 2W & -A^t \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D_k(\tau) \quad (7)$$

є квадратною матрицею порядку $2n$. Характер асимптотичного зображення інтеграла системи (2), як зазначалося вище, істотно залежить від спектру головної матриці $D_0(\tau) = D(\tau, 0)$.

Припустивши, що спектр матриці $A_0(\tau)$ є нестабільним, розглянемо відмінності у побудові асимптотичного зображення розв'язку задачі (1) – (3). Нехай виконано таку умову.

3⁰. Одна із функцій $\lambda_1(\tau)$, $\lambda_2(\tau)$, ..., $\lambda_n(\tau)$ дорівнює нулю у точці $\tau = 0$.

Подібну умову розглянуто у роботі [2, стор. 311], там припускалося, що один із коренів перетворюється в нуль на проміжку, що міститься в $[0; L]$, і для ілюстрації реальності зроблених припущень розглянуто скалярне рівняння

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = -x + \chi(t)u + \varepsilon f(t), \quad x(0) = x^0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

із задачею мінімуму функціоналу

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + u^2) E_\varepsilon(1 - \chi; 1, t) dt \rightarrow \min,$$

де
$$E_\varepsilon(\mu; \alpha, \beta) = \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_\alpha^\beta \mu(x) dx\right).$$

Нестабільність спектру матриці $D_0(\tau)$ у розумінні [2, 4] тут гарантується наявністю швидкозмінного множника $E_\varepsilon(\mu; \alpha, \beta)$. Проте навіть у простому прикладі із матрицею $A(t) = \text{diag}\{0, \lambda(t)\}$, $\lambda(t) \neq 0$, матимемо таку матрицю $D(t)$:

$$D(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \text{яка міститиме}$$

жорданову клітину. Матрицею перетворення

$$T(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(2\lambda)^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ вона зводиться до вигляду } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \text{ і метод роботи}$$

[2] не дає можливості побудувати асимптотичний розв'язок задачі. Там вимагається, щоб матриця $D(t)$ також допускала діагоналізацію. Отже, більш реальною є ситуація наявності жорданової клітини в матриці $D_0(0)$. Тому розглянемо випадок виконання такої умови.

4⁰. Власні числа $\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \dots, \lambda_{2n}(\tau)$ матриці $D_0(\tau)$ є різними на $(0; L]$ і $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = 0$, причому $D_0(0)$ містить жорданову клітину довжини 2.

Згідно з [1], існує невідроджене перетворення

$$y(\tau, \varepsilon) = P(\tau, \varepsilon)z(\tau, \varepsilon),$$

що зводить матрицю $D_0(\tau)$ системи (6) до блочно-діагонального вигляду

$$\text{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(\tau, \varepsilon) & 0 \end{pmatrix}; \lambda_3(\tau, \varepsilon), \lambda_4(\tau, \varepsilon), \dots, \lambda_{2n}(\tau, \varepsilon)\right\}.$$

Асимптотичне зображення розв'язку системи з такою матрицею запишеться у вигляді $(z_1(\tau, \varepsilon), z_2(\tau, \varepsilon), z_3(\tau, \varepsilon), \dots, z_{2n}(\tau, \varepsilon))$, де згідно з [1],

$z_k(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^k u_s^{(k)}(\tau) \exp\{\varepsilon^{-1} \int_0^{\tau} \lambda_k(t) dt\} + \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^k p_s^{(k)}(\tau)$, $k = 3, 4, \dots, 2n$; невідомі коефіцієнти $u_s^{(k)}(\tau)$ визначаються описаним там методом. У припущенні, що

5⁰. $a(\tau, 0) = \tau a_1(\tau)$, $a_1(0) \neq 0$, перші дві компоненти вектора будуються за допомогою функцій Ейрі [4; 7]:

$$z_1(\tau, \varepsilon) = x_{11}(\tau, \varepsilon) + x_{21}(\tau, \varepsilon) + p(\tau, \varepsilon), z_2(\tau, \varepsilon) = \varepsilon z_1, \\ x_{i1}(\tau, \varepsilon) = \left(\sum_{j=-2}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{3}} v_{i1}^j(t) \right) u_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \zeta(t)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{j=-2}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{3}} w_{i1}^j(t) \right) \times \\ \times u_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \zeta(t)), \quad \zeta(t) = \left(\frac{3}{2} \int_0^t \sqrt{a_0(s)} ds \right)^{2/3};$$

$u_i(t)$ – функції Ейрі [7], $i = 1, 2$. Коефіцієнти останніх рядів визначаються згідно з [4; 7] із диференціальних рівнянь. Зокрема,

$$v_{i1}^0(t) = \frac{1}{\sqrt{\zeta'(t)}} \text{ch}\left(\int_0^t \alpha(s) ds\right), w_{i1}^0(t) = \frac{1}{\sqrt{\zeta(t)\zeta'(t)}} \times$$

$$\times \text{sh}\left(\int_0^t \alpha(s) ds\right), \alpha(t) = \frac{a_1(t)}{2\sqrt{a_0(t)}}.$$

Вказані коефіцієнти будуватимемо так, щоб задовольнити початкову умову:

$$x_{11}(0, \varepsilon) + x_{21}(0, \varepsilon) + p(0, \varepsilon) = y_0,$$

$$x_{11}'(0, \varepsilon) + x_{21}'(0, \varepsilon) + p'(0, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} y_1.$$

Для цього необхідно визначити останній доданок $p(\tau, \varepsilon)$ у виразі для z_1 . Згідно з [4]

$$p(t, \varepsilon) = \sum_{j=-2}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{3}} g_j^1(t, \tau);$$

$$g_{-2}^1(t, \tau) = H(t) \int_{+\infty}^{\tau} K(\tau, s) ds, H(t) = (\zeta'(t))^{-2} F_1(t); g_{-1}^1(t, \tau) = -(\zeta'(t))^{-2} a_1(t) \times$$

$$\times H(t) \int_{-\infty}^{\tau} K(\tau, s) \int_{-\infty}^s K(\tau, s_1) ds_1;$$

$$g_0^1(t, \tau) = -(\zeta'(t))^{-2} a_1(t) H(t) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\tau} K(\tau, s) \int_{-\infty}^s K(\tau, s_1) \int_{-\infty}^{s_1} K(\tau, s_2) ds ds_1 ds_2;$$

$$K(\tau, s) = u_2(\tau) u_1(s) - u_1(\tau) u_2(s).$$

Отже, розв'язок системи рівнянь містить функції Ейрі під знаками інтегралів, які не спрощуються і обчислюються асимптотичними методами.

Таким чином побудовано інтегральну матрицю системи (6):

$$\Phi(\tau, \varepsilon) = P(\tau, \varepsilon) \text{diag}\{z_1, z_2, \dots, z_{2n}\}.$$

Має місце асимптотична оцінка різниці між інтегральною матрицею та m -наближенням:

$$\|\Phi(\tau, \varepsilon) - \Phi_m(\tau, \varepsilon)\| \leq C \varepsilon^{\frac{m}{3}}.$$

Маючи інтегральну матрицю системи (6) $\Phi(\tau, \varepsilon) = \|\Phi_{ij}(\tau, \varepsilon)\|_{i,j=1}^{2n,n}$, можна записати вирази для невідомих векторів:

$$x(\tau, \varepsilon) = \left(\sum_{i=1}^{2n} \Phi_{1i} a_i, \dots, \sum_{i=1}^{2n} \Phi_{ni} a_i \right), \\ \psi(\tau, \varepsilon) = \left(\sum_{i=1}^{2n} \Phi_{n+1i} a_i, \dots, \sum_{i=1}^{2n} \Phi_{2ni} a_i \right),$$

де a_i – координати сталого вектора, які визначаються із крайових умов як розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} x_0^i = \sum_{j=1}^{2n} \Phi_{ij}(0) a_j, \\ x_T^i = \sum_{j=1}^{2n} \Phi_{ij}(T) a_j. \end{cases}$$

Далі використаємо метод, описаний у роботі [6, стор. 93] для побудови асимптотичного зображення синтезу

оптимального керування. Знайдемо невідомі вектори $x(\tau, \varepsilon)$ та $\psi(\tau, \varepsilon)$, а отже і вектор керування $u(\tau, \varepsilon)$ з асимптотичними оцінками:

$$x_m(\tau, \varepsilon) = \Phi_{m,(1)}(\tau, \varepsilon) \cdot a + O(\varepsilon^{m/3}),$$

$$u_m^0(\tau) = (2C)^{-1}(\tau, \varepsilon) \cdot B'(\tau, \varepsilon) \cdot \Phi_{m,(2)}(\tau, \varepsilon) \times$$

$$\times a + O(\varepsilon^{m/3}).$$

Тут $\Phi_m(\tau, \varepsilon) = (\Phi_{m,(1)}(\tau, \varepsilon); \Phi_{m,(2)}(\tau, \varepsilon))$, а також асимптотичну формулу для функціонала:

$$I_m = \int_0^T ((W(\tau, \varepsilon)x_m \cdot x_m) + C(\tau, \varepsilon)u_m^0 \cdot u_m^0) dt$$

$$+ O(\varepsilon^{(m-1)/3}).$$

Виключивши параметр a із записаних вище виразів для x_m та u_m , дістанемо асимптотичне зображення для синтезу оптимального керування:

$$u_m^0(\tau, x, \varepsilon) = (2C)^{-1}(\tau, \varepsilon) \cdot B'(\tau, \varepsilon) \cdot \Phi_{m,(2)}(\tau, \varepsilon) \times$$

$$\times \Phi_{m,(1)}^{-1}(\tau, \varepsilon) \cdot x_m + O(\varepsilon^{m/3}).$$

Таким чином знайдено асимптотичне зображення вектора оптимального керування для задачі оптимальної корекції системи (1). Наявність в інтегральній матриці від'ємних степенів малого параметра свідчить про необмеженість отриманого розв'язку при $\varepsilon \rightarrow 0$, тобто розв'язок матиме так званий сплиск [2], що необхідно враховувати у конкретних системах.

У припущеннях, що

6⁰. Принаймні дві функції $\lambda_i(\tau)$ і $\lambda_j(\tau)$ збігаються у точці $\tau = 0$, і відрізняються в інших точках проміжку, при цьому матриця $A_0(0)$ має просту структуру.

7⁰. Принаймні дві функції $\lambda_i(\tau)$ і $\lambda_j(\tau)$ збігаються у точці $\tau = 0$, і відрізняються в інших точках проміжку, при цьому матриця $A_0(0)$ подібна жордановій клітині,

побудова розв'язку системи (6) потребує задіяння так званого багатомасштабного методу [7; 8].

Умова 6⁰ є найбільш загальною. Вибір точки $\tau = 0$ не є принциповим, це може бути будь-яка ізольована точка проміжку, або декілька точок. Принцип побудови асимптотичного розв'язку не змінюється.

При виконанні будь-якої з умов 5⁰ або 6⁰ $\det A_0(0) = 0$, і алгоритми, розроблені у [5; 6] не дають можливості зінтегрувати задачу. Якщо виконано умову 5⁰, то систему (1) можна проінтегрувати багатозадачним методом В.В. Кучеренка, тобто записати її

розв'язок єдиним виразом. Але це неможливо здійснити для системи (6), яку треба розв'язати при даній постановці задачі для системи (1). Тому застосування багатомасштабного методу в загальному вигляді уникнути неможливо.

Згідно з багатомасштабним методом [7], у припущенні виконання умови 6⁰, дістанемо різні вирази для асимптотичного зображення розв'язку на проміжках

$$[0; L_0 \cdot \varepsilon^{r_p}], [l_k \cdot \varepsilon^{r_{p-k+1}}; L_k \cdot \varepsilon^{r_{p-k}}], [l_p \cdot \varepsilon^{r_1}; L]. \quad (8)$$

Тут l_k і L_k – сталі, що не залежать від ε ; $k = 1, 2, \dots, p$, $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_p$ – дійсні числа, множина яких є скінченною. Описані числа визначаються побудовою характеристичного полігону системи (6). Згаданим багатомасштабним методом [7] побудуємо асимптотичне зображення інтегральної матриці у вигляді

$$\Phi(\xi_k, \varepsilon) = \left\| \Phi_{ij}(\varepsilon^{r_{p-k}} \tau, \varepsilon) \right\|_{i,j=1}^{2n,n}$$

на кожному із перерахованих у (8) проміжків.

Побудова розв'язку на всьому проміжку $[0, L]$ зміни незалежної змінної описаним методом потребує досить громіздкої процедури склеювання розв'язків [2; 8] (або узгодження асимптотичних розвинень), отриманих на вказаних у (8) проміжках. Виконавши названі процедури, отримаємо розв'язок системи (6) у формі формального ряду для інтегральної матриці

$$\Phi(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^p \rho_i(\tau) \Phi_i(\xi_i, \varepsilon). \quad (9)$$

Тут $\rho(\tau)$ – розбиття одиниці, визначене на досліджуваному проміжку. Методом [6] доводиться, що формальна матриця (9) є асимптотичним зображенням фундаментальної матриці $Y(\tau, \varepsilon)$ системи (6) і має місце рівність $Y(\tau, \varepsilon) = \Phi_m(\tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m-\eta})$, де $\Phi_m(\tau, \varepsilon)$ – m -наближення, яке дає m -а частинна сума ряду для $\Phi(\tau, \varepsilon)$.

Використавши метод, описаний у роботі [6, стор. 93] для побудови асимптотичного зображення синтезу оптимального керування, знайдемо невідомі вектори $x(\tau, \varepsilon)$ та $\psi(\tau, \varepsilon)$, а отже і вектор керування $u(\tau, \varepsilon)$ з такими асимптотичними оцінками:

$$x_m(\tau, \varepsilon) = \Phi_{m,(1)}(\tau, \varepsilon) \cdot a + O(\varepsilon^{m-\eta}),$$

$$u_m^0(\tau) = (2C)^{-1}(\tau, \varepsilon) \cdot B'(\tau, \varepsilon) \cdot \Phi_{m,(2)}(\tau, \varepsilon) \times$$

$$\times a + O(\varepsilon^{m-\eta}).$$

Тут $\Phi_m(\tau, \varepsilon) = (\Phi_{m(1)}(\tau, \varepsilon); \Phi_{m(2)}(\tau, \varepsilon))'$, а також асимптотичну формулу для функціонала:

$$I_m = \int_0^T ((W(\tau, \varepsilon)x_m \cdot x_m) + C(\tau, \varepsilon)u_m^0 \cdot u_m^0) dt + O(\varepsilon^{(m-1)\eta}).$$

Таким чином знайдемо асимптотичне зображення вектора оптимального керування для задачі оптимальної корекції системи (1) у загальному випадку.

У роботі [6, стор. 92] для ілюстрації алгоритму розглянуто рівняння

$$\frac{d^2 x(\tau, \varepsilon)}{d\tau^2} + \omega^2(\tau, \varepsilon)x(\tau, \varepsilon) = u(\tau),$$

що описує деяку систему зі скалярним керуванням $u(\tau)$ на проміжку $[0; 1]$, де

$$\omega(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \omega_s(\tau), \omega_0(\tau) > 0, 0 \leq t \leq T = \frac{1}{\varepsilon},$$

$\tau = \varepsilon t$. Критерієм якості є функціонал

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(\tau) d\tau.$$

У векторно-матричній формі досліджуване рівняння має вигляд

$$\frac{d\vec{x}(\tau, \varepsilon)}{d\tau} = A(\tau, \varepsilon)\vec{x}(\tau, \varepsilon) + B(\tau)\vec{u}(\tau), \text{ де}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A(\tau, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(\tau, \varepsilon) & 0 \end{pmatrix}, B(\tau) = E,$$

$$\vec{u}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ u(\tau) \end{pmatrix}.$$

Матриця $D_0(\tau)$ системи (6) у цьому випадку має вигляд

$$D(\tau, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\omega^2(\tau, \varepsilon) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2(\tau, \varepsilon) \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо $\omega(\tau, 0) > 0$, як вимагається у [6], то матриця $D_0(\tau)$ невиродженим перетворенням зводиться до діагональної

$$\text{diag}\{i\omega_0(\tau), i\omega_0(\tau), -i\omega_0(\tau), -i\omega_0(\tau)\}.$$

Якщо $\omega(0, 0) = 0$, то такого перетворення не існує, а матриця $D_0(0)$ подібна жордановій клітині із невиродженою матрицею перетворення $P(\tau, \varepsilon)$:

$$P^{-1}D(\tau, \varepsilon)P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega^4(\tau, \varepsilon) & 0 & -2\omega^2(\tau, \varepsilon) & 0 \end{pmatrix};$$

$$P(\tau, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 + \omega^2(\tau, \varepsilon) & 1 & 0 \\ 0 & -\omega^2(\tau, \varepsilon) & 0 & -1 \\ \omega^2(\tau, \varepsilon) & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При побудові асимптотичного зображення розв'язку записаного рівняння використовують функції Ейрі. Для системи необхідно використати багатомасштабний метод. У цьому прикладі при $\omega(0, 0) = 0$ $2n \times 2n$ – матриця $D_0(0)$ подібна одній жордановій клітині із нульовим власним значенням. Тому асимптотичне зображення розв'язку за виконання додаткової умови 8^0

$$\left. \frac{d}{d\tau} \det D_0(\tau) \right|_{\tau=0} \neq 0,$$

запишеться у вигляді

$$Y(\tau, \varepsilon) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{2n} Z^{(j)}(\varepsilon^{-\alpha} \xi) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_{jk}(\tau), \tau \in [0; L_1 \varepsilon^\alpha], \\ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_k(\tau) \exp\left\{ \int_0^\tau \Lambda_k(s) ds \right\}, \tau \in [L_2 \varepsilon^\alpha; L]. \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{2n}{2n+1}.$$

Тут функції $Z^{(j)}(s)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння Ейрі $Z^{(2n)}(s) + sZ(s) = 0$, L_1 і L_2 – сталі, що не залежать від ε . Перший із записаних виразів називають «внутрішнім» розвиненням розв'язку, а другий – «зовнішнім». Після визначення невідомих коефіцієнтів записаних вище формальних рядів необхідна процедура зрощування асимптотичних розвинень, які виконано у роботі [8], де отримано формули зв'язку для «зовнішнього» та «внутрішнього» розвинень. Тільки у випадку $n = 2$ формули зв'язку не потрібні – можлива побудова фундаментальної матриці у вигляді єдиного виразу. Саме у записаному вище вигляді отримано результат роботи [3], де мав місце саме випадок $n = 2$, тобто результат можна подати єдиним записом.

Результати та їх обговорення. Таким чином, при нестабільному спектрі головної матриці системи побудова асимптотичного розв'язку задачі оптимальної корекції ускладнюється з причини багатомасштабної процедури побудови. У припущенні, що визначено вектор керування, розглянемо

систему (1), яка стане неоднорідною системою вигляду

$$\frac{dx(\tau, \varepsilon)}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x(\tau, \varepsilon) + f(\tau).$$

Якщо остання система має в точці τ_1 нестабільність у спектрі таку, що принаймні одне власне значення $\lambda(\tau_1) = 0$, то $\det A(\tau_1, 0) = 0$, і розв'язок (а не тільки його асимптотичне зображення) цієї системи при $f(\tau_1) \neq 0$ матиме необмеженість при $\varepsilon \rightarrow 0$, що може бути небажаним у багатьох реальних системах. Розв'язки типу контрастних структур, що характерні для нелінійних систем, виникають в лінійних системах керування внаслідок нестабільності спектру головної матриці системи (1). Згадана необмеженість в [2] названа внутрішнім перехідним шаром. Саме нестабільність

спектру навіть у лінійних системах породжує контрастні структури, характерні для нелінійних систем. Зокрема, якщо $A(\tau_1, 0)$ подібна жордановій клітці порядку n , то

$|x(\tau, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{\frac{1}{n}})$ навіть за виконання умови стійкості, і розв'язок системи є контрастною структурою типу сплеску.

Висновки. Нестабільність у спектрі головної матриці системи призводить до того, що побудова асимптотичного зображення розв'язку є значно складнішим, і потребує громіздких процедур при конструюванні фундаментальної матриці. Проте це відноситься до суто математичної частини дослідження. Реальність і фізичний зміст точок нестабільності потребує аналізу для кожної конкретної системи керування.

Література

- [1] К. А. Абгарян, Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. Москва: «Наука», 1973.
- [2] А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов, "Внутренний переходной слой в линейной задаче оптимального управления," Дифференц. уравнения, том 37, № 3, 2001.
- [3] V. N. Leifura, "On One Problem of Automatic Control with Turning Points," Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics: Proceedings of the Second International Conference, V. 2. Kyiv, 1997.
- [4] С. А. Ломов, Введение в общую теорию сингулярных возмущений. Москва: «Наука», 1981.
- [5] Н. Н. Моисеев, Асимптотические методы нелинейной механики. Москва: «Наука», 1981.
- [6] Н. И. Шкиль, А. Н. Вороной, В. Н. Лейфура Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Киев: «Выща шк. », 1985.
- [7] W. Wasow, Linear Turning Point Theory. New York: «Acad. Press», 1985.
- [8] W. Wasow, "The central connection problem at turning points of linear differential equations, " Commentarii Helv., v. 46, 1971.

References

- [1] K. A. Abharyan, Matrichnyye i asimptoticheskiye metody v teorii lineinyh sistem. Moskwa: «Nauka», 1973.
- [2] A. A. Bobodzhyanov, V. F. Safonov, "An Internal Transition Layer in a Linear Optimal Control Problem," Differential Equations, v. 37, no. 3, 2001.
- [3] V. N. Leifura, "On One Problem of Automatic Control with Turning Points," Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics: Proceedings of the Second International Conference, V. 2. Kyiv, 1997.
- [4] S. A. Lomov, Vvedenie v obshchuyu teoriyu singulyarnih vozmushchenij. Moskwa: «Nauka», 1981 .
- [5] N. N. Moiseyev, Asimptoticheskiye metody nelineinoj mehaniki. Moskwa: «Nauka», 1981.
- [6] N. I. Shkil', A. N. Voronoy, V. N. Leifura, Asimptoticheskiye metody v differentsyalnyh i integro- differentsyalnyh uravneniyah. Kiev: «Vyshcha Shkola», 1986.
- [7] W. Wasow, Linear Turning Point Theory. New York: «Acad. Press», 1985.
- [8] W. Wasow, "The central connection problem at turning points of linear differential equations, " Commentarii Helv., v. 46, 1971.

Надійшла до редакції 26.10.2020 р.

Рашевський Микола Олександрович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Криворізький національний університет (вул. Віталія Матусевича, 11, м. Кривий Ріг, 50027, Україна).

E-mail: mora290466@gmail.com.

ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL OF SYSTEMS WITH SLOWLY VARIABLE PARAMETERS

Models of non-stationary automatic control systems are differential equations with variable coefficients. Such equations do not integrate in quadratures in the general case. Asymptotic methods are methods of approximate integration of differential equations with variable coefficients.

In the article the non-stationary automatic control system with slowly variable parameters is considered. To study this system it is necessary to construct an asymptotic representation of its solution. In the theory of asymptotic integration exist a problem to construction of the asymptotic solution of a system in the presence of a turning point. Special methods have been developed to construct a solution to such systems: Maslov's canonical operator, the multiphase Kucherenko method, the method of W. Wasow.

The purpose of the article is to construct an asymptotic solution of a linear system of differential equations with nonstability spectrum of the main matrix.

In this article the asymptotic representation of the solution of the optimal correction problem is constructed. The case of nonstability spectrum of the main matrix and the available of turning points are investigated. Application of the Pontryagin maximum principle to the problem leads to a system with slowly varying coefficients and an nonstable spectrum. Construction of a formal solution of the main system with turning points in the form of a single expression in some cases is possible. The system formed in the process of solving the problem of optimal correction does not allow the mentioned construction. A multiscale method was used to solve this system of equations. Asymptotic estimates for the constructed approximations are given. The studied problem has practical applications in technical and economic systems, in particular in the calculation of the correction of the orbits of artificial satellites. The nonstability of the spectrum is the cause of the spike phenomenon.

Further research may be aimed at finding a unified approach to solving such problems and to ascertain the physical meaning of the turning point in specific systems of automatic control.

Keywords: *automatic control system, asymptotic solutions, turning point, the problem of optimal correction.*

Rashevs'kyi Mykola Oleksandrovych – Doctor of Philosophy (Math), Ass. Professor, Kryvyi Rih National University, (11, Vitaly Matusevych str., Kryvyi Rih, Dnepropetrovsk region, 50027, Ukraine).

E-mail: mora290466@gmail.com.