CENTRO UNIVERSITÁRIO FEI

CELSO DENIS GALLÃO

DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO Q-GAUSSIANA BIDIMENSIONAL COM APLICAÇÕES EM PROCESSAMENTO DIGITAL DE IMAGENS

São Bernardo do Campo

2016

CELSO DENIS GALLÃO

DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO Q-GAUSSIANA BIDIMENSIONAL COM APLICAÇÕES EM PROCESSAMENTO DIGITAL DE IMAGENS

Tese de Doutorado apresentada ao Centro Universitário da FEI para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, orientado pelo Prof. Dr. Paulo Sérgio Silva Rodrigues.

São Bernardo do Campo
2016

Gallão, Celso Denis.
Definição da Função q-Gaussiana Bidimensional com Aplicações em Processamento Digital de Imagens / Celso Denis Gallão. São Bernardo do Campo, 2016.
298 p. : il.

Tese - Centro Universitário FEI.
Orientador: Prof. Dr. Paulo Sérgio Silva Rodrigues.

1. q-Álgebra. 2. q-Gaussiana Bidimensional. 3. Filtros de Imagens. 4. Mapas Auto-Organizáveis. 5. Segmentação de Imagens. I. Rodrigues, Paulo Sérgio Silva , orient. II. Título.

Elaborada pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da FEI com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

centro universitário FEI

APRESENTAÇÃO DE TESE
ATA DA BANCA EXAMINADORA

Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Engenharia Elétrica

Doutorado

PGE-10

Aluno: Celso Denis Gallão **Matrícula:** 512207-2

Título do Trabalho: Definição da função q-gaussiana bidimensional com aplicações em processamento digital de imagens.

Área de Concentração: Processamento de Sinais

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sérgio Silva Rodrigues

Data da realização da defesa: 31/05/2016

ORIGINAL ASSINADA

Avaliação da Banca Examinadora

São Bernardo do Campo, 31 / 05 / 2016.

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA	
Prof. Dr. Paulo Sérgio Silva Rodrigues	Ass.: _____
Prof. Dr. Carlos Eduardo Thomaz	Ass.: _____
Prof. Dr. Flavio Tonidandel	Ass.: _____
Prof. Dr. David Corrêa Martins Junior	Ass.: _____
Prof. Dr. Gilson Antonio Giraldi	Ass.: _____

A Banca Examinadora acima-assinada atribuiu ao aluno o seguinte:

APROVADO ☒ REPROVADO ☐

VERSÃO FINAL DA TESE

ENDOSSO DO ORIENTADOR APÓS A INCLUSÃO DAS RECOMENDAÇÕES DA BANCA EXAMINADORA

_____

Aprovação do Coordenador do Programa de Pós-graduação

_____

Prof. Dr. Carlos Eduardo Thomaz

À minha amada família, aos queridos amigos e a Deus.

AGRADECIMENTOS

O desenvolvimento de uma tese de doutorado é, por si próprio, um período de leitura e pesquisa acadêmica profunda, de buscas e descobertas por respostas as quais carregam uma nobre intenção de contribuir, sob diversos aspectos, aos avanços da humanidade. Entretanto, o imponderável da vida impôs-me reflexões e descobertas de foro íntimo, fazendo com que algumas pessoas tornaram-se vitais para o desenvolvimento deste trabalho. Elas surgiram como um combustível motivacional ou mesmo como fontes de consultas, mas, em especial, algumas doaram-se de forma a manter-me no rumo nos momentos de incertezas e conduziram-me nos momentos de escuridão. Reservo este espaço para agradecer nominalmente à estas pessoas que, ao longo destes quatro anos, colaboraram na construção deste trabalho.

Aos amigos professores Wagner José da Silva (Baby), MsC. Flávio Viotti, Nilson Tadami Saito, Aislan Ramos, Humberto Toledo, Ronaldo Beluzzo e Lizete Vieira, por serem bons ouvintes e terem sempre uma palavra de apoio, regada à paciência, respeito e muito incentivo. Às amigas Christine D'Alcantara Carvalho e Marcely Cordeiro Sousa pelas noites em claro, por tamanho incentivo e companhia, ainda que pelas redes sociais.

A todos os colegas professores da FATEC São Caetano/SP (Antonio Russo) que, de alguma forma, colaboraram com paciência, incentivo e força. Vou citar alguns especiais, como a MsC. Izar Munhoz Alvares, MsC. Sônia Cristina Menoce, Dra. Eliane Veiga Porta e Dr. Rodrigo Amorim Motta Carvalho. Mais ainda aos professores MsC. Edison da Matta, MsC. Ricardo Ronald Eberson e MsC. Maria Helena Figueiredo Sanches pelas incansáveis discussões matemáticas acerca desta tese; ao professor Osmany Dantas Ribeiro Arruda pelas discussões sobre transmissão de dados; à professora Dra. Valéria Jacó Monteiro pelo auxílio com a língua inglesa e um destaque ao professor MsC. Reinaldo Madarazo pela valiosa contribuição sobre números complexos que acabou por melhorar os resultados obtidos nos trabalhos experimentais desta tese. À diretora da FATEC São Caetano/SP, professora Dra. Adriane Monteiro Fontana e aos professores coordenadores, Dra. Maria Márcia Matos Pinto, Dr. João Carlos Lopes Ferreira e MsC. Alan Henrique Prado de Carvalho pelo apoio ao meu projeto que culminou na premiação de um intercâmbio cultural Brasil-Estados Unidos, patrocinado pelo Centro Paula Souza. Neste intercâmbio, pude estudar e residir em regime de *homestay* durante um mês na

cidade de Chicago/EUA, aprimorando o meu nível de conhecimento da língua inglesa, essencial para as pesquisas acadêmicas e ao exame de proficiência exigidos no programa de doutorado.

Aos diretores do Colégio Singular/Anglo de Santo André/SP, o professor José Carlos Fazzole Ferreira e a professora Maria Eunice Cardoso, pelo respeito e incentivo à pesquisa acadêmica, permitindo-me a utilização dos computadores do laboratório de informática para o processamento dos algoritmos de Rede Neural Artificial desenvolvidos para esta tese. Agradecimento especial aos laboratoristas Celso Furlanetto, Diego Augusto Bandeira Daniel e Tiago Ferreira, pelo auxílio na operação dos computadores do laboratório e pelo apoio enquanto ministrava minha aulas.

Meu agradecimento à escola *Personal English School* de Santo André/SP, que, através das professoras Luciana e Eliana Hess, mais do que o ensino do idioma, acreditaram em meu potencial, proporcionando-me o aprimoramento da língua inglesa para o exame de proficiência. Como consequência, propiciaram-me também uma suave adaptação ao convívio social durante meu intercâmbio cultural. Também orientaram-me na escrita de artigos científicos submetidos durante o programa de doutorado, redigidos na língua inglesa.

Aos amigos professores do Centro Paula Souza que participaram do intercâmbio cultural na cidade de Chicago/EUA, que passaram a fazer parte de minha vida. Deixo meu agradecimento especial ao prof. Rodrigo, líder deste grupo. Aos amigos estrangeiros que tive o privilégio de conviver no regime de *homestay*, como a Sra. Ruth Lamur e seu filho Samuel Lamur, que me fizeram sentir parte de sua família, recebendo-me calorosa e carinhosamente; aos colegas de *homestay*, Abdul Alanazi e Ahmad Alsrhani (da Arábia Saudita) e Shell Sathaporn (da Tailândia) pela paciência, respeito cultural e religioso, além do grande companheirismo naquela jornada em vivenciar o modo de vida americano, que tanto acrescentou-me culturalmente no trato com a língua inglesa e, como consequência, nas pesquisas acadêmicas. Meu agradecimento especial ao *staff* da *Intrax Ensglish School* de Chicago/EUA pelo acolhimento e auxílio no aprimoramento da língua inglesa.

Aos amigos professores e músicos da banda *The Teacher's Fire Band*, Beto Cherighim, Marco Pólo Mello, Marcos Lipas e Giovanni Bagnoli, bem como aos amigos músicos da Banda Royale, em especial ao meu irmão MsC. Evandro Lauro Gallão, Marcos Artur Martins, Julio Cesar Mazzi e Osvaldo Gebara Jr. pela compreensão em minhas ausências, pelas palavras de incentivo e respeito à pesquisa acadêmica e pela oportunidade de retornar à música como uma

forma de oxigenar o cérebro e relaxar a mente, movimentos que se mostraram essenciais nesta jornada para superar os desafios no desenvolvimento desta tese.

O desenvolvimento de uma tese exige ir muito além do habitual. Exige-se do corpo, do intelecto, do improviso, da criatividade, do raciocínio, da lucidez, elevando o equilíbrio psíquico a novos patamares, ao encontro dos próprios limites. Diante das dificuldades extraordinárias, imponderáveis e pessoais a que fui submetido, algumas pessoas especialíssimas ocuparam uma lacuna importante na reconstrução de meus alicerces. Agradeço à minha família, papai Cyro Antonio Gallão, mamãe Nelza Petreca Gallão; meus três irmãos - Cyrinho, Cesar e Evandro - e minhas duas irmãs - Nelcy e Núria; meus cunhados e cunhadas; sobrinhos e sobrinhas; tios e tias; primos e primas. Agradeço à psicoterapeuta Sra. Rosangela Guedes Gonzales que recolheu-me das profundezas e trouxe-me à luz, mantendo-me no rumo, socorrendo-me e elevando-me. Agradeço à amiga Dra. Thais Dantas, destas gratas surpresas também armadas pelo imponderável, por suas palavras, orações e ações.

A Deus e à Nossa Senhora de Aparecida, pela proteção e companhia, presentes em todos os momentos, sobretudo naqueles mais difíceis.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), por desempenhar papel tão fundamental na expansão da pesquisa acadêmica. Agradeço à todos meus professores do programa de doutorado da FEI, sem exceções, pelos ensinamentos e apoio científico, mas, principalmente, por acreditarem em mim.

Por fim, dedico este último parágrafo àquele que me proporcionou a oportunidade de inserir-me no universo da pesquisa acadêmica: meu orientador, professor Dr. Paulo Sérgio Rodrigues, o "PS". Ainda no mestrado, 6 anos antes, aceitou-me como membro de sua equipe de pesquisa e conduziu-me ao título de mestre. Naquele momento, fez-se abrir um novo universo em minha mente. Agora, mais uma vez o "PS"mostra-me que os limites nunca serão atingidos, pois sempre haverão novos limites. Que as dificuldades são superadas com dedicação, foco e transpiração. Disse-me ele um dia: "*treine enquanto eles dormem, estude enquanto eles se divertem, persista enquanto eles descansam, e então, viva o que eles sonham*". Obrigado professor.

Obrigado a todos, por terem cruzado meu caminho.

“Se o conhecimento pode criar problemas, não será através da ignorância que poderemos solucioná-los.”

Isaac Asimov

RESUMO

Há séculos, as funções Gaussianas vêm sendo utilizadas em inúmeros trabalhos nas áreas da física, estatística, engenharia, medicina e economia, como aproximação de funções probabilísticas e de predição, por exemplo. Em Processamento Digital de Imagens, são aplicadas em diversas metodologias, como na eliminação de ruídos indesejados ou mesmo para destacar áreas de interesse em segmentação de imagens. Entretanto, alguns fenômenos não são precisamente explicados por este tipo de função por tratar-se de aproximação de valores. Com a generalização da mecânica estatística proposta por Constantino Tsallis, uma nova perspectiva se abre voltada aos sistemas complexos, e assim, um novo formalismo vem sendo desenvolvido, compondo a chamada q-Álgebra. Definições, como q-exponencial, q-produto, q-soma e q-Gaussiana, entre outras, já foram estabelecidas. Até recentemente, encontra-se na literatura uma definição da função q-Gaussiana para apenas uma variável. O tema central desta tese é a proposta de uma nova generalização da função de Gauss, sob a forma de uma q-Gaussiana bidimensional, modelo este ainda não proposto pela literatura da Ciência da Computação, antes da presente tese. Tem-se como hipótese a possibilidade de melhor representar sistemas complexos, considerados como não-extensivos, através de uma deformação algébrica controlada pelo parâmetro q, de não-extensividade. Com esta generalização, esta tese propõe novas aplicações em Processamento Digital de Imagens, como em novos filtros utilizando função q-Gaussiana bidimensional como *kernel* para a filtragem de imagens; experimentos de segmentação de imagens pré-processadas por filtros q-Gaussianos Bidimensionais baseados em abordagens entrópicas; definição de um modelo de Rede Neural Artificial com treinamento não supervisionado baseado em Mapas Auto-Organizáveis de *Kohonen* definida nesta tese como modelo q-SOM, incluindo experimentos de segmentação de imagens a partir do modelo q-SOM, tendo uma função q-Gaussiana bidimensional como função de ativação na fase de treinamento. Para a análise dos resultados, a partir dos experimentos, são aplicadas técnicas estatísticas para comparação das imagens segmentadas entre os modelos que utilizam uma função q-Gaussiana bidimensional. Para estas comparações são utilizadas medidas estatísticas como a *Kappa Statistic*, o *Peak Signal-to-Noise Ratio* ($PSNR$), a correlação linear, a distorção de luminância, a distorção de contraste, o índice universal de qualidade de imagem (Q) e a distância de similaridade (SIM).

Palavras-chave: q-Álgebra; q-Gaussiana bidimensional; Filtros de Imagens, Mapas Auto-Organizáveis; Segmentação de Imagens.

ABSTRACT

The Gaussian functions, throughout history, have been used in several pieces of work in the fields of physics, statistics, engineering, medicine and economics, as, for instance, an approximation of probabilistic functions and prediction. Currently in Digital Image Processing, the Gaussian functions have been implemented in several methodologies, such as the reduction of unwanted noise or even to highlight areas of interest in image segmentation. However, some phenomena are not explained precisely by this type of function because it deals with the approaching values. Since the generalization of statistical mechanics proposed by Constantino Tsallis, a new perspective has opened up towards the complex systems, thus, a new formalism has been developed, making the called q-algebra. Definitions, such as q-exponential, q-product, q-addition and q-Gaussian, among others, were already well-established. Up to now, this can be found in the literature a q-Gaussian function with only one variable. The main theme of this thesis is the proposal of a new generalization of the Gauss function, in the form of a Two-dimensional q-Gaussian whose model has never been proposed by the Computer Science literature previously. This thesis raises as a hypothesis the possibility of best representing complex systems, considering as non-extended system by an algebraic deformation controlled by the q parameter of non-extensiveness. By means of this new generalization, this work proposes new applications in Digital Image Processing, such as new filters using Two-dimensional q-Gaussian function as kernel to image filtering; segmentation experiments of pre-processed images by Two-dimensional q-Gaussian function based on entropic approaches; definition of an Artificial Neural Network model by unsupervised training based on Kohonen's Self-Organizing Maps, defined in this thesis as q-SOM model; image segmentation experiments from the q-SOM model, having a Two-dimensional q-Gaussian function as activation function in the training phase. For the result analysis from the experiments, it was applied statistical techniques in order to compare segmented images on the models, using a Two-dimensional q-Gaussian function. In order to make those comparisons, it was used statistical measures such as $Kappa$ statistic, the Peak Signal-to-Noise Ratio ($PSNR$), the linear correlation, the luminance distortion, the contrast distortion, the Universal Index Image Quality (Q) and the Similarity Distance (SIM).

Key words: q-algebra; Two-dimensional q-Gaussian; Image Filters, Self-Organizing Maps; Image Thresholding.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo de limiarização por entropia de Shannon 44
Figura 2 – Exemplo de limiarização por entropia de Tsallis 45
Figura 3 – Exemplo de limiarização por entropia de Shannon Ponderada 47
Figura 4 – Exemplo de clusterização com algoritmo *k-Means*, utilizando a distância Euclidiana. 50
Figura 5 – Exemplo de funções utilizadas para binarização de imagens. 54
Figura 6 – Representação de um sistema Linear Invariante no Tempo (LIT). 55
Figura 7 – Representação Gráfica da Convolução Unidimensional. 60
Figura 8 – Representação Gráfica da Correlação Unidimensional. 61
Figura 9 – Representação gráfica da convolução bidimensional. 63
Figura 10 –Distribuição normal através de função Gaussiana unidimensional, normalizada no domínio espacial. 65
Figura 11 –Exemplo de filtro Gaussiano unidimensional. 66
Figura 12 –Exemplo de sinal de saída $g(x)$, de um filtro Gaussiano unidimensional. . 67
Figura 13 –Exemplo de sinal de saída $g'(x)$, de um filtro Gaussiano unidimensional, após recorte. 67
Figura 14 –Exemplos de distribuições Gaussianas bidimensionais. 69
Figura 15 –Exemplo de aplicação de ruído Gaussiano em imagem. 70
Figura 16 –Exemplo de *kernel* de um filtro Gaussiano bidimensional. 71
Figura 17 –Exemplo de imagem filtrada por um filtro Gaussiano bidimensional. . . . 72
Figura 18 –Distribuição normal através de função q-Gaussiana unidimensional, normalizada no domínio espacial. 98
Figura 19 –Exemplo de sinais que serão utilizados em um filtro q-Gaussiano unidimensional. 104
Figura 20 –Exemplo de filtro q-Gaussiano unidimensional. 105
Figura 21 –Exemplos de convoluções entre um sinal com ruído e filtros q-Gaussianos. 105
Figura 22 –Exemplo de filtro q-Gaussiano bidimensional. 107
Figura 23 –Exemplos de distribuições de funções q-Gaussianas bidimensionais. . . . 108

Figura 24 –Exemplo de imagem de saída $G_q(x,y)$ de um filtro q-Gaussiano bidimensional. 109
Figura 25 –Ilustração de um exemplo de treinamento do modelo q-SOM. 111
Figura 26 –Ilustração de um exemplo de segmentação de imagem a partir do modelo q-SOM. 113
Figura 27 –Exemplos de 18 imagens da base de *Berkeley* com as respectivas segmentações manuais (*ground trouth*). 116
Figura 28 –Exemplo de um resultado obtido com a utilizando de filtro q-Gaussiano. . 118
Figura 29 –Exemplo de resultados obtidos com a segmentação de imagens. 118
Figura 30 –Metodologia da Fase de Filtragem. 119
Figura 31 –Exemplos de aplicação de ruídos Gaussianos sobre a imagem original. . . 121
Figura 32 –Exemplos de aplicação de filtros q-Gaussianos. 122
Figura 33 –Exemplo de aplicação de ruídos Gaussianos sobre a imagem número $[2]$ da base de *Berkeley*. 123
Figura 34 –$PSNR$ das imagens que receberam ruídos Gaussianos. 124
Figura 35 –Exemplo de aplicação de filtro q-Gaussiano (com $q = 2{,}9$) sobre as imagens com ruídos da Figura 33. 126
Figura 36 –Exemplo de aplicação de filtro Gaussiano tradicional sobre as imagens com ruídos apresentadas na Figura 33. 127
Figura 37 –Valores do índice $PSNR$ obtidos pela comparação das imagens com ruídos da Figura 33 e suas respectivas imagens filtradas. 128
Figura 38 –Valores do índice Q obtidos pela comparação da imagem original apresentada na Figura 33(a) e suas respectivas imagens filtradas após receberem ruídos Gaussianos. 130
Figura 39 –Metodologia aplicada aos experimentos com filtros q-Gaussianos bidimensionais, na fase de segmentação das imagens filtradas. 131
Figura 40 –Imagem número $[274]$ da base de *Berkeley*. 132
Figura 41 –Exemplo da segmentação pela q-Entropia com $q = 0{,}8$. 133
Figura 42 –Exemplo da segmentação pela q-Entropia com $q = 0{,}9$. 133
Figura 43 –Exemplo da segmentação pela q-Entropia com $q = 1{,}0$. 133
Figura 44 –Exemplo da segmentação pela q-Entropia com $q = 1{,}1$. 134
Figura 45 –Exemplo da segmentação pela q-Entropia com $q = 1{,}2$ 134

Figura 46 –Exemplo da segmentação pela entropia de Shannon Pondrada com $\alpha = 0{,}48$. 135
Figura 47 –Exemplo da segmentação pela entropia de Shannon Pondrada com $\alpha = 0{,}49$. 135
Figura 48 –Exemplo da segmentação pela entropia de Shannon Pondrada com $\alpha = 0{,}5$. 135
Figura 49 –Exemplo da segmentação pela entropia de Shannon Pondrada com $\alpha = 0{,}51$. 136
Figura 50 –Exemplo da segmentação pela entropia de Shannon Pondrada com $\alpha = 0{,}52$. 136
Figura 51 –Quantidade de imagens agrupadas em 15 entradas, considerando-se os valores de $PSNR$ das 300 imagens da base de *Berkeley*. 139
Figura 52 –Valores dos índices $PSNR$ classificados em ordem decrescente, referentes às 300 imagens da base de *Berkeley*, filtradas por um filtro *q*-Gaussiano com $q = 2{,}9$. 140
Figura 53 –Consolidação dos Resultados de $PSNR$: matriz $psnr(x; y; z)$, onde x representa as 300 imagens de *Berkeley*, y representa o índice $PSNR$ de cada imagem e z é uma classificação baseada nos 29 valores de q do filtro *q*-Gaussiano, sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$. 141
Figura 54 –Quantidade de imagens filtradas considerando-se os 29 valores de q utilizados neste trabalho, assim como as 300 imagens da base de *Berkeley* que receberam os 3 tipos de ruídos Gaussianos, e que possuem valor de $PSNR \geq +20dB$. 142
Figura 55 –Quantidade de imagens filtradas considerando-se os 29 valores de q utilizados neste trabalho, assim como as 300 imagens da base de *Berkeley* que receberam os 3 tipos de ruídos Gaussianos, e que possuem valor de $PSNR \geq +15dB$. 144
Figura 56 –Resultado das imagens filtradas por filtro *q*-Gaussiano com $q = 2{,}9$, com seus respectivos índices Q e histogramas. 145
Figura 57 –Resultado das imagens filtradas por filtro Gaussiano tradicional, a partir da imagem original mostrada na Figura 56(a), com seus respectivos índices Q e histogramas: 146
Figura 58 –Quantidade de imagens agrupadas em 15 entradas, considerando os valores do índice Q das 300 imagens da base de *Berkeley*. 147
Figura 59 –Valores do índice Q em módulo, classificados em ordem decrescente, referente às 300 imagens da base de *Berkeley*, filtradas por um filtro *q*-Gaussiano com $q = 2{,}9$. 148

Figura 60 –Consolidação dos Resultados de Q: matriz $Q(x; y; z)$, onde x representa as 300 imagens de *Berkeley*, y representa o índice Q de cada imagem e z é uma classificação baseada nos 29 valores de q do filtro q-Gaussiano, sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$. 149
Figura 61 –Quantidade de imagens filtradas, que resultaram em $|Q| \geq 0{,}9$. 150
Figura 62 –Quantidade de imagens filtradas, que resultaram em $|Q| \geq 0{,}96$. 152
Figura 63 –Quantidade de imagens filtradas, que resultaram em $|Q| \geq 0{,}92$. 153
Figura 64 –Exemplo de valores do índice $PSNR$ calculado entre as segmentações pela q-Entropia das imagens filtradas $\times$ imagem original, a partir de uma imagem da base de *Berkeley*. 154
Figura 65 –Exemplo de valores do índice $PSNR$ calculado entre as segmentações pela entropia de Shannon Ponderada das imagens filtradas $\times$ imagem original, a partir de uma imagem da base de *Berkeley*. 155
Figura 66 –Exemplo de valores do índice $PSNR$ das imagens receberam filtro q-Gaussiano bidimensional com $q = 0{,}5$ e foram segmentadas pela q-Entropia de Tsallis com $q = 0{,}9$. 157
Figura 67 –Exemplo de valores do índice $PSNR$ das imagens receberam filtro q-Gaussiano bidimensional com $q = 0{,}5$ e foram segmentadas pela entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = 0{,}49$. 158
Figura 68 –Exemplo de quantidade de segmentações feitas pela q-Entropia de Tsallis, com $q = 0{,}9$, as quais produziram segemntações com $PSNR \geq +60dB$. . 159
Figura 69 –Exemplo de quantidade de segmentações feitas pela entropia de Shannon Ponderada, com $\alpha = 0{,}49$, as quais produziram segmentações com $PSNR \geq +60dB$. 160
Figura 70 –Quantidade de segmentações feitas pela q-Entropia, as quais produziram segmentações com $PSNR \geq +60dB$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$. 162
Figura 71 –Quantidade de segmentações pela q-Entropia, as quais produziram $PSNR \geq +60dB$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$. . 163
Figura 72 –Quantidade de segmentações feitas pela q-Entropia de Tsallis, as quais produziram segmentações com $PSNR \geq +60dB$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$. 164

Figura 73 –Quantidade de segmentações pela entropia de Shannon Ponderada, as quais produziram segmentações com $PSNR \geq +60dB$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$. 165
Figura 74 –Quantidade de segmentações feitas pela entropia de Shannon Ponderada, as quais produziram segmentações com $PSNR \geq +60dB$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$. 166
Figura 75 –Quantidade de segmentações feitas pela entropia de Shannon Ponderada, as quais produziram segmentações com $PSNR \geq +60dB$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$. 167
Figura 76 –Quantidade de segmentações com $PSNR \geq +60dB$ das imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$ e foram filtradas com filtros *q*-Gaussianos. 169
Figura 77 –Quantidade de segmentações com $PSNR \geq +60dB$ das imagens receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$ e foram filtradas com filtros *q*-Gaussianos. 172
Figura 78 –Quantidade de segmentações com $PSNR \geq +60dB$ das imagens receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$ e foram filtradas com filtros *q*-Gaussianos. 173
Figura 79 –Exemplo de valores do índice $Kappa$ calculado entre as segmentações pela *q*-Entropia das imagens filtradas $\times$ imagem original, a partir de uma imagem da base de *Berkeley*. 175
Figura 80 –Exemplo de segmentação pela *q*-Entropia, com valor de $q = 0{,}9$ 176
Figura 81 –Exemplo de valores do índice $Kappa$ calculado entre as segmentações pela entropia de Shannon Ponderada das imagens filtradas $\times$ imagem original, a partir de uma imagem da base de *Berkeley*. 177
Figura 82 –Exemplo de segmentação pela entropia de Shannon Ponderada, com valor de $\alpha = 0{,}51$. 178
Figura 83 –Exemplo de valores do índice $Kappa$ classificados em ordem decrescente. Imagens filtradas por filtro *q*-Gaussiano bidimensional com $q = 0{,}5$ e foram segmentadas pela *q*-Entropia de Tsallis com $q = 0{,}9$. 179
Figura 84 –Exemplo de valores do índice $Kappa$ classificados em ordem decrescente. Imagens filtradas por filtro *q*-Gaussiano bidimensional com $q = 0{,}5$ e segmentadas pela entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = 0{,}49$. 180

Figura 85 –Exemplo de quantidade de segmentações feitas pela q-Entropia de Tsallis, com $q = 0{,}9$, as quais produziram segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$. . . . 182
Figura 86 –Exemplo de quantidade de segmentações feitas pela entropia de Shannon Ponderada, com $\alpha = 0{,}49$, as quais produziram segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$. 183
Figura 87 –Quantidade de segmentações feitas pela q-Entropia, as quais produziram segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$ sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$. 184
Figura 88 –Quantidade de segmentações feitas pela q-Entropia, as quais produziram segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$ sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$. 185
Figura 89 –Quantidade de segmentações feitas pela q-Entropia, as quais produziram segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$ sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$. 186
Figura 90 –Quantidade de segmentações feitas pela entropia de Shannon Ponderada, as quais produziram segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$. 188
Figura 91 –uantidade de segmentações feitas pela entropia de Shannon Ponderada, as quais produziram segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$. 189
Figura 92 –Quantidade de segmentações feitas pela entropia de Shannon Ponderada, as quais produziram segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$. 190
Figura 93 –Quantidade de segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$. Antes da segmentação, as imagens receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$ e foram filtradas com filtros q-Gaussianos. 191
Figura 94 –Quantidade de segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$. Antes da segmentação, as imagens receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$ e foram filtradas com filtros q-Gaussianos. 194
Figura 95 –Quantidade de segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$. Antes da segmentação, as imagens receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$ e foram filtradas com filtros q-Gaussianos. 195

Figura 96 –Metodologia da fase de treinamento q-SOM. 197
Figura 97 –Exemplo da fase de treinamento do q-SOM. 198
Figura 98 –Imagens das grades neuronais com pesos iniciais. 200
Figura 99 –Definição automática da quantidade de iterações necessárias para o treinamento da imagem *Lena*, através do modelo q-SOM. 201
Figura 100 –Definição automática da quantidade de iterações necessárias para treinamento da imagem *Lena* através do modelo q-SOM, $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 1{,}0\}$. 202
Figura 101 –Definição automática da quantidade de iterações necessárias para treinamento da imagem *Lena* através do modelo q-SOM, $q = \{1{,}1; 1{,}2; ...; 2{,}0\}$. 202
Figura 102 –Definição automática da quantidade de iterações necessárias para treinamento da imagem *Lena* através do modelo q-SOM, $q = \{2{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$. 203
Figura 103 –Definição automática da quantidade de iterações necessárias para o treinamento da imagem *Lena*, através do algoritmo SOM tradicional, com o limiar $\Delta_w < 0{,}0005$. 204
Figura 104 –Gráfico ilustrando as quantidades de iterações necessárias para o treinamento de cada imagem da base de *Berkeley* pelo algoritmo SOM tradicional.205
Figura 105 –Exemplo de Mapas Auto-Organizáveis da imagem *Lena*, clusterizados após q-SOM com $q = 1{,}1$. 206
Figura 106 –Exemplo de Mapas Auto-Organizáveis da imagem *Lena*, clusterizados por q-SOM com $q = 0{,}7$. 207
Figura 107 –Exemplo de Mapas Auto-Organizáveis da imagem *Lena*, clusterizados por q-SOM com $q = 0{,}3$. 208
Figura 108 –Metodologia aplicada aos experimentos de segmentação a partir dos Mapas Auto-Organizáveis SOM e q-SOM. 209
Figura 109 –Exemplo da fase de segmentação pelo modelo q-SOM, SOM tradicional e *k-Means*. 210
Figura 110 –Resultados das segmentações da imagem *Lena*, pelo modelo q-SOM com $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 0{,}8\}$. 212
Figura 111 –Resultados das segmentações da imagem *Lena*, pelo modelo q-SOM com $q = \{{,}9; 1{,}0; ...; 1{,}6\}$. 213
Figura 112 –Resultados das segmentações da imagem *Lena*, pelo modelo q-SOM com $q = \{1{,}7; 1{,}8; ...; 2{,}4\}$. 214

Figura 113 – Resultados das segmentações da imagem *Lena*, pelo modelo q-SOM com $q = \{2{,}5; 2{,}6; ...; 2{,}9\}$. 215
Figura 114 – Resultados das segmentações da imagem *Lena* através do modelo q-SOM, com $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 1\}$, variando o tamanho da grade neuronal em $N = [10; 15; 20; 30; 50]$. 216
Figura 115 – Metodologia das análises estatísticas aplicadas aos experimentos de segmentação com o q-SOM. 218
Figura 116 – Exemplo do índice $Kappa$ sobre a imagem *Lena*. 219
Figura 117 – Exemplo da matriz de erro da população no cálculo do índice $Kappa$, sobre a imagem *Lena*. 220
Figura 118 – Gráficos exibindo os valores de $Kappa$, calculados pelo $q-SOM \times SOM$ e $q - SOM \times k - Means$. 221
Figura 119 – Exemplo do índice $Kappa$ sobre uma imagem da base de *Berkeley*. 223
Figura 120 – Gráficos com os índices $Kappa$ das 300 imagens segmentadas da base de *Berkeley*, calculado sobre q-SOM ($q = 2{,}5$). 224
Figura 121 – Exemplo de $PSNR > +20dB$, calculado entre as segmentações da imagem *Lena* por SOM tradicional $times$ q-SOM ($q = 0{,}9$). 227
Figura 122 – Exemplo de $PSNR < +20\ dB$, calculado entre as segmentações da imagem *Lena* por SOM tradicional $times$ q-SOM ($q = 0{,}5$). 227
Figura 123 – $PSNR$ calculado sobre as segmentações da imagem *Lena*. 229
Figura 124 – Exemplo do índice do $PSNR$ obtido a partir de segmentações da imagem número $[45]$ da base de *Berkeley*. 231
Figura 125 – Gráficos com os índices $PSNR$ das 300 imagens segmentadas da base de *Berkeley*, calculado sobre q-SOM ($q = 2{,}5$). 232
Figura 126 – Exemplo de alto índice de qualidade universal de imagem Q, calculado entre as segmentações da imagem *Lena* por *k-Means* $times$ q-SOM ($q = 0{,}6$). 235
Figura 127 – Exemplo de baixo índice de qualidade universal Q, calculado entre as segmentações da imagem *Lena* por *k-Means* $times$ q-SOM ($q = 0{,}5$). 235
Figura 128 – Gráfico com valores dos índices de distorção da luminância (Ld) e de constraste (Cd), correlação linear (lC) e universal de qualidade (Q): SOM tradicional $\times$ q-SOM com valores de $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$ 237

Figura 129 Gráfico com valores dos índices de distorção da luminância (Ld) e de constraste (Cd), correlação linear (lC) e universal de qualidade (Q): *k-Means* $\times$ *q*-SOM com valores de $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$ 239
Figura 130 Exemplo do índice Q sobre uma imagem da base de *Berkeley*. 240
Figura 131 Comparações entre SOM $\times$ *q*-SOM, com o índice Q, de uma imagem da base de *Berkeley*. 241
Figura 132 Comparações entre *k-Means* $\times$ *q*-SOM, com o índice Q, de uma imagem da base de *Berkeley*. 241
Figura 133 Gráficos com os índices da distorção de luminância e de contraste, do coeficiente linear e do índice Q, sobre as segmentações de 1 imagem de *Berkeley*, por SOM $\times$ *q*-SOM. 242
Figura 134 Gráficos com os índices da distorção de luminância e de contraste, do coeficiente linear e do índice Q, sobre as segmentações de 1 imagem de *Berkeley*, por *k-Means* $\times$ *q*-SOM. 243
Figura 135 Gráficos com o índice Q, sobre as segmentações das 300 imagens de *Berkeley*, por *q*-SOM com $q = 2{,}5$. 244
Figura 136 Exemplos da extração de bordas a partir de 3 imagens da base de *Berkeley* 247
Figura 137 Gráficos com valores do índice SIM, calculados sobre as bordas extraídas das segmentações pelo modelo *q*-SOM com $q = 0{,}1 \times$ bordas manuais, considerando-se as 300 imagens de *Berkeley*. 248
Figura 138 Consolidação dos Resultados - Etapa 3: matriz $etapa3(x,y,z)$, onde x representa as 300 imagens de *Berkeley*, y representa o índice SIM de cada imagem e z é uma classificação baseada nos 29 valores de q do modelo *q*-SOM. 249
Figura 139 Subdivisão dos valores das Distâncias de Similaridades em 15 *bins*, sobre os resultados a partir do modelo *q*-SOM, com $q = 2{,}5$ e $N = 10$. 250
Figura 140 Consolidação dos Resultados - Etapa 4: matriz $etapa4(x,y,z)$, onde x representa 15 *bins* de um histograma calculado sobre a matriz $etapa3(x,y,z)$ das imagens de Berkeley, y representa o índice SIM e z é representação dos valores de q do modelo *q*-SOM. 251

Figura 141 Gráfico ilustrativo das Distâncias de Similaridades agrupadas em 15 bins, considerando todas as 300 imagens da base de *Berkeley*, segmentadas por q-SOM com $q = 0{,}5$, escolhido ao acaso para este exemplo. (a) com $N = 10$. (b) com $N = 15$. As linhas contínuas representam as quantidades de imagens segmentadas pelo SOM tradicional. 252
Figura 142 Quantidades de imagens segmentadas cujas Distâncias de Similaridades estão abaixo do valor de corte $\omega_{SIM} \leq 3{,}4$, considerando todas as 300 imagens da base de *Berkeley*. 253
Figura 143 Consolidação dos Resultados - Etapa 5: matriz $etapa5(x,y,z)$, onde x representa os valores do parâmetro q, y representa a quantidade de imagens segmentadas existentes abaixo do valor de corte ω_{SIM}, e z uma classificação pelo valor de corte ω_{SIM}. 254
Figura 144 Diferença entre as quantidades de imagens filtradas por filtro q-Gaussiano $\times$ Gaussiano tradicional, a partir de imagens com ruídos Gaussianos tendo $\sigma = 0{,}04$. 257
Figura 145 Diferença entre as quantidades de imagens filtradas por filtro q-Gaussiano $\times$ Gaussiano tradicional, a partir de imagens com ruídos Gaussianos tendo $\sigma = 0{,}2$. 259
Figura 146 Diferença entre as quantidades de imagens filtradas por filtro q-Gaussiano $\times$ Gaussiano tradicional, a partir de imagens com ruídos Gaussianos tendo $\sigma = 0{,}4$. 261
Figura 147 Gráficos a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}04$), filtradas e segmentadas: q-Entropia ($q = 0{,}8$) $\times$ Shannon Ponderada ($\alpha = 0{,}48$). 263
Figura 148 Gráficos a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}04$), filtradas e segmentadas: q-Entropia ($q = 0{,}9$) $\times$ Shannon Ponderada ($\alpha = 0{,}49$). 264
Figura 149 Gráficos a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}04$), filtradas e segmentadas: q-Entropia ($q = 1$) $\times$ Shannon Ponderada ($\alpha = 0{,}5$). 265
Figura 150 Gráficos a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}04$), filtradas e segmentadas: q-Entropia ($q = 1{,}1$) $\times$ Shannon Ponderada ($\alpha = 0{,}51$). 266
Figura 151 Gráficos a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}04$), filtradas e segmentadas: q-Entropia ($q = 1{,}2$) $\times$ Shannon Ponderada ($\alpha = 0{,}52$). 266

Figura 152 Resultados a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}04$), filtradas e segmentadas, observando os índices $PSNR$ e $Kappa$: q-Entropia $\times$ Shannon Ponderada. 267
Figura 153 Gráficos a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}02$), filtradas e segmentadas: q-Entropia ($q = 0{,}8$) $\times$ Shannon Ponderada ($\alpha = 0{,}48$). 268
Figura 154 Gráficos a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}02$), filtradas e segmentadas: q-Entropia ($q = 0{,}9$) $\times$ Shannon Ponderada ($\alpha = 0{,}49$). 269
Figura 155 Gráficos a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}02$), filtradas e segmentadas: q-Entropia ($q = 1$) $\times$ Shannon Ponderada ($\alpha = 0{,}5$). 269
Figura 156 Gráficos a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}02$), filtradas e segmentadas: q-Entropia ($q = 1{,}1$) $\times$ Shannon Ponderada ($\alpha = 0{,}51$). 270
Figura 157 Gráficos a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}02$), filtradas e segmentadas: q-Entropia ($q = 1{,}2$) $\times$ Shannon Ponderada ($\alpha = 0{,}52$). 270
Figura 158 Resultados a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}2$), filtradas e segmentadas, observando os índices $PSNR$ e $Kappa$: q-Entropia $\times$ Shannon Ponderada. 271
Figura 159 Gráficos a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}4$), filtradas e segmentadas: q-Entropia ($q = 0{,}8$) $\times$ Shannon Ponderada ($\alpha = 0{,}48$). 273
Figura 160 Gráficos a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}4$), filtradas e segmentadas: q-Entropia ($q = 0{,}9$) $\times$ Shannon Ponderada ($\alpha = 0{,}49$). 273
Figura 161 Gráficos a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}4$), filtradas e segmentadas: q-Entropia ($q = 1$) $\times$ Shannon Ponderada ($\alpha = 0{,}5$). 274
Figura 162 Gráficos a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}4$), filtradas e segmentadas: q-Entropia ($q = 1{,}1$) $\times$ Shannon Ponderada ($\alpha = 0{,}51$). 274
Figura 163 Gráficos a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}4$), filtradas e segmentadas: q-Entropia ($q = 1{,}2$) $\times$ Shannon Ponderada ($\alpha = 0{,}52$). 275
Figura 164 Resultados a partir das imagens com ruídos ($\sigma = 0{,}4$), filtradas e segmentadas, observando os índices $PSNR$ e $Kappa$: q-Entropia $\times$ Shannon Ponderada. 276
Figura 165 Comparativo entre os resultados das imagens filtradas por filtro q-Gauissiano com $q = 0{,}5$ e segmentadas: q-Entropia $\times$ Shannon Ponderada. 278

Figura 166 – Resultados dos índices $Kappa$, $PSNR$ e Q, para o modelo q-SOM com $q = 1$, considerando as 300 imagens da base de *Berkeley*. 281
Figura 167 – Valores dos índices $Kappa$, $PSNR$, Q e SIM, considerando as 300 imagens da base de *Berkeley*, segmentadas pelo modelo q-SOM com $q = 2{,}9$ $\times$ SOM tradicional. 282
Figura 168 – Valores dos índices $Kappa$, $PSNR$, Q e SIM, considerando as 300 imagens da base de *Berkeley*, segmentadas pelo modelo q-SOM com $q = 0{,}5$ $\times$ SOM tradicional. 283
Figura 169 – Resultados do índice SIM classificados em ordem crescente de valores, considerando as 300 imagens da base de *Berkeley*, segmentadas pelo modelo q-SOM com $q = 2{,}9$ e $N = 10$, SOM tradicional com $N - 10$ e *k-Means*. 284
Figura 170 – Quantidade de imagens pertencente a 20 limiares ω_{SIM}, considerando as 300 imagens da base de *Berkeley*, segmentadas pelo modelo q-SOM, SOM tradicional e *k-Means*. 285
Figura 171 – Quantidade de imagens pertencentes aos limiares, considerando as 300 imagens da base de *Berkeley*, segmentadas pelo modelo q-SOM, SOM tradicional e *k-Means*. 286

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Matriz de erro da população para o cálculo do índice $Kappa$. 80
Tabela 2 – Escala para avaliação das concordâncias do índice $Kappa$. 81
Tabela 3 – Médias dos valores dos índices $Kappa$ calculados sobre as imagens segmentadas da base de *Berkeley*. 225
Tabela 4 – Médias dos valores dos índices $PSNR$ calculados sobre as imagens segmentadas da base de *Berkeley*. 233
Tabela 5 – Médias dos valores dos índices Q calculados sobre as imagens segmentadas da base de *Berkeley*. 245

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 28
1.1 OBJETIVO DA TESE 30
1.2 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DA TESE 30
1.3 ORGANIZAÇÃO DA TESE 31
2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS 33
2.1 ENTROPIA 33
2.1.1 Sistemas Extensivos e Não-Extensivos 34
2.1.2 Entropia Extensiva de Shannon 36
2.1.3 Entropia Não-Extensiva de Tsallis 37
2.1.4 Entropia de Shannon Ponderada 38
2.2 SEGMENTAÇÃO DE IMAGENS 39
2.3 SEGMENTAÇÃO POR LIMIARIZAÇÃO 40
2.3.1 Limiarização Tradicional 41
2.4 SEGMENTAÇÃO POR ENTROPIA 42
2.4.1 Limiarização por Entropia de Shannon 43
2.4.2 Limiarização por Entropia de Tsallis 44
2.4.3 Limiarização por Entropia de Shannon Ponderada 46
2.5 SEGMENTAÇÃO POR CLUSTERIZAÇÃO 48
2.5.1 O Método *k-Means* 48
2.6 FILTROS 50
2.6.1 Tipos de Filtros 51
2.7 FILTRAGENS EM IMAGEM DIGITAL 52
2.7.1 Filtragem no Domínio Espacial 52
2.7.2 Relação Sinal-Ruído 55
2.7.3 Convolução e Correlação 55
2.7.3.1 Correlação 58
2.7.3.2 Convolução e Correlação Unidimensionais 58
2.7.3.3 Convolução e Correlação Bidimensionais 62
2.7.4 Filtros Gaussianos 64

2.7.4.1 ***Operador Gaussiano Unidimensional*** 65
2.7.4.2 ***Operador Gaussiano Bidimensional*** 68
2.8 REDES NEURAIS ARTIFICIAIS 73
2.8.1 Etapa do Processo Competitivo 75
2.8.2 Etapa do Processo Cooperativo 76
2.8.3 Etapa do Processo Adaptativo 77
2.9 MEDIDAS ESTATíSTICAS 79
2.9.1 ***Kappa Statistic*** 79
2.9.2 ***Peak Signal-to-Noise Ratio*** **(**$PSNR$**)** 81
2.9.3 Índice Universal de Qualidade de Imagem (Q) 82
2.9.4 Distância de Similaridade (SIM) 83
3 TRABALHOS RELACIONADOS 86
3.1 APLICAÇÕES DE FILTROS COM FUNÇÕES GAUSSIANAS NO *KERNEL* 86
3.2 APLICAÇÕES DE REDES NEURAIS COM FUNÇÕES GAUSSIANAS . . . 89
3.3 APLICAÇÕES EM SEGMENTAÇÃO DE IMAGENS DIGITAIS 91
3.4 APLICAÇÕES DA q-ÁLGEBRA 94
4 FORMULAÇÃO DA TESE 96
4.1 PROPOSTA DE UM MODELO q-GAUSSIANO BIDIMENSIONAL 97
4.1.1 Função *q*-Gaussiana 97
4.1.2 O Modelo *q*-Gaussiano Bidimensional 100
5 MODELOS EXPERIMENTAIS UTILIZANDO A FUNÇÃO *q*-GAUSSIANA BIDIMENSIONAL 102
5.1 FILTRO q-GAUSSIANO BIDIMENSIONAL 102
5.1.1 Operador *q*-Gaussiano Unidimensional 103
5.1.2 Operador para Filtro *q*-Gaussiano Bidimensional 107
5.2 MAPAS AUTO-ORGANIZÁVEIS: O MODELO q-SOM 109
5.2.1 Mapa Auto-Organizável para Segmentação de Imagens 111
6 EXPERIMENTOS E APLICAÇÕES 115
6.1 A BASE DE IMAGENS DE *BERKELEY* 115
6.2 RESULTADOS DAS APLICAÇÕES DOS FILTROS q-GAUSSIANOS 117
6.2.1 Fase da Aplicação dos Filtros *q*-Gaussianos 119
6.2.1.1 ***Aplicação dos Ruídos Gaussianos*** 122

6.2.1.2 ***Aplicação do Filtro* q-*Gaussiano Bidimensional*** 125
6.2.2 **Fase da Segmentação das Imagens Filtradas** 131
6.2.2.1 ***Segmentação pela* q-*Entropia de Tsallis*** 132
6.2.2.2 ***Segmentação pela Entropia de Shannon Ponderada*** 134
6.2.3 **Análises Comparativas** 137
6.2.3.1 ***Análise do Índice*** $PSNR$ ***das Imagens Filtradas*** 138
6.2.3.2 ***Análise do Índice*** Q ***das Imagens Filtradas*** 145
6.2.3.3 ***Análise do Índice*** $PSNR$ ***das Imagens Segmentadas*** 153
6.2.3.4 ***Análise do Índice*** $Kappa$ ***das Imagens Segmentadas*** 174
6.3 RESULTADOS DAS APLICAÇÕES DA FUNÇÃO q-GAUSSIANA EM REDE SOM 196
6.3.1 **Fase de Treinamento dos Mapas Auto-Organizáveis** 196
6.3.1.1 ***Pré-definições para o Treinamento dos Mapas Auto-Organizáveis*** 199
6.3.1.2 ***Clusterização dos Mapas Auto-Organizáveis*** 206
6.3.2 **Fase da Segmentação a partir dos Mapas Auto-Organizáveis** 208
6.3.2.1 ***Segmentação a partir do Modelo* q-*SOM*** 210
6.3.3 **Análises Comparativas** 217
6.3.3.1 ***Coeficiente de Concordância* - Kappa Statistic** 218
6.3.3.2 ***Índice*** $Kappa$ ***sobre a Imagem* Lena *Segmentada*** 221
6.3.3.3 ***Índice*** $Kappa$ ***sobre as Imagens Segmentadas da Base de* Berkeley** 222
6.3.3.4 **Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR*)*** 226
6.3.3.5 $PSNR$ ***sobre a Imagem* Lena *Segmentada*** 228
6.3.3.6 $PSNR$ ***sobre as Imagens Segmentadas da Base de* Berkeley** 230
6.3.3.7 ***Índice Universal de Qualidade de Imagem*** (Q) 234
6.3.3.8 ***Índice*** Q ***sobre a Imagem* Lena *Segmentada*** 236
6.3.3.9 ***Índice*** Q ***sobre as Imagens Segmentadas da Base de* Berkeley** 239
6.3.3.10 ***Distância de Similaridade sobre as Imagens Segmentadas da Base de* Berkeley** 246
7 **DISCUSSÕES E CONCLUSÕES** 255
7.1 SOBRE FILTROS q-GAUSSIANOS BIDIMENSIONAIS 255
7.1.1 **Sobre Redução de Ruídos através dos Filtros *q*-Gaussianos Bidimensionais** 256
7.1.2 **Sobre Segmentação de Imagens Filtradas por Filtros *q*-Gaussianos Bidimensionais** 262

7.2 SOBRE O MODELO q-SOM 279
7.2.1 Sobre Treinamento do Modelo q-SOM 280
7.2.2 Sobre Segmentação de Imagens pelo Modelo q-SOM 281
7.3 COMENTÁRIOS FINAIS 287
7.4 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS 288
REFERÊNCIAS 290

1 INTRODUÇÃO

As tecnologias atuais têm se caracterizado por uma crescente demanda por processamento multimídia, sobretudo aquelas que envolvem imagens digitais. Na última década, um crescimento exponencial do poder computacional foi observado, tanto em *hardwares* quanto em *softwares*, impactando diretamente em maiores velocidades de conexões, acessos e processamentos, incluindo também o aumento na geração e distribuição de imagens e vídeos digitais produzidos em nosso dia-a-dia, principalmente pelo cidadão comum.

É habitual, atualmente, que sistemas digitais envolvam vídeo ou imagem em diversos domínios de aplicação, como na área médica, em sistemas de segurança, na engenharia de modo geral e, fortemente, em interações sociais humanas facilmente observadas em redes sociais virtuais.

Esta demanda por tecnologia digital tem estimulado pesquisadores a explorar fenômenos que ocorram na interação entre os elementos que compõem uma cena em formato digital. Um exemplo pode ser observado em trabalhos que envolvam reconhecimento facial, cada vez mais necessário na área de segurança e que vem experimentando grandes avanços na última década. No entanto, tais fenômenos vêm sendo estudados através de modelos matemáticos e estatísticos tradicionais.

A área da estatística, por exemplo, tem emprestado grande parte de seus achados para modelar e explicar fenômenos e objetos na área de Processamento Digital de Imagens (PDI). Um exemplo bem conhecido é o uso de funções Gaussianas para aproximar distribuições probabilísticas, tais como aquelas que representam histogramas de cor ou luminância. Tais funções podem ser utilizadas para prever observações, eliminar ruídos indesejados ou destacar regiões de interesse.

Outro exemplo é o uso de funções Gaussianas como *kernels* em métodos iterativos de otimização para aproximar valores de meta-heurística. As redes de Kohonen, com os Mapas Auto-Organizáveis apresentados em Kohonen (1982), são também exemplos bem conhecidos do uso de funções Gaussianas utilizadas para melhor explicar fenômenos na área de reconhecimento de padrões de imagens.

Em Processamento Digital de Imagens são conhecidas diversas outras aplicações da função Gaussiana, no entanto, assim como nas aplicações nas áreas da física, engenharia, medicina e economia, sabe-se, há mais de 100 anos, que alguns fenômenos não são precisamente explicados por esse tipo de função, sendo, portanto, a aplicação de Gaussianas sobre estes fenômenos uma mera aproximação de valores. Tais fenômenos vêm encontrando terreno fértil para estudos mais aprofundados na área da estatística não-extensiva.

De forma abrangente, um fenômeno não-extensivo é aquele em que os parâmetros físicos de seus modelos matemáticos não podem ser previstos apenas com a utilização das equações da física clássica, ou seja, não se pode garantir sua extensividade. Este comportamento se contrapõe aos fenômenos extensivos - como aqueles da mecânica clássica, por exemplo - em que as equações previstas são precisamente bem aplicadas. Exemplos de fenômentos não-extensivos são aqueles relacionados à turbulência, à expansão de galáxias, às interações econômicas modernas, à interatividade humana, à semântica textual e de imagens, entre muitos outros que apenas recentemente foram observados e apresentados em Tsallis (1988).

Na área de PDI, alguns trabalhos têm mostrado que os relacionamentos entre as interações físicas observadas em imagens podem também ser melhor explicadas sob o ponto de vista não-extensivo. Há cerca de duas décadas, Constantino Tsallis propôs um novo formalismo, inspirado na mecânica estatística, para aproximar cálculos físicos com melhor precisão, quando estes podem ser tratados como fenômenos não-extensivos. Inicialmente, foi proposta uma nova equação que generaliza a entropia tradicional de Boltzmann-Gibbs-Shannon (entropia BGS). Esse novo formalismo, chamado de q-Entropia, foi apresentado em Tsallis (1988), e tem mostrado grande sucesso aplicado em diversas áreas, em substituição à tradicional entropia BGS com suas bases estruturadas por Claude Shannon em Shannon (1948).

Especificamente, a q-Entropia aplicada à área de Processamento Digital de Imagens, tem experimentado avanços bastante significativos em diversos trabalhos. Dentre os mais conhecidos, a aplicação desta técnica para a segmentação de imagens é uma das mais estudadas e testadas, como pode-se ver em trabalhos como Pun (1981), Albuquerque et al. (2004), Rodrigues, Chang e Suri (2006), dentre muitos outros.

No trabalho de Tsallis et al. (1995), foi proposta uma generalização para a função Gaussiana, com fundamentos na q-Entropia, que recentemente passou a ser chamada de q-Gaussiana. Esse novo formalismo revitalizou o interesse no estudo das funções Gaussianas para todas as áreas de sua aplicação, que tem sido analisada sob a ótica da mecânica estatística não-extensiva.

Essa nova perspectiva pode permitir uma maior precisão no estudo de fenômenos relacionados às imagens e vídeos, por exemplo, em diversos filtros do tipo passa-baixa, passa-alta ou passa-banda, que podem agora ser reavaliados sob novas perspectivas, como aquelas que possam propor novos *kernels* ativados por funções q-Gaussianas, que sejam aplicadas como pré-processamento na filtragem de imagens afim de extrair ruídos, realizar realces de tonalidades ou mesmo reforçar contornos, por exemplo.

Também em aplicações de Redes Neurais Artificiais com aprendizagem não-supervisionada, a função Gaussiana é tipicamente utilizada durante o processo competitivo, na fase de treinamento, que agora pode ser analisada sob a perspectiva não-extensiva com a utilização de uma função q-Gaussiana.

Tais aplicações na área de Processamento de Imagens envolvem processamento em duas dimensões. Nesta tese, é introduzida e analisada a função q-Gaussiana aplicada à área de Processamento Digital de Imagem, propondo também uma versão bidimensional, em contraponto à versão unidimensional existente na literatura e já amplamente aplicada em áreas da física.

Com a definição de uma nova generalização da função Gaussiana, na forma de uma q-Gaussiana bidimensional, esta tese propõe novos filtros passa-baixa, aqui definidos como filtros q-Gaussianos e novos modelos de Redes Neurais Artificiais do tipo SOM (*Self-Organization Maps* apresentados em Kohonen (1982)), na forma de um modelo q-SOM.

1.1 OBJETIVO DA TESE

Propor e analisar uma nova generalização para a função Gaussiana em duas dimensões, baseada na estatística não-extensiva de Tsallis, como uma ferramenta aplicável em Processamento Digital de Imagens. São propostas q-Gaussianas para filtragem espacial de imagens e *kernels* de Redes SOM.

1.2 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DA TESE

Esta tese formaliza uma nova generalização da distribuição de *Gauss*, sob a forma de uma função q-Gaussiana bidimensional, o que contribui com a fundamentação da q-Álgebra,

tendo como base a estatística não-extensiva definida por Tsallis. A partir da definição desta nova generalização, abre-se a possibilidade de substituição das funções Gaussianas espaciais tradicionais por funções q-Gaussianas espaciais, com aplicações não apenas na área do Processamento Digital de Imagens e Sinais, mas em praticamente todas as áreas da Ciência da Computação onde as funções Gaussianas desempenham papel significativo.

Nesta tese, os experimentos contribuem especificamente para a criação de novos filtros passa-baixa para imagens, tendo a função q-Gaussiana bidimensional como *kernel*, e que denotam-se por filtros q-Gaussianos aplicáveis na redução de ruídos. Também contribui na criação de um novo modelo de Rede Neural Artificial, baseada em aprendizagem não-supervisionada através do treinamento de Mapas Auto-Organizáveis, e que aqui denota-se como modelo q-SOM aplicável à segmentação de imagens.

Tanto as aplicações dos filtros q-Gaussianos, quanto aos treinamentos do modelo q-SOM, nesta tese, aplicam-se na busca pela melhoria da qualidade da segmentação de imagens digitais, sendo, portanto, contribuições diretas à área do Processamento Digital de Imagens e Sinais.

1.3 ORGANIZAÇÃO DA TESE

A sequência dos principais assuntos abordados nesta tese, seguem a seguinte organização:

Conceitos Fundamentais: neste capítulo são abordados os principais conceitos utilizados nos experimentos, bem como os principais trabalhos relacionados citados. Inicialmente, são apresentados conceitos sobre Entropia (Seção 2.1) e Segmentação de Imagens (nas Seções 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5). Em seguida, são apresentados conceitos fundamentais sobre Filtros (Seções 2.6 e 2.7), sendo estes objetos de diversos experimentos desta tese. Conceitos sobre Redes Neurais Artificiais (Seção 2.8), sobretudo do tipo SOM, são apresentados e compõem a fundamentação para criação do modelo q-SOM e seus experimentos. Por fim, as medidas estatísticas aplicadas sobre os resultados dos experimentos são apresentadas (Seção 2.9).

Trabalhos Relacionados: neste capítulo são apresentados diversos trabalhos que têm relação entre seus fundamentos e experimentos com os temas abordados nesta tese, como apli-

cações da função Gaussiana bidimensional tradicional em filtros de imagens, em redes do tipo SOM e em metodologias de segmentação de imagens.

Formalização da Tese: neste capítulo é apresentada uma nova extensão da função Gaussiana tradicional, na forma de uma função q-Gaussiana bidimensional, como contribuição teórica desta tese, baseada na estatística não-extensiva de Tsallis, que adiciona um parâmetro de deformidade q ao modelo Gaussiano tradicional.

Modelos Experimentais: neste capítulo são descritos dois modelos com metodologias baseadas na utilização de funções q-Gaussianas bidimensionais em seu $kernel$, como contribuições experimentais desta tese: (a) Filtros de imagens, aqui denotados de filtros q-Gaussianos; (b) Redes Neurais Artificiais baseadas em aprendizagem não-supervisionada, por meio dos Mapas Auto-Organizáveis de *Kohonen*, denotado nesta tese por modelo q-SOM.

Discussões e Conclusões: finalmente, neste capítulo resumem-se as descobertas provenientes dos experimentos realizados, destacam-se pontos não considerados nos modelos propostos e direcionam-se trabalhos futuros.

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

O processamento digital de imagens vem ganhando aplicações de grande interesse em incontáveis áreas da atividade humana. Com o crescente avanço tecnológico em equipamentos de captura de imagens disponíveis a indivíduos dos mais diferentes níveis de conhecimento, novas demandas vêm surgindo, exigindo igual avanço das técnicas de análise e interpretação das informações contidas nas imagens capturadas. Sob um outro prisma, aplicações de sistemas inteligentes fundamentados em redes de aprendizagem, ganham espaço simultaneamente às demandas oferecidas pelos avanços tecnológicos.

Em nenhum outro tempo houve tamanha necessidade de desenvolvimento de algoritmos capazes de melhorar o aspecto visual das imagens, maximizando os resultados das análises por meio da melhoria da qualidade e da quantidade de informações extraídas, automaticamente.

Este capítulo é subdividido de forma a abordar conceitos fundamentais sobre análise e classificação de imagens digitais, fundamentais para as aplicações desta tese. Também são abordadas aplicações de filtros como forma de redução de ruídos, com a intenção de ilustrar as possíveis melhorias obtidas nos resultados. As metodologias de segmentação de imagens também serão aqui introduzidas através de técnicas entrópicas de limiarização e também de técnica de segmentação por clusterização. Também é abordado neste capítulo o aprendizado supervisionado oferecido pelas redes de Kohonen, com o intuito de realizar aplicações de novos *kernels* inseridos nestas técnicas. Finalizando este capítulo, são apresentadas técnicas estatísticas para análise dos resultados obtidos com os experimentos práticos propostos.

2.1 ENTROPIA

Nas aplicações envolvendo o processamento digital de sinais, a classificação e o reconhecimento de objetos vêm sendo amplamente estudados. A segmentação de imagens vêm ocupando uma fatia importante nos avanços tecnológicos para o aprimoramento dos resultados. A compreensão dos fundamentos da entropia ajuda a compor um arcabouço de metodologias para

a extração de informações das imagens. Nesta tese, a definição de novas variações da função q-Gaussiana foram aplicadas no pré-processamento de segmentação de imagens por entropia.

Os fundamentos da entropia remetem-nos à Sadi Carnot, que em sua publicação Carnot (1824), observou que ao fornecer calor a uma máquina a vapor, apenas parte da energia seria transformada em movimento de rotação do motor, a chamada energia livre. Tal movimento somente aconteceria havendo diferença de temperatura. A energia restante seria desperdiçada na forma de calor residual, que apesar de também ser energia, não poderia ser transformada em trabalho. A essa energia desperdiçada deu-se o nome de entropia, do grego *entrepien*, que significa degradação.

A entropia tem sua origem em um estudo sobre o engenho a vapor desenvolvido por Rudolph Clausius, que surge como um conceito qualitativo descrito por uma equação matemática no contexto da termodinâmica. Em sua obra Clausius (1867), Clausius descobre que o rendimento de uma máquina a vapor é uma função da variação de temperatura, segundo a qual o engenho opera. A entropia formulada por Clausius tornou-se o conceito fundamental da Mecânica Estatística, sendo expressa pelo quociente entre a quantidade de calor transferido e a temperatura absoluta a que o processo é realizado, na forma de

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}. \tag{1}$$

O estudo de Clausius tornou-se a base da 2ª Lei da Termodinâmica, onde a quantidade de entropia de qualquer sistema isolado termodinamicamente tende a crescer com o tempo, até alcançar um valor máximo, definindo assim o conceito de entropia Termodinâmica.

2.1.1 Sistemas Extensivos e Não-Extensivos

O conceito de entropia está relacionado diretamente com as configurações atômicas, microscópicas de um sistema físico, isto é, ingredientes macroscópicos são compostos de moléculas (átomos), havendo, portanto, uma conexão com o mundo microscópico. A existência desta conexão foi formalizada por Boltzmann, no contexto da termodinâmica, em 1877, em seu trabalho entitulado em tradução livre como *"Acerca da relação entre a segunda lei da teoria mecânica do calor e do cálculo de probabilidades com respeito às leis do equilíbrio termodinâmico"*, Dahmen (2006). Boltzmann definiu um método probabilístico para medir a entropia

de um determinado número de partículas de um gás ideal, estabelecendo a entropia como sendo proporcional ao logaritmo natural do número de microestados que um gás pode ocupar, representado por

$$S = k \, . \, \log \omega, \tag{2}$$

onde S é a entropia, k é a constante de Boltzmann e ω é o número de microestados possíveis para o sistema. Quando a entropia destes sistemas é proporcional ao número de partículas, ou à massa - exigência da termodinâmica - então os conceitos físicos se estendem proporcionalmente. São exemplos de sistemas extensivos aqueles com comportamentos descritos pela mecânica clássica, como a Newtoniana, a Lagrangeana e a Hamiltoniana, aplicáveis às interações de curto alcance ou blocos fracamente entrelaçados. Os movimentos, as variações de energia e as forças que atuam sobre um corpo são adequadamente representados como sistemas extensivos quando seus efeitos podem ser previstos, como em aplicações nas áreas da estática, cinemática e dinâmica, por exemplo.

Entretanto, existem inúmeros outros sistemas para os quais a entropia extensiva não é a mais indicada por não ser a forma mais adequada de representá-los. Tais sistemas são ditos como complexos, pois têm correlações de longo alcance, estando fortemente entrelaçados. A entropia de Boltzmann busca entender as relações entre os elementos que envolvem sistemas considerados simples, como um gás, uma mesa ou um imã, mas esta teoria não é suficientemente adequada para representar sistemas complexos. Uma teoria que vem ganhando força na representação de elementos em sistemas complexos foi desenvolvida por Constantino Tsallis, em seu trabalho Tsallis (1988). Estes sistemas classificamos como não-extensivos.

Nos sistemas não-extensivos, a entropia não se mostra proporcional quando se estendem, em suas aplicações, os conceitos fundamentados na termodinâmica, como a propriedade da Aditividade. As leis da mecânica tradicional não representam adequadamente as relações existentes nos extremos de uma galáxia, por exemplo, porque suas estrelas estão relacionadas em conexões de longo alcance, em conexões gravitacionais.

Aplicações práticas em sistemas não-extensivos estão sendo testadas em diversas áreas, com trabalhos em medicina, física aplicada, plasma, gravitação, turbulência de fluidos, na construção dos futuros computadores quânticos e até nos movimentos das galáxias. Cientistas do LHC (CERN), utilizaram a generalização proposta por Tsallis em experimento que mediu a

distribuição de partículas observadas em colisões ocorridas em altísimas energias, concluindo que são descritas de melhor maneira utilizando a teoria não-extensiva de Tsallis.

A entropia extensiva foi fundamentada em Shannon (1948), unindo conceitos de Boltzmann e Gibbs, e desde então vem sendo estudada e aplicada em inúmeros trabalhos em diversas área da ciência. Na Seção 2.1.2 é apresentado o formalismo da entropia extensiva de Shannon, também conhecida como entropia BGS. Para a representação de sistemas não-extensivos; na Seção 2.1.3 é apresentada a entropia não-extensiva de Tsallis, também conhecida como q-Entropia. A mecânica não-extensiva de Tsallis já produziu milhares de artigos relacionados diretamente por cientistas de todo o mundo. Uma nova versão da entropia de Shannon é apresentada na Seção 2.1.4, que permite atribuir pesos distintos aos subsistemas, chamada de entropia de Shannon Ponderada (*Weighted Shannon*).

2.1.2 Entropia Extensiva de Shannon

Claude Shannon associou a entropia à quantidade de informação, lançando as bases para a Teoria da Informação. Em sua pesquisa, Shannon buscava um sistema telefônico que permitisse a transferência do máximo de quantidade de informação possível, além de uma forma de reparar suas distorções. Shannon criou uma teoria matemática para a comunicação, relacionando a quantidade de informação com a probabilidade desta ser transferida. Se a probabilidade de uma mensagem ocorrer for pequena, então ela contém muita informação, caso contrário, ela contém pouca informação.

Em Shannon (1948), o autor deduziu a Equação (3), unindo conceitos da mecânica estatística formulada por Boltzmann e Gibbs, Borges (1999), e que mais tarde ficou conhecida como entropia Boltzmann-Gibbs-Shannon, ou entropia BGS. Estes trabalhos renderam a Shannon a fama de pai da Teoria da Informação. A Equação que representa a entropia BGS é dada por

$$S = -\sum p_i \log p_i, \tag{3}$$

onde log é o logaritmo na base 2, que determina o nível de desordem da distribuição de probabilidade p_i, sendo p_i a probabilidade de se encontrar o sistema no estado i, onde $P = p_1,...,p_k, 0 \leq p_i \leq 1$ e $\sum_i p_i = 1$. No trabalho de Shannon (1948), a Equação (3) determina a capacidade ne-

cessária do canal para transmitir a informação. Sistemas que podem ser descritos pela entropia BGS são classificados como sistemas extensivos.

Shannon ainda definiu que a entropia de um sistema pode ser calculada a partir da entropia de seus subsistemas, formulando assim a propriedade da aditividade expressa pela Equação

$$S(P,Q) = S(P) \ + \ S(Q). \tag{4}$$

A entropia definida por Shannon está diretamente relacionada à entropia definida por Carnot no contexto da termodinâmica, mantendo grande relação entre a entropia termodinâmica e a Teoria da Informação.

2.1.3 Entropia Não-Extensiva de Tsallis

O formalismo definido por Shannon em seu trabalho Shannon (1948) não descreve sistemas físicos que envolvem efeitos não-extensivos. O físico grego, naturalizado brasileiro, Constantino Tsallis, em seu trabalho Tsallis (1988), propôs uma nova Equação (5), que é uma generalização da entropia BGS, formalizada por

$$S_q(P) = \frac{1 - \sum_{i=1}^{k} (p_i)^q}{q - 1}, \tag{5}$$

cuja principal diferença está na introdução de um parâmetro de ajuste $q \in \Re$.

A chamada entropia não-extensiva de Tsallis generaliza a entropia BGS, onde p_i é o valor da probabilidade do sistema físico estar no estado i, sendo $i = [1, 2, ..., k]$, onde k é o número de possibilidades do sistema, e q é o índice de entropia que caracteriza o grau de não-extensividade. Uma importante propriedade da Equação (5) é que, quando $q \to 1$, esta converge para a tradicional entropia BGS descrita pela Equação (3).

A entropia de Tsallis possui várias propriedades físicas novas, que vêm sendo estudadas, como por exemplo da não-negatividade, da concavidade e dos extremos, da equiprobabilidade, entre outras, que podem ser vistas em Tavares (2003). Entretanto, uma das propriedades fundamentais e de suma importância para este trabalho, é a da pseudo-aditividade, dada por

$$S_q(P,Q) = S_q(P) \ + \ S_q(Q) \ + \ (1 - q) S_q(P) S_q(Q). \tag{6}$$

Nota-se que a Equação (6) da pseudo-aditividade de Tsallis, reduz-se à Equação (4) da aditividade de Shannon, quando $q \to 1$.

Um estudo aprofundado sobre o parâmetro de não-extensividade q, através da q-Entropia, ou entropia de Tsallis, pode ser visto no trabalho de Tavares (2003), onde se faz uma análise das característcas desta função, quando $q < 0$, $q > 0$ e $q \to 1$. No trabalho de Borges (1999), é apresentado um estudo sobre o parâmetro q em relação à Teoria da Informação.

2.1.4 Entropia de Shannon Ponderada

Apesar da Equação (3), proposta por Shannon, ser bem aceita e utilizada há décadas, nem sempre os sistemas físicos puderam ser explicados precisamente por ela. A generalização da entropia de Shannon proposta em Tsallis (1988) permite representar sistemas físicos considerados como não-extensivos, utilizando o parâmetro de não-extensividade q.

Tanto o formalismo de Shannon quanto sua generalização proposta por Tsallis, não consideram a possibilidade de atribuir maior importância a um subsistema em relação ao outro. Nesse sentido, em Gallão (2012), redefiniu-se a entropia de Shannon dada pela Equação (3), em uma nova versão que permite ponderar os subsistemas com pesos diferentes, ainda que dependentes um do outro.

Sendo um subsistema representado por uma distribuição P - que será ponderada por um valor α - e outro subsistema representado por uma distribuição Q - que será ponderada por um valor $(1-\alpha)$, onde $0 \leq \alpha \leq 1$ - temos então

$$S_p(P) = -\sum_{i=1}^{n} \alpha p_i \log \alpha p_i, \tag{7}$$

e

$$S_p(Q) = -\sum_{j=1}^{m} (1-\alpha) q_j \log (1-\alpha) q_j. \tag{8}$$

Shannon, em seu trabalho Shannon (1948), define a propriedade da aditividade como uma consequência da entropia. Redefine-se, então, a propriedade da aditividade de Shannon, dada originalmente pela Equação (4), na forma de uma pseudo-aditividade de Shannon Ponderada, como sendo

$$S_p(P,Q) = 2\,[\,\alpha S_p(P) \;+\; (1-\alpha) S_p(Q)\,]. \tag{9}$$

A Equação (9) da pseudo-aditividade de Shannon Ponderada, reduz-se à Equação (4) da aditividade de Shannon, quando $\alpha = 0{,}5$. A demonstração desta generalização pode ser vista em Gallão (2012).

Estudos mais aprofundados ainda são necessários a respeito do parâmetro de ponderação α. A busca pelo melhor valor de α - que maximiza a entropia de Shannon Ponderada - poderá ter bons resultados a partir da análise de características físicas associadas a este parâmetro. Até o momento, esta técnica mostrou-se capaz de atingir resultados iguais aos obtidos pela entropia de Tsallis em experimentos sintéticos realizados a partir da variação controlada dos parâmetros das funções Gaussianas, como visto em Gallão e Rodrigues (2015).

Apesar dos experimentos realizados para encontrar o valor de α, até o momento, tenham sido efetuados de forma iterativa, a busca deste parâmetro na aplicação da entropia de Shannon Ponderada para segmentação de imagens não se caracteriza como um método iterativo. Para encontrar um método automático de se calcular o melhor valor de α, Gallão (2012) mostra que há uma tendência a estabilidade deste parâmetro de acordo com determinadas características físicas da imagem, abrindo a perspectiva para maiores investigações e assim determiná-lo automaticamente ou por conhecimento *a priori*.

2.2 SEGMENTAÇÃO DE IMAGENS

A segmentação de imagem é um processo de subdivisão da imagem digital em segmentos, com o objetivo de simplificar a extração de informação da imagem, amplamente aplicada na área da Visão Computacional para localizar formas, detectar bordas e identificar objetos por exemplo. Entretanto, na área de Processamento Digital de Imagens, a segmentação ganha objetivos como a redução da quantidade de informação a ser processada, a redução da resolução da imagem, a redução de ruídos da imagem e até a redução do custo de armazenamento para grandes volumes de imagens, como mostra o trabalho de Kubica (2004).

As técnicas para segmentar imagem digital, via de regra, podem ser sintetizadas em um processo onde conjuntos de pixels com características específicas são agrupados e rotulados por alguma similaridade, de modo a facilitar a análise da imagem. Os conjuntos segmentados possuem pixels semelhantes sob aspectos como tonalidade de cor, luminância, texturas entre outros. Na busca autônoma de alvos, por exemplo, a segmentação deve ser apoiada por uma

seleção apurada de sensores ou filtros, na intenção de realçar os objetos de interesse e diminuir detalhes irrelevantes da imagem, como em diagnose médica, reconhecimento de pessoas, identificação de caracteres ou códigos, controle de tráfego, entre outros exemplos.

Sabe-se que não há uma técnica única que resolva qualquer problema de segmentação de imagens. Além da análise específica da imagem, é necessário conhecer bem o problema a ser resolvido para, então, aplicar uma combinação de técnicas, a fim de obter a solução esperada, como pode-se ver em Chang et al. (2006), onde diversas técnicas de segmentação foram aplicadas comparativamente.

Os algoritmos de segmentação para imagens monocromáticas, geralmente em tonalidades de cinza, baseiam-se em duas categorias elementares, relacionadas aos valores de intensidade de seus pixels: descontinuidade e similaridade. A descontinuidade pressupõe fronteiras de regiões suficientemente diferentes entre si e em relação ao fundo da imagem, permitindo a detecção do limite com base na descontinuidade local em intensidade, aplicável a segmentações baseadas em bordas ou contornos. A similaridade baseia-se na subdivisão de uma imagem em regiões que apresentam semelhanças definidas *a priori*, também com base na intensidade dos pixels, mas sem buscar existência de barreiras abruptas. Nesta linha, encontram-se as técnicas de segmentação por limiarização, as quais serão abordadas nas próximas seções.

Com o aumento frequente de aplicações em sistemas que capturam e processam imagens, em praticamente todas as áreas da sociedade contemporânea, novas técnicas para segmentação de imagens vêm surgindo e tornam-se alvos de novas investigações. Com a intenção de organizar diferentes tipos de metodologias de limiarização para segmentação de imagem, a seção seguinte apresenta algumas técnicas, sem a intenção de ser uma classificação definitiva a cerca das metodologias de segmentação por limiarização, que são muitas, mas com o intuito de ilustrar as principais abordagens que vêm sendo utilizadas no Processamento Digital de Imagens.

2.3 SEGMENTAÇÃO POR LIMIARIZAÇÃO

A segmentação por limiarização, ou *thresholding*, possui como idéia principal a separação da imagem em grupos, classes ou regiões que possuam pixels com luminâncias similares, através da identificação de um limiar de corte, sendo este aqui citado como *threshold*. Entende-

se por luminância a medida da densidade da intensidade de uma luz refletida numa dada direção, e por limiar a intensidade de um tom de cinza em imagens digitais.

Uma imagem com n níveis de cinza possui $(n-1)$ possíveis pontos de separação, tomados como limiar (*threshold*) T, onde $0 < T < (n-1)$. Um pixel receberá a cor preta quando tiver o menor nível de tom (geralmente 0), a cor branca quando representar o maior nível $(n-1)$ e assumirá tonalidades intermediárias para os demais níveis. A limiarização consiste em separar os n níveis de cinza em k classes, separadas por limiares T_k. Os pixels onde $n \leq T_k$ serão atribuídos ao menor tom, e representarão uma das regiões da imagem segmentada. Os pixels onde $n > T_k$ serão atribuídos ao valor máximo de limiar e representarão uma segunda região da imagem segmentada.

O histograma de intensidade é uma forma bastante didática para representar a frequência da intensidade dos pixels de uma imagem digital. Ao separar uma imagem $f(x,y)$ em apenas duas classes de tonalidades, é usual manter 0 como a cor preta e 1 como a cor branca. Encontrado o *threshold* T, expressa-se a imagem limiarizada $g(x,y)$, neste caso binarizada, como segue:

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } f(x,y) \geq T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{10}$$

Identificar o *threshold* ótimo é o desafio inicial no processo de limiarização, onde diversas propostas vêm sendo aplicadas. Imagens binarizadas podem ser bastante úteis na identificação de objetos ou de áreas de interesse, como pode ser visto nos trabalhos de Albuquerque et al. (2004), Rodrigues et al. (2011) e Gallão (2012), por exemplo. Diversas técnicas têm sido utilizadas para a limiarização de imagens em tons de cinza, onde pixels com limiares semelhantes são agrupados a partir da determinação de um ou mais limiares de separação. Um *survey* sobre o assunto pode ser encontrado em Sezgin e Sankur (2004a). Em Simões (2000), pode-se ver um estudo sobre segmentação de imagens por classificação de cores.

2.3.1 Limiarização Tradicional

Uma forma elementar de encontrar um *threshold* é fazer a análise dos vales de luminância apresentados pelo histograma de intensidade dos pixels. Tal análise pode contribuir na identificação do limiar ótimo para a segmentação de imagens, nos casos onde há uma evidente

separação entre duas classes as quais representam o *background* e *foreground*. Entende-se por limiar ótimo, ou *optimal threshold* (T_{opt}), como sendo o corte que melhor separa as duas classes analisadas, segundo determinados critérios pré-definidos.

No caso da limiarização tradicional, a análise busca um limiar que evidencie a separação entre as classes através de um vale com dois picos, ou seja, que encontre um valor mínimo que esteja entre dois máximos. O valor mínimo encontrado é tomado como um possível *threshold* sendo escolhido dentre um grupo de valores mínimos pertencentes a um vale em um histograma bimodal, como mostra Gonzalez e Woods (2010). O *threshold* encontrado separa a figura em duas classes, sendo identificado como um mínimo local dentro de um vale, para em seguida binarizá-la.

A limiarização tradicional é fortemente dependente do comportamento do histograma e também de algum critério de escolha do *threshold* pertencente ao grupo de mínimos valores de luminância no vale do histograma bimodal. Isto restringe a sua aplicação a apenas um grupo de imagens que possuam *background* e *foreground* fortemente definidos. Por outro lado, quando esta divisão não se mostra evidente, apresentando histogramas unimodais ou multimodais, por exemplo, este não revela mínimos entre dois máximos e a limiarização tradicional deixa de ser eficiente e recomendável por não apresentar um mínimo bem definido como referência de *threshold*, mantendo grande dependência da análise semântica da imagem. Nota-se então que, a limiarização tradicional é altamente dependente de alguma subjetividade, de algum conhecimento *a priori* envolvido no processo de segmentação.

2.4 SEGMENTAÇÃO POR ENTROPIA

Diversos modelos entrópicos vêm sendo utilizados para o processo de segmentação de imagens. Esta tese aborda a limiarização baseada na entropia de Boltzmann-Gibbs-Shannon na Seção 2.4.1, que muito bem representa sistemas considerados extensivos. Para a segmentação de sistemas não-extensivos utiliza-se a q-Entropia descrita na Seção 2.4.2. Por fim, a entropia de Shannon Ponderada é apresentada na Seção 2.4.3.

2.4.1 Limiarização por Entropia de Shannon

A metodologia de limiarização de imagem pela entropia de Shannon foi apresentada no trabalho de Pun (1981), e baseia-se na construção de um histograma bidimensional de uma imagem adquirida com n tons de cinza. Considera-se a distribuição das probabilidades desses n tons de cinza dada por $P = \{p_1; p_2; ...; p_n\}$. O algoritmo separa P em duas distribuições normalizadas, sendo uma representando o *foreground* (P_P) e outra representando o *background* (P_Q), da seguinte forma:

$$P_P = \frac{p_1}{p_P}, \frac{p_2}{p_P}, ..., \frac{p_t}{p_P} \tag{11}$$

onde $p_P = \sum_{i=1}^{t} p_i$, e

$$P_Q = \frac{p_{t+1}}{p_Q}, \frac{p_{t+2}}{p_Q}, ..., \frac{p_n}{p_Q} \tag{12}$$

onde $p_Q = \sum_{i=t+1}^{n} p_i$, e t é um valor que divide P nas distribuições P_P e P_Q. Em seguida, calculam-se as probabilidades P_P e P_Q para a entropia de Shannon, de acordo com a Equação (3). Assim, para as distribuições P_P e P_Q temos, respectivamente

$$S(P) = -\sum_{i=1}^{t} p_i \log p_i \tag{13}$$

e

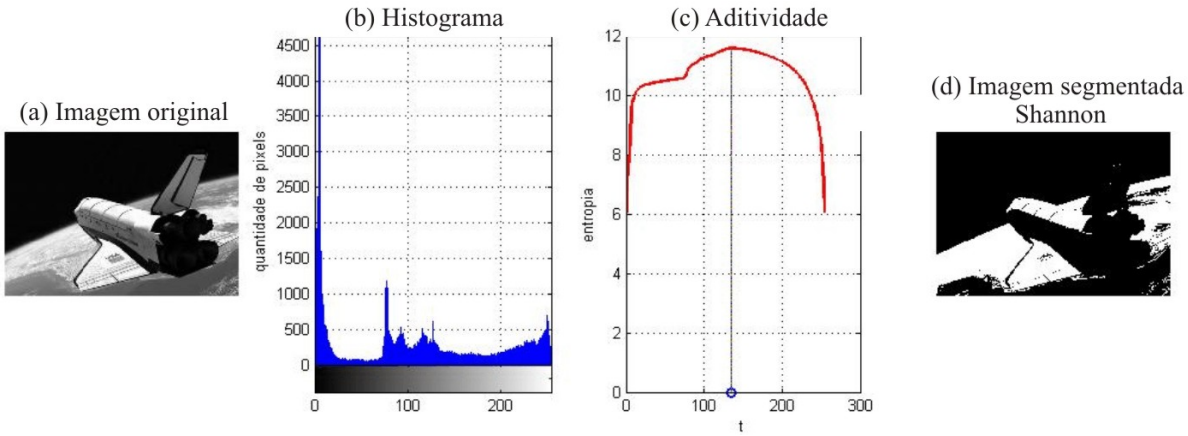
$$S(Q) = -\sum_{i=t+1}^{n} p_i \log p_i. \tag{14}$$

Em seguida, calcula-se a aditividade de Shannon através da Equação (4). Repete-se, então, o procedimento para $t = t + 1$. Por fim, o *threshold* escolhido para a limiarização da imagem será o de maior valor na aditividade de Shannon, ou seja, o limiar ótimo é tomado como

$$t_{opt}^{Shannon} = argmax[\, S(P,Q)\,]. \tag{15}$$

A Figura 1 mostra um exemplo de limiarização baseada em *threshold* calculado automaticamente através da entropia de Shannon.

Figura 1 – Exemplo de limiarização por entropia de Shannon



Fonte: Autor. (a) Imagem original em 256 tons de cinza. (b) Histograma de intensidades da imagem original. (c) Gráfico da Aditividade de Shannon, onde foi encontrado o threshold $T = 135$. (d) Imagem segmentada pela entropia de Shannon.

Note que o histograma possui diversos vales e mínimos locais. Neste exemplo, o formalismo de Shannon encontrou $T = 135$ como sendo o limiar que separa as distribuições P_P e P_Q.

2.4.2 Limiarização por Entropia de Tsallis

Esta abordagem, a exemplo da limiarização por entropia de Shannon, também baseia-se na construção de um histograma bidimensional da luminância pela quantidade de pixels de cada intensidade da imagem original, adquirida com n tons de cinza, conforme apresentado nos trabalhos de Rodrigues e Giraldi (2009) e Esquef (2002). Também considera-se a distribuição das probabilidades desses n tons de cinza dada por $P = \{p_1; p_2; ...; p_n\}$.

Da mesma forma, separa-se P em duas distribuições normalizadas representando regiões distintas, sendo P_P para o *foreground*, como apresenta a Equação (11), e P_Q para o *background*, como apresenta a Equação (12). Em cada nova divisão das probabilidades P_P e P_Q calcula-se a entropia, de acordo com a Equação (5), sendo

$$S_q(P) = \frac{1 - \sum_{i=1}^{t} (\frac{P_i}{p_P})^q}{q - 1} \tag{16}$$

e

$$S_q(Q) = \frac{1 - \sum_{i=t+1}^{n} (\frac{P_i}{p_Q})^q}{q-1}. \tag{17}$$

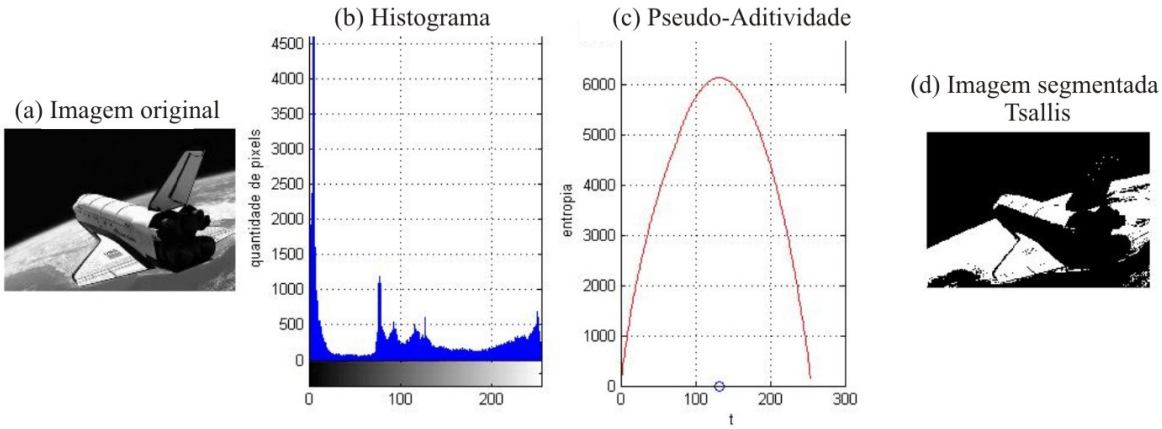
Em seguida, calcula-se a pseudo-aditividade de Tsallis através da Equação (6) e repete-se o procedimento para $t = t + 1$. Finalizando, o *threshold* escolhido para a limiarização da imagem será o de maior valor na pseudo-aditividade de Tsallis, ou seja, o *threshold* ótimo é tomado como

$$t_{opt}^{Tsallis} = argmax[\ S_q(P,Q)\ ]. \tag{18}$$

Nota-se que a maximização do valor do *threshold* é dependente do valor de q, permitindo assim obter um valor do *threshold* ótimo através da variação do valor de q, adaptando-o às condições da imagem.

A Figura 2, a seguir, ilustra um exemplo de limiarização automática baseada em *threshold* calculado através da entropia de Tsallis, tomando-se convenientemente $q = 0{,}1$ como sendo o valor do parâmetro de não-extensividade.

Figura 2 – Exemplo de limiarização por entropia de Tsallis



Fonte: Autor. (a) Imagem original em 256 tons de cinza. (b) Histograma de intensidades da imagem original. (c) Gráfico da Pseudo-Aditividade de Tsallis, onde foi encontrado o threshold $T = 132$. (d) Imagem segmentada pela entropia de Tsallis com $q = 0{,}1$.

Sob o ponto de vista da Teoria da Informação, quanto menor a entropia máxima S_q produzida por um valor q relacionado com a entropia teórica máxima S_{max} de um sistema físico - o qual nesta tese trata-se de uma imagem - maior é a auto-informação contida nesse sistema. Este princípio da Teoria da Informação nos conduz à idéia de que o valor ótimo de q pode ser

alcançado minimizando a relação S_q/S_{max}. Então, calculamos o valor ótimo de q, ressaltando a imagem, conforme segue.

Para cada valor de q calcula-se o q ótimo como sendo aquele que minimiza a razão S_q/S_{max}. Esta metodologia apresentada no trabalho de Rodrigues e Giraldi (2009) e posteriormente em Sobiecki et al. (2011), considera a hipótese de que cada imagem natural pode comportar-se como um sistema não-extensivo e, como tal, exigindo um valor de q diferente para a segmentação, e também as suas regiões internas podem ser não-extensivas exigindo diferentes valores de q.

2.4.3 Limiarização por Entropia de Shannon Ponderada

Também seguindo a metodologia da limiarização pela entropia de Shannon tradicional, esta abordagem baseia-se na construção de um histograma bidimensional da luminância pela quantidade de pixels de cada intensidade da imagem original, adquirida com n tons de cinza. Também considera-se a distribuição das probabilidades desses níveis dada por $P = \{p_1; p_2; ...; p_n\}$. Da mesma forma, separa-se P em duas distribuições normalizadas, sendo uma representando o *foreground* (P_P), como apresenta a Equação (11), e outra representando o *background* (P_Q), como apresenta a Equação (12).

A partir deste ponto, define-se um valor de α, onde $0 \leq \alpha \leq 1$, para aplicar maior ou menor peso à distribuição P_P, dependente da distribuição P_Q. Conforme apontado na Seção 2.1.4, para encontrar automaticamente o valor de α ainda são necessários estudos mais aprofundados. No momento, a escolha será efeita iterativamente até que valores oportunos, segundo critérios subjetivos, sejam encontrados. Para o desenvolvimento desta tese, a escolha do valor de α torna-se menos importante, pois são feitas comparações variando as configurações do *kernel* do filtro na etapa de pré-processamento das imagens e mantendo fixos os valores de α escolhidos.

Calcula-se, então, a entropia de Shannon Ponderada para a probabilidade P_P, sendo

$$S_p(P) = -2\sum_{i=1}^{t}(\alpha p_i \log_2 \alpha p_i) - 2\alpha \tag{19}$$

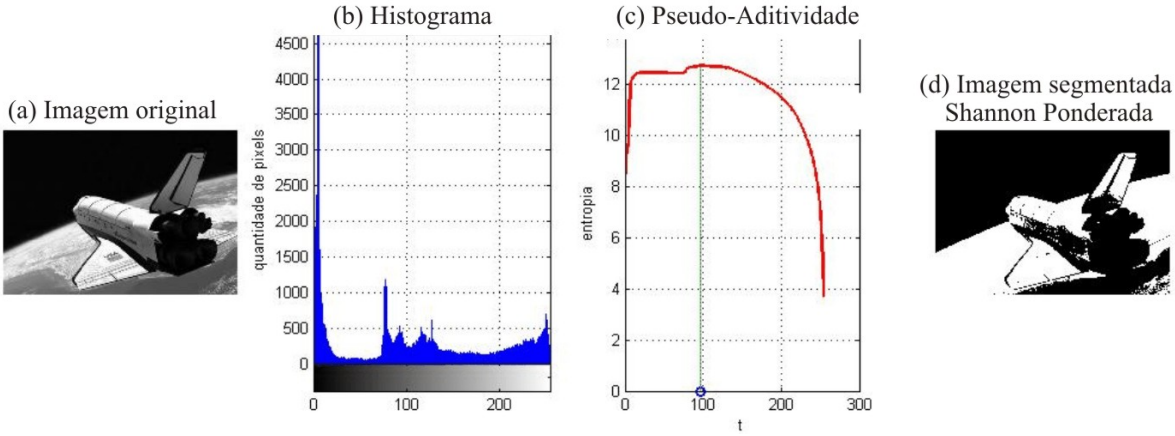
e para a probabilidade P_Q, sendo

$$S_p(Q) = -2 \sum_{i=t+1}^{n} ((1-\alpha)p_i \log_2(1-\alpha)p_i) - 2(1-\alpha). \tag{20}$$

Calcula-se, então a pseudo-aditividade de Shannon Ponderada através da Equação (9). Finalizando, o *threshold* escolhido para a binarização da imagem será o de maior valor na pseudo-aditividade, ou seja, o valor do *threshold* ótimo de Shannon Ponderada é tomado como

$$t_{opt}^{ShannonPonderada} = argmax[\ S_p(P,Q)\ ]. \tag{21}$$

Figura 3 – Exemplo de limiarização por entropia de Shannon Ponderada



Fonte: Autor. (a) Imagem original em 256 tons de cinza. (b) Histograma de intensidades da imagem original. (c) Gráfico da Pseudo-Aditividade de Shannon Ponderada, onde foi encontrado o threshold $T = 97$. (d) Imagem segmentada pela entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = 0{,}4$.

A Figura 3 mostra um exemplo de limiarização baseada em *threshold* calculado automaticamente através da entropia de Shannon Ponderada com o parâmetro $\alpha = 0{,}4$. Foi encontrado $T = 97$ como sendo o limiar que separa as distribuições P_P e P_Q.

A maximização do valor do *threshold* é dependente do valor de α, permitindo assim obter um valor do *threshold* ótimo através da variação do valor de α, atribuindo-se maior ou menor peso ao *background*, diretamente proporcional ao *foreground*, adaptando-o às condições da imagem. Ao aplicar pesos diferentes ao *background* e ao *foreground*, a entropia de Shannon Ponderada permite realçar detalhes da imagem com pouca probabilidade de ocorrer.

2.5 SEGMENTAÇÃO POR CLUSTERIZAÇÃO

Na área de PDI, um grupo de registros que representam pixels que formam uma imagem e que possuam algum tipo de similaridade definida *a priori*, são considerados como *clusters*. Os métodos utilizados em algoritmos de clusterização por particionamento dividem a matriz de pixels em quantidades pré-definidas de *clusters*. O método de clusterização pode também oferecer a quantidade de *clusters* como proposta de resultado, conforme apresentado no trabalho de Schmitt et al. (2008).

O particionamento é feito utilizando-se uma medida específica de similaridade pré-determinada por algum conhecimento *a priori*, de modo que cada pixel seja inserido no *cluster* segundo algum critério também pré-estabelecido, como a menor distância entre o próprio pixel e o centro do *cluster*, visto no trabalho de Martins et al. (2008); ou como a inserção de um pixel no *cluster* cujas bordas estão mais próximas deste pixel, por exemplo.

Nesta tese, é aplicada a metodologia de clusterização utilizada na busca de um limiar de separação entre duas regiões, a partir de uma imagem digital, com o método *k-Means* descrito a seguir. Os resultados obtidos com a aplicação deste método são comparados aos resultados obtidos a partir das redes de *Kohonen*.

2.5.1 O Método *k-Means*

O algoritmo *k-Means* é um método iterativo de classificação, não-supervisionado, que tem como objetivo particionar m registros em k partições, onde cada partição representa um *cluster* e cada registro representa um pixel, sendo $k \ll m$. Este método, que foi apresentado no trabalho de MacQueen (1967), permite definir as regiões pertencentes a cada *cluster*, e determinar as distâncias entre cada partição. O funcionamento do *k-Means* pode ser descrito da seguinte forma:

Primeiro define-se a quantidade de *clusters*, e escolhe-se aleatoriamente os respectivos centróides. Cria-se então, uma matriz de similaridade com a distância entre cada registro e os centróides, sendo esta a etapa de maior custo computacional, com $(k.m)$ distâncias a serem

calculadas. Em seguida, atribui-se os elementos mais próximos de um centróide ao mesmo *cluster*, dando origem a uma matriz de *clusters*.

A partir desta matriz de *clusters*, selecionam-se novos centróides não mais aleatórios, mas sim através do valor médio igual, ou próximo, àquele calculado para o *cluster*, dado pela Equação (22), gerando-se uma nova matriz de similaridade com uma nova distribuição dos elementos aos *clusters*. Por ser um método iterativo, esses procedimentos serão repetidos até que os *clusters* não sofram mais alterações de registros, ou até que um limite pré-estabelecido de iterações seja alcançado.

$$Centroide_{(x_1,\ x_2,...,\ x_n)} = (\ \frac{\sum_{i=1}^{m'} x_{1st_i}}{m'}, \frac{\sum_{i=1}^{m'} x_{2st_i}}{m'},..., \frac{\sum_{i=1}^{m'} x_{nst_i}}{m'}\ ), \tag{22}$$

onde x_{1st_i} é a primeira ordenada de cada um dos m' registros do *cluster*, x_{2st_i} é a segunda ordenada de cada um dos m' registros do *cluster* e x_{nst_i} é a n-ésima ordenada de cada um dos m' registros do *cluster*, no espaço n-dimensional.

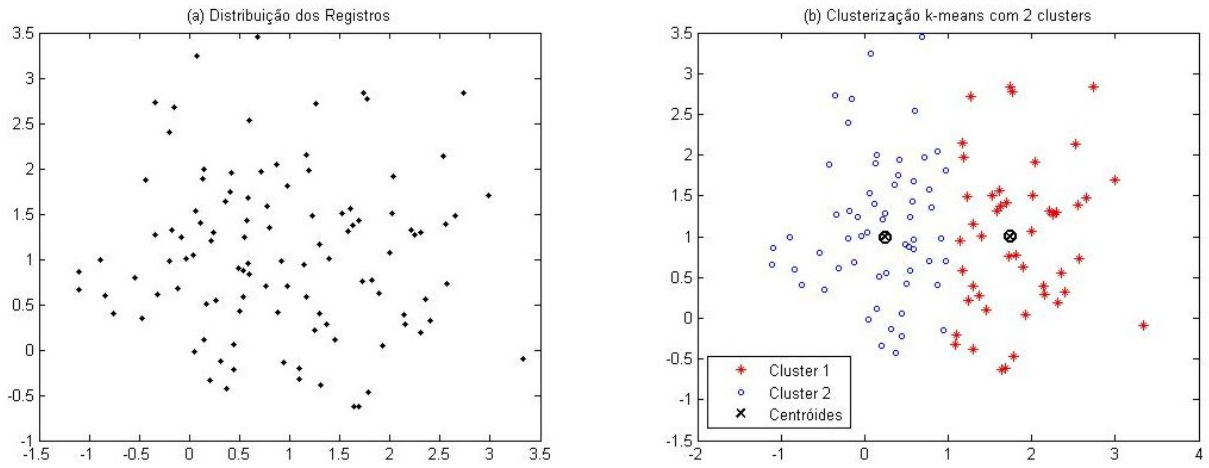
Para o cálculo da distância entre o registro e o centróide, normalmente é utilizada a distância Euclidiana, definida pela Equação (23), mas outras medidas de distância também vêm sendo utilizadas, como a distância Chebychev ou a distância Manhattan, entre outras. Considerando os pontos $P = (p_1, p_2,..., p_n)$ e $Q = (q_1, q_2,..., q_n)$, num espaço n-dimensional Euclidiano, temos:

$$Dist_{(P,Q)}^{Euclidiana} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i)^2} \tag{23}$$

$$Dist_{(P,Q)}^{Chebychev} = max|p_i - q_i| \tag{24}$$

$$Dist_{(P,Q)}^{Manhattan} = \sum_{i=1}^{n}(|p_i - q_i|) \tag{25}$$

Figura 4 – Exemplo de clusterização com algoritmo *k-Means*, utilizando a distância Euclidiana.



Fonte: Autor. (a) Distribuição dos registros em uma base. (b) Os mesmos registros separados em 2 clusters.

A Figura 4 mostra um exemplo de clusterização com *k-Means*, utilizando 2 *clusters*. Note que o método *k-Means* oferece como resultado partições disjuntas, onde cada registro pertence a apenas um *cluster*. Também possui alguns obstáculos que limitam seu poder de atuação, conforme apresentado no trabalho de Nicodemis (2006), como a determinação da quantidade de *clusters*, alto custo computacional para convergir para um ótimo global, aplicação a apenas registros descritos por atributos numéricos, entre outros.

Uma aplicação simples pode ser vista em Vieira e Castro (2005). Pode-se ver uma importante aplicação em imagens médicas para segmentação da artéria carótida em Delsanto et al. (2006), onde foi proposta uma nova etapa no algoritmo CULEX de Delsanto et al. (2005), através da aplicação de um algoritmo *k-Means*.

2.6 FILTROS

Em processamento de sinais, filtrar um sinal significa selecionar quais frequências são desejadas, e descartar aquelas indesejadas. É um procedimento relativamente simples e facilmente implementável. Pode-se, então, considerar filtro como um procedimento capaz de eliminar ou realçar algum componente, ou alguma característica pré-definida, a partir de um sinal de entrada, produzindo um sinal de saída, filtrado.

O termo filtro digital é usado frequentemente para especificar um sistema de tempo discreto Hayes (2006). Kaiser, em seu trabalho Kuo e Kaiser (1966), define filtro digital como um processo computacional - ou algoritmo - pelo qual um sinal amostrado, ou sequência de números, atuando como entrada, é transformado em uma segunda sequência de números, chamada sinal de saída. O processo computacional, prossegue Kaiser, pode ser de passa-baixa (suavização), filtragem passa-faixa, interpolação, geração de derivadas, entre outros.

Os filtros podem ser lineares ou não lineares. Um sistema será linear caso a soma ponderada dos sinais de saída for igual à trasformação da soma ponderada dos sinais de entrada.

2.6.1 Tipos de Filtros

Os filtros espaciais podem ser classificados em passa-baixa, passa-alta e passa-banda. Um filtro do tipo passa-baixa permite passar as baixas freqüências, mas elimina valores relacionados às altas freqüências. Portanto, o efeito deste filtro é o de suavização da imagem, uma vez que as altas freqüências que correspondem às transições abruptas são atenuadas, tendo aplicações na diminuição dos ruídos nas imagens, mas pode apresentar o efeito de borramento.

Um filtro do tipo passa banda manterá apenas os valores correspondentes a uma determinada faixa de freqüência pré-definida, eliminando os demais valores. A conquequência de suas aplicação depende da faixa predefinida, sendo projetado para salientar aspectos pré-determinados ou eliminar ruídos ou imperfeições presentes em uma faixa de freqüência conhecida *a priori*.

Um filtro do tipo passa-alta permite passar as altas freqüências, eliminando valores relacionados às faixas de baixas freqüências. Assim, este tipo de filtro faz com que transações entre diferentes regiões da imagem sejam realçadas, sob o risco de também realçar ruídos.

Nesta tese, foram desenvolvidos experimentos com aplicação de filtro espacial passa-baixa, aplicado sobre imagens digitais em 256 tons de cinza, com a intenção de eliminar altas frequências, representadas pelos valores dos pixels que compõem as imagens, e assim, atenuar ruídos nas imagens.

2.7 FILTRAGENS EM IMAGEM DIGITAL

A filtragem em imagens digitais é uma metodologia aplicada no processamento de sinais, a qual possui como característica a alteração, parcial ou total, de determinados aspectos do sinal de entrada, com a finalidade de melhorar a interpretação a respeito da imagem, tanto aos observadores humanos quanto aos sistemas automáticos de análise.

No domínio da frequência, a filtragem de imagens busca alterações nas frequências do sinal com a finalidade de minimizar interferência, realçar características, manipular ou reduzir os ruídos, de forma similar às metodologias aplicadas no domínio espacial.

No campo do Processamento Digital de Imagens, os ruídos se apresentam em variações de tonalidades, estendendo conceitos do domínio da frequência para o domínio espacial, surgindo a necessidade de discretizar, como sinais de entrada, as informações capturadas. Nesta fase, emerge a necessidade da representação das informações através de variações nas tonalidades dos pixels que compõem a imagem, representadas por valores numéricos inteiros em uma matriz bidimensional. Neste campo, as demandas tornam-se cada vez mais desafiadoras, sobretudo em aplicações que subsidiam a área da inteligência artificial, como da Visão Computacional por exemplo.

Segundo Smith (1997), as imagens são sinais com características especiais, por serem medidas por distâncias e não por tempo, também por conterem grandes quantidades de informações e, o julgamento final de qualidade, é frequentemente uma avaliação humana subjetiva.

2.7.1 Filtragem no Domínio Espacial

É possível fazer uma troca de base em uma imagem e representá-la em termos de uma soma ponderada infinita de um conjunto de senóides, migrando assim do domínio da frequência para o domínio espacial, onde esta tese está fundamentada. Esta representação mostra que mudanças rápidas na imagem são representadas por frequências altas e, por outro lado, mudanças suaves são representadas por frequências baixas. Esta mudança de base pode ser feita utilizando a transformada de *Fourier*.

O termo domínio espacial, na área de processamento de imagens, refere-se à aplicação de metodologias derivadas do domínio da frequência, mas que operam diretamente sobre os pixels de uma imagem. Esta manipulação pode ser aplicada a toda a imagem, ou a apenas uma parte previamente selecionada segundo algum critério. O domínio espacial pode ser representado pela expressão

$$g(x,y) = T[f(x,y)], \tag{26}$$

onde $f(x,y)$ representa a matriz de pixels de uma imagem digital de entrada, $T[f(x,y)]$ é um operador que irá fazer a transformação de $f(x,y)$ em uma nova matriz de pixels $g(x,y)$, que por sua vez representa a imagem processada de saída. O operador T realiza uma transformação no pixel de posição (x,y), que está no centro de uma vizinhança. São vários os operadores utilizados para a filtragem, podendo ser operadores lineares como por exemplo a convolução, a correlação e a média, ou operadores não lineares que se utilizam de fundamentos estatísticos como a mediana, moda, mínimo e máximo, ou ainda operadores derivativos que se utilizam das derivadas de primeira e de segunda ordens, gradientes, entre muitos outros. Alguns destes operadores são objetos de estudo nesta tese e serão abordados em seções subsequentes.

A principal abordagem em definir uma vizinhança ao redor de uma posição (x,y) está em utilizá-la como uma janela que terá a própria posição (x,y) como sua posição central. Assim, introduz-se o conceito de janela, como sendo uma área contendo $m \times n$ pixels.

Estas janelas - também chamadas de máscaras, *templates* ou *kernels* - definem matrizes nos operadores de transformação. É possível definir um *kernel* cujo formato seja uma aproximação circular, mas geralmente utiliza-se *kernel* retangular ou quadrado, dada sua eficiência aliada à simplicidade de implementação.

Durante o processo de transformação o *kernel* é movido pixel a pixel, a partir do canto superior esquerdo da imagem de entrada. A imagem de saída $g(x,y)$, será gerada à medida que o centro do *kernel*, $w(0,0)$, percorre cada pixel da imagem de entrada, sendo o operador T calculado apenas com os pixels pertencentes à vizinhança do centro do *kernel* na posição (x,y), e atualiza apenas o valor deste pixel central, obtendo o novo valor $g(x,y)$ como sendo a soma dos produtos entre os coeficientes do *kernel* e os pixels de $f(x,y)$.

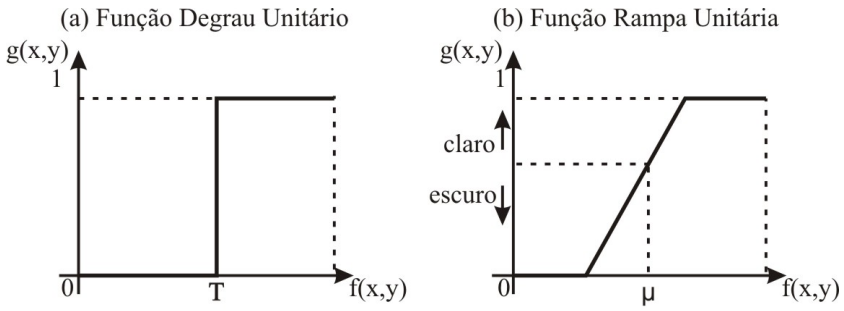
O *kernel*, com sua respectiva função de transformação, pode comumente ser chamado de filtro, estabelecendo uma similaridade com o formalismo no domínio da frequência, e à transformação realizada dá-se o nome de filtragem. Para um tamanho de máscara $m \times n$,

considera-se que $m = 2a+1$ e $n = 2b+1$, onde a e b são números inteiros positivos, garantindo *kernel* de tamanho ímpar, simplificando a operação de indexação.

Uma função bastante utilizada em processamento de imagens é a transformação por intensidade, que busca alterar diretamente a intensidade dos pixels para fazer ajustes ou realçar partes da imagem. Em seu caso mais simples, onde $n = m = 1$, o resultado da transformação é a binarização da imagem, porém requer um limiar de separação definido *a priori* ou por algum método automático.

A binarização, apresentada na Seção 2.3 e definida como a Equação (10), pode aqui ser representada como mostra a Figura 5(a). Observa-se que o corte é feito na forma de uma função degrau. Após a transformação, para valores de $g(x,y) = 1$ a intensidade dos pixels é alterada para 255 (branco) e, para valores de $g(x,y) = 0$, a intensidade dos pixels é alterada para 0 (preto).

Figura 5 – Exemplo de funções utilizadas para binarização de imagens.



Fonte: Autor. (a) Função degrau unitário, para binarização, tendo como limiar de corte o valor T. (b) Função rampa unitária, para realce de contraste, tendo limiares definidos pela função.

Ao calcular a integral da função degrau unitário, encontra-se a função rampa unitária. Ao aplicar a transformação utilizando uma função rampa unitária como ativação do *kernel*, apresenta-se uma interessante aplicação: o realce do contraste da imagem. Esta função é dada por

$$g(x,y) = \frac{1}{1 + (\frac{\mu}{f(x,y)})^{\epsilon}}, \tag{27}$$

onde μ é o valor médio da intensidade dos pixels da região que deseja-se realçar o contraste, sendo ϵ a inclinação da rampa. Sendo a função rampa unitária a integral da função degrau unitário, logo, a função degrau unitário é a derivada da rampa unitária.

2.7.2 Relação Sinal-Ruído

A relação sinal-ruído - SNR (*Signal-to-Noise Ratio*) - é definida como sendo a razão da potência de um sinal e a potência do ruído sobreposto ao sinal. SNR busca comparar o nível de um sinal desejado de entrada com o nível do ruído aplicado a este sinal. Quanto mais alta a relação SNR menor será o efeito do ruído sobre a medição do sinal de entrada. A relação SNR é dada por

$$SNR = \frac{P_{sinal}}{P_{ruido}} = (\frac{A_{sinal}}{A_{ruido}})^2 = \frac{\sigma^2_{sinal}}{\sigma^2_{ruido}}, \tag{28}$$

onde P é a potência média; A é o valor quadrático médio (RMS) da amplitude dos sinais, ou seja, σ^2 dos sinais. Os valores de potência, amplitude ou variância devem ser medidos no mesmo sistema e dentro de uma mesma largura de banda.

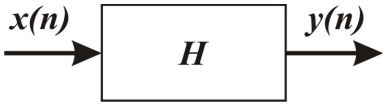
2.7.3 Convolução e Correlação

Os sistemas lineares invariantes com o tempo (LIT), exercem papel fundamental no processamento de sinais, podendo ser descritos por suas respostas ao impulso, que são as sequências obtidas em suas saídas - quando estes são alimentados por uma sequência de impulso unitário - representado matematicamente por:

$$h(n) = H\{\delta(n)\} \tag{29}$$

Sendo possível conhecer a resposta de um sistema LIT ao impulso, pode-se descrever o comportamento de tal sistema quando sua entrada for qualquer outra sequência. A Figura 6 ilustra $x(n)$ como sendo uma sequência de entrada de um sistema LIT, H como sendo uma sequência de impulso e $y(n)$ a sequência de saída.

Figura 6 – Representação de um sistema Linear Invariante no Tempo (LIT).



Fonte: Autor. Entrada $x(n)$, tendo H como operador de transformação do sistema e saída dada por $y(n)$.

Sendo possível decompor uma sequência qualquer em um somatório de impulsos deslocados, onde cada impulso representa uma amostra da sequência original, uma amostra $x(n)$ pode ser obtida isoladamente a partir da operação de amostragem dada por

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k), \tag{30}$$

onde, se $n = 0$, resultará em um impulso de valor 1; se $n \neq 0$, resultará em impulso de valor 0; e k é o atraso medido na entrada do sinal. Conforme ilustra a Figura 6, sabe-se que $y(n)$ relaciona-se com $x(n)$ na forma de $y(n) = H\{x(n)\}$, então

$$y(n) \quad = \quad H\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\}.$$

Sendo o sistema linear, pode-se considerar que a transformação da soma é a soma das transformações:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\{x(k)\delta(n-k)\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)H\{\delta(n-k)\} \end{aligned}$$

Sendo a transformação linear e invariante no tempo, ao aplicar um atraso no sinal de entrada provoca-se também um atraso no sinal de saída. Matematicamente, isso significa que, se $H\{\delta(n)\} = h(n)$, então $H\{\delta(n-k)\} = h(n-k)$. Assim, conforme apresentado em Nalon (2009), pode-se representar esta operação no domínio do tempo, da seguinte forma:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{31}$$

A operação descrita pela Equação (31) é chamada de convolução. Fisicamente, a convolução é uma transformação que ocorre em sistemas lineares invariantes no tempo. O operador de convolução é aqui representado por um asterísco $(*)$, conforme segue:

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{32}$$

Na prática, a operação de convolução permite conhecermos um sinal de entrada a partir de um sinal de saída, e vice-versa, ou, em particular, conhecer o comportamento do sistema a partir da transformação realizada por um impulso unitário. Castleman (1996) cita que a filtragem por convolução implementada digitalmente é util para três principais classes de processamento de imagens: deconvolução, isto é, remoção de efeitos indesejados aplicados aos sistemas lineares; remoção de ruído, isto é, reduzir os efeitos de sinais indesejáveis, contagiosos que foram adicionados linearmente; realce, isto é, aumentar as características específicas de contraste em detrimento de outros objetos na cena.

Com a aplicação da Equação (32), uma amostra qualquer de uma função discreta $f(n)$ pode ser obtida isoladamente por meio de uma operação de convolução, sendo possível decompor um sinal discreto qualquer em um somatório ponderado de amostras da sequência original.

A relação da entrada de um sistema linear invariante ao deslocamento $f(n)$ e sua saída $g(n)$ é dada pela soma de convolução no espaço unidimensional descrito por

$$g(x) = w(x) * f(x) = \sum_{i=-a}^{a} w(i)\ f(x-i), \tag{33}$$

onde $w(x)$ é um filtro unidimensional de tamanho m e $a = (m-1)/2$.

A convolução define um produto no espaço linear entre funções integráveis. Este produto satisfaz as propriedades algébricas da Comutatividade, Associatividade e Distributividade, conforme descritas em Nalon (2009) e em Hayes (2006).

A propriedade Comutativa afirma que a ordem em que os operandos estão representados não altera o resultado da convolução. Assim, um sistema com resposta ao impulso $w(n)$ convoluído com um sinal de entrada $f(n)$, se comporta exatamente da mesma forma que um sistema com resposta ao impulso $f(n)$ convoluído com um sinal de entrada $w(n)$. A propriedade da Comutatividade é, então, representada por:

$$f(n) * w(n) = w(n) * f(n)$$

A propriedade Associativa do operador de convolução, também chamada de Cascateamento, afirma que, dois sistemas com respostas aos impulsos, $w_1(n)$ e $w_2(n)$, sendo conectados sequencialmente, serão equivalentes a um sistema que possua a convolução entre $w_1(n)$ e $w_2(n)$ como resposta aos impulsos. A propriedade Associativa na convolução é, então, representada

por:

$$[f(n) * w_1(n)] * w_2(n) = f(n) * [w_1(n) * w_2(n)]$$

A propriedade da Distributividade do operador de convolução, também chamada de Paralelismo, afirma que, se dois sistemas com respostas aos impulsos $w_1(n)$ e $w_2(n)$ forem conectados em paralelo, convoluídos com um sinal de entrada $f(n)$, um sistema que possuir resposta ao impulso igual à soma de $w_1(n)$ e $w_2(n)$, será equivalente. Assim, representa-se a propriedade da Distributividade por:

$$f(n) * [w_1(n) + w_2(n)] = [f(n) * w_1(n)] + [f(n) * w_2(n)]$$

2.7.3.1 Correlação

Pode-se considerar uma variação do operador de convolução, chamado de operador de correlação, identificado por uma estrela . A correlação, como operador de transformação em um filtro, também é um somatório do produto entre os valores dos elementos de duas funções, exatamente como ocorre no processo de convolução, com exceção de não haver a rotação do *kernel* $w(n)$, produzindo, portanto, o mesmo resultado da convolução porém rotacionado em 180°.

Assim, define-se a função de correlação entre um sinal de entrada $f(n)$ e um filtro $w(n)$ como sendo:

$$g(n) = f(n) \;\; w(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)w(n+k) \tag{34}$$

O operador de correlação não respeita a propriedade da Comutatividade, ou seja

$$f(n) \;\; w(n) \;\neq\; w(n) \;\; f(n).$$

2.7.3.2 Convolução e Correlação Unidimensionais

Há diversas abordagens para a mecânica do cálculo de convoluções, dependendo da forma e do tipo da sequência que deve ser convoluída. Ao considerarmos aplicar o operador de convolução para a filtragem de um sinal de entrada unidimensional $f(x)$, utilizando uma função

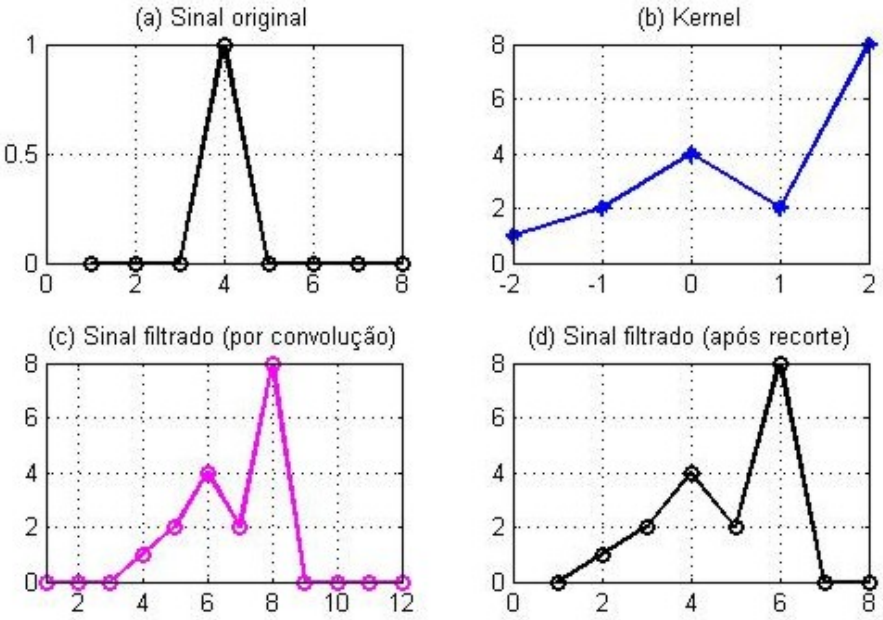
de ativação $w(x)$ com *kernel* de tamanho m, com a finalidade de produzir um sinal filtrado de saída $g(x)$, define-se o operador de convolução unidimensional de acordo com a Equação (33).

De acordo com os conceitos abordados na Seção 2.7.3, a convolução entre um impulso unitário e um *kernel* tem como sinal de saída o próprio *kernel* no instante do impulso. Nesta tese é utilizada a propriedade fundamental da convolução para ilustrar os procedimentos do operador de convolução unidimensional, sendo esta a base da convolução bidimensional que será apresentada na seção a seguir, e utilizada nos experimentos desta tese.

Toma-se, como exemplo, um sinal original representado por $f = \{0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0\}$, com o impulso unitário discreto ocorrendo no 4° elemento de f, conforme mostra a Figura 7(a). Considera-se um filtro com *kernel* de tamanho $m = 5$, dado por $w = \{1;\ 2;\ 4;\ 2;\ 8\}$, que pode ser visto na Figura 7(b).

Faz-se o preenchimento de f com zeros, necessário para permitir uma sobreposição do *kernel* com o sinal de entrada de tal forma que o 1° elemento de f fique alinhado com o último elemento do *kernel*. Desta forma, adiciona-se $(m - 1)$ zeros à direita e à esquerda de f, resultando em $f' = \{\mathbf{0};\ \mathbf{0};\ \mathbf{0};\ \mathbf{0};\ 0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ \mathbf{0};\ \mathbf{0};\ \mathbf{0};\ \mathbf{0}\}$. Assim, o filtro w alinha-se à esquerda de f', iniciando a convolução com o elemento mais à direita de w alinhado ao elemento mais a esquerda de f. Durante o processo de convolução, o *kernel* w irá percorrer cada elemento de f', da esquerda para a direita, e o preenchimento com zeros garante que haverá convolução até o último elemento de f, ou seja, em todos os elementos do sinal original de entrada.

Figura 7 – Representação Gráfica da Convolução Unidimensional.



Fonte: Autor. (a) Exemplo de um sinal de entrada do tipo impulso unitário discreto. (b) *kernel* original, não rotacionado. (c) Resultado da convolução na última iteração, sem recorte. (d) Sinal de saída, com recorte.

Estando definidos $f(x)$ como o sinal original, $f'(x)$ como o sinal de entrada e o *kernel* $w(x)$ de tamanho $m = 5$, aplica-se a Equação (33) que define a convolução unidimensional, porém adaptada à nomenclatura utilizada neste exemplo, da seguinte forma:

$$g(x) = w(x) * f'(x) = \sum_{i=\frac{1-m}{2}}^{\frac{m-1}{2}} f'(x-i)\, w(i). \tag{35}$$

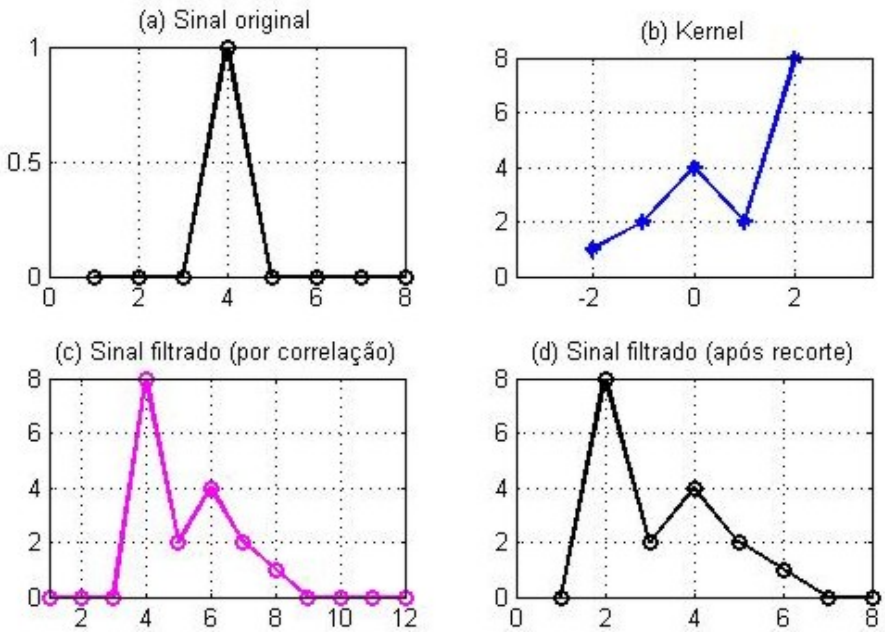
Durante o processo de convolução, considera-se o *kernel* rotacionado em 180°. Esta rotação é efetuada durante o processo de convolução, como nota-se na Equação (35), onde se lê $f'(x-i)$. Para ilustrar os procedimentos do operador de correlação unidimensional, foram utilizados os mesmos sinais como exemplo, ou seja, um sinal original representado por $f = \{0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0\}$, como um impulso unitário discreto que ocorre no 4° elemento de f, conforme mostra a Figura 8(a). Considera-se um filtro com *kernel* de tamanho $m = 5$, dado por $w = \{1;\ 2;\ 4;\ 2;\ 8\}$, que pode ser visto na Figura 8(b).

Para aplicar o operador de correlação, o somatório do produto dos elementos de $w(x)$ e $f(x)$ é feito com a utilização da seguinte equação:

$$g(x) = w(x) \;\; f'(x) = \sum_{i=\frac{1-m}{2}}^{\frac{m-1}{2}} w(i) \; f'(x+i) \tag{36}$$

Durante o processo de correlação, considera-se o *kernel* não rotacionado, como nota-se na Equação (36), onde se lê $f'(x+i)$. Como o procedimento de correlação é exatamente igual ao procedimento adotado para a convolução, exceto por não rotacionar o filtro w, a saída esperada será igual àquela obtida pela convolução, porém rotacionada em 180°. Assim, o sinal de saída após a correlação, representada por $g(x) = w(x) \;\; f'(x)$, será $g = \{0;\ 0;\ 0;\ 8;\ 2;\ 4;\ 2;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0\}$, conforme é mostrado na Figura 8(c). Opcionalmente, conforme comentado anteriormente, pode-se fazer o recorte no sinal de saída $g(x)$. A Figura 8(d) mostra o resultado da correlação após o recorte dos elementos adicionais.

Figura 8 – Representação Gráfica da Correlação Unidimensional.



Fonte: Autor. (a) Exemplo de um sinal de entrada. (b) *Kernel* original, não rotacionado. (c) Resultado da correlação na última iteração, sem recorte. (d) Sinal de saída, com recorte.

Sabendo-se que o operador de correlação não respeita a propriedade da comutatividade, caso fosse aplicada a correlação alterando a posição dos sinais na entrada, na forma de $g(x) =$

$f'(x)\ w(x)$, o resultado seria rotacionado em 180°, ou seja, igual àquele obtido pela convolução $g(x) = w(x) * f'(x)$, ilustrada pela Figura 7(d), sendo $g = \{0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 2;\ 4;\ 2;\ 8;\ 0;\ 0;\ 0\}$.

2.7.3.3 Convolução e Correlação Bidimensionais

Os conceitos de convolução e de correlação espacial também se aplicam a funções bidimensionais de tamanho $M \times N$, sendo $(M,\ N) > 1$. Assim, todos os conceitos abordados na seção anterior também se aplicam aqui, mas serão estendidos para abrangerem sinais de entrada na forma de imagens bidimensionais, objetos desta tese.

Considera-se uma imagem digital bidimensional $f(x,y)$ como sendo um sinal de entrada, e um *kernel* $w(x,y)$ de tamanho $m \times n$, sendo $(m,\ n) > 1$, como sendo uma matriz de pesos em um filtro operado por convolução. A operação de convolução bidimensional entre $w(x,y)$ e $f(x,y)$ é definida por:

$$g(x,y) = w(x,y) * f(x,y) = \sum_{i=-a}^{a} \sum_{j=-b}^{b} w(i,j)\ f(x-i, y-j), \tag{37}$$

onde $a = (m-1)/2$ e $b = (n-1)/2$.

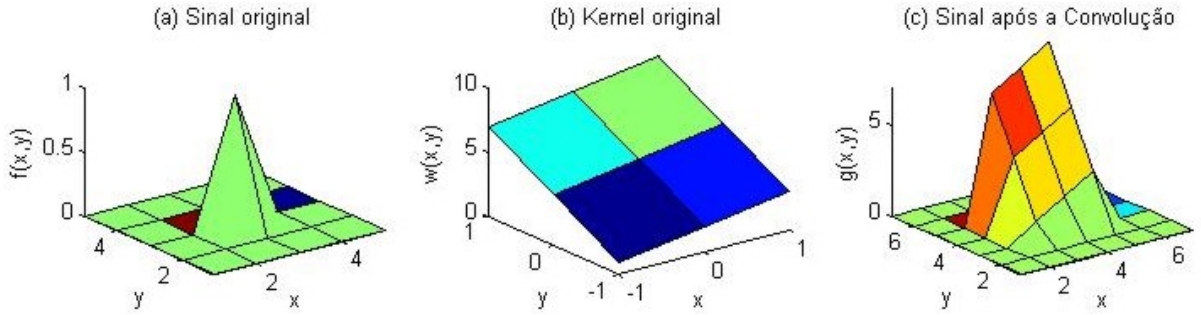
Na aplicação do operador de convolução para filtragem de uma imagem digital, pode-se entender cada elemento pertencente ao sinal de entrada $f(x,y)$ como sendo a intensidade dos pixels, cujos valores dependem da matriz de cores a qual a imagem é formada. Os valores dos elementos do *kernel* $w(x,y)$, podem ter origem em alguma função matemática *a priori*, ou poderão ser dependentes de alguma operação matemática efetuada sobre os pixels de $f(x,y)$, conforme abordado na seção anterior. Nesta tese, os experimentos serão efetuados segundo novas variações da função q-Gaussiana.

Tratando imagem digital como sendo um sinal de entrada, a convolução representada por $g(x,y) = w(x,y) * f(x,y)$ consiste em calcular a intensidade de um determinado pixel na posição $(x,y) \in g$ em função do somatório do produto das intensidades entre os pixels vizinhos à posição $(x,y) \in f$ e os elementos do *kernel* $w(x,y)$ posicionados sobre esta vizinhança.

Para ilustrar a aplicação do operador de convolução bidimensional, considere uma imagem de entrada $f(x,y)$ de tamanho 5×5 pixels $(M = N = 5)$, na forma de um impulso unitário discreto bidimensional localizado na posição central da imagem, como mostra a Figura

9(a). Considere um filtro com *kernel* $w(x,y)$ de tamanho 3×3 elementos $(m = n = 3)$, mostrado na Figura 9(b). O resultado da convolução bidimensional $g(x,y) = w(x,y) * f(x,y)$ é exibido na Figura 9(c).

Figura 9 – Representação gráfica da convolução bidimensional.



Fonte: Autor. (a) Sinal de entrada $f'(x,y)$. (b) *Kernel* $w(x,y)$. (c) Sinal de saída $g(x,y)$ após a convolução.

De forma análoga ao que ocorre na convolução unidimensional, a convolução entre um filtro $w(x,y)$ e um sinal do tipo impulso unitário discreto bidimensional $f(x,y)$, terá como saída $g(x,y)$ os mesmo valores de $w(x,y)$ porém rotacionados em 180° exatamente no local do impulso unitário.

Para iniciar o processo de convolução bidimensional, é preciso fazer o preenchimento do sinal original $f(x,y)$, com zeros, para obter o sinal de entrada do filtro, que aqui denominamos de $f'(x,y)$. Adicionam-se, então, $(m-1)$ linhas acima e igual valor abaixo de $f(x,y)$ e $(n-1)$ colunas à direita e igual valor à esquerda de $f(x,y)$. Da forma análoga à convolução unidimensional, o preenchimento com zeros garante que todos os elementos do sinal de entrada possam ser convoluídos pelo *kernel*.

Para a aplicação do operador de convolução bidimensional entre $w(x,y)$ e $f'(x,y)$, com base na Equação (37), é agora definida como:

$$g(x,y) = w(x,y) * f'(x,y) = \sum_{i=\frac{1-m}{2}}^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=\frac{1-n}{2}}^{\frac{n-1}{2}} w(i,j)\ f'(x-i,y-j) \tag{38}$$

Na Seção 2.7.3.1, foi definido o operador de correlação unidimensional de acordo com a Equação (34). Estendendo aquele conceito para aplicá-lo na filtragem de imagens digitais, obtém-se $f(x,y)$ como um sinal de entrada, e $w(x,y)$ como um filtro de tamanho $m \times n$. Assim, considerando $a = (m-1)/2$ e $b = (n-1)/2$, a correlação espacial bidimensional, é definida

por:

$$g(x,y) = w(x,y) \;\; f(x,y) = \sum_{i=-a}^{a} \sum_{j=-b}^{b} w(i,j) \; f(x+i,y+j) \tag{39}$$

Para aplicar o operador de correlação bidimensional entre um sinal de entrada $f(x,y)$ como representação de uma imagem digital, e $w(x,y)$ como *kernel* bidimensional de um filtro de tamanho $m \times n$, o procedimento é exatamente o mesmo daquele adotado para a convolução bidimensional, exceto por não rotacionar o *kernel* durante o processo de transformação. Considerando-se $f'(x,y)$ como sendo o sinal $f(x,y)$ acrescido de zeros, com base na Equação (39), tem-se que a correlação espacial bidimensional é apresentada na forma a seguir:

$$g(x,y) = w(x,y) \;\; f'(x,y) = \sum_{i=\frac{-m}{2}}^{\frac{m}{2}} \sum_{j=\frac{-n}{2}}^{\frac{n}{2}} w(i,j) \; f'(x+i,y+j) \tag{40}$$

2.7.4 Filtros Gaussianos

Um filtro é caracterizado como Gaussiano quando seu impulso de resposta é uma função de Gauss, ou mesmo uma aproximação dela. Matematicamente, um filtro Gaussiano modifica o sinal de entrada por convolução, utilizando como ativação uma função de Gauss, dada por

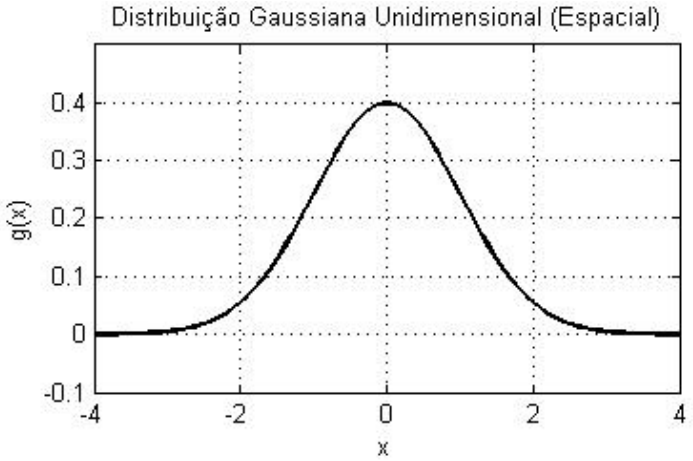
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}, \tag{41}$$

onde σ_x é o desvio-padrão da função de Gauss no domínio espacial, x é a intensidade do sinal e $\bar{x}$ é o valor médio de x, que na distribuição Gaussiana representa seu ponto central.

A distribuição pela função de Gauss, também chamada de distribuição normal, obedece aos fundamentos do teorema do limite central, o qual estabelece que, sob condições apropriadas, a média aritmética de um número suficientemente grande de variáveis aleatórias independentes, cada uma com um valor esperado bem definido e variância bem definida, pode ser representada pela aproximação de uma distribuição normal, conforme Fischer (2010).

Um exemplo da distribuição Gaussiana no domínio espacial, como resultado da Equação (41), pode ser visto na Figura 10.

Figura 10 – Distribuição normal através de função Gaussiana unidimensional, normalizada no domínio espacial.



Fonte: Autor. Foi obtido o valor máximo de $g(x) = 0{,}3989$ com desvio-padrão $\sigma_x = 1$ e média $\bar{x} = 0$.

A distribuição Gaussiana pode também ser representada no domínio da frequência em função da intensidade da frequência f no sinal - em *Hertz* - e do desvio-padrão σ_f da função de Gauss, na forma de

$$\hat{g}(f) = e^{-\frac{f^2}{2\sigma_f^2}}. \tag{42}$$

Nas seções subsequentes, são feitas abordagens sobre a utilização da função de Gauss na aplicação de filtros espaciais, considerando funções Gaussianas unidimensionais e bidimensionais como ativadoras do operador de convolução. Nesta tese, estes operadores são utilizados com novas variações da função q-Gaussiana.

2.7.4.1 Operador Gaussiano Unidimensional

A construção de um filtro que fará uma transformação sobre um sinal de entrada é dependente da função de ativação definida no *kernel*. Tal função de ativação será a responsável pelos cálculos dos valores do *kernel*, e que serão utilizados na operação de convolução, conforme visto na Seção 2.7.3.

Para realizar uma filtragem sobre um sinal de entrada unidimensional, ao utilizar uma função de Gauss, também unidimensional, como operador de um filtro de convolução, pode-se dizer que a filtragem está sendo operada por um filtro Gaussiano. Desta forma, determinam-

se os valores de cada elemento do *kernel*, a exemplo da descrição feita sobre o operador de convolução unidimensional na Seção 2.7.3.2. A Equação (41), que define a função de Gauss a ser utilizada neste filtro Gaussiano unidimensional, é repetida a seguir apenas por conveniência:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}$$

Considere, como definição de um exemplo de aplicação, um sinal original do tipo impulso unitário, com 12 elementos, ilustrado pela Figura 11(a), cujos valores são:

$$f_{original} = \{0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0\}$$

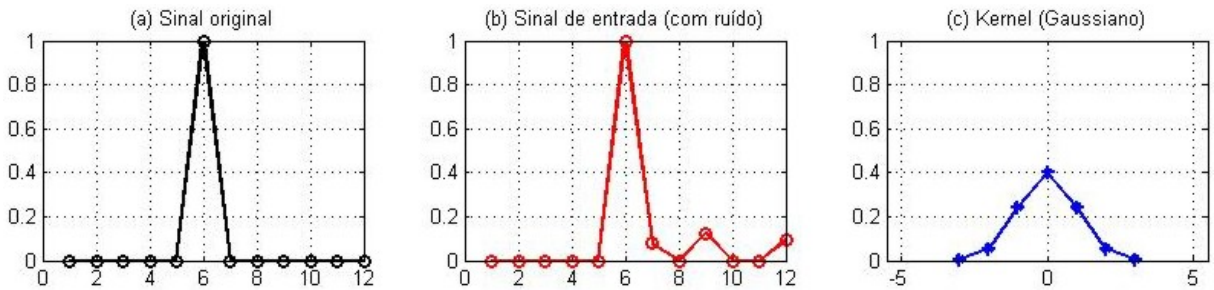
Considere que $f_{original}$ sofre a adição de ruído. Neste contexto, optamos por um ruído Gaussiano, que resulta em um sinal $f(x)$, que pode ser visto na Figura 11(b), sendo dado por:

$$f = \{0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 0{,}077;\ 0;\ 0{,}122;\ 0;\ 0;\ 0{,}093\}.$$

Considere um *kernel* $w(x)$, com tamanho $m = 7$, o qual obedece a uma distribuição normal, tendo como *kernel* a função Gaussiana unidimensional, dada pela Equação (41), com desvio-padrão em $\sigma_x = 1$ e média das intensidades $\bar{x} = 0$. A Figura 11(c) ilustra a representação gráfica de $w(x)$, cujos valores são:

$$w(x) = \{0{,}0044;\ \ 0{,}0540;\ \ 0{,}2420;\ \ 0{,}3989;\ \ 0{,}2420;\ \ 0{,}0540;\ \ 0{,}0044\}$$

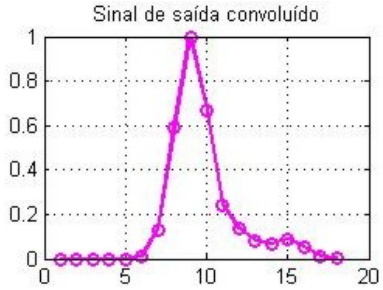
Figura 11 – Exemplo de filtro Gaussiano unidimensional.



Fonte: Autor. (a) Sinal original $f_{original}$. (b) Sinal ruidoso $f(x)$, a ser filtrado por convolução. (c) *Kernel* $w(x)$, de tamanho $m = 7$, tendo como operador de convolução uma função de Gauss unidimensional.

Com o exemplo definido na Figura 11, deseja-se extrair ruídos do sinal de entrada $f(x)$ com a aplicação de um filtro Gaussiano descrito por $w(x)$. Assim, faz-se a convolução entre $f(x)$ e $w(x)$, representado por $g(x) = f(x) * w(x)$. Como resultado, tem-se um sinal de saída $g(x)$ representado graficamente na Figura 12.

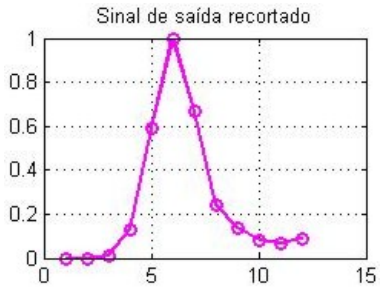
Figura 12 – Exemplo de sinal de saída $g(x)$, de um filtro Gaussiano unidimensional.



Fonte: Autor. Sinal de saída após a convolução por filtro Gaussiano unidimensional, definido na Figura 11. Valores de g(x) = {0; 0; 0; 0; 0; 0,016; 0,13; 0,589; 1; 0,668; 0,244; 0,138; 0,083; 0,069; 0,089; 0,054; 0,012; 0,001}.

Opcionalmente, pode-se finalizar o processo de filtragem mantendo iguais dimensões entre o sinal de entrada e o sinal de saída. Portanto, pode ser feita a eliminação dos elementos adicionais recortando $g(x)$ para obter-se $g'(x)$ com o mesmo tamanho de $f(x)$. No exemplo mostrado na Figura 12, após o recorte, obtém-se o sinal de saída com as mesmas dimensões do sinal de entrada; isto é, com 12 elementos, representado graficamente na Figura 13.

Figura 13 – Exemplo de sinal de saída $g'(x)$, de um filtro Gaussiano unidimensional, após recorte.



Fonte: Autor. Valores de g'(x) = {0; 0; 0,016; 0,13; 0,589; 1; 0,668; 0,244; 0,138; 0,083; 0,069; 0,089}.

2.7.4.2 Operador Gaussiano Bidimensional

Na seção anterior, abordamos a utilização de filtro ativado com uma função Gaussiana unidimensional pelo processo de convolução. Considere, então, uma função Gaussiana unidimensional $g(x)$, onde x representa a intensidade de um sinal de entrada, na forma da Equação (41), e que está sendo repetida a seguir:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}$$

Considere também uma outra função Gaussiana unidimensional $g(y)$, similar à Equação (41), porém, representando a intensidade de um sinal de entrada aplicado sobre o eixo y, da seguinte forma:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_y^2}} \tag{43}$$

Um operador Gaussiano bidimensional é definido pelo produto entre as duas funções Gaussianas unidimensionais; ou seja, $g(x,y) = g(x)g(y)$, sendo cada função Gaussiana aplicada em uma dimensão diferente, resultando, então, em uma função Gaussiana bidimensional, dada por

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-(\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_y^2})}, \tag{44}$$

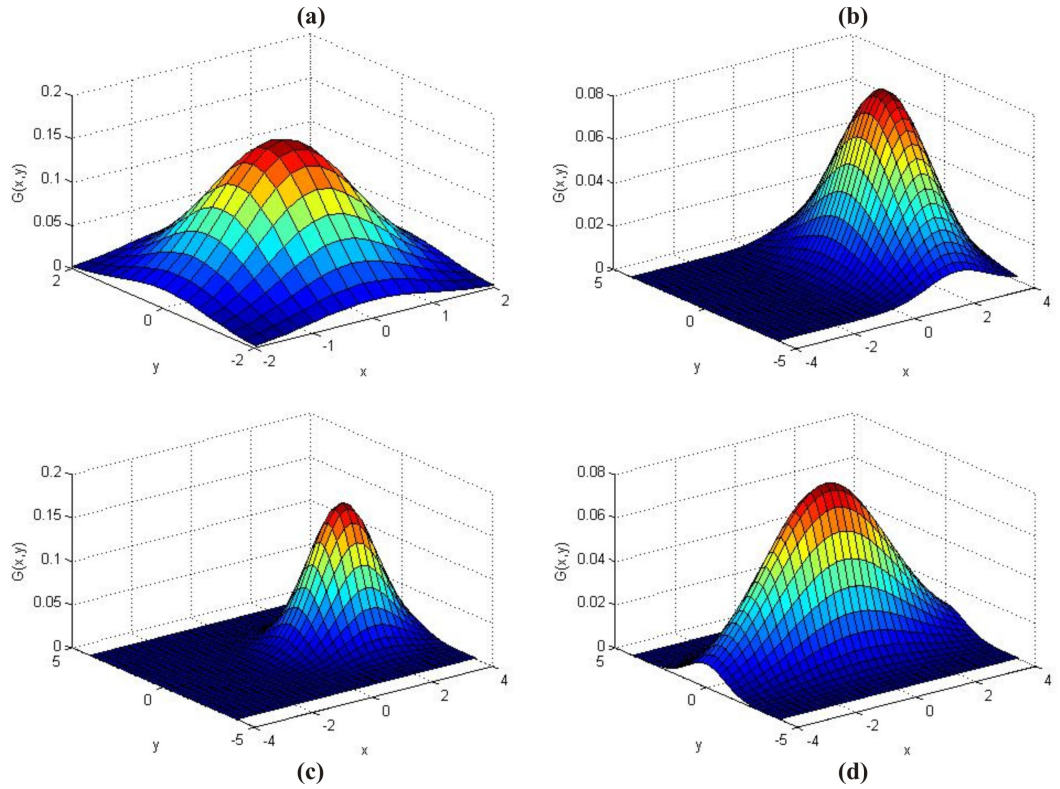
sendo x a intensidade do sinal no eixo horizontal, y a intensidade do sinal no eixo vertical, σ_x e σ_y os desvios-padrões das distribuições de Gauss em x e em y respectivamente, e $\bar{x}$ e $\bar{y}$ os valores de intensidade nos pontos médios de cada função.

Para definir um filtro Gaussiano bidimensional, aplica-se a Equação (44) como função de ativação do *kernel* que, por ter duas dimensões, recebe a notação de $w(x,y)$. Uma vez que a função Gaussiana bidimensional é dependente dos desvios-padrões σ_x e σ_y e também das intensidades médias, $\bar{x}$ e $\bar{y}$, é possível realizar combinações de valores no *kernel* apenas variando esses 4 parâmetros. Desta forma, abre-se a possibilidade para diferentes ajustes na distribuição dos valores internos do *kernel*, no processo de convolução de um filtro Gaussiano bidimensional.

Para ilustrar algumas das possibilidades oferecidas para a criação de *kernels* de filtros Gaussianos bidimensionais, a Figura 14 mostra alguns exemplos da distribuição Gaussiana bi-

dimensional, com variações entre os desvios-padrões e as médias, que por sua vez, produzirão uma enorme gama de possibilidades de valores para o *kernel* de um filtro Gaussiano bidimensional.

Figura 14 – Exemplos de distribuições Gaussianas bidimensionais.



Fonte: Autor. (a) $\sigma_x = \sigma_y = 1$, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. (b) $\sigma_x = 1$, $\sigma_y = 2$, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. (c) $\sigma_x = \sigma_y = 1$, $\bar{x} = 0$ e $\bar{y} = 2$. (d) $\sigma_x = 2$, $\sigma_y = 1$, $\bar{x} = 0$ e $\bar{y} = 2$.

A Figura 14(a) mostra um caso especial onde os desvios-padrões σ_x e σ_y são iguais; neste caso, iguais a 1, e os valores médios estão no centro de cada uma das dimensões; ou seja, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Nota-se, neste caso, uma distribuição normal bidimensional, circularmente simétrica. Esta é a forma isotrópica[1] da função Gaussiana.

Tomando como base este caso especial mostrado na Figura 14(a), com desvios-padrões $\sigma_x = \sigma_y = 1$ e médias das intensidades $\bar{x} = \bar{y} = 0$, considere que os outros 3 exemplos são variações deste. Assim, no exemplo da Figura 14(b), varia-se apenas o desvio-padrão $\sigma_y = 2$; no exemplo da Figura 14(c) a variação ocorre apenas sobre o ponto médio $\bar{y} = 2$ e no exemplo

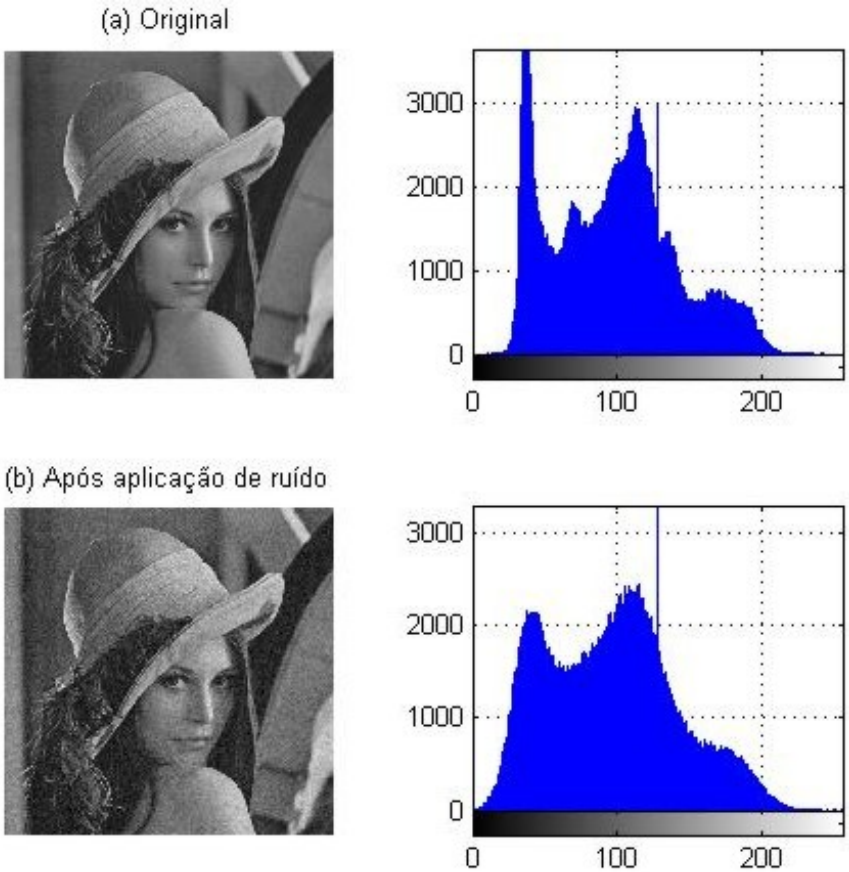
[1]Um sistema é considerado isotrópico quando apresenta as mesmas propriedades físicas em todas as direções.

da Figura 14(d) são feitas variações tanto no desvio-padrão $\sigma_x = 2$ quanto no ponto médio $\bar{y} = 2$.

Definidos estes conceitos, pode-se agora considerar imagens digitais como sinais de entrada de um filtro Gaussino bidimensional, cujo *kernel* obedecerá a uma função de Gauss de duas dimensões, que produzirá uma imagem de saída, filtrada.

Para exemplificar a aplicação de um filtro Gaussiano bidimensional no processo de filtragem de uma imagem digital, considere a Figura 15(a) como sendo uma imagem original em 256 tons de cinza, medindo 512×512 pixels, e seu respectivo histograma de luminância. Para obter uma imagem com ruídos, optou-se por adicionar ruído Gaussiano com média 0 e desvio-padrão $\sigma = 0{,}04$ sobre a imagem original mostrada na Figura 15(a). A imagem com ruído adicionado, pode ser vista na Figura 15(b), ao lado de seu respectivo histograma.

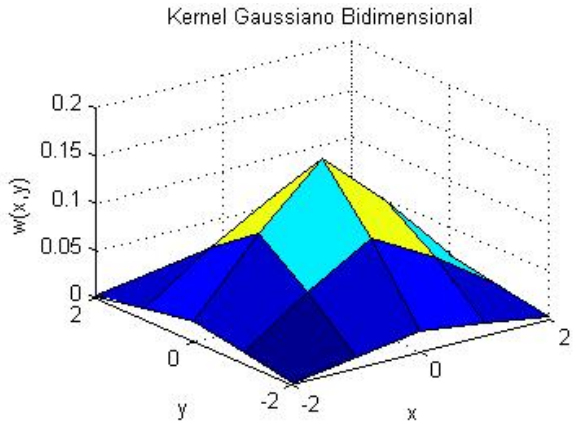
Figura 15 – Exemplo de aplicação de ruído Gaussiano em imagem.



Fonte: Autor. (a) Imagem *Lena* em 256 tons de cinza, medindo 512×512 pixels, e seu respectivo histograma. (b) A mesma imagem, após a aplicação de ruído Gaussiano com média 0 e desvio-padrão $\sigma = 0{,}04$, com seu respectivo histograma.

Neste exemplo, considera-se a imagem com ruído, mostrada na Figura 15(b), como sendo o sinal de entrada $f(x,y)$ de um filtro Gaussiano bidimensional. Os valores do *kernel* $w(x,y)$ são encontrados a partir de função Gaussiana bidimensional dada pela Equação (44), sendo $x = \{0; 1; ...; 255\}$ e $y = \{0; 1; ...; 255\}$, representando os valores das intensidades de cada pixel da imagem em 256 tons de cinza, com desvios-padrões $\sigma_x = \sigma_y = 1$ e médias das intensidades $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Desta forma, este filtro obedecerá a uma distribuição normal também bidimensional, semelhante à ilustrada pela Figura 14(a), definido com tamanho 5×5 pixels neste exemplo. A Figura 16 ilustra graficamente a função de ativação deste *kernel*, que representa o filtro Gaussiano bidimensional utilizado neste exemplo.

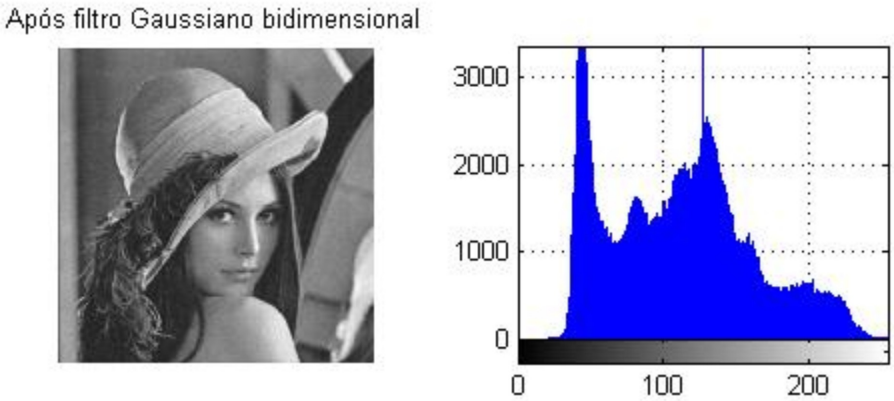
Figura 16 – Exemplo de *kernel* de um filtro Gaussiano bidimensional.



Fonte: Autor. Utilizado para a filtragem da imagem com ruído mostrada na Figura 15(b), com tamanho 5×5 pixels. Função de ativação é uma Gaussiana bidimensional, com desvios-padrões $\sigma_x = \sigma_y = 1$ e médias das intensidades $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

A filtragem da imagem com ruído, mostrada na Figura 15(b), obedece ao processo de convolução, representado por $g(x,y) = w(x,y) \ * \ f'(x,y)$ e definido pela Equação (37), conforme descrito na Seção 2.7.3.3. Após a convolução bidimensional completa, obtém-se uma imagem de saída $g(x,y)$, que representa a imagem filtrada, conforme ilustra a Figura 17.

Figura 17 – Exemplo de imagem filtrada por um filtro Gaussiano bidimensional.



Fonte: Autor. Imagem de saída $g(x,y)$, medindo 512×512 pixels após a convolução, com seu respectivo histograma. A imagem original e a imagem de entrada do filtro (com ruído Gaussiano) podem ser vistas, respectivamente, nas Figuras 15(a) e (b).

2.8 REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

As Redes Neurais Artificiais (RNA) foram motivadas pelo entendimento de que o cérebro humano processa informações de forma diferente de um processador digital convencional, normalmente encontrado nos computadores eletrônicos. Conforme aponta Haykin (2001), o cérebro é um computador altamente complexo, não linear e maciçamente paralelo. As RNAs descrevem modelos algorítmicos de análise que se baseiam nas propriedades fisiológicas dos sistemas nervosos animais, os quais são compostos por nós interligados chamados de neurônios. Os neurônios biológicos são capazes de processar e transmitir informações entre si por interconexões neuronais. Segundo a definição formal de uma RNA, proposta por Hecht-Nielsen, descrita no livro de Yoneiama e Nascimento (2000), uma RNA é uma estrutura que processa informações de forma paralela e distribuída, com unidades computacionais interconectadas, sendo uma subclasse de uma classe chamada Múltipla Instrução Múltiplos Dados (*MIMD*).

No pioneiro trabalho de McCulloch e Pitts (1943), os neurônios artificiais foram descritos por inspiração da modelagem dos neurônios biológicos. Um neurônio artificial típico possui um conjunto de sinapses, ou elos de conexão, onde cada conexão é caracterizada por um estímulo de entrada (E_i) e por um peso (w_i). Uma entrada extra, chamada *Bias*, ou viés, opcionalmente pode ser aplicada com valor sempre igual a 1, e que também pode ser ponderada por (w_b), aponta Haykin (2001). O *Bias* não é identificado nos neurônios biológicos, mas sua aplicação vem produzindo resultados muito úteis em determinadas aplicações em RNA. O combinador linear (Σ) efetua um somatório dos sinais ponderados de entrada no neurônio artificial, sendo representado pela variável net, dada por:

$$net = \Sigma_{i=1}^{n}(E_i w_i) + w_b$$

Uma função de ativação determina o novo valor do estado de ativação do processador, utilizando uma função aditiva como parâmetro de entrada para produzir a saída do neurônio, como a função degrau ou *threshold*, função pseudo-linear ou rampa, função sigmóide ou função Gaussiana, indica Jain, Mao e Mohiuddin (1996).

Desde o modelo *Perceptron*, apresentado pioneiramente no trabalho de Rosenblatt (1957), as RNAs vêm evoluindo, podendo emular arquiteturas que determinam como a informação é transmitida pela rede, bem como suas propriedades. As RNAs têm como principal caracterís-

tica a habilidade de aprender a partir do ambiente que, de algum modo, a alimenta de informações. O objetivo do aprendizado é a melhoria do desempenho dos processos nos quais as RNAs estão inseridos, se utilizando de algoritmos baseados em aprendizagem supervisionada ou não-supervisionada.

Nesta tese, a aplicação de RNAs tem como objeto uma classe especial de RNA baseada em aprendizagem não-supervisionada conhecida como Mapas Auto-Organizáveis (SOM, *Self-Organizing Maps*) ou redes de Kohonen, apresentada em Kohonen (1982), que caracterizam-se pela formação de mapas topológicos dos padrões de entrada nos quais as localizações espaciais dos neurônios em uma grade indicam as características estatísticas intrínsicas, contidas nesses padrões de entrada, sendo esta a justificativa para o nome desta técnica, aponta Haykin (2001).

O desenvolvimento de redes SOM surge como um modelo topológico neural a partir de características distintivas do cérebro humano, organizado em áreas diferentes do córtex cerebral por entradas sensorias diferentes, representando mapas computacionais ordenados topologicamente. Este mapa computacional, definido por um arranjo de neurônios, é comparado a um bloco construtivo básico na infra-estrutura de processamento de informação no sistema nervoso, representando processadores, ou filtros, ajustados de forma um pouco diferente entre si, operando paralelamente sobre os sinais de entrada. Conforme aponta Yoneiama e Nascimento (2000), sob o ponto de vista biológico, o aprendizado não-supervisionado é responsável pela formação de área especializadas no cérebro de diversos animais, inclusive o humano, como o córtex auditivo e córtex visual, por exemplo, considerada como uma vantagem na adaptação a diferentes tipos de meio ambiente.

De acordo com o postulado de *Hebb*, descrito em Hebb (1949), "*quando um axônio da célula A estiver perto o suficiente para estimular a célula B e repetida ou persistentemente participar de sua ativação, um processo de crescimento ou mudança metabólica irá ocorrer em uma das células ou nas duas, de tal modo que a eficiência de A, como uma das células que ativa B, seja aumentada*".

Uma RNA baseada em aprendizagem não-supervisionada, conforme descrito em Munakata (2008), armazena os padrões de entrada através da modificação dos vetores de peso. Após a entrada de quantidade suficiente de padrões, os vetores de pesos tornam-se mais densos onde os padrões de entrada são mais comuns e menos densos onde estes são raros, agrupando (categorizando) os padrões de entrada. Desta forma, padrões de entrada semelhantes são classificados no mesmo *cluster* e disparam os mesmos neurônios de saída. Os padrões de entrada

são armazenados e a aprendizagem é obtida a partir da própria RNA, sem um professor ou algum padrão de saída ideal, sendo esta a ideia de auto-organização baseada na aprendizagem não-supervisionada.

No algoritmo aplicado para a formação de uma rede SOM - que nesta tese será chamado de SOM tradicional para ser diferenciado de outros tipos - os pesos sinápticos são inicializados com valores aleatórios. A partir desta inicialização, três processos essenciais estão envolvidos para a criação dos Mapas Auto-Organizáveis, que representarão um mapa de características com base no postulado de *Hebb*. Estes processos são chamados de Competitivo, Cooperativo e Adaptativo, e são detalhados a seguir.

2.8.1 Etapa do Processo Competitivo

Na aplicação dos Mapas Auto-Organizáveis, para cada valor de entrada $x = [x_1, x_2,..., x_m]$, onde m é a dimensão, são calculados os respectivos valores de uma função discriminante, que fornece a base para a competição entre os neurônios. Cada padrão de entrada x apresentado à grade consiste tipicamente de uma região localizada, cujos valores são geralmente normalizados entre 0 e 1. A quantidade de padrões de entrada deve ser suficiente para representar uma diversidade de amostras relevantes, que assegure a evolução do processo de auto-organização durante a fase de treinamento, produzindo um mapa topológico generalizado. A natureza do conjunto de entrada influi grandemente na velocidade do processo de convergência, Kovács (2002).

Após a definição do tamanho da grade de pesos sinápticos, a chamada grade neuronal, inicializam-se os pesos sinápticos, os quais devem ter a mesma dimensão m do padrão de entrada. Tomam-se valores aleatórios para os pesos iniciais, garantindo que nenhuma organização prévia seja imposta ao mapa de características. Define-se uma matriz de pesos sinápticos iniciais, dada por $w_{ij} = [w_{ij1}, w_{ij2},...,w_{ijm}]$, onde, ij é a posição do neurônio na matriz de pesos sinápticos.

A redundância dos padrões de entrada e as iterações sucessivas são necessárias para a aquisição do conhecimento e aprendizagem. A modificação dos pesos sinápticos tendem a se auto-amplificar, reformulando o postulado de aprendizagem de *Hebb*. Esta etapa do treinamento visa identificar qual o neurônio w_{ij} da matriz de pesos sinápticos mais se aproxima ao padrão de

entrada x, através da minimização da distância Euclidiana entre w_{ij} e x, sendo este o neurônio vencedor.

2.8.2 Etapa do Processo Cooperativo

Após o processo competitivo e a definição do neurônio vencedor, as coordenadas ij do neurônio vencedor identificam o centro de uma vizinhança topológica na grade de neurônios, sendo a base para a cooperação entre neurônios vizinhos. De modo geral, segundo evidências neurobiológicas, um neurônio que está disparando tende a excitar mais fortemente os neurônios na sua vizinhança imediata. Tal vizinhança h_{ij} é composta por um conjunto de neurônios excitados, cooperativos, simétricos em relação ao ponto central onde se localiza o neurônio vencedor, cuja distância $d_{ij} = 0$. A amplitude da vizinhança h_{ij} decresce monotonicamente com o aumento da distância lateral em relação ao centro, decaindo para 0 quando $d_{ij} \to \infty$, sendo esta uma condição necessária para a convergência.

Para satisfazer as exigências impostas pelas características do processo cooperativo, os Mapas Auto-Organizáveis utilizam-se de uma função Gaussiana, sendo esta também invariante à translação. Para o desenvolvimento desta tese, o algoritmo SOM tradicional é aplicado na segmentação de imagens digitais (matriz de pixels), sendo a função Gaussiana bidimensional tradicional, dada pela Equação (44), a escolha natural para atualização dos pesos, com $\sigma = \sigma_x = \sigma_y$ e considerando-se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ como sendo, respectivamente, as coordenadas ij do neurônio vencedor. Dados estes parâmetros, define-se a função Gaussiana bidimensional tradicional como sendo

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\, e^{-(\frac{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2})}, \tag{45}$$

onde σ é a amplitude da vizinhança h_{ij}, determinando a intensidade da participação dos neurônios excitados na vizinhança topológica do neurônio vencedor.

É nesta etapa que define-se o novo modelo de Mapa Auto-Organizável, que chamamos de q-SOM, substituindo a função Gaussiana bidimensional tradicional pela função q-Gaussiana bidimensional, formulada na seção 4.1.2. Os experimentos com aplicação do modelo q-SOM para segmentação de imagens são apresentados no Capítulo 5.2.

Quanto à diminuição do tamanho da vizinhança topológica em função da quantidade de iterações, tipicamente utiliza-se o decaimento exponencial, dado pela Equação 46

$$\sigma(n) \;=\; \sigma_0 \; \exp\left(-n\tau_1\right), \tag{46}$$

onde σ_0 é o valor inicial da amplitude da vizinhança e τ_1 é uma constante de tempo que define uma taxa fixa de decaimento de σ em função do tempo discreto $n = \{1, 2, ..., t\}$. A função h_{ij} deve inicialmente incluir quase todos os neurônios da grade e ir decrescendo lentamente, até reduzir-se a uma pequena quantidade ao redor do neurônio vencedor, ou mesmo ao próprio neurônio vencedor, Haykin (2001).

2.8.3 Etapa do Processo Adaptativo

Nesta etapa, é necessário que o vetor de pesos sinápticos w_{ij} de cada neurônio ij se modifique em relação aos padrões de entrada x, procedimento este que efetivamente torna a grade auto-organizável. Esta adaptação sináptica permite que os neurônios excitados aumentem seus valores individuais da função discriminante em relação ao padrão de entrada através de ajustes adequados a seus pesos sinápticos, melhorando a reposta do neurônio vencedor. A atualização dos pesos sinápticos ocorre somente sobre os neurônios ij que pertençam à vizinhança h_{ij}, e tem como objetivo aproximar o vetor de peso sináptico w_{ij} em direção ao vetor padrão de entrada x.

Através de repetidas iterações desta fase, os vetores de pesos sinápticos tendem a seguir as distribuição dos vetores de entrada também devido à atualização da vizinhança do neurônio vencedor. Assim, um peso sináptico é aumentado a partir de uma ocorrência simultânea de atividades pré-sinápticas e pós-sinápticas, sendo aplicável em aprendizagem supervisionada. Entretanto, para a utilização nas grades SOM através da aprendizagem não-supervisionada, foi incluído um termo de esquecimento na hipótese Hebbiana. Neste caso, a função de vizinhança deve decrescer gradualmente com o aumento do tempo, sendo utilizada uma função de decaimento exponencial, em função do tempo. A atualização dos pesos sinápticos do mapa de características é dada pela função

$$w_{ij}(n+1) \;=\; w_{ij}(n) \;+\; \eta(n)\, h_{ij}(n)\, (x \;-\; w_{ij}), \tag{47}$$

onde n é o tempo discreto representado pelo número da iteração na fase de treinamento e η é a taxa de aprendizagem do algoritmo que deve ser variável no tempo. A taxa de aprendizagem deve começar com um valor inicial η_0 e decrescer gradualmente com o aumento do tempo discreto, a qual também é tipicamente representado por uma função exponecial, dada por

$$\eta(n) \quad = \quad \eta_0 \ \exp\left(-n\tau_2\right), \tag{48}$$

onde η_0 é o valor inicial da taxa de aprendizagem e τ_2 é uma constante de tempo que define uma taxa fixa de decaimento de η em função do tempo discreto $n = \{1, 2,...,\tau\}$. A taxa de aprendizagem e o valor de ínicio são fatores que infuenciam do desempenho do algoritmo, Kovács (2002).

Ao término destas 3 etapas, após todas as iterações do processo de treinamento, obtém-se como resultado o Mapa Auto-Organizável, ou mapa de características, de tamanho N x N. O mapa de características resultante do treinamento pelo algoritmo SOM tem como propriedade fornecer uma boa aproximação para o padrão de entrada x. Esse treinamento armazena um conjunto de grandes vetores de entrada x encontrando um conjunto menor de protótipos w, cuja motivação é a redução de dimensionalidade ou compressão de dados Haykin (2001), Gersho e Gray (1991).

Esta tese concentra-se na construção de mapas topológicos artificiais que aprendem através de Mapas Auto-Organizáveis inspirados na neurobiologia, como formulado em Kohonen (1990). A localização espacial de um neurônio de saída em um mapa topológico corresponde a uma característica particular do dado retirado do espaço de entrada. O modelo proposto em Kohonen (1982) captura as características essenciais dos mapas computacionais do cérebro, sem pretender explicar detalhes neurobiológicos mas mantendo-se tratável sob a ótica da Visão Computacional.

2.9 MEDIDAS ESTATÍSTICAS

Para analisar os resultados obtidos a partir dos experimentos com os filtros q-Gaussianos e com os Mapas Auto-Organizáveis q-SOM, ambos propostos no Capítulo 4, nesta tese foram aplicadas algumas técnicas de medição estatística sobre as imagens obtidas como resultados, como a *Kappa Statistic* descrita na Seção 2.9.1, a *Peak Signal-to-Noise Ratio* $(PSNR)$ descrita na Seção 2.9.2 e o índice Universal de Qualidade de Imagem Q descrito na Seção 2.9.3. Essas medições são baseadas em erro, buscando fazer estimativas dos erros pixel-a-pixel entre a imagem original e a imagem resultado. É sabido que tais técnicas têm como desvantagem a possibilidade de falhar nos casos onde há translação ou deslocamento entre as imagens que estão sendo comparadas, entretanto, nos experimentos desta tese, as imagens utilizadas não sofrem este tipo de variação, o que permite a aplicação das técnicas baseadas em erro pixel-a-pixel.

Segundo Wang et al. (2004), a variação das intensidades dos pixels das imagens pode originar índices de distorções semelhantes para imagens diferentes. Nos experimentos desta tese, não são feitas comparações entre imagens originalmente diferentes, mas sim entre os resultados de diversas segmentações produzidas por técnicas diferentes, a partir de uma mesma imagem original.

Também aplicou-se uma metodologia de medição baseada no formato e na localização dos contornos em comparações feitas entre a imagem original e imagem de resultado. Para tanto aplicou-se um filtro Sobel, conforme descrito em Kimmel et al. (2005), para a detecção das bordas das imagens analisadas. Em seguida, aplicou-se a técnica da distância de similaridade (SIM) para a comparação entre as bordas extraidas manualmente e bordas extraídas automaticamente. A técnica de como calcular o índice SIM é apresentada na Seção 2.9.4.

2.9.1 *Kappa Statistic*

O índice $Kappa$ é uma medida utilizada em escalas nominais que fornece o grau de concordância além daquele que seria esperado tão somente pelo acaso; ou seja, uma forma de medir o quanto as observações se afastam daquelas esperadas como fruto do acaso. Esta medida de concordância tem o valor 1 como o máximo, representando a máxima concordância, e o valor

0 indicando nenhuma concordância, isto é, a medição foi exatamente a esperada pelo acaso. Um eventual valor de índice $Kappa$ menor que zero, sugere que a concordância encontrada foi menor do aquela esperada pelo acaso; ou seja, algo como discordância, embora não exista esta interpretação como intensidade de discordância.

Suponha haver N pixels para serem classificados em uma das q categorias. Tendo o total dos N pixels e a verdadeira classificação de cada pixel, a matriz de erro da população pode ser representada conforme ilustra a Tabela 1, a seguir:

Tabela 1 – Matriz de erro da população para o cálculo do índice $Kappa$.

		Referência				Total
		1	2	...	q	Linhas
Imagem	1	N_{11}	N_{12}	...	N_{1q}	N_1
	2	N_{21}	N_{22}	...	N_{2q}	N_2
	:	:	:	:	:	:
	q	N_{q1}	N_{q2}	...	N_{qq}	N_q
Total Colunas	1	M_1	M_2	...	M_q	N

Fonte: Adaptado de Stehman (1996).

Entretanto, há casos onde o total dos pixels é muito grande, sendo impraticável sob o ponto de vista do custo computacional, sendo necessária a utilização de amostras para se obter uma estimativa. Neste caso, as linhas totais são conhecidas e representadas por N_h, porém as colunas totais M_j são desconhecidas. Todas as entradas N_{hj} da matriz de erro são também desconhecidas. Segundo o trabalho de Stehman (1996), a partir da matriz de erro da população, o parâmetro de interesse é dado por

$$K = \frac{(\sum_{i=1}^{q} p_{ii}) - \sum_{i=1}^{q} p_{i+} \cdot p_{+i}}{1 - \sum_{i=1}^{q} p_{i+} \cdot p_{+i}}, \tag{49}$$

onde $p_{ii} = N_{ii}/N$; $p_{i+} = N_i/N$ e $p_{+i} = M_i/N$.

Em síntese, na metodologia da *Kappa Statistic*, primeiro calcula-se um índice que represente a porcentagem de concordância esperada pelo acaso; em seguida, calcula-se o índice de concordância observado. A partir da obtenção destes dois índices, o índice $Kappa$ será calculado através da divisão da diferença entre a concordância observada e a concordância esperada pelo acaso, pela diferença entre a concordância absoluta e a concordância esperada pelo acaso, ou seja, a maior diferença possível entre concordância observada e a esperada.

Para a análise do resultado do índice $Kappa$, sugere-se utilizar uma tabela de interpretação de concordância. No trabalho de Landis e Koch (1977), foi proposta uma escala para a avaliação das concordâncias, como mostra a Tabela 2, a seguir.

Tabela 2 – Escala para avaliação das concordâncias do índice $Kappa$.

Valores de $Kappa$	Interpretação
< 0	Sem concordância
$0 - 0{,}19$	Concordância pobre
$0{,}20 - 0{,}39$	Concordância satisfatória
$0{,}40 - 0{,}59$	Concordância moderada
$0{,}60 - 0{,}79$	Concordância substancial
$0{,}80 - 1$	Concordância quase perfeita

Fonte: Adaptado de Landis e Koch (1977).

De acordo com a Tabela 2, o erro padrão do índice $Kappa$ permite estimar a sua significância estatística e também o seu intervalo de confiança. No entanto, o valor do índice $Kappa$ depende da prevalência do objeto em estudo. Uma grande prevalência resulta em um alto nível de concordância esperada pelo acaso, o que resultará em um valor de K mais baixo; por sua vez, uma baixa prevalência dará origem valores de K mais altos.

2.9.2 *Peak Signal-to-Noise Ratio* ($PSNR$)

O índice que calcula a relação sinal-ruído de pico (*Peak Signal-to-Noise Ratio - PSNR*) vem sendo muito utilizado para análise do desempenho de métodos aplicáveis sobre imagens, sobretudo nas áreas da Visão Computacional e de Processamento de Sinais e Imagens, como por exemplo, na restauração ou suavização dos pixels que compõem uma imagem.

O índice $PSNR$ calcula a relação entre a maior energia possível de um sinal - no caso desta tese aplicada às imagens, é a maior intensidade - e sua energia afetada pelo ruído, de acordo com Dash, Sa e Majhi (2011). Por conveniência, o $PSNR$ é representado em função da escala logarítmica na base 10, portanto medido em decibéis (dB), devido ao fato de alguns sinais possuírem um valor muito elevado.

O índice $PSNR$ pode ser calculado a partir da técnica do erro quadrático médio (*Mean Squared Error* - MSE), dado por

$$MSE = \frac{1}{mn}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}[I(i,j) - I_r(i,j)]^2, \tag{50}$$

onde m e n são as dimensões das imagens a serem comparadas, I é a imagem original e I_r é a imagem obtida como resultado de algum processamento ou tratamento. Assim, o índice $PSNR$, é calculado como

$$PSNR = 10\log\frac{MAX_I^2}{MSE}, \tag{51}$$

onde MAX_I é o valor máximo que um pixel pode assumir, que nesta tese, por tratar-se de processamento de imagens, representa os níveis de tonalidades de cinza representadas por 8 bits, portanto $MAX_I = 255$. Desta forma, conclui-se que, quanto maior for o valor do índice $PSNR$, mais semelhantes são as duas imagens comparadas. Para imagens idênticas, o valor do índice MSE será nulo, e consequentemente o valor do índice $PSNR \rightarrow \infty$.

2.9.3 Índice Universal de Qualidade de Imagem (Q)

O índice Universal de Qualidade de Imagem, ou índice Q, foi proposto por Zhou Wang, em seu trabalho Wang e Bovik (2002), como uma forma de analisar as distorções percebidas pelo sistema visual humano. Wang propôs um índice de fidelidade como medida de distorções estruturais entre duas imagens, dadas pela perda de correlação e pelas distorções na luminância e no contraste entre as imagens. Nesta tese, aplicou-se o índice Q como comparação entre as imagens originais e as imagens resultados, obtidas a partir da aplicação de filtros *q*-Gaussianos, e também no treinamento de Mapas Auto-Organizáveis *q*-SOM.

Para a aplicação do índice Q calcula-se o primeiro componente, referente à correlação linear existente entre as imagens, o qual mede o grau da correlação linear entre *x* e *y*, dado por

$$lC(x,y) = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}, \tag{52}$$

o qual retorna retorna um valor entre -1 e 1. Quanto mais próximo dos extremos -1 e 1, maior é a correlação entre as imagens, sendo que o sinal apenas representa a correlação positiva ou

negativa. O maior valor é obtido quando $y_i = ax_i + b$, para todo $i = 1, 2,..,N$, onde a e b são constantes e $a > 0$. Quanto mais próximo a zero, menor será a correlação entre as imagens. Mesmo se as imagens x e y forem linearmente relacionadas, ainda podem haver distorções relativas entre ambas, as quais são avaliadas no segundo e terceiro componentes.

A distorção da luminância $Ld(x,y)$ entre as duas imagens é o segundo componente a ser calculado na aplicação do índice Q, cujos resultados variam entre 0 e 1, que mede o quão perto a luminância média está entre as imagens x e y, dada por

$$Ld(x,y) \quad = \quad \frac{2\bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2\bar{y}^2}, \tag{53}$$

onde $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são os valores das médias de x e y, respectivamente. $Ld = 1$ se e somente se $\bar{x} = \bar{y}$. O terceiro componente do índice Q é a distorção do contraste $Cd(x,y)$, dada por

$$Cd(x,y) \quad = \quad \frac{2\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}, \tag{54}$$

onde σ_x e σ_y podem ser vistos como uma estimativa do contraste entre as imagens x e y. Quanto mais próximos do valor 1 forem os resultados de Cd mais as imagens são parecidas, onde o valor 1 é obtido se $\sigma_x = \sigma_y$.

Com os três componentes calculados, obtém-se o índice Universal de Qualidade de Imagem, através da expressão

$$Q(x,y) \quad = \quad lC(x,y) \,.\, Ld(x,y) \,.\, Cd(x,y), \tag{55}$$

onde lC é a perda de correlação, Ld é a distorção de luminância e Cd a distorção de contraste, entre as imagens x e y. O range dinâmico de Q é dado por $[-1,1]$, onde o melhor valor de Q, ou seja $Q(x,y) = 1$, é alcançado se e somente se $y_i = x_i$, e o menor valor $Q(x,y) = -1$ ocorre quando $y_i = 2\bar{x} - x_i$, para todo $i = 1, 2,..., N$.

2.9.4 Distância de Similaridade (SIM)

A distância de similaridade é a medição comparativa entre as bordas extraídas de imagens. No entanto, esta é uma tarefa difícil, cujo problema continua sem solução. Sezgin e Sankur, no trabalho Sezgin e Sankur (2004b), propuseram 5 critérios quantitativos para medir

a região de luminância e modelaram 20 métodos clássicos para medir a similaridade entre elas. Estes métodos de comparação propostos por Sezgin e Sankur, podem ser usados apenas como uma avaliação da qualidade intrínseca das áreas segmentadas, ou seja, uma imagem segmentada uniformemente em regiões não pode ser considerada tão próxima quanto o esperado para uma segmentação manual.

Por outro lado, as técnicas de medição baseadas no chamado padrão ouro, também são difíceis de propor quando o sistema tem de detectar várias regiões da imagem ao mesmo tempo, sendo esta uma tarefa comum na área da Visão Computacional. Além disso, para comparar as bordas correspondentes, encontram-se dificuldades para detectar regiões inteiras, bem como sua localização no espaço. Apesar disso, a área de Visão Computacional carrega a exigência de ser capaz de deduzir as regiões que estão interrelacionadas.

Pode-se especular que a comparação entre as bordas extraídas de segmentações automáticas e manuais deve tolerar erros de localização, havendo também divergências sobre as bordas no padrão ouro. Assim, a consideração de algumas diferenças podem ser úteis no resultado final.

A partir das bordas em duas dimensões, tais como aquelas utilizadas nesta tese, pode-se obter dois tipos de informações: a dispersão geométrica e a dispersão de intensidade. A dispersão geométrica mede o tamanho e a localização das bordas, enquanto que as medidas de dispersão de intensidade medem quão comum é essa borda entre todos os segmentos manuais que foram sobrepostos. Assim, a dispersão geométrica entre dois mapas de bordas tem a sua informação medida de uma forma quantitativa nas dimensões x e y. A dispersão de luminância é representada pela dimensão z.

A divergência de informações entre os dois mapas de bordas de uma imagem $M \times N$ na dimensão x, é calculada pela distância Euclidiana entre os dois mapas, sendo H_x uma projeção vertical no mapa de bordas para a segmentação automática e M_x sendo sua correspondente projeção vertical para a segmentação manual das bordas.

No trabalho de Erdmann et al. (2015), foi proposta uma função de similaridade entre a projeção vertical de duas bordas M_x e H_x da dimensão x, representado na Equação (56), para medir o quão diferente a segmentação obtida automaticamente (AS_X) é da segmentação manual (padrão ouro, GS_X), dada por

$$SIM_x(GS_x|AS_x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{M}(M_x(i) - H_x(i))^2}, \tag{56}$$

onde, M é o tamanho da distribuição x, M_x e H_x são as projeções das bordas na direção x, manual e automaticamente, respectivamente. M_x e H_x são obtidas pela soma dos valores maiores do que 0, em cada coluna.

Similarmente, a função correpondente à direção y é dada por

$$SIM_y(GS_y|AS_y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(M_y(i) - H_y(i))^2}, \tag{57}$$

onde N é o tamanho da distribuição y, sendo M_y e H_y obtidas pela soma dos valores maiores do que 0 em cada linha. A função correspondente à direção z é dada por

$$SIM_z(GS_z|AS_z) = \sqrt{\sum_{i=0}^{L}(M_z(i) - H_z(i))^2}, \tag{58}$$

onde $L = \{0; 1; ...; 255\}$ é o total de níveis de cinza da imagem. AS_z e GS_z representam o histograma da escala de tons de cinza.

Assim, foi proposta a seguinte função de avaliação para medir a similaridade entre dois mapas de bordas:

$$SIM(GS|AS) = SIM_x + SIM_y + SIM_z, \tag{59}$$

sendo que, quanto mais próximo de 0 for SIM, mais similares são os mapas de bordas.

3 TRABALHOS RELACIONADOS

Neste capítulo são apresentadas revisões de trabalhos relacionados às funções Gaussianas envolvendo filtros e Redes Neurais Artificiais, além de técnicas de segmentação de imagens. Na Seção 3.1, foram revisitados alguns trabalhos aplicados em filtros de imagens, utilizando função Gaussiana como *kernel* em etapas de pré-processmento, para suavizar diferenças entre tonalidades de pixels ou para acentuar tais diferenças e realçar bordas da região de interesse.

As revisões em trabalhos envolvendo Redes Neurais Artificiais são apresentadas na Seção 3.2, com foco naquelas que se utilizam de técnicas de aprendizagem não-supervisionada, como as redes de *Kohonen*, que tipicamente utilizam funções Gaussianas em seu *kernel*.

Na Seção 3.3, são apresentados trabalhos que visam a extração de informações por meio de técnicas de segmentação de imagens. Aplicações de abordagens entrópicas com metodologias de limiarização de imagens foram revistos, incluindo alguns trabalhos com abordagens entropicas envolvendo aplicação de funções Gaussianas e outros que se utilizam de métodos de clusterização para extração de informação da imagem.

Finalizando este capítulo, a Seção 3.4, apresenta uma revisão sobre trabalhos que definem e aplicam a q-Álgebra, baseada na estatística não-extensiva de Tsallis, sobretudo em aplicações que envolvem funções q-Gaussianas.

3.1 APLICAÇÕES DE FILTROS COM FUNÇÕES GAUSSIANAS NO *KERNEL*

Em inúmeras aplicações faz-se necessário suavizar uma imagem digital enquanto se preservam suas bordas. Entretanto, operações para suavização de imagens com filtro passa-baixa não consideram a variação de intensidade da imagem e tendem a borrar as arestas. Filtros passa-baixa Gaussianos (GLPF, *Gaussian Lowpass Filter*) são amplamente utilizados para suavização de imagens, mas não preservam as arestas uma vez que também atuam sobre as fortes diferenças de intensidades dos pixels que compões as arestas, suavizando-as. Um filtro gaussiano possui basicamente dois parâmetros: a dimensão da janela (frequência de corte) e o desvio padrão máximo. A variação da suavização da imagem está diretamente relacionada ao desvio-padrão da

função de Gauss; isto é, quanto maior o desvio-padrão, mais a imagem é suavizada, observando uma menor dependência do parâmetro que regula a dimensão da janela. Assim, quanto maior o desvio-padrão, maior o número de pixels cujos valores diferem de zero, levando os pixels vizinhos a terem maior influência em cada ponto, pois trata-se de uma medida de dispersão ao redor do centro, realizando maior suavização na imagem.

Em Gonzalez e Woods (2010) são descritos alguns exemplos práticos de aplicação de GLPF, apresentando resultados na filtragem de amostras de caracteres de um texto em baixa resolução. O texto foi restaurado pela suavização provocada pelo GLPF. Também é mostrada uma aplicação na indústria gráfica para suavizar detalhes de imagem, como por exemplo, no processamento cosmético para a exibição de faces humanas reduzindo o aguçamento de linhas finas da pele e pequenas manchas. Em outra aplicação apresentada em Gonzalez e Woods (2010), pode-se ver uma imagem obtida por radiômetro de altíssima resolução (VHRR, *very high resolution radiometer*), obtida pelo satélite da NOAA (*National Oceanic and Atmospheric Administration*), como mais um exemplo de aplicação de GLPF, mas desta vez com o objetivo de suavizar as linhas de varreduras criadas pelos sensores no momento da captura da imagem.

O trabalho de Paris et al. (2008) apresenta um *survey* que explora aplicações de filtros Gaussianos em imagens digitais, envolvendo aplicações com filtros bilaterais. A metodologia conhecida como filtro bilateral foi apresentada por Elad (2002). Este tipo de filtro difere do filtro gaussiano por considerar a variação das intensidades para a preservação das arestas. Em um filtro bilateral, dois pixels são condiderados próximos um do outro se ocuparem posições espacialmente próximas e se ambos possuam alguma similaridade na escala fotométrica, como mostram os trabalhos de Yaroslavsky (1985), Aurich e Weule (1995), Smith e Brady (1997) e Tomasi e Manduchi (1998). O filtro bilateral foi introduzido como um filtro não-linear que combina filtros no domínio da frequência e no domínio do espaço, que pode borrar a imagem, mas respeita e mantém as bordas fortes.

O filtro bilateral possui em seu *kernel* duas funções de Gauss espaciais: uma que decresce de acordo com a distância entre os pixels, ou seja, quanto maior o valor deste parâmetro Gaussiano maior a suavização dos detalhes e, quanto mais próximo de zero, nenhuma suavização acontece; e outra Gaussiana que controla o *range* das intensidades dos pixels, ou seja, ao aumentar o *range*, o filtro bilateral se aproxima ao filtro passa-baixa Gaussiano.

A capacidade de decompor uma imagem em diferentes escalas faz do filtro bilateral uma técnica amplamente utilizada nas aplicações em imagens digitais, sobretudo em fotografia

computacional. O valor da intensidade de cada pixel da imagem é substituído por uma média ponderada dos valores de intensidade de pixels vizinhos. Este peso está baseado em uma distribuição de Gauss, sendo ajustado aos pixels adjacentes. Os pesos não dependem apenas da distância euclidiana entre os pixels, mas também das diferenças radiométricas, como por exemplo as diferenças de alcance de intensidade da cor, de distância, de profundidade, etc.

Dentre algumas aplicações em que o filtro bilateral foi usado pode-se citar o *Denoising*, que tem a redução de ruídos como o objetivo primário, como mostra o trabalho de Buades e Coll (2005), e também tem sido utilizado em aplicações de imagens médicas, como apresentada no trabalho de Albert, Chung e Yu (2004); aplicações em edição de textura, para manipular a distribuição de tons de uma imagem afim de combinar diversas possibilidades de vizualização ou atingir determinados estilos fotográficos. Aplicações envolvendo a separação entre textura e iluminação são mostradas nos trabalhos Petschnigg et al. (2004) e Eisemann e Durand (2004), que buscam combinar a luz ambiente de uma fotografia sem flash com os detalhes capturados na mesma cena, porém com o uso de flash. Pode-se encontrar aplicações do filtro bilateral para remoção de ruído em imagens digitais em Aleksic, Smirnov e Goma (2006) e Liu et al. (2006).

No trabalho de Bennett, Mason e McMillan (2007) é apresentada uma técnica para melhorar o espectro visível de um vídeo a partir da fusão com dados capturados simultaneamente de sensores no espectro não visível, como ondas curtas infra-vermelhas (IR). Antes da fusão, aplica-se um filtro Gaussiano para aumentar a precisão das cores das imagens RGB, reduzindo ruídos na entrada. Em seguida, o vídeo original foi decomposto para preservação das bordas, utilizando uma versão multiespectral do filtro bilateral, chamado bilateral duplo (*dual bilateral filter*). Paralelamente a este processo, o vídeo capturado por IR é normalizado para garantir sua compatibilidade espectral. Assim, são fundidas as freqüências baixas de RGB, os detalhes de textura capturados e normalizados por IR, e as bordas mantidas por filtros bilaterais duplos. Esta técnica foi capaz de reduzir o ruído, preservar a nitidez das imagense ainda manter luminâncias e crominâncias consistentes com as imagens visíveis do espectro.

Aplicações em edição de textura e iluminação podem ser vistas em Oh et al. (2001); *high-dynamic-range images* Durand e Dorsey (2002), Bennett e McMillan (2005), Bae, Paris e Durand (2006); aplicações do efeito *Retinex*[1] através de filtros bilaterais são mostradas no trabalho de Elad, 2005; uma aplicação da técnica de *demosaicking*, desenvolvido por Ramanath

[1]O efeito provocado pela teoria *Retinex* foi descrito por Edwin H. Land em Land e McCann (1971). A palavra *Retinex* é a junção de retina e córtex, sugerindo que ambos - os olhos e o cérebro - estão envolvidos no processamento e na interpretação humana de uma imagem.

e Snyder (2003), cujo processo recupera informações de cores a partir de amostragem parcial das cores dos pixels de uma imagem digital, através de um filtro de *Bayer*[2], entre outras.

3.2 APLICAÇÕES DE REDES NEURAIS COM FUNÇÕES GAUSSIANAS

Uma outra área com aplicações para as funções Gaussianas são as Redes Neurais Artificiais (RNA), onde são frequentemente empregadas para classificar padrões baseados em aprendizagem a partir de exemplos. Diferentes paradigmas de RNA utilizam diferentes regras, mas todas, de alguma forma, determinam os padrões estatísticos de um conjunto de amostras de treinamento e, em seguida, classificam os novos padrões com base nessas estatísticas.

Em especial, há uma classe de RNA conhecida como Mapas Auto-Organizáveis (SOM, *Self-Organizing Maps*), apresentado em Kohonen (1982), cujo propósito é agrupar dados de entrada em *clusters*. Esta técnica é um tipo de aprendizagem não supervisionada, onde os neurônios de saída da grade competem entre si, de forma que apenas um neurônio de um grupo será ativado em um instante de tempo, sendo declarado o vencedor. Durante o aprendizado, apenas as conexões do neurônio vencedor têm seus pesos alterados. Os neurônios inseridos nesta grade tornam-se seletivamente sintonizados a vários estímulos de entrada. Os neurônios vencedoes tornam-se ordenados entre si, de modo a organizar um sistema de coordenadas a partir de diferentes características de entrada. O Mapa de *Kohonen*, como também é chamado, não possui informações *a priori* sobre as classes de dados, e faz o agrupamento por conta de seu próprio algoritmo. Um exemplo bastante didático, com duas entradas e nove neurônios, é apresentado em Copin (2012).

Uma outra área que vem sendo abordada em diversos trabalhos de RNA trata da detecção de rosto humano, sendo utilizada em uma ampla gama de aplicações. As RNAs podem ser encontradas como um pré-processador em sistemas de reconhecimento de face, incluindo identificação biométrica, videoconferência, indexação de bases de dados de imagem ou vídeo, ou ainda interfaces inteligentes homem-máquina. Em *BioID* Frischholz e Dieckmann (2000) é utilizado um método de deteção de face baseado em modelo que extrai informações das bor-

[2]O filtro de Bayer foi desenvolvido por Bryce Bayer da Eastman Kodak. Trata-se de um mosaico, como uma matriz formada por 50% de verde, 25% de vermelho e 25% de azul, ou seja, também é chamado RGBG. Busca organizar os filtros de cor RGB em uma grade quadrada de fotossensores, usado em câmeras digitais, filmadoras e scanners para criar uma imagem colorida.

das, através de RNA do tipo SOM, tendo funções Gaussianas em seu *kernel*, enquanto que o trabalho de Huttenlocher, Klanderman e Rucklidge (1993) apresenta um algoritmo usado como pré-processador para sistema biométrico que combina rosto, voz e reconhecimento dos movimentos labiais.

Em Lagus et al. (1996), é apresentado um método para exploração interativa e de pesquisa a partir de documentos textuais digitais na web, chamado de WEBSOM, com o objetivo de organizar automaticamente coleções de documentos de textos, sem supervisão, usando Mapas Auto-Organizáveis. Os documentos são ordenados a partir de uma grade SOM utilizando informação estatística sobre contextos, utilizando uma função Gaussiana como função de vizinhança, resultando em documentos similares que se encontram próximos uns dos outros. Neste trabalho, também é apresentado um estudo de caso da sua utilização, onde foi analisada uma coleção de 8.800 artigos de texto, em sua maioria documentos curtos, porém totalizando aproximadamente 2 milhões de palavras. Após a organização dos mapas, estes podem ser explorados através de interface gráfica, permitindo aumentar o *zoom* em qualquer área do mapa clicando na imagem, e ainda com a posibilidade de classificação em quatro níveis diferentes de exibição.

As grades SOM podem ser eficientes ferramentas na fase exploratória de mineração de dados, pois projeta protótipos do espaço de entrada em uma grade de dimensão menor, sendo utilizada para visualizar e explorar as propriedades dos dados. No trabalho de Vesanto e Alhoniemi (2000), são estudadas diferentes abordagens para o agrupamento utilizando SOM, especialmente com a utilização da clusterização hierárquica (*Hierarchical Cluster Analysis, HCA*), do modo aglomerativo - em uma abordagem *bottom up*, onde cada observação começa em seu próprio cluster, e pares são mesclados a medida que se eleva a hierarquia - e do modo divisivo - em uma abordagem *top down*, onde as observações começam dentro de um cluster, e divisões recursivas são realizadas a medida que a hierarquia decresce. O procedimento é realizado através de uma abordagem em duas fases, onde o conjunto de dados é primeiro agrupado usando SOM para produzir os protótipos que, e em seguida, são agrupados. A principal vantagem observada neste processo é que a carga de processamento diminui consideravelmente, o que possibilita clusterizar grandes conjuntos de dados e até considerar diversas estratégias de pré-processamento, em tempo limitado. A eficiência deste processo torna-se clara se os grupos encontrados a partir do SOM são semelhantes aos dados originais; podendo apresentar bom desempenho se comparado com a clusterização direta dos dados, e ainda reduz o tempo computacional.

Ao substituir a função de ativação sigmóide, frequentemente utilizada em RNA, por uma função exponencial, tem-se uma rede neural probabilística (*Probabilistic Neural Network, PNN*), que permite calcular limites de decisão não-lineares, que se aproximam da aplicação do teorema de *Bayes*. A fim de especificar uma rede *Bayesiana* e representar a distribuição de probabilidade, faz-se necessário especificar, para cada nó X, a distribuição de probabilidade de X condicionada aos seus pais, e que podem ter qualquer forma. É comum trabalhar com distribuições discretas ou Gaussianas em seu *kernel*, pois simplificam os cálculos. Nos casos em que somente as restrições sobre uma distribuição conhecida, pode-se utilizar o princípio da entropia máxima para determinar a distribuição.

O trabalho de Specht (1990) aborda uma aplicação de uma RNA probabilística, de quatro camadas que utiliza *kernel* Gaussiano, que propõe mapear diferentes padrões de entrada para qualquer quantidade de classificações, permitindo alterar os limites de decisão em tempo real usando novos dados, conforme tornam-se disponíveis. Podem ainda ser implementados utilizando *hardware* que operam inteiramente em paralelo, como neurônios.

3.3 APLICAÇÕES EM SEGMENTAÇÃO DE IMAGENS DIGITAIS

As metodologias para segmentação de imagens, baseada em entropia, vêm sendo aplicadas em diversos trabalhos para extração de informações, medições da área de interesse, reconhecimento e classificação de objetos, entre outros. Aplicações na área médica, visam, por exemplo, a redução do tempo da análise ou alcançar precisão no diagnóstico, compatível com especialistas humanos. Nesta linha, pode ver no trabalho de Mao et al. (2000), um método para a segmentação de imagens da artéria carótida humana, baseado em modelo deformável e operações de morfologia matemáticas, que permite fornecer um conjunto completo de métricas locais e globais para a precisão da análise da segmentação. Nesta aplicação, o contorno inicial do modelo deformável é gerado usando o mapa de entropia da imagem original.

Ainda na área médica, alguns trabalhos de segmentação para extração de informação têm a aplicação de filtros do tipo *Canny*, que utilizam uma função Gaussiana em seu *kernel*. O artigo de Vale e Poz (2002) descreve o processo de detecção de bordas a partir de filtros *Canny*. Como exemplo de aplicação, o trabalho de Hamou e El-Sakka (2004) propôs um método de segmentação semi-automática das bordas de uma imagem capturada por ultrasom, gerando um

histograma que equaliza os tons de cinza para melhorar a qualidade da detecção das arestas de um filtro do tipo *Canny*, que é, então, aplicado na etapa seguinte à segmentação. Os resultados obtidos revelaram considerável precisão na detecção das arestas. Um outro trabalho que utiliza filtro do tipo *Canny* pode ser visto em Ilea et al. (2009), onde descreve-se um algoritmo de segmentação baseado em um modelo estatístico para identificar as duas interfaces que formam as paredes das artérias carótidas humanas, sem qualquer intervenção do usuário.

No trabalho de Delsanto et al. (2005) é apresentado um método completamente automático para extração de medidas da artéria carótida humana, a partir de imagens de ultra-som, em cortes longitudinais. O método chamado CULEX (*Completely User-independent Layers EXtraction*), utiliza-se de descritores estatísticos seguido de uma *Snake* para obter o ajuste em torno da região de interesse, utilizando um filtro Gaussiano passa-baixa. Posteriormente, uma versão modificada do CULEX proposta em Delsanto et al. (2006), chamada de CULEX2, introduziu uma nova etapa no algoritmo original, onde é recalculada a distribuição bidimensional da média e da variância da vizinhança dentro da região de interesse, através de um algoritmo *k-Means* com a lógica *Fuzzy*.

Kapur, em seu trabalho Kapur, Sahoo e Wong (1985), maximizou o limiar superior da entropia máxima para obter o limiar ótimo, sendo posteriormente aprimorado por Abutaleb - em Abutaleb (1989) - através do método com entropias bidimensionais. Nos trabalhos de Li e Lee Li e Lee (1993) e Pal Pal (1996), usou-se a divergência direta de *Kullback-Leibler* - apresentada em Kullback e Leibler (1951) - para selecionar o limiar ótimo, e Sahoo - em Sahoo et al. (1988) - utilizou a entropia de *Rényi* com o mesmo objetivo. Um estudo sobre essas metodologias pode ser visto em Chang et al. (2006), que apresenta uma revisão sobre métodos de segmentação de imagens baseados em entropia.

Algoritmos do tipo *k-Means*, apresentado no trabalho de MacQueen (1967), permitem definir regiões dentro da área de interesse, e ainda determinar as distâncias entre cada região, os chamados *clusters*. O método de clusterização apresentado por Schmitt et al. (2008), revisto neste trabalho, basea-se em algoritmo *k-Means* envolvendo o conceito de clusterização por particionamento, promovendo uma segmentação a partir da divisão da base de dados em quantidades pré-definidas de *clusters*. Um estudo comparativo entre a limiarização por *K-means* e a limiarização pela entropia não-extensiva de Tsallis pode ser visto em Rodrigues et al. (2011).

No trabalho de Sobiecki et al. (2011) foi realizado um estudo comparativo entre imagens de Tomografia Computadorizada para uso odontológico, capturadas com duas técnicas distin-

tas: *Multi-Slice Computerized Tomography* (MSCT) e *Cone-Bean Computerized Tomography* (CBCT). Foram extraídos histogramas de luminância de ambas as técnicas e sobrepostos para fazer a medição da divergência. Foi, então, aplicada a q-entropia com o uso da divergência estendida de *Kullback-Leibler*.

O trabalho de Destrempes et al. (2009) propôs uma segmentação da região de interesse em uma imagem digital, em um algoritmo semi-automático modelado a partir de distribuições de Nakagami ponderadas por um modelo Bayesiano, em imagens de ultra-som. Todos os cálculos são executados automaticamente, porém a segmentação na primeira imagem é manual. Uma pré-filtragem para suavização de ruídos foi realizada como pré-processamento, bem como uma *Snake* para o ajuste fino das bordas.

Em Abdel-Dayem, El-Sakka e Fenster (2005) foi proposto pelos autores um algoritmo baseado na segmentação *watershed*, para aplicações em imagens digitais. Os resultados mostraram que o esquema proposto pode produzir contornos precisos sobre um conjunto de imagens médicas extraídas por ultrasom, com boa estimativa dos contornos na região de interesse e redução da quantidade de contornos falsos.

No trabalho de Rodrigues, Chang e Suri (2006) foi proposto o uso da q-entropia para limiarização de imagens médicas, aplicada em um sistema CAD para a classificação do câncer de mama a partir de exames de mamografia capturadas por ultrasom. Uma técnica para encontrar o parâmetro de não extensividade da q-entropia, bem como uma discussão a respeito, foi apresentando no trabalho de Rodrigues e Giraldi (2009). Em Rodrigues e Giraldi (2011), foi proposta uma generalização da teoria de Tsallis, a fim de melhorar o método de segmentação não-extensiva, originalmente proposto por Albuquerque et al. (2004), e atualizar o parâmetro q utiliando uma relação entre as áreas observadas no histograma da imagem.

Em Gallão (2012), foi desenvolvida uma variação da entropia BGS que permite considerar pesos diferentes entre *background* e *foreground* no processo de limiarização de uma imagem digital, sendo apresentada como entropia de Shannon Ponderada. Esta abordagem entrópica, permite considerar dois subsistemas com importâncias distintas, ainda que dependentes um do outro.

3.4 APLICAÇÕES DA q-ÁLGEBRA

Foram apresentados em Borges (2004), desenvolvidos por pesquisadores do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas no Rio de Janeiro, estudos sobre uma possível deformação da Álgebra, relacionada com as funções q-exponencial e q-logaritmo. No mesmo trabalho foram também apresentadas a q-derivada e a q-integral, para qual a q-exponencial é auto-função. Parte deste trabalho foi desenvolvido simultaneamente por pesquisadores da Universidade de Le Mans, na França, de forma independente, e apresentados em Nivanen, Méhauté e Wang (2004). Desde então, os autores passaram a fazer referências uns aos outros em suas publicações sobre estes temas, conforme explica Borges em sua tese de doutorado, Borges (2012).

Em Borges (2012), o autor faz importantes contribuições à q-Álgebra aplicável ao formalismo não-extensivo, mais especificamente desenvolvendo generalizações das funções trigonométricas e hiperbólicas, generalizações da Álgebra e do cálculo diferencial, da transformada de Laplace, e aplicações em análise *wavelet*, como a generalização da q-Gaussiana modulada.

Como exemplos das análises efetuadas em Borges (2012), pode-se citar o estudo realizado sobre parceiros sexuais, onde identificou-se três tipos de comportamentos, associados a redes mundo-pequeno (*small-world*), a saber: (i) redes livre de escala (*scale-free networks*), com cauda do tipo lei de potência, onde se associa a redes sociais com contatos sexuais, podendo se adequar a q-exponenciais ou eventualmente a q-Gaussianas; (ii) redes livres de escala truncadas (*truncated scale-free networks*), que apresentam um regime intermediário do tipo lei de potência, seguido por uma transição para uma cauda exponencial, podendo se adequar a uma $(q,1)$-exponencial ou sua equivalente Gaussiana; (iii) redes com escala (*single scale networks*), que apresentam uma cauda exponencial ou Gaussiana, e comparadas a redes sociais de amizades, podendo se adequar a típicas Gaussianas.

Em Inoue e Shinoda (2013), foi proposta a utilização de uma função q-Gaussiana unidimensional para indexação semântica de imagem e vídeo. O modelo se utiliza de uma estrutura probabilística de misturas de funções Gaussianas com a utilização do parâmetro de não-extensividade q, ou seja, da função q-Gaussiana, para controlar o tamanho da cauda na mistura das Gaussianas. Segundo os autores, esta metodologia aumentou a acurácia em relação à mesma metodologia sem a utilização da q-Gaussiana.

Em Assirati et al. (2014), os autores propuseram a utilização de uma versão para uma função q-Gaussiana em duas dimensões, para a detecção de bordas de uma imagem utilizando o método da diferença de Gaussianas (*Difference of Gaussian - DoG*). Assim, definem esta versão da função q-Gaussiana como sendo

$$G_q(x,y) = \frac{exp_q - (x^2 + y^2)/(2\sigma^2)}{2C_q^2\sigma^2}, \tag{60}$$

onde C_q é uma constante de normalização que pode ser vista em detalhes na Seção 4.1.1. Os resultados mostram que a utilização da função q-Gaussiana proporcionou a extração de bordas com detalhes mais precisos, se comparados aos métodos tradicionais, sem a utilização da funçao q-Gaussiana.

Em Soares e Murta (2013), são apresentadas duas classes de filtros espaciais para a redução de ruídos em imagens de ressonância magnética em regiões cerebrais. Foi formulada uma versão da função q-Gaussiana em duas dimensões, baseada na função Gaussiana bidimensinal tradicional, rotacionada ao redor de sua origem, dada por

$$G_q(x,y) = \frac{e_q^{\frac{-(x-\mu_x)^2+(y-\mu_y)^2}{2\sigma^2}} e_q^{(1-q)}(x-\mu_x)^2 + (y-\mu_y)^2)}{2C_q^2\sigma^2}, \tag{61}$$

onde C_q é uma constante de normalização detalhada na Seção 4.1.1. Os resultados mostram que os filtros q-Gaussianos aumentaram a eficiência da filtragem, quando comparados com a filtragem Gaussiana clássica. Os resultados sugerem que os filtros q-Gaussianos são melhores para a redução do ruído quando se trata de imagens de ressonância magnética.

4 FORMULAÇÃO DA TESE

O conceito de funções Gaussianas é de fundamental importância para diversas áreas da ciência, e trata-se aqui do tema central desta tese. A simplicidade analítica e a facilidade na implementação computacional são importantes fatores que fazem as funções Gaussianas serem amplamente utilizadas em algoritmos computacionais. No entanto, a sua formulação ainda é rígida, dependendo apenas de parâmetros como a média e desvio-padrão. Em muitas aplicações apenas a variação do desvio-padrão é permitida, reduzindo a margem de flexibilidade.

Por outro lado, no trabalho de Tsallis et al. (1995), foi apresentado um novo tipo de função Gaussiana, a chamada q-Gaussiana, dependente de um parâmetro extra de não-extensividade, denotado como parâmetro q. Esse trabalho mostra a q-Gaussiana como um q-análogo da função Gaussiana, uma vez que a q-Gaussiana reduz-se a função Gaussiana original quando o parâmetro $q \to 1$; ou seja, a q-Gaussiana é uma generalização da Gaussiana. Esee trabalho abriu uma enorme gama de possibilidades em praticamente todas as áreas onde aplicam-se os conceitos de Gaussianas. A presente tese pretende oferecer algumas contribuições nesta parte, com aplicações na área de Processamento Digital de Imagens (PDI).

Por se tratar de conceito novo para a comunidade científica dentro do contexto computacional, é adequado explicar formalmente o conceito da q-Gaussiana neste capítulo, que trata da proposta da tese, ao invés de fazê-lo no Capítulo 2 de conceitos fundamentais, como seria o habitual. Desta forma, mantém-se a leitura e compreensão da proposta de forma mais natural, mantendo-se elementos importantes da tese interligados mais proximamente.

É importante ressaltar que, ao abordar os conceitos de q-Gaussiana, esta tese apenas reproduz, à luz do entendimento do autor, as ideias e formalismos fundamentados em Tsallis et al. (1995), apoiado por fundamentos da q-álgebra como visto em Borges (2012), acreditando ser de grande importância na aplicação em PDI. O leitor que desejar aprofudar-se mais sobre esses temas, sobretudo sob o ponto de vista da física, deve buscar outras fontes, como em Tsallis (1988), Tsallis (1999), Borges (1999) e Umarov e Tsallis (2007), por exemplo.

A descrição deste capítulo é estruturada da seguinte forma: na Seção 4.1.1, faz-se uma introdução ao conceito de função q-Gaussiana em uma dimensão, ressaltando que este conceito está sendo apresentado neste capítulo para ser mais didático ao leitor a compreensão da fun-

ção q-Gaussiana bidimesional após a compreensão do conceito de q-Gaussiana unidimesional. Há de se ressaltar que apenas a função q-Gaussiana em duas dimensões é o foco de estudo e de aplicações desta tese. Na Seção 4.1.2, apresenta-se uma proposta de modelo matemático da função q-Gaussiana bidimensional. As propostas experimentais de aplicação da função q-Gaussiana bidimensional na área de PDI são apresentadas nas Seções 4.1.2 e 5.2, como na criação de novos *kernels* para filtros de imagens e em novos modelos de RNAs baseadas em Mapas Auto-Organizáveis.

4.1 PROPOSTA DE UM MODELO q-GAUSSIANO BIDIMENSIONAL

Esta tese propõe um modelo de função q-Gaussiana bidimensional. A Seção 4.1.1, busca introduzir o leitor aos conceitos da função q-Gaussiana unidimensional, descrevendo seus conceitos e restrições. Em seguida, na Seção 4.1.2, são apresentados os conceitos para a formulação da função q-Gaussiana bidimensional, proposta desta tese.

4.1.1 Função q-Gaussiana

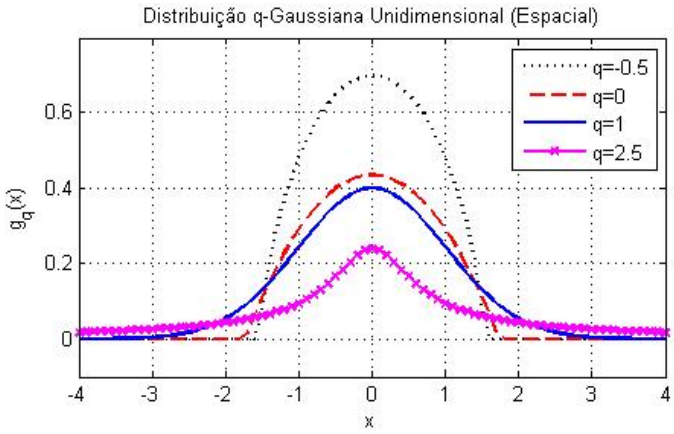
Conforme mostrado na Seção 2.1, a q-entropia, definida por Tsallis, em Tsallis (1988), é uma generalização da entropia BGS formulada por Boltzmann-Gibbs-Shannon, em Shannon (1948). Da mesma forma, a função q-Gaussiana, apresentada no trabalho de Tsallis et al. (1995), é uma generalização da função Gaussiana, sendo que a distribuição normal de Gauss é recuperada no limite quando a constante de não-extensividade apresenta-se como $q \to 1$. Em diversos trabalhos, como em Umarov e Tsallis (2007) por exemplo, Tsallis define a função q-Gaussiana como sendo

$$g_q(x) = \frac{\sqrt{\beta}}{C_q}\, e_q^{-\beta x^2}, \tag{62}$$

onde $\beta = 1/(3-q)$, e_q^n é uma função q-exponencial e C_q é uma constante de normalização. Todos estes elementos serão detalhados a seguir.

A Figura 18 mostra alguns exemplos de distribuição q-Gaussiana no domínio espacial, como resultados da Equação (62).

Figura 18 – Distribuição normal através de função q-Gaussiana unidimensional, normalizada no domínio espacial.



Fonte: Autor. Variou-se apenas o valor de $q = \{-0.5, 0, 1, 2.5\}$.

A função q-exponencial, denotada por e_q^x ou $\exp_q(x)$, é uma deformação da função exponencial e^x, que utiliza a constante de não-extensividade q, de Tsallis. A função q-exponencial, aplicada à estatística de Tsallis, foi introduzida no trabalho de Euler (1748) como uma função análoga à função exponencial, sendo definida como $[1 + (1 - q)x]_+^{\frac{1}{1-q}}$, e suas restrições dadas por:

$$e_q^x = \begin{cases} [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}, & \text{para } q \neq 1 \text{ e } 1 + (1 - q)x > 0 \\ 0, & \text{para } q \neq 1 \text{ e } 1 + (1 - q)x \leq 0 \\ e^x, & \text{para } q = 1 \end{cases} \tag{63}$$

O fator de normalização C_q é também dependente da constante de não-extensividade q, da seguinte forma:

$$C_q = \begin{cases} 2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{1-q})\frac{1}{(3-q)\sqrt{1-q}\Gamma(\frac{3-q}{2(1-q)})}, & \text{para } -\infty < q < 1 \\ \sqrt{\pi}, & \text{para } q = 1 \\ \sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3-q}{2(q-1)})\frac{1}{\sqrt{q-1}\Gamma(\frac{1}{q-1})}, & \text{para } 1 < q < 3 \end{cases} \tag{64}$$

A função Gama $\Gamma(n)$, é uma extensão da função fatorial para números reais e complexos, sendo dada por $\Gamma(n) = (n - 1)!$, para $n \in N$.

A função q-Gaussiana, definida pela Equação (62), apresenta seu valor máximo centrado no ponto zero da distribuição, mas, assim como é possível em uma função Gaussiana, pode-se também estender a função q-Gaussiana para incluir uma média μ como um parâmetro de

deslocamento do centro, como sendo:

$$g_q(x) = \frac{\sqrt{\beta}}{C_q}\, \mathsf{e}_q^{-\beta(x-\bar{x})^2}, \tag{65}$$

onde $\bar{x}$ é a média dos valores de x.

A função q-Gaussiana, apresentada pela Equação (65), por ser uma generalização da função Gaussiana, apresentada pela Equação (41), ao ser calculada com o parâmetro de não-extensividadea $q = 1$, é reduzida à função Gaussiana com desvio-padrão $\sigma_x = 1$, conforme mostra-se a seguir:

$$\begin{aligned} g(x) &= g_{q=1}(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\, \mathsf{e}^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}} &= \frac{\sqrt{(1/(3-q))}}{C_q}\, \mathsf{e}_q^{-(1/(3-q))(x-\bar{x})^2} \end{aligned}$$

Considerando $g(x)$ com desvio-padrão $\sigma_x = 1$ e $g_{q=1}(x)$, temos:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathsf{e}^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2}} = \frac{\sqrt{(1/2)}}{C_q}\, \mathsf{e}_q^{-(1/2)(x-\bar{x})^2}$$

De acordo com as restrições da função q-exponencial - mostradas na Equação (63) - para $q = 1$ temos $\mathsf{e}_q^x = \mathsf{e}^x$, portanto:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathsf{e}^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}C_q}\, \mathsf{e}^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2}}$$

Conforme as restrições do fator de normalização C_q - mostradas na Equação (64) - para $q = 1$ temos $C_q = \sqrt{\pi}$, portanto:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathsf{e}^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathsf{e}^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2}}$$

4.1.2 O Modelo q-Gaussiano Bidimensional

Na Seção 2.7, é abordada a utilização de filtros ativados pelo processo de convolução, tendo como *kernel* funções Gaussianas unidimensional e bidimensional. Na Seção 5.1 foram abordados conceitos sobre o operador q-Gaussiano unidimensional, como exemplo de sua aplicação em filtros digitais para sinais de uma dimensão.

Considerando a possibilidade de inúmeras aplicações da função q-Gaussiana, pode-se perguntar como se apresentaria uma extensão da distribuição de Gauss formulada em duas dimensões, com base na q-entropia? As propriedades estatísticas fundamentadas na q-álgebra se confirmariam? Como seria, por exemplo, o comportamento de um filtro cujo *kernel* fosse ativado por um operador q-Gaussiano em duas dimensões? A aplicação de uma deformação no operador de convolução, dada pelo parâmetro de não-extensividade q, traria melhoria aos resultados da filtragem de imagens digitais? Alguma melhoria, na performance do processo de aprendizagem não-supervisionada, seria observada?

Na intenção de buscar respostas às perguntas desta natureza, é descrito aqui um novo modelo de função q-Gaussiana em duas dimensões, com fundamentos na q-entropia.

Considere uma função q-Gaussiana unidimensional $g_q(x)$, onde x representa a intensidade de um sinal de entrada bidimensional porém aplicado apenas sobre o eixo x, na forma da Equação (62), e que está sendo repetida a seguir:

$$g_q(x) = \frac{\sqrt{\beta}}{C_q}\, e_q^{-\beta x^2}$$

Considera-se também uma outra função q-Gaussiana unidimensional $g_q(y)$, similar à Equação (62), representando a intensidade de um sinal de entrada bidimensional porém aplicado somente ao eixo y, da seguinte forma:

$$g_q(y) = \frac{\sqrt{\beta}}{C_q}\, e_q^{-\beta y^2} \tag{66}$$

Uma função Gaussiana bidimensional é definida pelo produto entre as duas funções Gaussianas unidimensionais; ou seja, $G(x,y) = g(x)g(y)$, sendo cada função Gaussiana aplicada em uma dimensão diferente sobre um sinal de entrada bidimensional, resultando em uma função Gaussiana bidimensional, como mostrado na Seção 2.7.4.2.

Entretanto, $g_q(x)$ e $g_q(y)$ são expressões fundamentadas na q-álgebra, sendo q uma possível deformação da álgebra, com origem na q-entropia de Tsallis. Borges, em seu trabalho Borges (2004), mostra que o produto entre dois q-análogos é o q-produto entre eles, dado por:

$$x \ \otimes_q \ y \equiv [x^{1-q} + y^{1-q} - 1]_+^{\frac{1}{1-q}}, \tag{67}$$

sendo $(x,y > 0)$.

Fundamentações a respeito da q-álgebra podem ser vistas no trabalho Umarov e Tsallis (2007), com definições sobre a q-soma, q-produto, q-exponencial, q-logaritmo, q-Gaussiana e q-Fourier.

Aplicando-se o conceito do q-produto, temos:

$$\begin{aligned} G_q(x,y) &= g_q(x) \ \otimes_q \ g_q(y) \\ G_q(x,y) &= [g_q(x)^{1-q} \ + \ g_q(y)^{1-q} \ - \ 1]^{\frac{1}{1-q}} \end{aligned}$$

Pode-se, então, definir a função q-Gaussiana bidimensional como sendo:

$$G_q(x,y) \ = \ [(\frac{\sqrt{\beta}}{C_q} \ e_q^{-\beta x^2})^{1-q} \ + \ (\frac{\sqrt{\beta}}{C_q} \ e_q^{-\beta y^2})^{1-q} \ - \ 1]^{\frac{1}{1-q}} \tag{68}$$

Dada a possibilidade de a função q-Gaussiana bidimensional resultar em números complexos na forma $z = a + bi$, significando a adição de uma dimensão extra a $G_q(x,y)$, o cálculo da distância Euclidiana entre a e b traz a representação do argumento do complexo z ao eixo x, eliminando a dimensão extra. Assim, considera-se a função q-Gaussiana bidimensional em módulo, fazendo-se $G_q(x,y) \ = \ |G_q(x,y)|$.

5 MODELOS EXPERIMENTAIS UTILIZANDO A FUNÇÃO q-GAUSSIANA BIDIMENSIONAL

Estando definido um modelo de função q-Gaussiana em duas dimensões, apresentada na forma da Equação (68), com base na estatística não-extensiva de Tsallis apresentada no Capítulo 4, pode-se estender a proposta da tese para aplicações práticas experimentais, mantendo o centro de estudo na área de Processamento Digital de Imagens. Desta forma, esta tese propõe aplicações da função q-Gaussiana bidimensional como *kernel* de filtros passa-baixa descritos na Seção 5.1 e como função de atualização dos pesos sinápticos em Redes Neurais Artificiais do tipo SOM apresentada na Seção 5.2. Em ambas aplicações, os experimentos produzem imagens segmentadas a partir das técnicas abordadas.

5.1 FILTRO q-GAUSSIANO BIDIMENSIONAL

No trabalho de Gallão e Rodrigues (2015), entitulado *A q-Gaussian Spatial Filtering*, foi apresentado um novo modelo de filtro passa-baixa, tendo uma função q-Gaussiana bidimensional em seu *kernel*. Em um grupo de imagens digitais, aplicam-se ruídos Gaussiano que produz uma imagem com ruído. A partir desta imagem com ruido adicionado, aplicam-se filtros cujo *kernel* é ativado por uma função q-Gaussiana bidimensional, com diversas variações do parâmetro q. A Seção 2.7.4.2 descreve o operador q-Gaussiano bidimensional, conforme apresentado no trabalho de Gallão e Rodrigues (2015) e que também é aplicado nos experimentos desta tese. Além da aplicação dos filtros q-Gaussianos bidimensionais, também é aplicado um filtro Gaussiano cujo *kernel* é ativado por uma função Gaussiana bidimensional tradicional.

Para comparar os resultados obtidos pelos filtros, foram aplicadas técnicas de comparação estatísticas como o índice Universal de Qualidade de Imagem (Q), descrito na Seção 2.9.3 e o índice *Peak Signal-to-Noise Ratio* ($PSNR$), descrito na Seção 2.9.2.

Após a obtenção das imagens filtradas, foram realizados experimentos de segmentação destas imagens filtradas através da aplicação da entropia BGS descrita na Seção 2.1.2, da q-entropia de Tsallis descrita na Seção 2.1.3, e da entropia de Shannon Ponderada apresentada na

Seção 2.1.4. Após a segmentação das imagens, foram feitas comparações estatísticas entre as técnicas entrópicas aplicadas a partir da *Kappa Statistic* descrita na Seção 2.9.1, e novamente do índice $PSNR$ descrito na Seção 2.9.2.

Na Seção 5.1.1 a seguir, descreve-se o operador q-Gaussiano unidimensional, para, então, conduzir a leitura à descrição do operador q-Gaussiano bidimensional descrito na Seção 5.1.2.

5.1.1 Operador q-Gaussiano Unidimensional

Nesta seção, esta tese apresenta um modelo de filtragem sobre um sinal de entrada unidimensional, utilizando uma função q-Gaussiana como operador de convolução, definida pela Equação (65). A função q-Gaussiana determina os valores de cada elemento do *kernel*, a exemplo de como foi feito com o operador de convolução unidimensional na Seção 2.7.3.2. Foi definido como w_q o filtro que utiliza uma função q-Gaussiana em seu *kernel*.

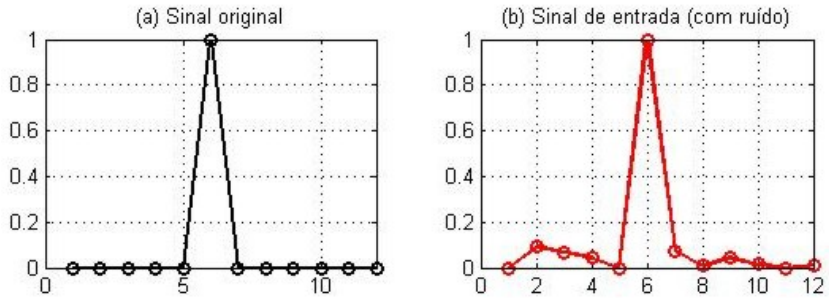
Considera-se, a título de exemplo, um sinal original do tipo impulso unitário - o mesmo utilizado no exemplo do operador Gaussiano unidimensional na Seção 2.7.4.1 - com 12 elementos, ilustrado graficamente pela Figura 19(a), cujos valores são:

$$f_{original} = \{0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0\}$$

Considera-se que $f_{original}$ recebe a adição de um ruído. Neste contexto, optou-se por adicionar um ruído Gaussiano com variância $0{,}04$, que resultou em um sinal $f(x)$, calculada conforme apresentado na Seção 2.7.2. Este sinal pode ser visto graficamente na Figura 19(b), com os seguintes valores:

$$f = \{0;\ 0{,}091;\ 0{,}068;\ 0{,}043;\ 0;\ 1;\ 0{,}075;\ 0{,}010;\ 0{,}042;\ 0{,}014;\ 0;\ 0{,}011\}.$$

Figura 19 – Exemplo de sinais que serão utilizados em um filtro q-Gaussiano unidimensional.



Fonte: Autor. (a) Sinal original $f_{original}$. (b) Sinal ruidoso $f(x)$, a ser filtrado por convolução.

Considera-se um *kernel* $w_q(x)$, com tamanho $m = 9$, o qual obedece a uma distribuição normal descrita pela função q-Gaussiana unidimensional, dada pela Equação (65), sendo a média das intensidades $\bar{x} = 0$ e o parâmetro de não-extensividade $q = 1$. A Figura 20(a) ilustra a representação gráfica de $w_q(x)$, cujos valores são:

$$w_q(x) = \{0{,}0001;\ \ 0{,}0044;\ \ 0{,}0540;\ \ 0{,}2420;\ \ 0{,}3989;\ \ 0{,}2420;\ \ 0{,}0540;\ \ 0{,}0044;\ \ 0{,}0001\}$$

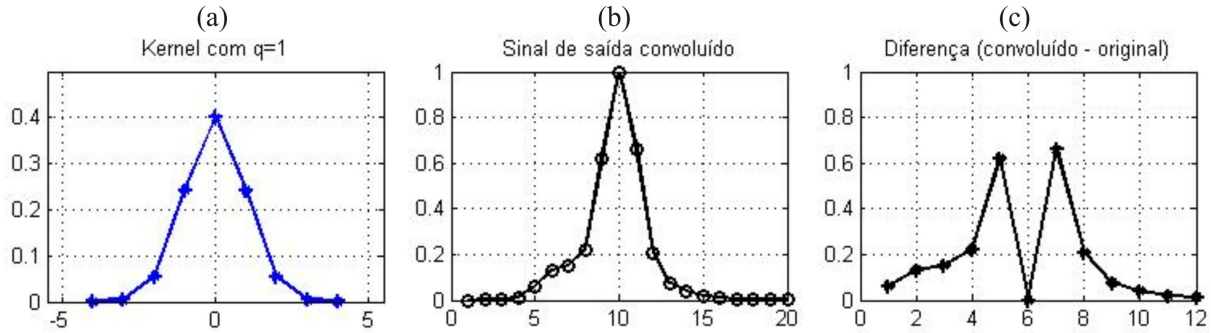
Para extrair ruídos do sinal de entrada $f(x)$ com a aplicação de um filtro q-Gaussiano descrito por $w(x)$, calcula-se a convolução entre $f(x)$ e $w_q(x)$, representada por $g(x) = f(x) * w_q(x)$. Como resultado, tem-se um sinal de saída normalizado em relação ao valor máximo do sinal de entrada. Tomando-se o exemplo apresentado na Figura 20, após aplicar a convolução, obtém-se o sinal de saída convoluído normalizado (filtrado) representado graficamente na Figura 20(b), cujos valores são:

$$g(x) = \{0; 0; 0; 0; 0; 0; 0{,}018; 0{,}359; 1; 0{,}4350{,}089; 0{,}12; 0{,}045; 0{,}035; 0{,}091; 0{,}033; 0{,}002; 0\}$$

O exemplo da Figura 20(c) também mostra a representação gráfica da diferença computada entre o sinal original, mostrado na Figura 19(a), e o sinal de saída convoluído normalizado, mostrado na Figura 20(b). Para calcular esta diferença fez-se o recorte no sinal convoluído para que tenha o mesmo tamanho do sinal original.

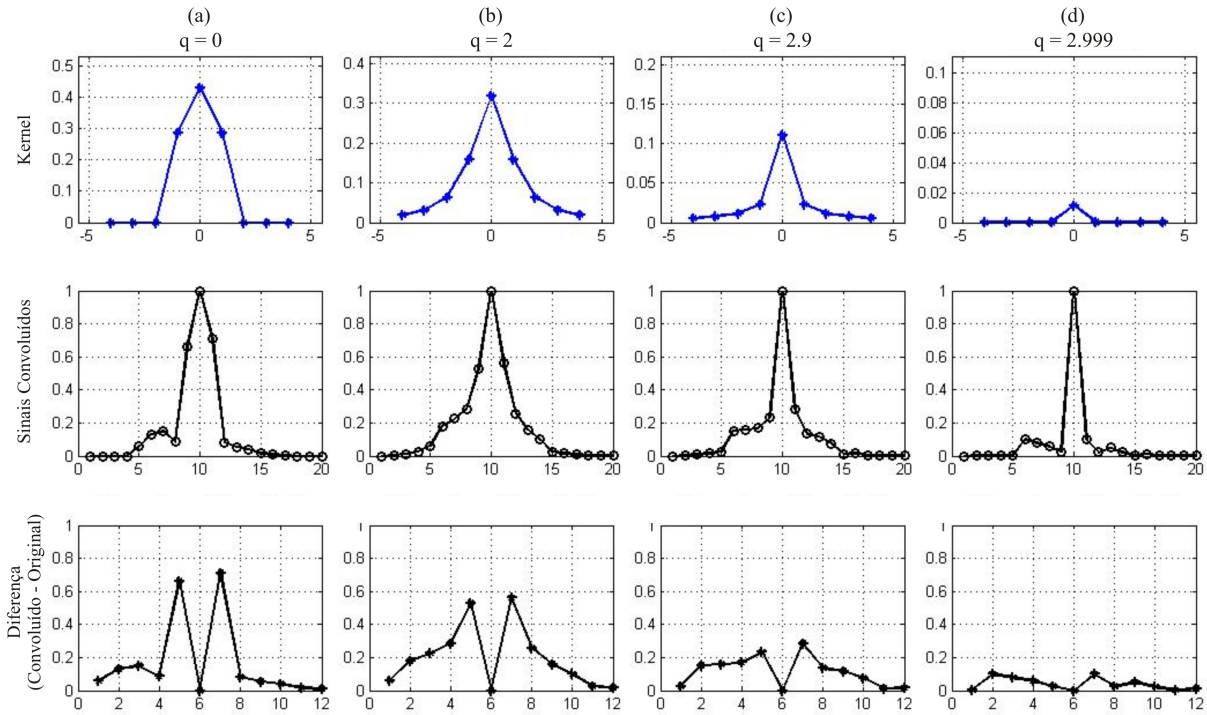
A utilização de filtros com *kernel* ativado por função q-Gaussiana possibilita variações do parâmetro de não-extensividade q, que produzem diferentes resultados como sinais de saída. Para ilustrar esta diversidade de resultados, aplicamos a convolução entre o sinal de entrada ruidoso mostrado na Figura 19(b), e cada um dos filtros mostrados na Figura 21.

Figura 20 – Exemplo de filtro q-Gaussiano unidimensional.



Fonte: Autor. (a) *Kernel* $w_q(x)$, de tamanho $m = 9$, tendo como operador de convolução uma função q-Gaussiana unidimensional com $q = 1$. (b) Sinal de saída normalizado $g(x)$, após a convolução por filtro q-Gaussiano unidimensional, conforme mostra a Figura 19. (c) Diferença entre o sinal original e o sinal convoluído.

Figura 21 – Exemplos de convoluções entre um sinal com ruído e filtros q-Gaussianos.



Fonte: Autor. A partir do sinal com ruído mostrado na Figura 19(b) e 4 diferentes filtros q-Gaussianos espaciais, todos com $m = 9$. Em cada coluna, são exibidos os *kernels* (parte superior), os sinais filtrados normalizados (parte central) e a diferença entre sinal convoluído $\times$ sinal original (parte inferior).

A Figura 21 mostra quatro exemplos de convolução, sendo cada uma exibida em uma coluna diferente. Todas as convoluções foram realizadas com o mesmo sinal de entrada - mos-

trado na Figura 19(b) - com um filtro q-Gaussiano unidimensional de tamanho $m = 9$, com variações apenas no valor do parâmetro de não-extensividade q. Em cada coluna há três curvas, sendo uma na parte superior, outra na parte central e mais uma na parte inferior, que representam, respectivamente, o *kernel* do filtro utilizado na convolução, o sinal de saída convoluído (filtrado) normalizado em relação ao maior valor do sinal original, e a diferença entre o sinal convoluído e o sinal original.

Pode-se observar na Figura 21, que a cada variação do parâmetro de não-extensividade q um novo *kernel* foi produzido. Com isso, para cada convolução realizada resultou um novo sinal convoluído normalizado diferente, apenas pela variação do parâmetro q. Na coluna (a), a convolução do sinal ruidoso foi realizada com um filtro q-Gaussiano com $q = 0$, que produziu o sinal de saída filtrado normalizado, mostrado imediatamente abaixo. Na coluna (b), a convolução foi realizada com o *kernel* ativado por uma q-Gaussiana com $q = 2$. Na coluna (c), aplicou-se um filtro q-Gaussiano com $q = 2{,}9$. Por fim, na coluna (d), o sinal ruídoso foi convoluído com um função q-Gaussiana com $q = 2{,}999$.

Pode-se observar nas curvas da parte inferior da Figura 21, a representação gráfica da diferença entre o sinal original - mostrado na Figura 19(b) - e cada um dos sinais de saída (convoluídos). Nota-se que, na definição do *kernel* ativado por uma função q-Gaussiana, ao variar o valor de q até o limite de $q \to 3$, esta diferença tende a diminuir, ou seja, o filtro mostra-se mais eficiente a cada novo valor de q da sequência adotada. Os resultados apresentados no exemplo da Figura 21, evidenciam a possibilidade de alteração do sinal convoluído a partir da simples variação do parâmetro de não-extensividade q na função q-Gaussiana unidimensional. Também é possível observar, através da Figura 21(d), que a aplicação do filtro também ameniza o efeito de borramento na imagem filtrada.

Na Seção 2.7.3, mostra-se que a convolução satisfaz as propriedades algébricas da Comutatividade, da Associatividade e da Distributividade. Com a aplicação da convolução utilizando uma função q-Gaussiana como *kernel* de um filtro, essas três propriedades também são satisfeitas. A Seção 5.1.2 apresenta a proposta de um operador q-Gaussiano bidimensional que permite a construção de filtros q-Gaussianos espaciais, tipicamente úteis para experimentos de filtragem de imagens digitais.

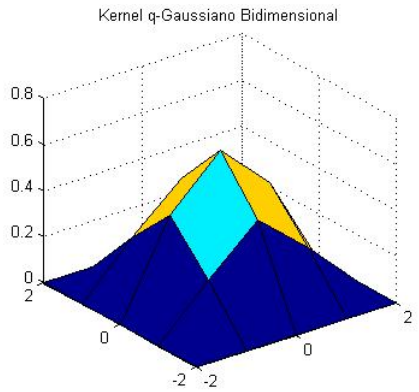
5.1.2 Operador para Filtro *q*-Gaussiano Bidimensional

Para a criação de um filtro *q*-Gaussiano bidimensional para imagens, aplica-se a Equação (68) como função de ativação do *kernel* $w_q(x,y)$. A função *q*-Gaussiana bidimensional sendo dependente do parâmetro *q*, é possível realizar combinações de valores do *kernel* apenas variando este parâmetro. Desta forma, abre-se a possibilidade para diferentes ajustes na distribuição dos valores internos do *kernel* a serem utilizados no processo de convolução de um filtro passa-baixa ativado por uma função *q*-Gaussiana bidimensional.

Nesta tese, considera-se uma imagem digital como sinal de entrada para o filtro *q*-Gaussiano bidimensional, cujo *kernel* obedece a uma função *q*-Gaussiana bidimensional, que produz uma imagem de saída, filtrada. Os valores do *kernel* $w_q(x,y)$, são computados a partir de uma função *q*-Gaussiana bidimensional, dada pela Equação (68), sendo $x = [0, 1,..., 255]$ e $y = [0, 1,..., 255]$ - representando os valores das intensidades de cada pixel da imagem em 256 tons de cinza - com médias das intensidades $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

Este filtro obedece a uma distribuição *q*-Gaussiana normal também bidimensional, com $q \to 1$, semelhante à ilustrada pela Figura 23(a). O exemplo da Figura 22, mostra graficamente um *kernel* *q*-Gaussiano bidimensional, com tamanho 5×5:

Figura 22 – Exemplo de filtro *q*-Gaussiano bidimensional.

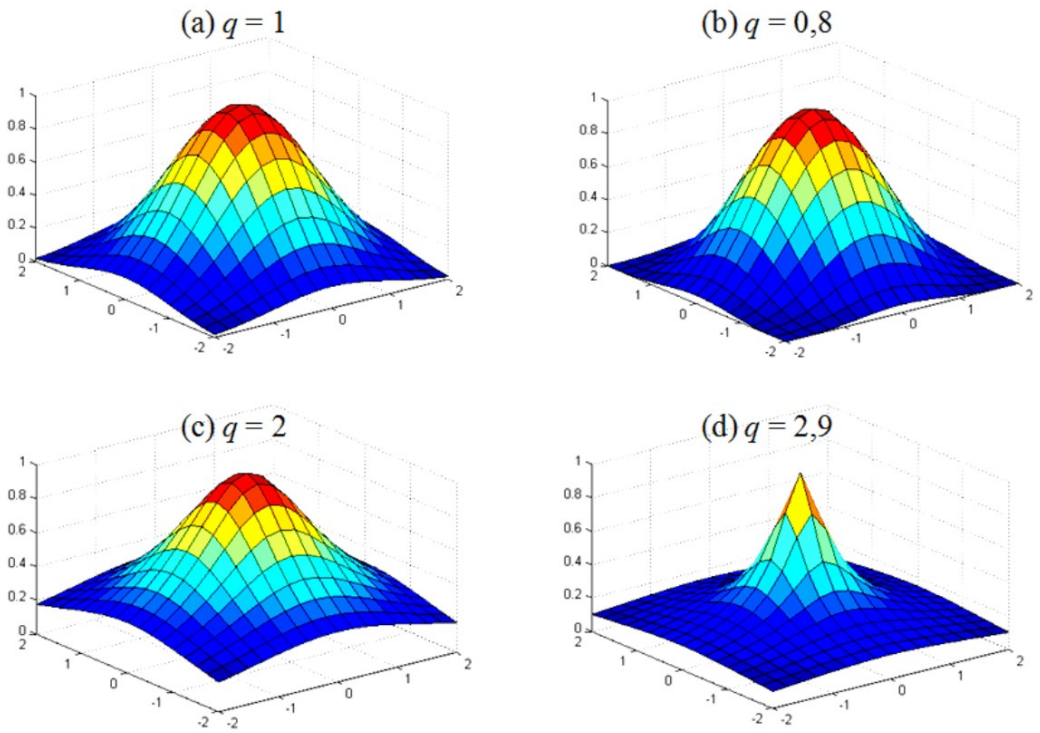


Fonte: Autor. *kernel* utilizado na filtragem da imagem com ruído mostrada na Figura 15(b), com tamanho 5×5, cuja função de ativação é uma *q*-Gaussiana bidimensional, com médias das intensidades $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Foi utilizado o parâmetro $q = 0{,}2$, escolhido ao acaso.

Para ilustrar algumas das possibilidades oferecidas na criação de filtros q-Gaussianos espaciais, a Figura 23 mostra alguns exemplos de *kernels* com variações apenas do parâmetro q. Em todos os exemplos foram mantidas as médias das funções q-Gaussianas bidimensionais em $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Desta forma, pode-se observar outras possibilidades de configurações para o *kernel* de um filtro q-Gaussiano bidimensional.

A Figura 23(a) mostra um caso especial onde os valores médios estão no centro de cada uma das dimensões; ou seja, $\bar{x} = \bar{y} = 0$ e o valor do parâmetro $q \rightarrow 1$, ou seja, retornando à forma de uma função Gaussiana bidimensional tradicional. Nota-se, neste caso, uma distribuição q-Gaussiana bidimensional normal. Considera-se que os outros três exemplos - respectivamente mostrados nas Figuras 23(b), (c) e (d) - são variações deste. Assim, no exemplo da Figura 23(b), varia-se apenas o parâmetro $q = 0{,}2$; no exemplo da Figura 23(c) a variação ocorre com o parâmetro $q = 2$ e no exemplo da Figura 23(d) com o parâmetro $q = 2{,}9$.

Figura 23 – Exemplos de distribuições de funções q-Gaussianas bidimensionais.



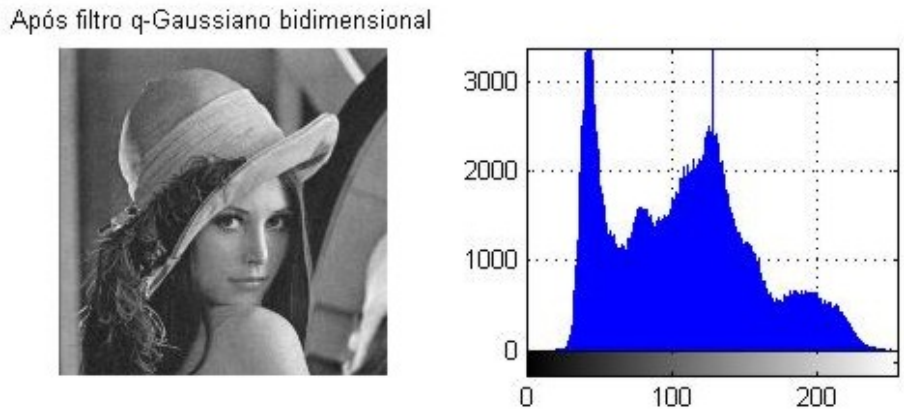
Fonte: Autor. Funções com variações apenas nos valores do parâmetro q: (a) $q = 1$. (b) $q = 0{,}8$. (c) $q = 2$. (d) $q = 2{,}9$.

A filtragem da imagem com ruído obedece ao processo de convolução, representado por $G_q(x,y) = w_q(x,y) \ * \ f'(x,y)$ e definido pela Equação (37), conforme descrito na Seção

2.7.3.3. Após a convolução bidimensional completa, obtém-se a imagem de saída, $G_q(x,y)$, que representa a imagem filtrada.

A Figura 24, mostra um exemplo da imagem *Lena* filtrada e seu respectivo histograma. A imagem original (sem ruído) e a imagem de entrada do filtro (com aplicação de ruído), podem ser vistas, respectivamente, nas Figuras 15(a) e (b).

Figura 24 – Exemplo de imagem de saída $G_q(x,y)$ de um filtro q-Gaussiano bidimensional.



Fonte: Autor. Imagem de saída medindo 512×512 pixels, convoluída por um filtro q-Gaussiano bidimensional com $q = 0{,}2$, cujo *kernel* foi ilustrado na Figura 22, com seu respectivo histograma.

Com a utilização da função q-Gaussiana bidimensional, abre-se a possibilidade da utilização de diversos valores do parâmetro q, sendo q_x na distribuição $g_q(x)$ e q_y na distribuição $g_q(y)$. Diante desta perpectiva, experimentos de segmentação das imagens pré-processadas por filtros q-Gaussianos foram realizados e descritos no Capítulo 6, e a análise desses resultados são apresentadas na Seção 6.2.3.

5.2 MAPAS AUTO-ORGANIZÁVEIS: O MODELO q-SOM

Nesta seção, apresenta-se uma variação do algoritmo SOM para o desenvolvimento de Mapas Auto-Organizáveis, descritos na Seção 2.8, aplicados à segmentação de imagens em 3 dimensões (RGB). Neste novo modelo, utiliza-se uma função q-Gaussiana bidimensional como ativação para a atualização dos pesos da vizinhança do neurônio vencedor na fase de treinamento do algoritmo SOM. Com a alteração na função Gaussiana bidimensional tradicional

para uma função q-Gaussiana bidimensional, descreve-se um novo modelo do algoritmo SOM que, nesta tese, denotamos de q-SOM.

Segundo Haykin (2001), o principal objetivo dos Mapas Auto-Organizáveis é transformar um padrão de sinal incidente de dimensão arbitrária em um mapa discreto uni ou bidimensional, e realizar esta transformação adaptativamente de uma maneira topologicamente ordenada. O método, baseado em aprendizagem não-supervisionada de redes neurais artificiais, busca atualizar os pesos dos neurônios vizinhos mais próximos ao neurônio vencedor, atribuindo menores pesos gradualmente à medida em que os vizinhos estão mais longe. Esta atualização dos pesos ocorre durante o processo cooperativo na fase de treinamento dos Mapas Auto-Organizáveis e tipicamente se utiliza de uma função Gaussiana tradicional.

O modelo de experimentos com os Mapas Auto-Organizáveis utiliza uma função q-Gaussiana bidimensional como *kernel* da função de vizinhança do algoritmo SOM. Este *kernel* é projetado para obter a maximização dos pesos dos neurônios vizinhos mais próximos ao neurônio vencedor, e para diminuir os pesos atribuidos à medida em que os vizinhos estão mais longe. Além disso, são feitos ajustes no parâmetro de não-extensividade q nesta nova função de vizinhança, que provocará uma deformação nos pesos dos elementos pertencentes ao raio da vizinhança do neurônio vencedor. Espera-se que, com a variação do parâmetro q, os novos Mapas Auto-Organiváveis possam produzir melhores resultados na segmentação de imagens, se comparadas com outras técnicas de segmentação já conhecidas, como o *k-Means*, descrito na Seção 2.5.1 e a própria rede SOM tradicional apresentada na Seção 2.8.

Com a substituição da função de vizinhança, diversos questionamentos surgem quanto ao comportamento da fase de treinamento do modelo q-SOM e dos resultados que serão obtidos com a segmentação das imagens. Como então se comportariam os Mapas Auto-Organizáveis se utilizarmos uma função q-Gaussiana bidimensional como função de ativação para atualização dos pesos da vizinhança do neurônio vencedor? Como seriam os Mapas Auto-Organizáveis sensíveis à variação dos valores do parâmetro q? Haveria alguma diferença considerável na quantidade de iterações necessárias para a rede q-SOM convergir, atingindo o aprendizado, se comparada ao treinamento de uma rede SOM tradicional? Provocando variações no tamanho da grade de neurônios na fase de treinamento da q-SOM e portanto, variações nos valores do parâmetro β na função q-Gaussiana, haveriam consideráveis diferenças nos resultados das segmentações de imagens? Ao segmentar imagens em 3 dimensões (RGB) a partir da q-SOM,

como se comportariam tais segmentações ao variar os valores do parâmetro q se comparadas às segmentações produzidas a partir dos algoritmos SOM tradicional e *k-Means*?

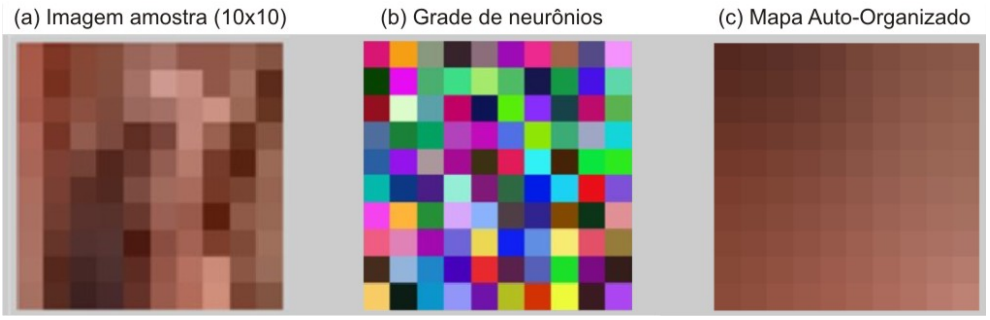
Para responder adequadamente a todas estas perguntas, foram realizados experimentos com o treinamento de redes q-SOM e SOM tradicional, a partir de amostras de imagens RGB, com variações nos valores do parâmetro q durante a fase de treinamento e a consequente segmentação das imagens. A Seção 5.2.1 descreve o procedimento realizado para segmentar uma imagem a partir de Mapas Auto-Organizáveis.

5.2.1 Mapa Auto-Organizável para Segmentação de Imagens

Nesta Seção, descreve-se cada uma das fases do modelo experimental de segmentação de imagens a partir do treinamento de Mapas Auto-Organizáveis q-SOM, desde a geração dos mapas de características, passando pelo agrupamento desses mapas, até a segmentação da imagem original se utilizando do algoritmo q-SOM.

A Figura 25 ilustra alguns passos necessários para o treinamento do algoritmo q-SOM que, a partir de uma imagem de amostra com rtesolução reduzida, faz a auto-organização da grade de neurônios que foi iniciada com pesos aleatórios, até produzir um Mapa Auto-Organizável. Todas estas etapas são detalhadas ao longo deste sessão.

Figura 25 – Ilustração de um exemplo de treinamento do modelo q-SOM.



Fonte: Autor. (a) Amostra de uma imagem original. (b) Grade de neurônios com os pesos iniciais aleatórios, representando um mapa em três dimensões de cores. (c) Mapa Auto-Organizável.

Na aplicação do algoritmo q-SOM para a segmentação de imagens, na fase de treinamento, aplica-se o processo competitivo descrito na Seção 2.8.1. Assume-se como padrão do sinal incidente a amostra da imagem a ser segmentada, representada na Figura 25(a). Esta amostra, ou padrão de entrada, é representada por $x = [x_1, x_2, ..., x_m]$ e, por tratar-se de ima-

gem RGB, tem como dimensão $m = 3$, sendo uma dimensão para cada canal de cor. Cada padrão de entrada x apresentado à grade é a representação de 1 único pixel da amostra, porém em 3 dimensões de cores, geralmente com valores normalizados entre 0 e 1.

O padrão de entrada pode ser obtido com a redução da dimensionalidade da imagem original, desde que seja suficiente para representar a diversidade de cores relevantes e assegurar que o processo de auto-organização produza mapas de características capazes de segmentar as imagens originais. A Seção 6.3.1 descreve a etapa de treinamento dos experimentos realizados nesta tese.

O tamanho da grade dos pesos sinápticos habitualmente é uma matriz quadrada de tamanho N x N neurônios, ou seja $i = (1, 2,..., N)$ e $j = (1, 2,..., N)$, e independe do tamanho do padrão de entrada. Na aplicação do modelo q-SOM, a variação do valor de N, que determina o tamanho da grade de neurônios, provoca variações nos valores do parâmetro β da função q-Gaussiana bidimensional, dada pela Equação (68), uma vez que $\beta = \frac{1}{(3-q)\sigma^2}$ e σ sendo a largura da vizinhança ao redor do neurônio vencedor.

Durante o processo competitivo da fase de treinamento do modelo q-SOM, todos os padrões de entrada são expostos à rede de forma iterativa, com t iterações para cada variação do valor de q. Ao final desta etapa do treinamento, identifica-se o neurônio vencedor w_{ij} da matriz de pesos sinápticos como sendo aquele que mais se aproxima ao padrão de entrada x através da minimização da distância euclidiana entre w_{ij} e x.

As coordenadas ij do neurônio vencedor identificam o centro de uma vizinhança topológica na grade de neurônios. Tal vizinhança h_{ij} é composta por um conjunto de neurônios excitados, cooperativos, simétricos em relação ao ponto central onde se localiza o neurônio vencedor, cuja distância $d_{ij} = 0$. A amplitude da vizinhança h_{ij} decresce monotonicamente com o aumento da distância lateral em relação ao centro, decaindo para zero quando $d_{ij} \to \infty$, sendo esta uma condição necessária para a convergência. Nos experimentos desta tese utilizamos o decaimento exponencial dado pela Equação (46), conforme apresentado na Seção 2.8.2.

Por tratar-se de experimentos com imagens digitais, a atualização dos pesos durante a etapa do processo cooperativo, descrito na Seção 2.8.2, é de uma função Gaussiana bidimensional tradicional, dada pela equação (45). Nesta etapa definimos o novo modelo de Mapa Auto-Organizável q-SOM, substituindo a função Gaussiana bidimensional tradicional pela fun-

ção q-Gaussiana bidimensional, proposta na Seção 4.1.2 e dada por:

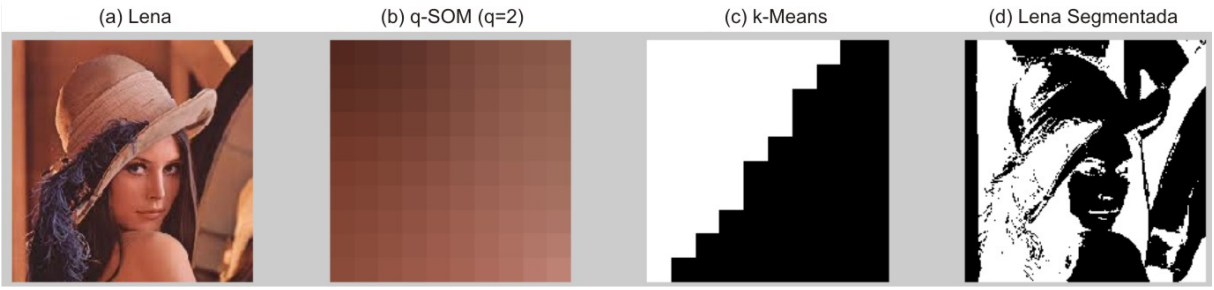
$$G_q(x,y) \;=\; [(\frac{\sqrt{\beta}}{C_q}\, e_q^{-\beta x^2})^{1-q} \;+\; (\frac{\sqrt{\beta}}{C_q}\, e_q^{-\beta y^2})^{1-q} \;-\; 1]^{\frac{1}{1-q}} \tag{69}$$

Na etapa do processo adaptativo, conforme apresentado na Seção 2.8.3, a atualização dos pesos sinápticos ocorre somente sobre os neurônios ij que pertençam à vizinhança h_{ij} através da função de atualização descrita pela Equação (47). Define-se também a taxa de aprendizagem η com um valor inicial que decresce gradualmente com o aumento do tempo discreto. O descrescimento de η é dado por uma função exponecial descrita pela Equação (48).

Após todas as iterações da fase de treinamento, obtém-se como resultados os Mapas Auto-Organiváveis de tamanho N x N, que são utilizados como entrada da etapa do agrupamento dos Mapas Auto-Organiváveis, cujo objetivo é agrupar em classes os valores dos pesos nos mapas de características, produzindo assim um mapa de classes $c(i,j)$, do tamanho N x N e de única dimensão, para cada mapa de características. Desta forma, associa-se pela posição ij cada vetor do Mapa Auto-Organizável com uma única classe no mapa de classes $c(i,j)$. Para realizar o agrupamento dos Mapas Auto-Organizável, optamos pela aplicação do algoritmo *k-Means*, descrito na Seção 2.5.1.

Para a segmentação de uma imagem utilizando o modelo q-SOM, considera-se a imagem original a ser segmentada como sendo o padrão de entrada x do algoritmo q-SOM, seguindo as mesmas etapas do processo competitivo da fase de treinamento da q-SOM. O exemplo da Figura 26(a) ilustra a imagem *Lena* como sendo o padrão de entrada.

Figura 26 – Ilustração de um exemplo de segmentação de imagem a partir do modelo q-SOM.



Fonte: Autor. (a) Imagem original em 3 dimensões de cores. (b) Mapa Auto-Organizável, resultado do treinamento do modelo q-SOM. (c) Agrupamento a partir do Mapa Auto-Organizável, em 2 classes, através do algortimo *k-Means*. (d) Imagem segmentada (binarizada).

Entretanto, a grade de neurônios de pesos iniciais aleatórios observada na fase de treinamento da q-SOM agora é o próprio Mapa Auto-Organizável, conforme mostra o exemplo da Figura 26(b), cujo mapa de características foi produzido pelo algoritmo q-SOM com valor de $q = 2$. Identifica-se, então, o neurônio vencedor w_{ij} da matriz de pesos sinápticos como sendo aquele que mais se aproxima ao padrão de entrada x, também se utilizando da minimização da distância euclidiana entre w_{ij} e x. A diferença deste procedimento com processo competitivo da fase de treinamento é que, agora, o Mapa Auto-Organizável não sofre mais atualizações de seus pesos sinápticos.

Após a identificação do neurônio vencedor $w(i,j)$ no Mapa Auto-Organizável, o algoritmo identifica a classe de w_{ij} no mapa de classes c_{ij}. O exemplo da Figura 26(c) mostra uma representação do mapa de classes gerado através do algortimo *k-Means* a partir do Mapa Auto-Organizável mostrado na Figura 26(b).

Para finalizar o procedimento de segmentação da imagem, o padrão de entrada x é associado à única cor que, por sua vez, surgiu da associação da classe encontrada na posição ij do mapa de classes com a posição ij do neurônio vencedor. Após repetir estes procedimentos iterativamente para todos os padrões de entrada x, a imagem segmentada é montada se utilizando apenas das cores associadas às classes do mapa de classes. A Figura 26(d) mostra um exemplo da imagem segmentada *Lena* através do modelo q-SOM.

6 EXPERIMENTOS E APLICAÇÕES

No Capítulo 5 foram apresentadas as propostas experimentais utilizando o modelo de função q-Gaussiana bidimensional apresentada na forma da Equação (68), com base na estatística não-extensiva de *Tsallis* apresentada no Capítulo 4. Na Seção 7.1 são descritos os experimentos e resultados obtidos com a aplicação de filtros q-Gaussianos, enquanto que, na Seção 6.3 descrevem-se os experimentos com a aplicação do modelo de rede neural artificial q-SOM. Iniciando este capítulo, a Seção 6.1 apresenta a base de imagens de *Berkeley* que foi utilizada tanto nos experimentos com os filtros q-Gaussianos, quanto nos experimentos com o modelo q-SOM.

6.1 A BASE DE IMAGENS DE *BERKELEY*

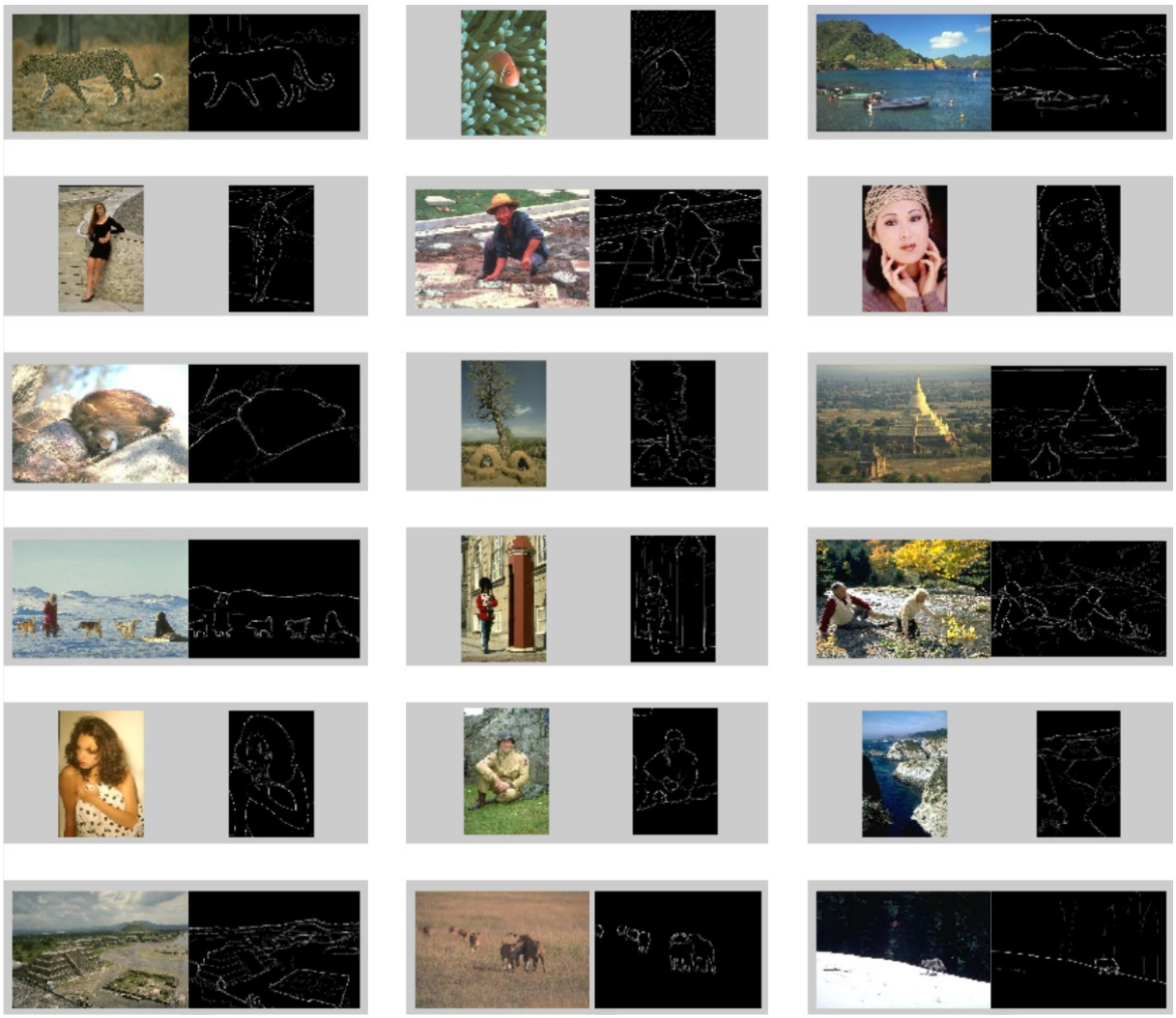
Nos experimentos realizados nesta tese foram utilizadas 300 imagens do banco de dados da *University of California, Berkeley*, Martin et al. (2001), aqui denotada apenas por base de *Berkeley*. Este banco de dados é composto de imagens com diversas cenas naturais, as quais foram segmentadas manualmente por 5 indivíduos. As imagens utilizadas neste trabalho têm padrão de cores RGB, gravadas no formato *.jpg*. As imagens possuem dois tamanhos padronizados, sendo 481×321 pixels e 321×481.

A tarefa de segmentar uma imagem em diferentes regiões cognitivas ainda é um problema em aberto, sendo destacadas duas razões principais como dificuldades, a saber: uma boa segmentação depende do contexto da cena, bem como do ponto de vista da pessoa que a está analisando e, como uma segunda razão, é raro encontrar um banco de dados para comparação formal dos resultados.

Apresentar resultados através da comparação de apenas algumas imagens, pode apontar resultados obtidos sob características muito específicas, portanto, pouco generalizadas, sendo testadas e validades para apenas determinadas classes de imagens. Aassim, surge uma questão: Qual será a segmentação correta? Na ausência de uma resposta definitiva a esta pergunta, torna-se necessária uma referência a ser seguida, que permita a comparação entre diversas técnicas,

sob a mesma base de dados de alguma forma parametrizados, sendo este o caso da base de *Berkeley*. A Figura 27 exibe 18 imagens da base de *Berkeley*, escolhidas aleatoriamente, ao lado de suas respectivas segmentações manuais (*ground trouth*), demonstrando o alto nível de coerência entre as segmentações feitas por diferentes pessoas.

Figura 27 – Exemplos de 18 imagens da base de *Berkeley* com as respectivas segmentações manuais (*ground trouth*).



Fonte: Imagens extraídas da base de *Berkeley*.

Neste trabalho, nos experimentos desenvolvidos através de filtros q-Gaussianos, as imagens da base de *Berkeley* foram convertidas em 256 tons de cinza. Nos experimentos desenvolvidos com o modelo de Rede Neural Artificial q-SOM, foram utilizadas as imagens em RGB e também as segmentações manuais das imagens da base de Berkeley. Este banco de dados de

imagem foi usado como uma ferramenta para a comparação entre os resultados dos métodos avaliados.

6.2 RESULTADOS DAS APLICAÇÕES DOS FILTROS q-GAUSSIANOS

No Capítulo 5 foram propostos experimentos utilizando funções q-Gaussianas bidimensionais em filtros passa-baixa para a redução de ruídos em imagens digitais, cujo modelo foi descrito na Seção 4.1.2. Na presente seção são descritos experimentos e apresentados os resultados obtidos após aplicação de filtros q-Gaussianos sobre imagens com ruídos. Os experimentos com a imagem *Frog*, ilustrada na Figura 28(a) foram realizados como forma de ilustrar a metodologia aplicada, entretanto, as análises, discussões e conclusões foram realizadas com base nos resultados obtidos a partir das imagens da base de *Berkeley*.

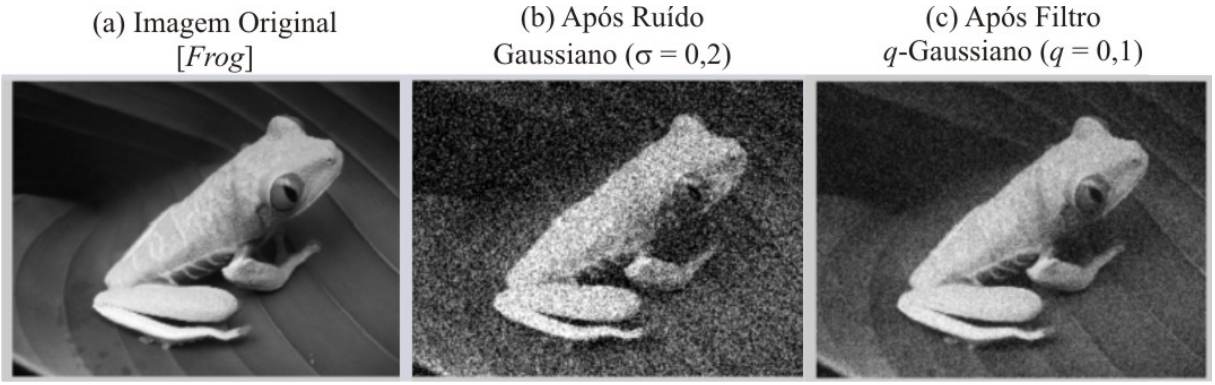
Os experimentos com filtros q-Gaussianos são descritos separadamente em 3 fases sequenciais. A primeira fase, apresentada na Seção 6.2.1, descreve os procedimentos de aplicação de ruídos Gaussianos (Seção 6.2.1.1) e de filtragem das imagens que receberam os ruídos Gaussianos (Seção 6.2.1.2).

A segunda fase, apresentada na Seção 6.2.2, descreve os procedimentos com a segmentação das imagens filtradas e também das originais. Como metodologias de segmentação, foram utilizadas a q-Entropia de Tsallis (6.2.2.1) e a entropia de Shannon Ponderada (6.2.2.2). Como ambas metodologias são generalizações da entropia BGS, através dos resultados foram feitas análises comparativas entre esses três modelos entrópicos.

Na terceira fase, descrita na Seção 6.2.3, foram feitas comparações entre as imagens filtradas, através do cálculo dos índices $PSNR$ (Seção 6.2.3.1) e Q (Seção 6.2.3.2), para análises a respeito da eficiência dos filtros. Também foram feitas comparações entre as imagens segmentadas, através do cálculado dos índices $PSNR$ (Seção 6.2.3.3) e $Kappa$ (Seção 6.2.3.4), para análises da eficiência dos filtros após a aplicação de modelos de segmentação de imagens.

A Figura 28 ilustra um exemplo de uma imagem que recebeu ruído Gaussiano e, em seguida, foi submetida a um filtro q-Gaussiano. A coluna (a) mostra a imagem original *Frog* utilizada como exemplo, a coluna (b) mostra a imagem original após receber ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$, e a coluna (c) mostra a imagem ruídosa após ser submetida a aplicação de um filtro q-Gaussiano bidimensional, com $q = 0{,}1$.

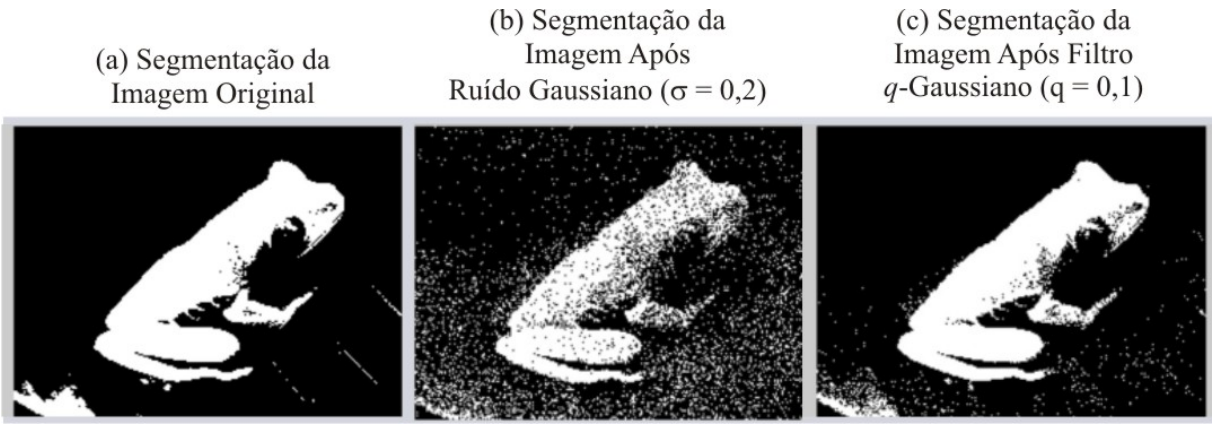
Figura 28 – Exemplo de um resultado obtido com a utilizando de filtro q-Gaussiano.



Fonte: Autor. (a) Imagem original *Frog*, em 256 tons de cinza. (b) Imagem original após a aplicação de ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$. (c) Imagem com ruído apresentada em (b), após a aplicação de um filtro q-Gaussiano bidimensional com $q = 0{,}1$.

Como forma de ilustrar a segunda fase, consideram-se as imagens mostradas na Figura 28. Após a aplicação do ruído Gaussiano sobre a imagem original, foi aplicado um filtro q-Gaussiano, sendo $q = 0{,}1$. Em seguida, foi aplicada a segmentação de imagem baseada em limiarização, sobre a imagem original, a com ruído e a filtrada. A Figura 29 ilustra este exemplo com os resultados obtidos com a segmentação das imagens mostradas na Figura 28.

Figura 29 – Exemplo de resultados obtidos com a segmentação de imagens.

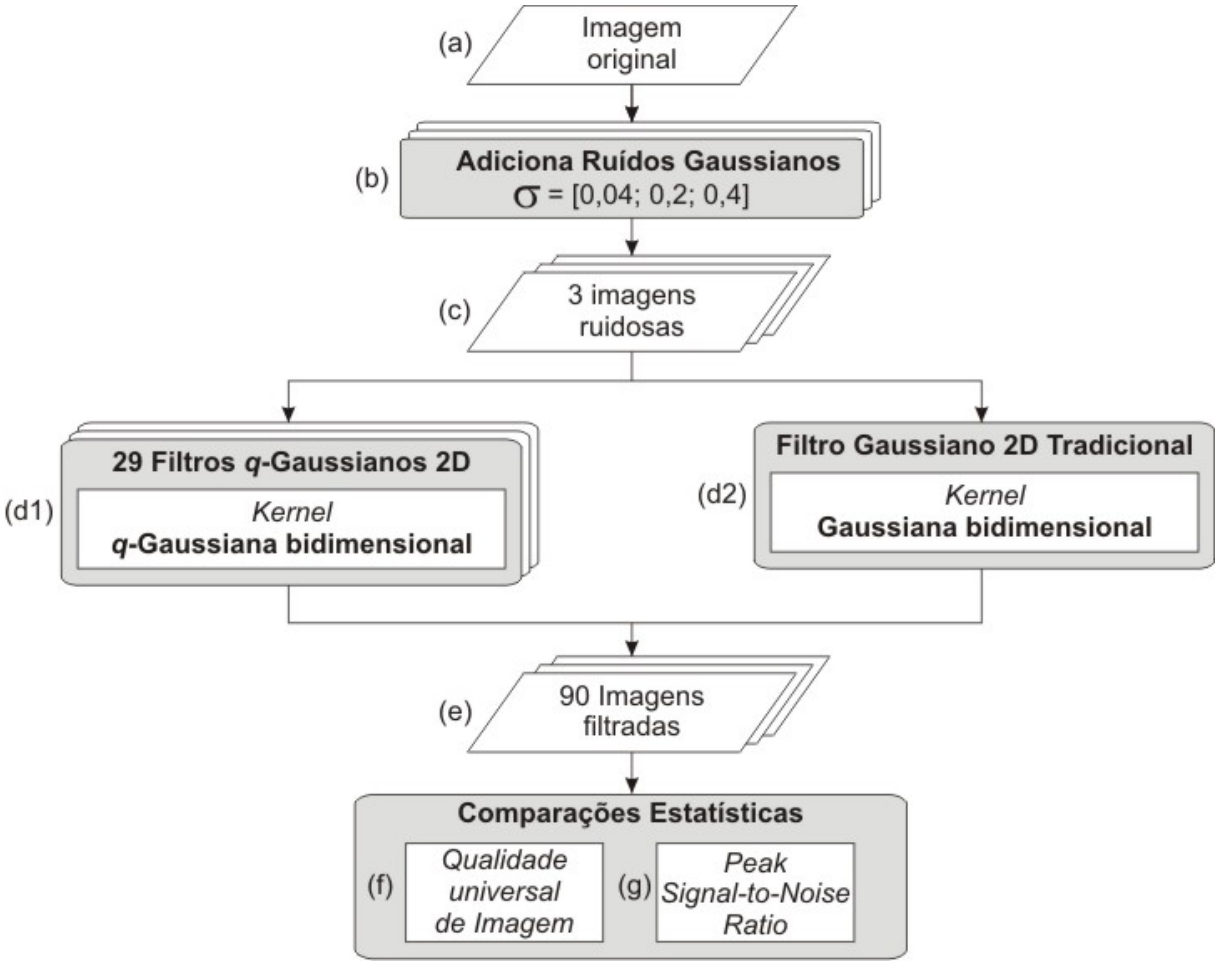


Fonte: Autor. (a) A partir da imagem original *Frog*. (b) A partir da imagem com ruído, que recebeu ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$. (c) A partir da imagem com ruído após a aplicação de um filtro q-Gaussiano bidimensional com $q = 0{,}1$.

6.2.1 Fase da Aplicação dos Filtros *q*-Gaussianos

A Figura 30 ilustra a metodologia aplicada aos experimentos com filtros *q*-Gaussianos bidimencionais, desde a entrada de uma imagem original, a aplicação de ruídos controlados sobre esta imagem, seguida da aplicação de filtros *q*-Gaussianos para a redução desses ruídos. Para comparação dos resultados, também foi utilizado um filtro Gaussiano tradicional. A aferição da qualidade das imagens filtradas foi realizada através dos índices *Peak Signal-to-Noise Ratio* e da qualidade universal de imagem (Q), respectivamente descritos nas Seções 2.9.2 e 2.9.3.

Figura 30 – Metodologia da Fase de Filtragem.



Fonte: Autor.

Uma imagem original, em 256 tons de cinza, representando um sinal original (sem adição de ruídos), conforme mostra a Figura 30(a), recebeu ruídos Gaussianos com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$, resultando em 3 imagens com ruídos, ilustradas na Figura 30 (b). Cada uma destas 3 imagens com ruídos foram utilizadas como sinal de entrada para 29 filtros *q*-Gaussianos bidimensionais, tendo cada filtro um *kernel q*-Gaussiano com um valor de $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, médias $\bar{x} = \bar{y} = 0$ e desvios-padrões $\sigma_x = \sigma_y = 1$, de tamanho 3×3 pixels, conforme indica a Figura 30(d1).

Por outro lado, as mesmas 3 imagens com ruídos foram também utilizadas como sinal de entrada de um filtro Gaussiano, cujo *kernel* possui uma função Gaussiana bidimensional tradicional, também com médias $\bar{x} = \bar{y} = 0$, desvios-padrões $\sigma_x = \sigma_y = 1$ e tamanho 3×3 pixels, indicada na Figura 30(d2).

Considerando os 29 filtros *q*-Gaussianos e o filtro Gaussiano tradicional, foram aplicados 30 filtros sobre cada uma das 3 imagens com ruídos, resultando em um conjunto de 90 imagens filtradas para cada imagem original, conforme indica a metodologia na Figura 30 (e). Sobre as 90 imagens filtradas foram calculados os índices Q e *Peak Sinal-to-Noise Ratio* ($PSNR$), respectivamente indicados na Figura 30(f) e (g).

Neste trabalho utilizou-se a imagem original *Frog*, apresentada na Figura 28, apenas como exemplo de aplicações dos procedimentos adotados para a filtragem. Para as análises realizadas com as metodologias estatísticas e as subsequentes análises de resultados foram utilizadas as 300 imagens da base de *Berkeley*.

Para descrever a aplicação dos filtros *q*-Gaussianos bidimensionais, neste trabalho utilizou-se como exemplo de sinal original a imagem *Frog*, apresentada na Figura 28. A partir dessa imagem aplicou-se o ruído Gaussiano em três diferentes variações de desvio-padrão, sendo $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}04]$, obtendo-se 3 imagens com ruídos, apresentadas na Figura 31.

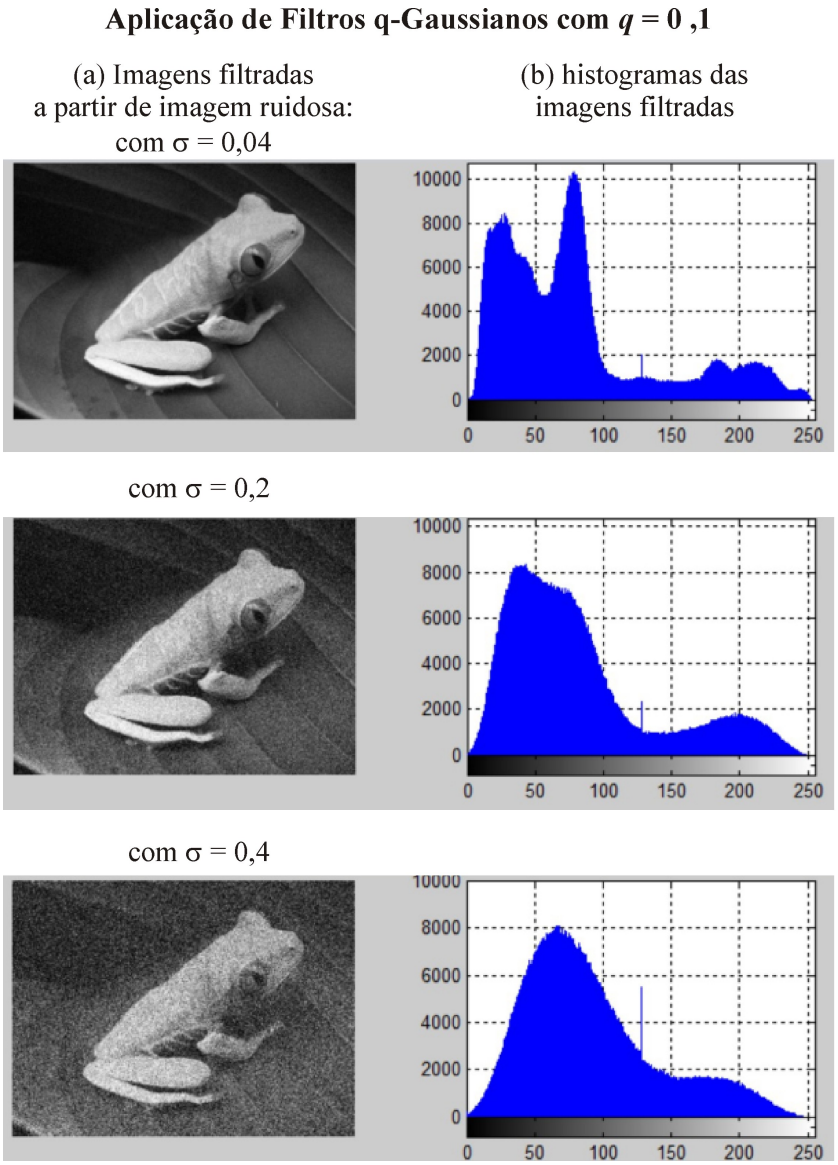
Figura 31 – Exemplos de aplicação de ruídos Gaussianos sobre a imagem original.

Fonte: Autor. A partir das imagens apresentada na Figura 28(a), com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$.

Para ilustrar alguns resultados obtidos a partir dos filtros q-Gaussianos, a Figura 32 apresenta três imagens filtradas por um filtro q-Gaussiano bidimensional com $q = 0{,}1$, exibidas na coluna (a) da Figura 32, juntamente com seus respectivos histogramas mostrados na coluna (b).

A partir das 90 imagens filtradas, foram aplicadas metodologias de segmentação de imagens por limiarização, como a entropia BGS. apresentada na Seção 2.1.2, a q-Entropia de *Tsallis*, apresentada na Seção 2.1.3 e a entropia de Shannon Ponderada, apresentada na Seção 2.1.4. Nas Seção 6.2.1.1 é descrita a etapa da aplicação dos ruídos Gaussianos sobre as imagens da base de *Berkeley*; na Seção 6.2.1.2 são descritas as filtragens realizadas sobre as imagens com ruídos dessa mesma base de *Berkeley*.

Figura 32 – Exemplos de aplicação de filtros q-Gaussianos.



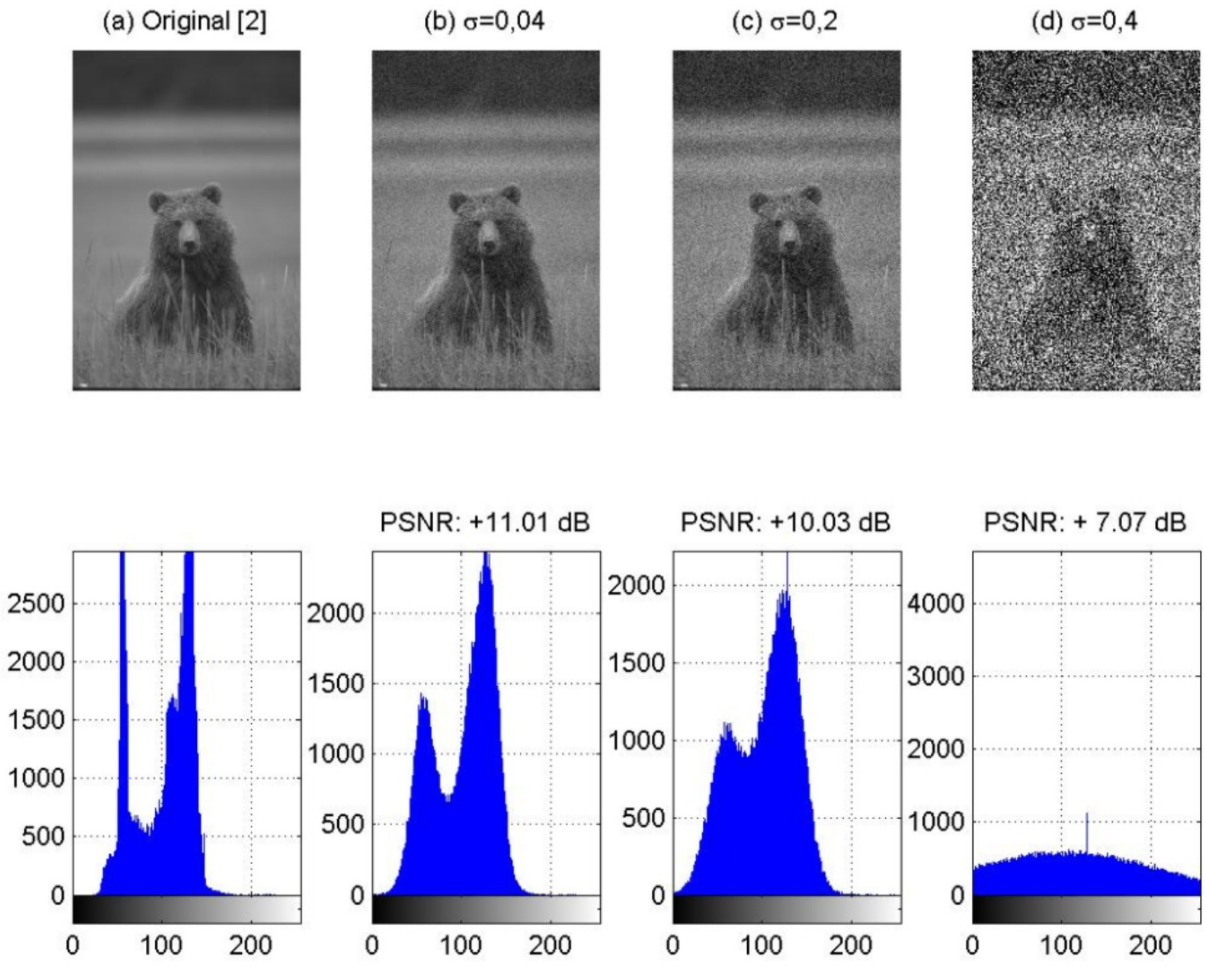
Fonte: Autor. Filtro aplicado sobre as imagens com ruídos da Figura 31.

6.2.1.1 Aplicação dos Ruídos Gaussianos

Para a realização dos experimentos com filtros q-Gaussianos, nesta tese optou-se pela aplicação de ruídos controlados sobre as imagens originais, através da aplicação de ruídos Gaussianos com três diferentes valores de desvio-padrão, sendo $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$ e média 0. Após a aplicações dos ruídos, filtros para a redução dos ruídos foram aplicados e os resultados compa-

rados com as imagens originais. Assim, como uma fase de pré-processamento aos experimentos com filtros, foram aplicados estes três tipos de ruídos Gaussianos em cada uma das 300 imagens da base de *Berkeley*, produzindo, assim, 900 imagens com ruídos. A Figura 33 mostra, como exemplo, a imagem número $[2]$ da base de *Berkeley*, após ter recebido os 3 tipos de ruídos.

Figura 33 – Exemplo de aplicação de ruídos Gaussianos sobre a imagem número $[2]$ da base de *Berkeley*.



Fonte: Autor. σ é valor do desvio-padrão aplicado nos ruídos Gaussianos. Na parte inferior, são exibidos os respectivos histogramas e valores de $PSNR$ calculado entre a imagem com ruído $\times$ imagem original: (a) Imagem original. (b) Ruído com $\sigma = 0{,}04$. (c) Ruído com $\sigma = 0{,}2$. (d) Ruído com $\sigma = 0{,}4$.

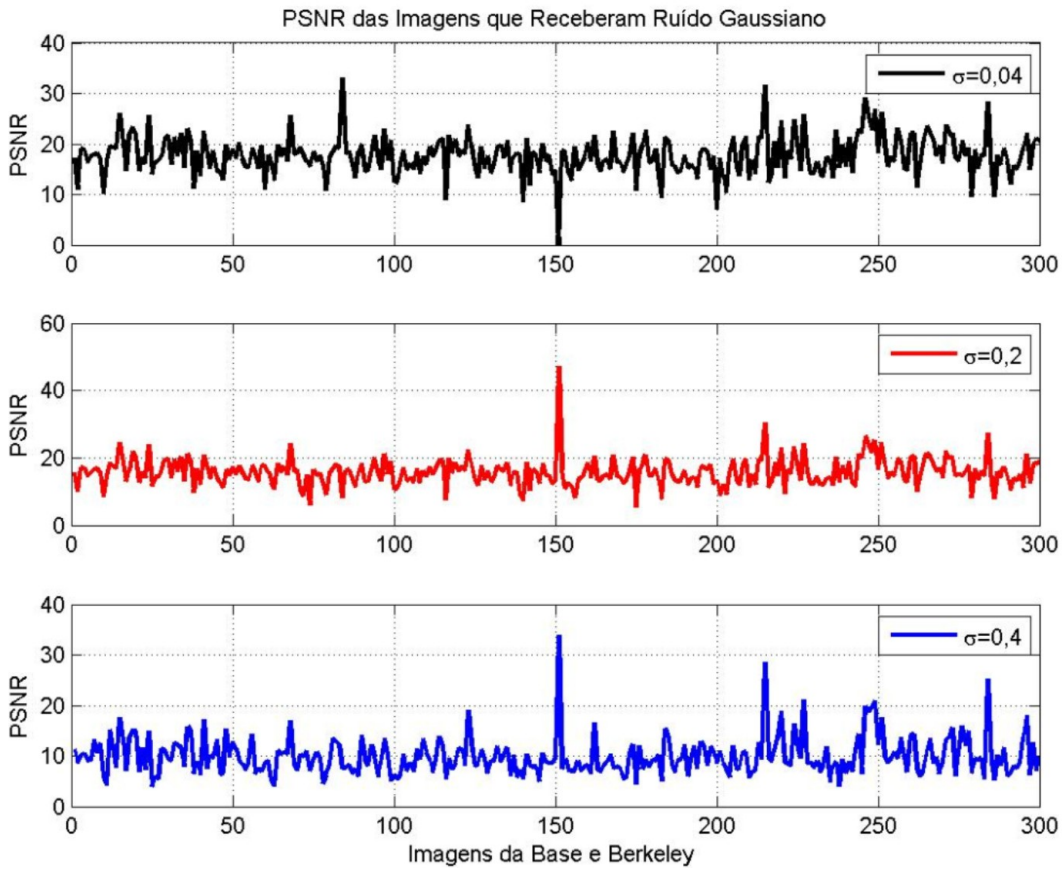
Na Figura 33 observa-se que foi calculado o índice $PSNR$ de cada uma das imagens com ruídos. Este índice, apresentado na Seção 2.9.2, mede a perda de energia entre dois sinais, aqui significando a diferença entre a imagem original e a imagem com ruído. Para o caso de transmissão de imagens por meio físico, por exemplo, considera-se aceitável uma perda de

energia que produza uma medição do $PSNR \geq +20dB$. Nos experimentos desta tese, adotou-se este limiar apenas como ponto de partida para as análises.

Nota-se nos exemplos da Figura 33, que a aplicação de ruídos Gaussianos produziu imagens com ruídos com perdas importantes de energia, sendo medidas com $PSNR < +20dB$, o que justifica a aplicação de filtro para redução de ruídos. No caso da aplicação do ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$, por exemplo, a imagem original foi severamente modificada, pois com $PSNR = +7{,}07dB$ nota-se que as características do histograma da imagem original foram perdidas.

A Figura 34 exibe os valores de $PSNR$ calculados entre cada uma das imagens com ruídos e sua imagem original livre de ruído, separados pelo valor de σ do ruído Gaussiano aplicado.

Figura 34 – Valores de $PSNR$ das imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$.



Fonte: Autor. Valores de $PSNR$ calculados entre a imagem com ruído $\times$ imagem original.

Na Figura 34, pode-se notar que as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$ resultaram em valores de $PSNR$ superiores, se comparados ao $PSNR$ das imagens que receberam $\sigma = [0{,}2; 0{,}4]$, isso se deve pelo fato de terem recebido menor intensidade de ruídos. A média dos valores de $PSNR$ para $\sigma_{(0{,}04)} = +19{,}91dB$, enquanto que $\sigma_{(0{,}2)} = +16{,}67dB$ e $\sigma_{(0{,}4)} = +15{,}73dB$.

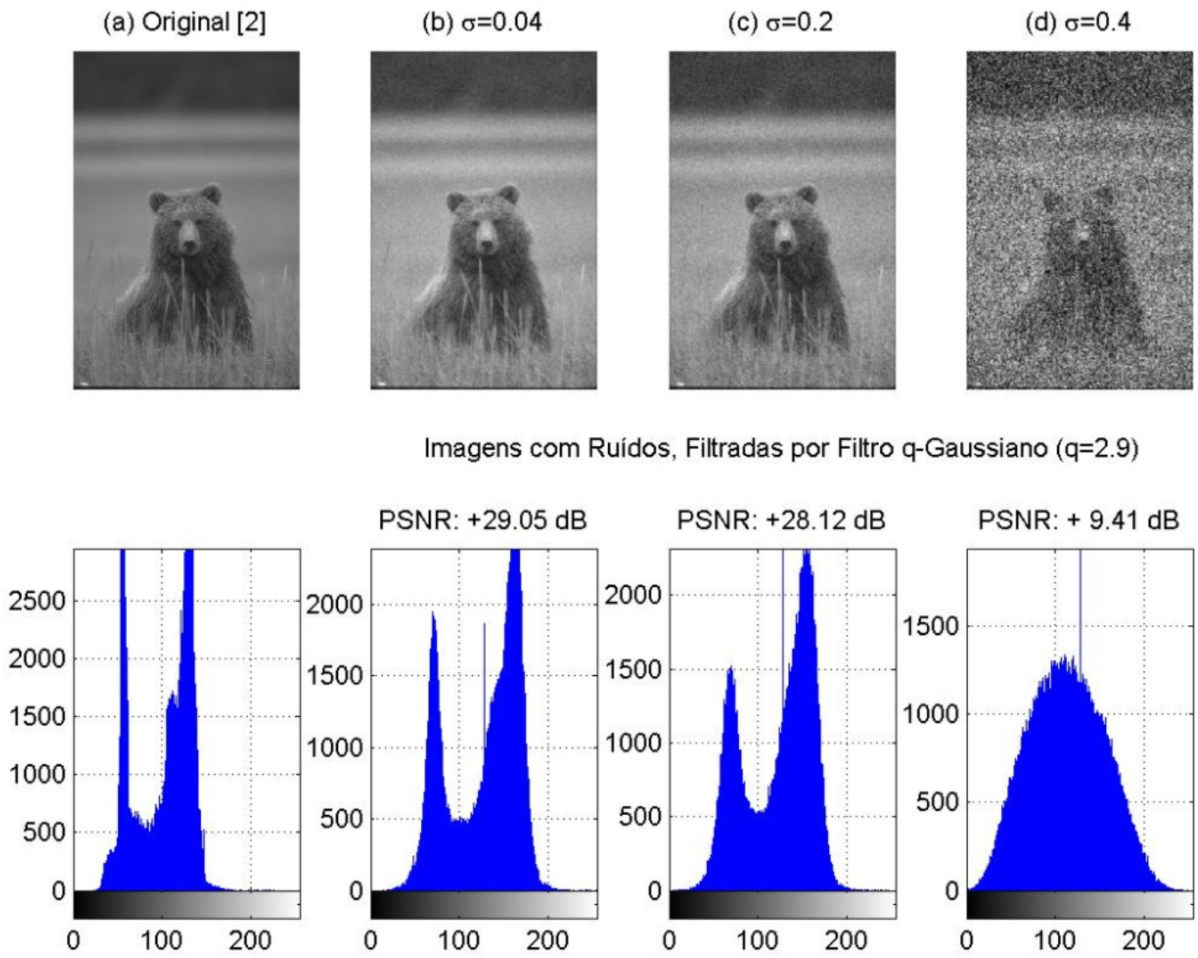
6.2.1.2 Aplicação do Filtro q-*Gaussiano Bidimensional*

Após a aplicação do ruído Gaussiano com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$ sobre as 300 imagens originais da base de *Berkeley*, foram obtidas 900 imagens com ruídos. Nesta etapa dos experimentos, estas 900 imagens foram, então, submetidas a um filtro Gaussiano tradicional, que produziu 900 imagens filtradas, e submetidas também a 29 filtros q-Gaussianos, sendo cada um com um valor diferente para o parâmetro q, sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, o que resultou em mais 26.100 imagens filtradas.

O objetivo destes experimentos é avaliar a eficiência dos filtros q-Gaussianos em comparação ao filtro Gaussiano tradicional, assumindo os índices $PSNR$ e Q como medidas de eficiência, que serão abordadas na Seção 6.2.3.

A Figura 35 mostra exemplos de resultados da aplicação do filtro q-Gaussiano, com $q = 2{,}9$ escolhido ao acaso, sobre imagens com ruídos da Figura 33. As três imagens com ruídos foram filtradas e as respectivas imagens filtradas são apresentadas, juntamente com o histograma das imagens filtradas e com o índice $PSNR$ calculado pela comparação entre a imagem filtrada e a imagem original .

Figura 35 – Exemplo de aplicação de filtro q-Gaussiano (com $q = 2{,}9$) sobre as imagens com ruídos da Figura 33.



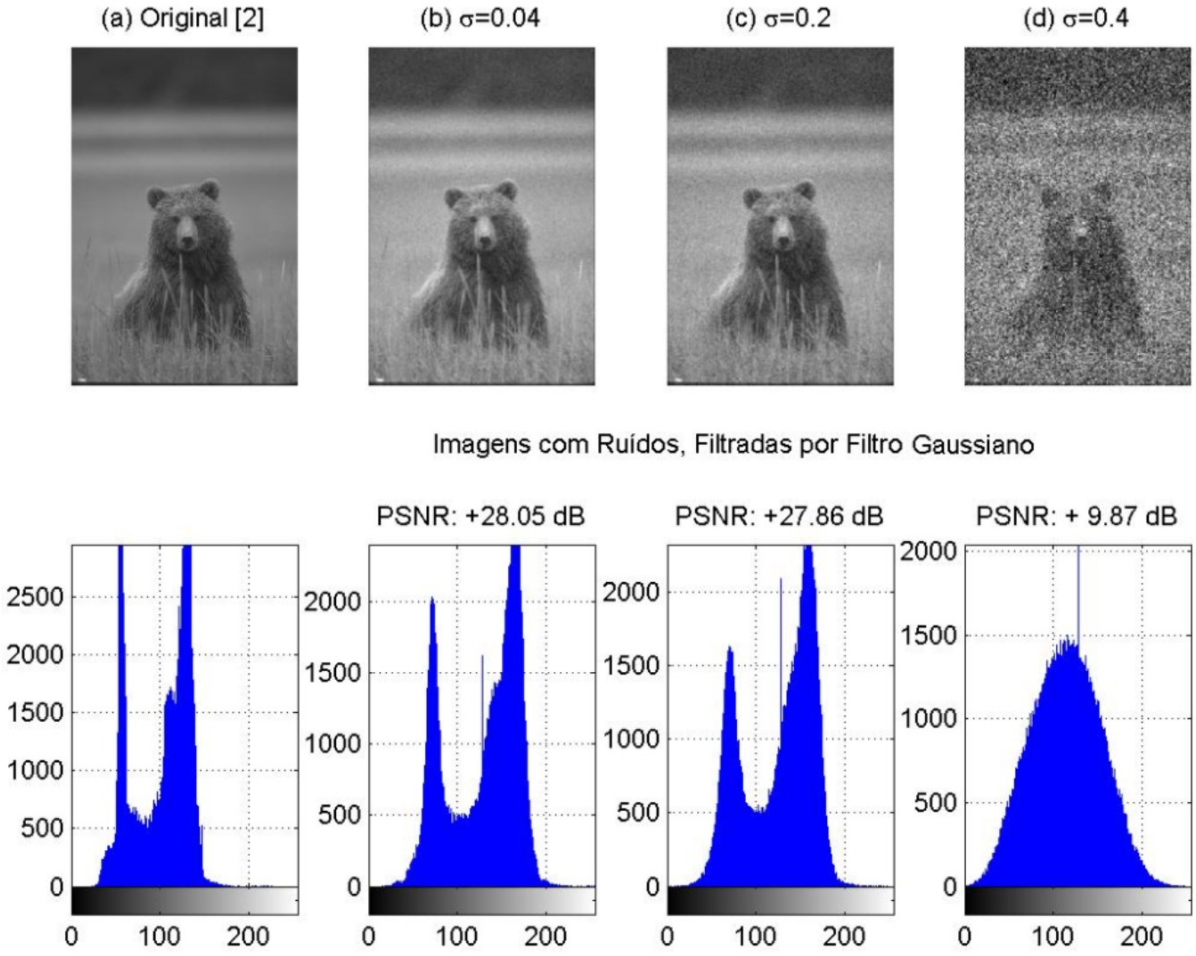
Fonte: Autor. Na parte inferior, são exibidos histogramas com os respectivos valores de $PSNR$ calculado entre a imagem filtrada e a imagem original: (a) Imagem original. (b) Filtrada após receber ruído com $\sigma = 0{,}04$. (c) Filtrada após receber ruído com $\sigma = 0{,}2$. (d) Filtrada após receber ruído com $\sigma = 0{,}4$.

Nas imagens filtradas apresentadas na Figura 35, observa-se que o índice $PSNR$ de cada uma das 3 imagens filtradas é maior do que o $PSNR$ de cada imagem com ruído equivalente, mostradas na Figura 33. A partir desta comparação pode-se afirmar que o filtro q-Gaussiano com $q = 2{,}9$ foi eficiente na redução de ruído Gaussiano destas imagens. Entretanto, na Seção 6.2.3, são apresentados os resultados do cálculo do índice da qualidade universal de imagem (Q), que ofereceu outras medições para a análise da eficiência do filtro aplicado.

Para comparar os resultados obtidos com os filtros q-Gaussianos, todas as imagens com ruídos foram também filtradas por um filtro Gaussiano tradicional. A Figura 36 mostra os

resultados obtidos com a aplicação do filtro Gaussiano tradicional sobre as mesmas imagens com ruídos apresentadas na Figura 33.

Figura 36 – Exemplo de aplicação de filtro Gaussiano tradicional sobre as imagens com ruídos apresentadas na Figura 33.



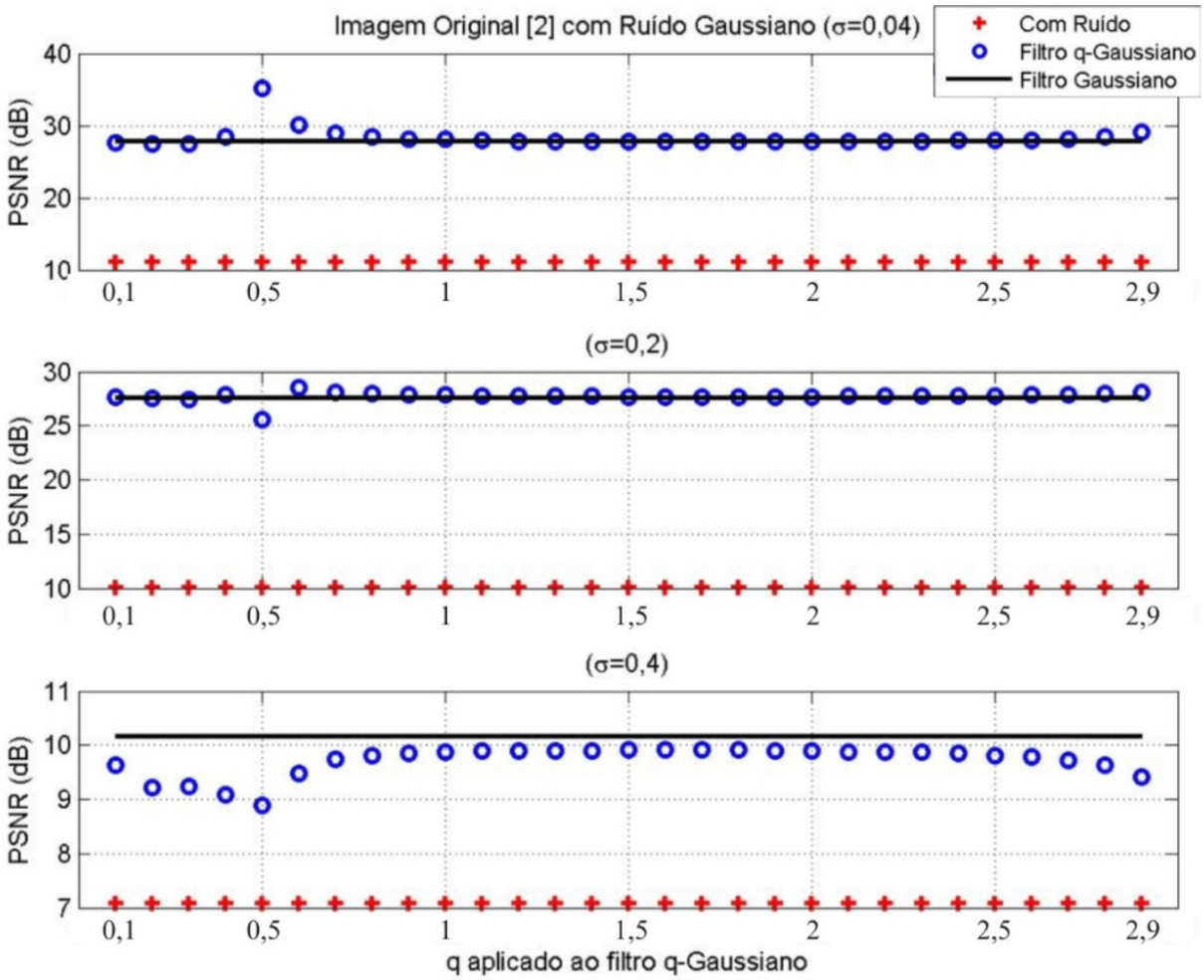
Fonte: Autor. Na parte inferior, são exibidos os histogramas com os respectivos valores de $PSNR$: (a) Imagem original. (b) Filtrada após receber ruído com $\sigma = 0{,}04$. (c) Filtrada após receber ruído com $\sigma = 0{,}2$. (d) Filtrada após receber ruído com $\sigma = 0{,}4$.

Pode-se observar na Figura 36 que o índice $PSNR$ da cada uma das 3 imagens filtradas é maior do que o $PSNR$ de cada imagem com ruído equivalente, mostrada na Figura 33. Com esta verificação, pode-se afirmar que o filtro Gaussiano tradicional também foi eficiente na redução de ruídos Gaussianos. Mas pode-se, também, estabelecer uma comparação direta entre a energia recuperada pelo filtro Gaussiano tradicional e pelos filtros q-Gaussianos. Este ganho de energia representa a redução de ruídos.

Nestes exemplos aqui apresentados, nota-se que para a imagem que recebeu ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$ o filtro Gaussiano foi mais eficiente na redução de ruídos, se observados os valores de $PSNR$. Entretanto o filtro q-Gaussiano com $q = 2{,}9$ foi mais eficiente na redução dos ruídos Gaussianos produzidos com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2]$.

A Figura 37 apresenta três gráficos com os valores de $PSNR$ obtidos a partir das filtragens das imagens com ruídos apresentadas na Figura 33. Em cada gráfico há a representação do índice $PSNR$ da imagem com ruído e da filtragem por filtro Gaussiano tradicional, em comparação com os valores de $PSNR$ das imagens filtradas por filtros q-Gaussianos, com $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$. Em todos os casos, o índice $PSNR$ foi calculado entre a imagem com ruído e a imagem filtrada.

Figura 37 – Valores do índice $PSNR$ obtidos pela comparação das imagens com ruídos da Figura 33 e suas respectivas imagens filtradas.



Fonte: Autor.

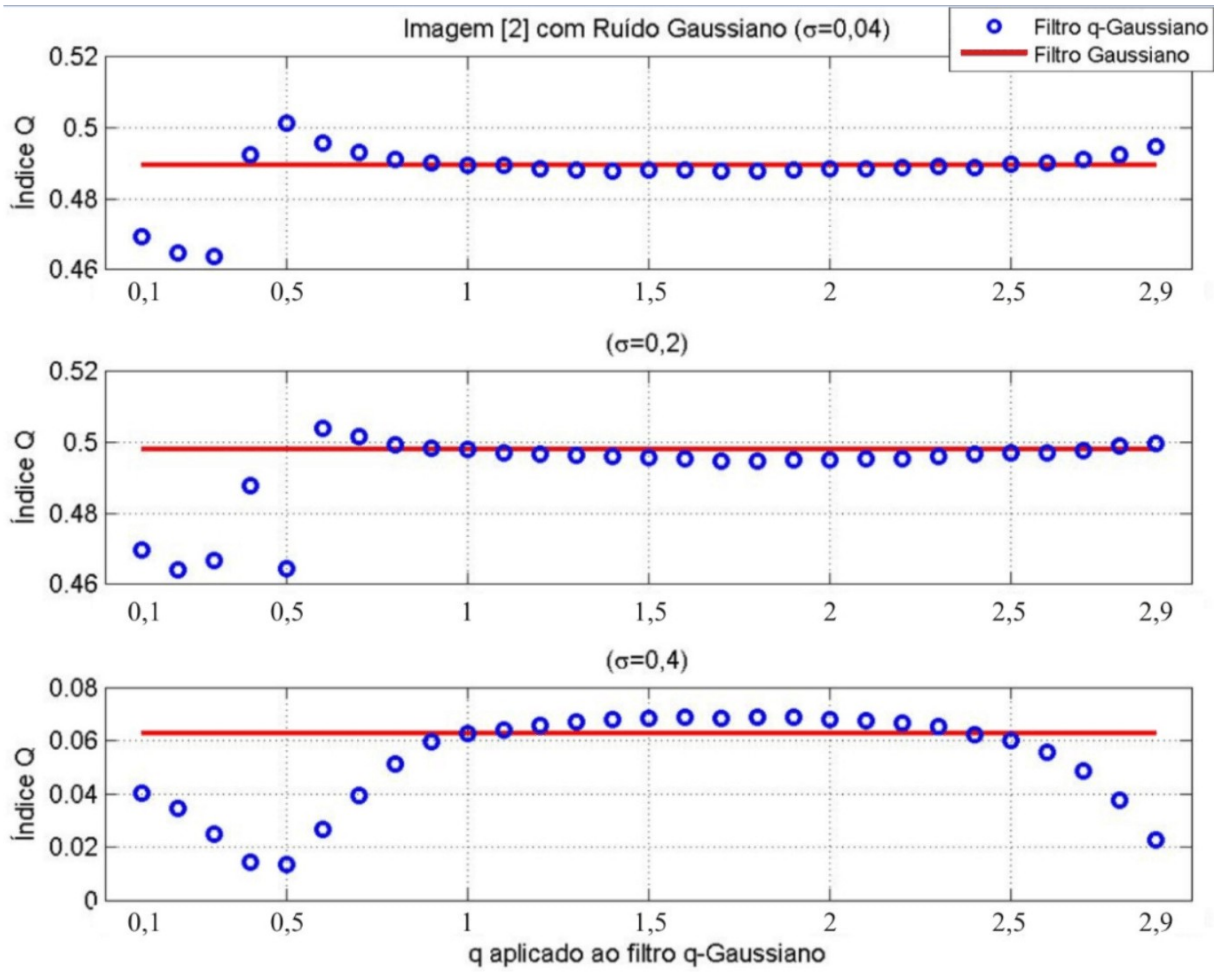
Observando-se os valores de $PSNR$ obtidos com as filtragens do exemplo apresentado pela Figura 37, nota-se que, nestes casos, a eficiência dos filtros q-Gaussianos medida pelo índice $PSNR$, iguala-se ao filtro Gaussiano tradicional na maioria das imagens filtradas deste exemplo, a partir de imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2]$. Entretanto, no exemplo analisado, para a imagem que recebeu mais ruídos, ou seja com $\sigma = 0{,}4$, os filtros Gaussianos apresentaram mais eficiência na redução de ruídos, se comparados aos filtros q-Gaussianos.

Para analisar a qualidade das imagens filtradas, foi utilizado nesta tese o índice universal de qualidade de imagem (Q), apresentado na Seção 2.9.3, sobre todas as imagens filtradas em comparação com as imagens originais. O índice Q é calculado a partir do cálculo da distorção de luminância (Ld), da distorção do contraste (Cd) e da perda de correlação linear (Cl).

A Figura 38 apresenta três gráficos com os valores de Q obtidos a partir das filtragens das imagens com ruídos apresentadas na Figura 33. Em cada gráfico há a representação do índice Q das imagens filtradas por filtro Gaussiano tradicional, em comparação com os valores de Q das imagens filtradas por filtros q-Gaussianos, com $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$. Em todos os casos, o índice Q foi calculado entre a imagem com ruído e a imagem filtrada.

Observando-se os valores de Q obtidos com as filtragens, conforme apresentado na Figura 38, nota-se que a eficiência dos filtros q-Gaussianos, medido pelo índice Q, somente se igualou ao filtro Gaussiano tradicional quando $q = 1$ nos filtros q-Gaussianos. Entretanto, os filtros q-Gaussianos obtiveram melhor índice Q, para alguns valores do parâmetro q, se comparados com o filtro Gaussiano tradicional.

Figura 38 – Valores do índice Q obtidos pela comparação da imagem original apresentada na Figura 33(a) e suas respectivas imagens filtradas após receberem ruídos Gaussianos.



Fonte: Autor.

A Seção 6.2.3 apresenta as análises a respeito da qualidade das imagens filtradas e da eficiência dos filtros q-Gaussianos em comparação ao filtro Gaussiano tradicional, para todas as imagens da base de *Berkeley*. A Seção 6.2.3.1 apresenta as análises feitas a partir do índice $PSNR$ e a Seção 6.2.3.2 apresenta as análises realizadas após o cálculo do índice Q.

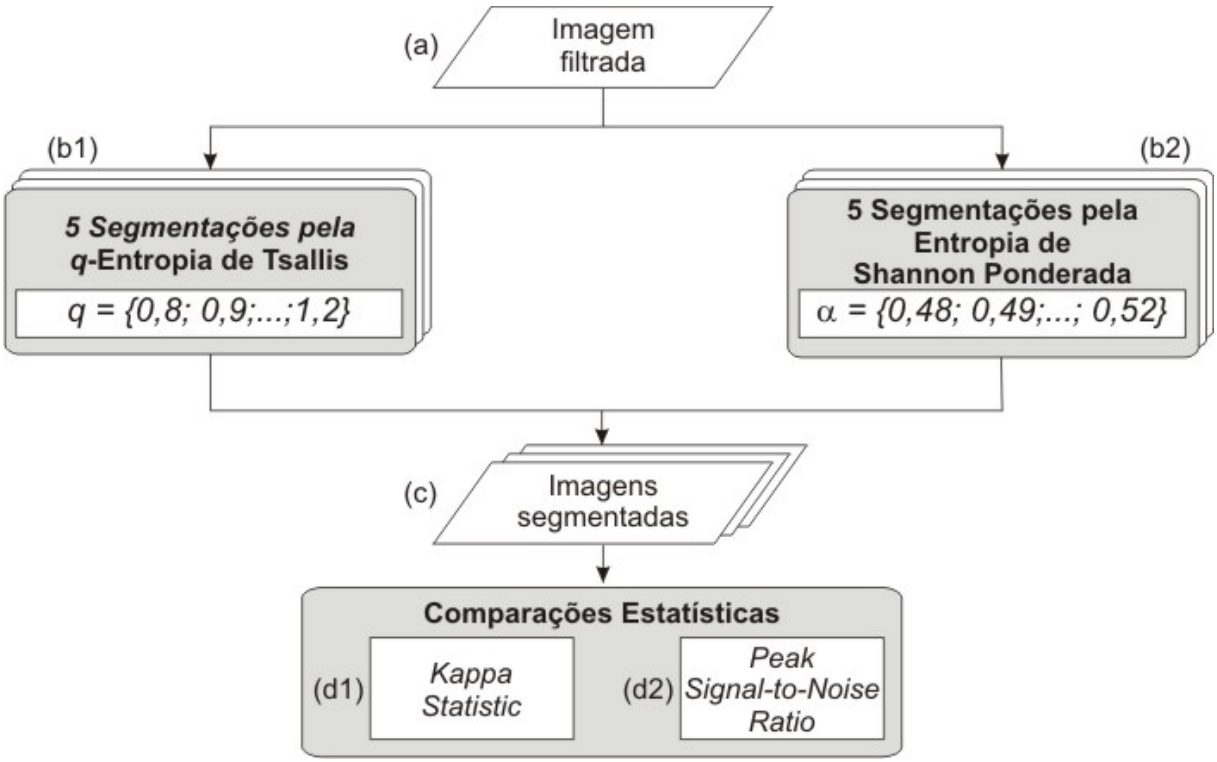
6.2.2 Fase da Segmentação das Imagens Filtradas

Após a filtragem das 900 imagens com ruídos, foram obtidas 27.000 imagens filtradas, sendo 900 pelo filtro Gaussiano tradicional e 26.100 pelos filtros q-Gaussianos com valores de $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$. A partir das imagens filtradas foram realizadas segmentações utilizando modelos entrópicos, baseados em limiarização.

O objetivo de segmentar as imagens filtradas é comparar a eficiência dos filtros q-Gaussianos em relação ao filtro Gaussiano através da análise da qualidade das segmentações produzidas pelas imagens filtradas, em comparação com a segmentação das imagens originais.

A Figura 39 exibe a metodologia aplicada aos experimentos nesta fase de segmentação das imagens filtradas.

Figura 39 – Metodologia aplicada aos experimentos com filtros q-Gaussianos bidimensionais, na fase de segmentação das imagens filtradas.



Fonte: Autor.

O esquema exibido na Figura 39 mostra que, a partir de uma imagem filtrada, foram realizadas 5 segmentações pela q-Entropia com variações no valor de $q = \{0{,}8; 0{,}9; ...; 1{,}2\}$, e ou-

tras 5 segmentações pela entropia de Shannon Ponderada com variações de $\alpha = \{0{,}48; 0{,}49; ...; 0{,}52\}$, respectivamente indicadas na Figura 39 (b1) e (b2), totalizando 10 segmentações de cada imagem filtrada.

Considerando-se que na fase de aplicação dos filtros foram obtidas 27.000 imagens filtradas, após esta fase de segmentação foram obtidas um total de 270.000 imagens segmentadas, sendo 135.000 pela q-Entropia e outras 135.000 pela entropia de Shannon Ponderada.

6.2.2.1 Segmentação pela q*-Entropia de Tsallis*

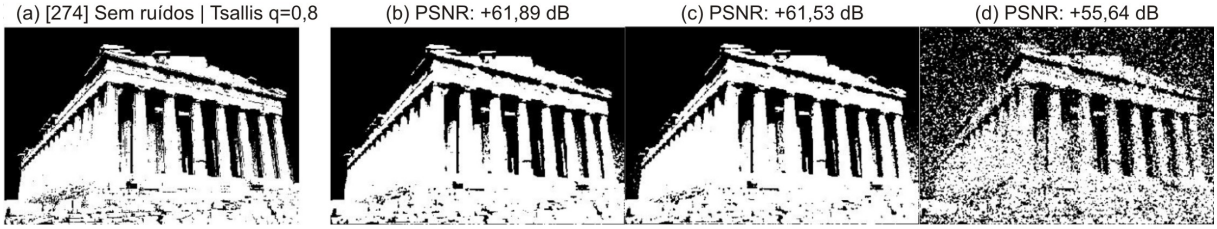
Todas as 27.000 imagens filtradas foram segmentadas pela q-Entropia de *Tsallis*, apresentada na Seção 2.1.3. Foi definido neste trabalho valores de $q = \{0{,}8; 0{,}9; ...; 1{,}2\}$ nas segmentações pela q-Entropia de *Tsallis*. Assim, foram obtidas 5 segmentações pela q-entropia para cada uma das 27.000 imagem filtradas, totalizando 135.000 segmentações pela q-Entropia.

As Figuras 41, 42, 43, 44 e 45 exibem exemplos da segmentação de uma imagem da base de *Berkeley*, mostrada na Figura 40. A segmentação foi realizada pela q-Entropia de *Tsallis*, com $q = \{0{,}8; 0{,}9; ...; 1{,}2\}$. Na coluna (a) destas figuras é exibida a segmentação da imagem original. Nas colunas (b), (c) e (d) são exibidas segmentações de imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$ e que, em seguida, foram filtradas por um filtro q-Gaussiano com $q = 1{,}1$, escolhido ao acaso para este exemplo.

Figura 40 – Imagem número $[274]$ da base de *Berkeley*.

Fonte: Autor. Utilizada como imagem original em 256 tons de cinza nos experimentos de segmentação de imagens filtradas.

Figura 41 – Exemplo da segmentação pela q-Entropia com $q = 0{,}8$.



Fonte: Autor. (a) Imagem sem ruídos. (b) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}04$. (c) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}2$. (d) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}4$.

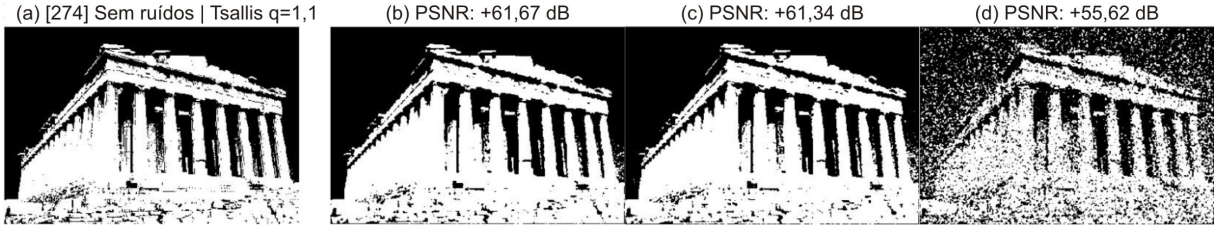
Figura 42 – Exemplo da segmentação pela q-Entropia com $q = 0{,}9$.

Fonte: Autor. (a) Imagem sem ruídos. (b) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}04$. (c) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}2$. (d) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}4$.

Figura 43 – Exemplo da segmentação pela q-Entropia com $q = 1{,}0$.

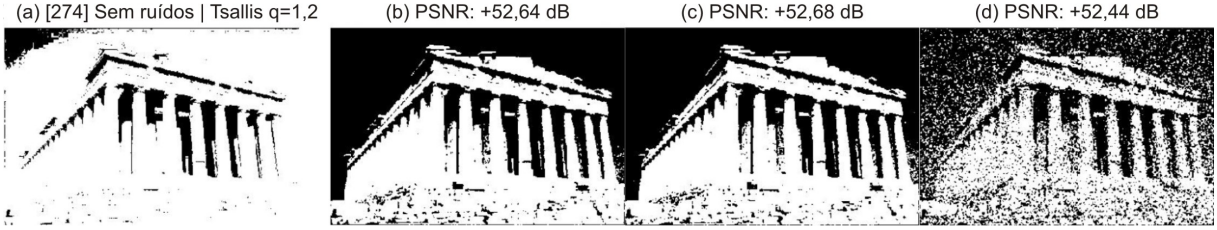
Fonte: Autor. (a) Imagem sem ruídos. (b) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}04$. (c) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}2$. (d) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}4$.

Figura 44 – Exemplo da segmentação pela q-Entropia com $q = 1{,}1$.



Fonte: Autor. (a) Imagem sem ruídos. (b) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}04$. (c) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}2$. (d) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}4$.

Figura 45 – Exemplo da segmentação pela q-Entropia com $q = 1{,}2$



Fonte: Autor. (a) Imagem sem ruídos. (b) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}04$. (c) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}2$. (d) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}4$.

Pode-se observar nas imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$, exibidas na coluna (b) das Figuras 41, 42, 43, 44 e 45, que a entropia de Tsallis com $q = 0{,}8$ produziu o maior índice com $PSNR = +61{,}89dB$.

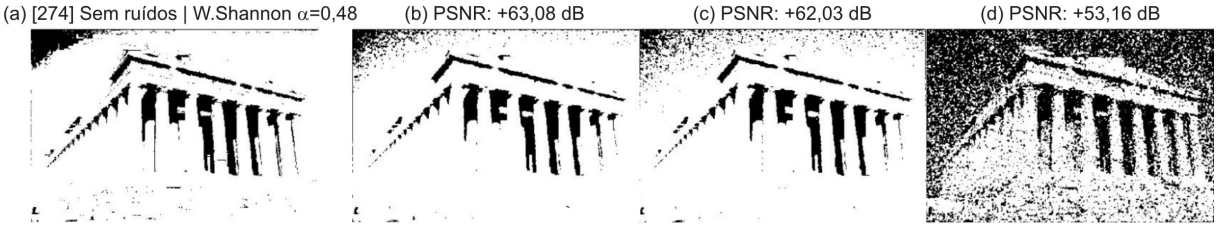
6.2.2.2 Segmentação pela Entropia de Shannon Ponderada

Todas as imagens filtradas foram também segmentadas pela entropia de Shannon Ponderada, apresentada na Seção 2.1.4. Neste trabalho, definiu-se valores de $\alpha = \{0{,}48; 0{,}49; ...; 0{,}52\}$ nas segmentações pela entropia de Shannon Pondrada. Portanto, foram obtidas 5 segmentações para cada uma das 27.000 imagem filtradas, totalizando 135.000 segmentações pela entropia de Shannon Ponderada.

As Figuras 46, 47, 48, 49 e 50 exibem exemplos da segmentação da imagem da base de *Berkeley* mostrada na Figura 40, realizada pela entropia de Shannon Ponderada, com $\alpha =$

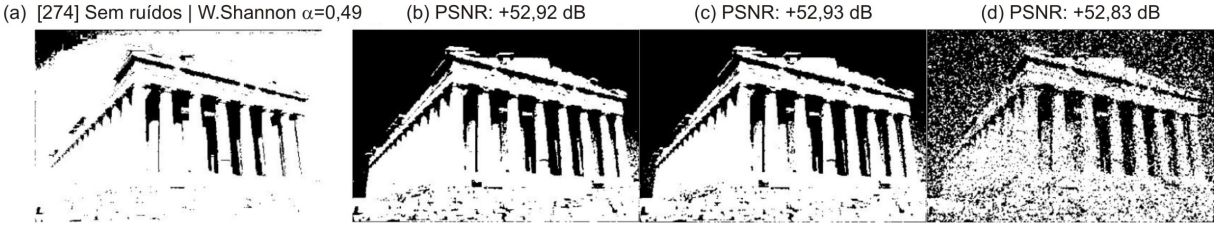
$\{0{,}48; 0{,}49; ...; 0{,}52\}$. Na coluna (a) destas figuras é exibida a segmentação da imagem original sem ruídos. Nas colunas (b), (c) e (d) são exibidas segmentações de imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$ e que, em seguida, foram filtradas por um filtro q-Gaussiano com $q = 0{,}9$, escolhido ao acaso.

Figura 46 – Exemplo da segmentação pela entropia de Shannon Pondrada com $\alpha = 0{,}48$.



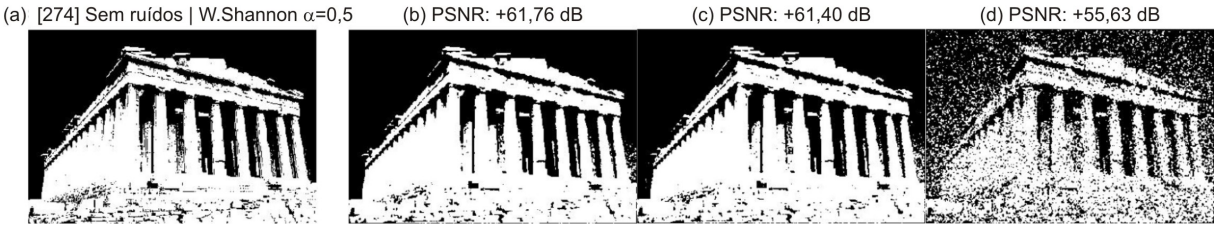
Fonte: Autor. (a) Imagem original. (b) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}04$. (c) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}2$. (d) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}4$.

Figura 47 – Exemplo da segmentação pela entropia de Shannon Pondrada com $\alpha = 0{,}49$.



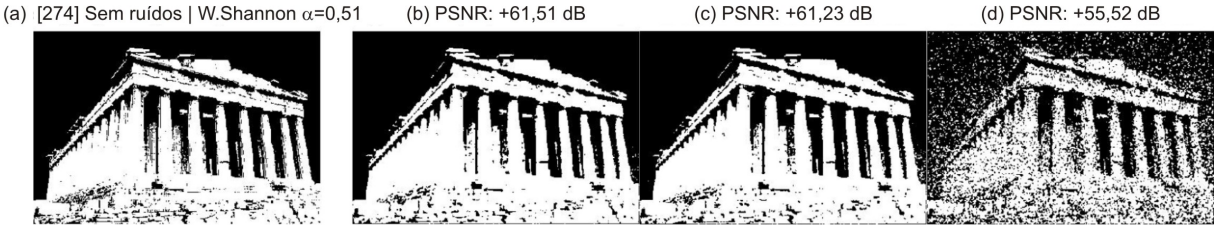
Fonte: Autor. (a) Imagem sem ruídos. (b) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}04$. (c) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}2$. (d) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}4$.

Figura 48 – Exemplo da segmentação pela entropia de Shannon Pondrada com $\alpha = 0{,}5$.



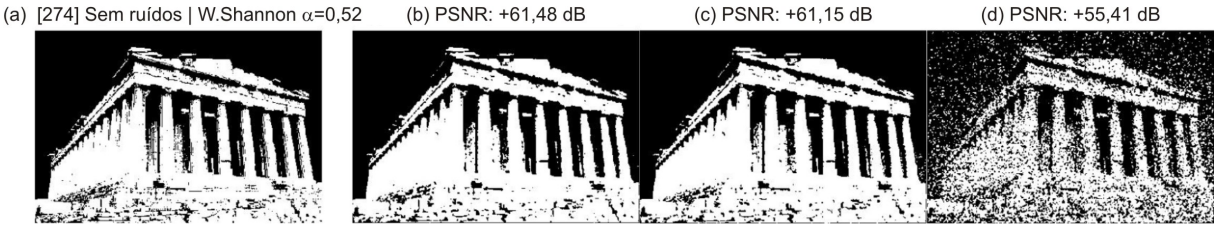
Fonte: Autor. (a) Imagem sem ruídos. (b) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}04$. (c) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}2$. (d) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}4$.

Figura 49 – Exemplo da segmentação pela entropia de Shannon Pondrada com $\alpha = 0{,}51$.



Fonte: Autor. (a) Imagem sem ruídos. (b) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}04$. (c) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}2$. (d) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}4$.

Figura 50 – Exemplo da segmentação pela entropia de Shannon Pondrada com $\alpha = 0{,}52$.



Fonte: Autor. (a) Imagem sem ruídos. (b) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}04$. (c) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}2$. (d) Filtrada após ruído $\sigma = 0{,}4$.

Pode-se observar que, nas Figuras 46, 47, 48, 49 e 50, houve alteração no índice $PSNR$ entre as imagens, não apenas pela diferença do valor de σ na aplicação do ruído Gaussiano, mas também pela variação do parâmetro α da entropia de Shannon Ponderada. O valor do índice $PSNR$ foi calculado entre a segmentação da imagem original e as segmentações feitas a partir das imagens que receberam ruídos Gaussianos filtradas por um filtro q-Gaussiano.

Nota-se, por exemplo, que ao observar as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$, exibidas na coluna (b) das Figuras 46, 47, 48, 49 e 50, a entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = 0{,}48$ produziu uma segmentação com $PSNR = +63{,}08dB$, sendo este o maior índice observado para este grupo de imagens, incluindo aquelas segmentadas pela q-Entropia. Entretanto, para o grupo de imagens que recebeu o ruído Gaussiano com $\sigma = [0{,}2; 0{,}4]$, os maiores valores de $PSNR$ foram obtidos com a segmentação pela q-Entropia com $q = 0{,}9$, conforme mostra a Figura 42(c) e (d).

6.2.3 Análises Comparativas

A partir das 900 imagens com ruídos, sendo 300 com ruído Gaussiano $\sigma = 0{,}04$, 300 com $\sigma = 0{,}2$ e outras 300 com $\sigma = 0{,}4$, foi aplicado 1 filtro Gaussiano tradicional e 29 filtros q-Gaussianos com variações de $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$. Portanto, foram obtidas 27.000 imagens filtradas, que foram analisadas através do cálculo do Índice de Qualidade Universal de Imagens (Q) e do cálculo do *Peak Signal-to-Noise Ratio* $(PSNR)$. O objetivo destas análises foi identificar valores de q utilizados nos filtros q-Gaussianos que foram mais eficientes na redução de ruídos, se comparados ao filtro Gaussiano tradicional. Para determinar a eficiência, comparam-se as imagens filtradas $\times$ imagens originais.

Para o índice $PSNR$, o cálculo foi realizado entre as imagens com ruídos $\times$ imagem original e comparadas com o $PSNR$ entre as imagens filtradas $\times$ imagem original. Os resultados são descritos na Seção 6.2.3.1.

No caso do índice Q, o cálculo foi realizado entre as imagens filtradas $\times$ imagem original e as comparações foram feitas entre os valores do índice Q obtidos pelos filtros q-Gaussianos $\times$ filtro Gaussiano tradicional. Os resultados estão descritos na Seção 6.2.3.2.

A partir das 27.000 imagens filtradas foram realizadas segmentações através da q-Entropia com valores de $q = [0{,}8; 0{,}9; 1{,}0; 1{,}1; 1{,}2]$, e também através da entropia de Shannon Ponderada com valores de $\alpha = [0{,}48; 0{,}49; 0{,}50; 0{,}51; 0{,}52]$. Portanto, foram obtidas 135.000 segmentações pela q-Entropia e outras 135.000 segmentações pela entropia de Shannon Ponderada, totalizando 270.000 segmentações das imagens filtradas, além das 300 segmentações das imagens originais, livres de ruídos. O objetivo de analisar as imagens filtradas segmentadas é identificar valores de q para os filtros q-Gaussianos que tenham produzido imagens filtradas segmentadas que sejam mais semelhantes às imagens originais segmentadas. Com este experimentos também foi possível observar qual modelo entrópico de segmentação de imagem produziu as melhores segmentações, dentro das restrições dos valores de q e de α impostas a cada modelo.

Para medir a semelhança entre as imagens segmentadas, foram utilizados índices $Kappa$ e $PSNR$ sobre as imagens segmentadas. As comparações foram feitas entre as imagens filtradas segmentadas $\times$ imagens originais segmentadas, pela q-Entropia e entropia de Shannon Ponderada. Os resultados são apresentados nas Seções 6.2.3.4 e 6.2.3.3, respectivamente.

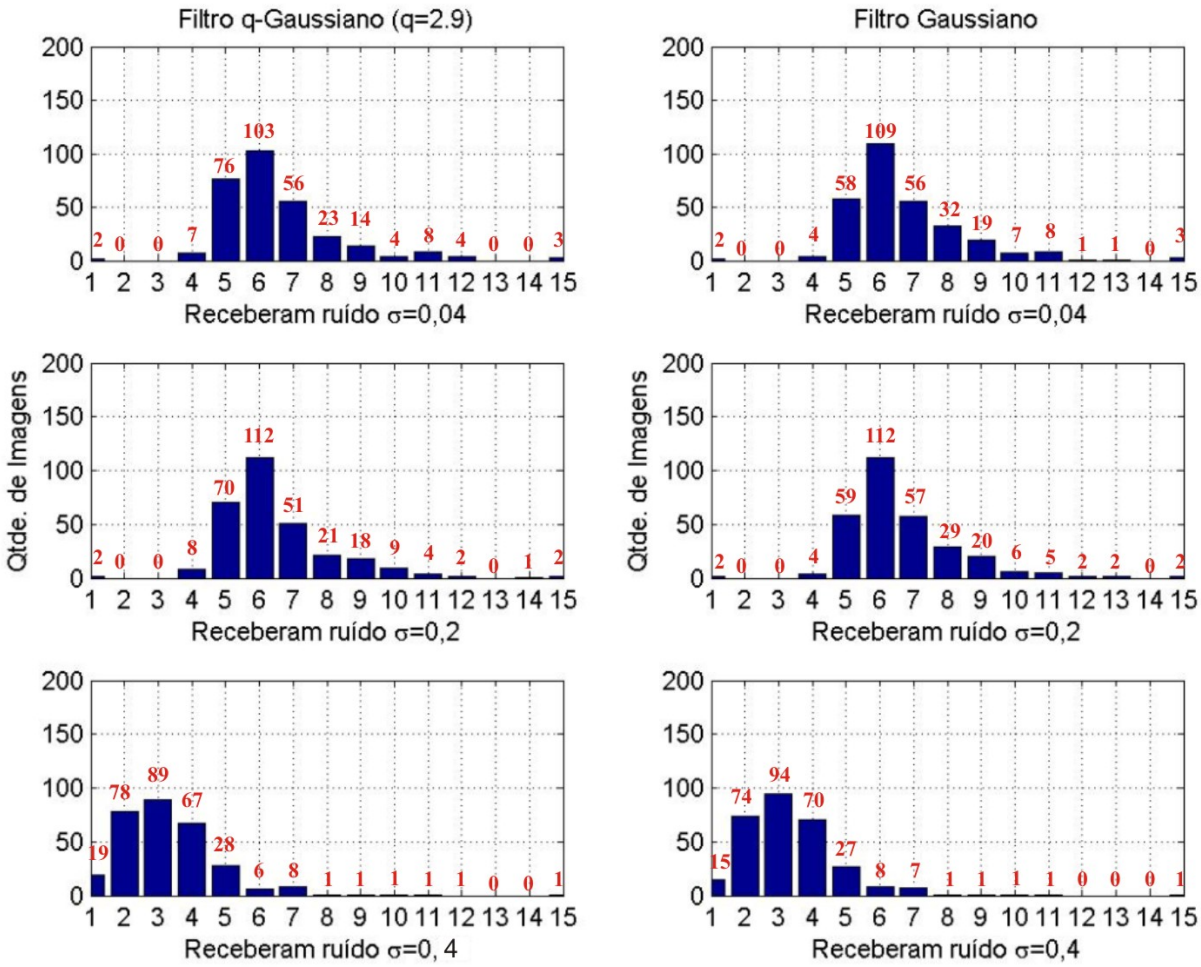
6.2.3.1 Análise do Índice $PSNR$ das Imagens Filtradas

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos através do cálculo do índice $PSNR$, calculado entre as imagens com ruídos $\times$ imagem original, e comparadas com o $PSNR$ obtido entre as imagens filtradas $\times$ imagem original. Em todas as análises foram separados os resultados em 3 grupos, representados pelo valor do σ utilizado na aplicação dos ruídos Gaussianos na fase que precedeu a aplicação dos filtros, sendo $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$.

A Figura 51 mostra histogramas que indicam as quantidades de imagens filtradas agrupadas em 15 entradas, considerando os valores do índice $PSNR$ das 300 imagens da base de *Berkeley*, calculado através da comparação entre as imagens com ruídos $\times$ imagens originais. Nota-se que as imagens foram agrupadas pelo valor do σ do ruído Gaussiano recibido antes da filtragem.

Cada uma das 15 entradas dos histogramas da Figura 51 representam um intervalo de valores de $PSNR$ das imagens filtradas, sendo ordenados de 1 a 15, considerando os menores valores de $PSNR$ na entrada 1 e os maiores valores na entrada 15.

Figura 51 – Quantidade de imagens agrupadas em 15 entradas, considerando-se os valores de $PSNR$ das 300 imagens da base de *Berkeley*.



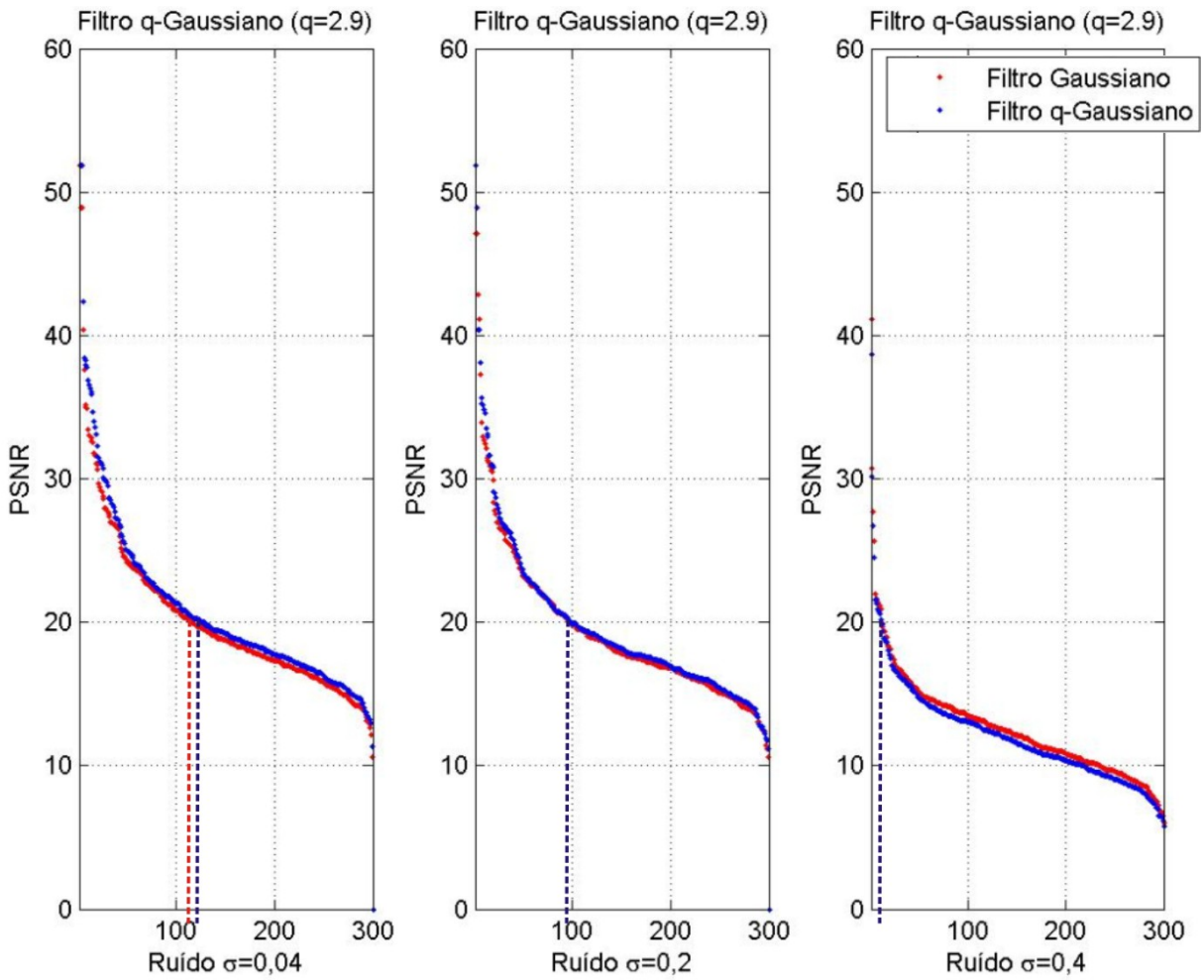
Fonte: Autor. (esquerda): filtradas por um filtro q-Gaussiano com $q = 2{,}9$. (direita): filtradas pro filtro Gaussiano tradicional.

Tomando-se como exemplo as imagens filtradas que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$, considerando-se apenas as quantidades em cada entrada, nota-se que, somando-se as quantidades a partir do entrada 6, tem-se o total de 215 imagens filtradas pelo filtro q-Gaussiano (com $q = 2{,}9$) contra 236 imagens filtradas pelo filtro Gaussiano tradicional. Entretanto, essa comparação não é conclusiva, pois, em cada histograma os valores centrais de cada entrada variam de acordo com o menor valor de $PSNR$ e o maior valor de $PSNR$. Mantendo-se no mesmo exemplo, o valor central da entrada 6 para o filtro q-Gaussiano é $PSNR = +16{,}1718dB$, enquanto que para o filtro Gaussiano tradicional é $PSNR = +17{,}9213dB$. Considerando-se, ainda, que os maiores valores de $PSNR$ indicam menores ruídos, agora pode-se concluir que, para este exemplo, o filtro Gaussiano foi mais eficiente do que o filtro

q-Gaussiano, pois além de possuir maiores quantidades de imagens filtradas em relação àquelas indicadas para o filtro q-Gaussiano (com $q = 2{,}9$), também os valores centrais de cada entrada, medidos em $PSNR$, são maiores, portanto melhores.

Tomando-se os valores de $PSNR \times 300$ imagens, pode-se representar como uma matriz bidimensional, aqui denotada por $psnr(x,y)$, onde x representa as 300 imagens da base de *Berkeley* e y os respectivos valores do índice $PSNR$. A partir dos valores de $PSNR$ armazenados na matriz $psnr(x,y)$, separou-se os resultados pelo valor de σ utilizados na fase de aplicação dos ruídos Gaussianos sobre as imagens originais, sendo $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}04]$. Em seguida, os valores de $PSNR$, representados pelo valor de y na matriz $psnr(x,y)$, foram classificados em ordem decrescente de valores, e os resultados foram exibidos na Figura 52.

Figura 52 – Valores dos índices $PSNR$ classificados em ordem decrescente, referentes às 300 imagens da base de *Berkeley*, filtradas por um filtro q-Gaussiano com $q = 2{,}9$.

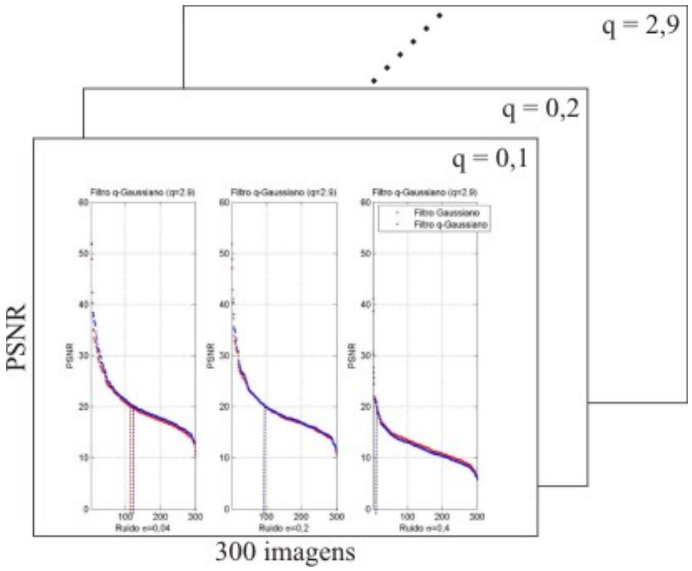


Fonte: Autor. As linhas verticais indicam as quantidades de imagens existentes onde o limiar $PSNR = +20dB$.

A partir dos valores de $PSNR$ calculados sobre imagens filtrados mostradas no exemplo da Figura 52, foi estabelecido um limiar mínimo para o valor do $PSNR$ tal que represente imagens com a qualidade mínima considerada como aceitável para a filtragem. Como exemplo ilustrativo, definiu-se como limiar de corte o valor de $PSNR \geq +20dB$, sendo este indicado nos 3 gráficos da Figura 52. Desta forma, toma-se na matriz $psnr(x,y)$, o $y = +20dB$ e obtém-se x, indicando a quantidade de imagens filtradas existentes com $PSNR \geq +20dB$, fazendo-se uma comparação direta entre os filtros *q*-Gaussiano $\times$ Gaussiano tradicional.

Entretanto, os mesmos agrupamentos apresentados pela Figura 52 - com imagens filtradas a partir de um filtro *q*-Gaussiano com $q = 2{,}9$ - foram realizados para os outros 28 valores de parâmetro q. Assim, a matriz $psnr()$ passou a ter 3 dimensões, sendo representada como $psnr(x,y,z)$, onde z representa os 29 valores do parâmetro q utilizado nos filtros *q*-Gaussianos, sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, como mostra a ilustração da Figura 53.

Figura 53 – Consolidação dos Resultados de $PSNR$: matriz $psnr(x; y; z)$, onde x representa as 300 imagens de *Berkeley*, y representa o índice $PSNR$ de cada imagem e z é uma classificação baseada nos 29 valores de q do filtro *q*-Gaussiano, sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$.

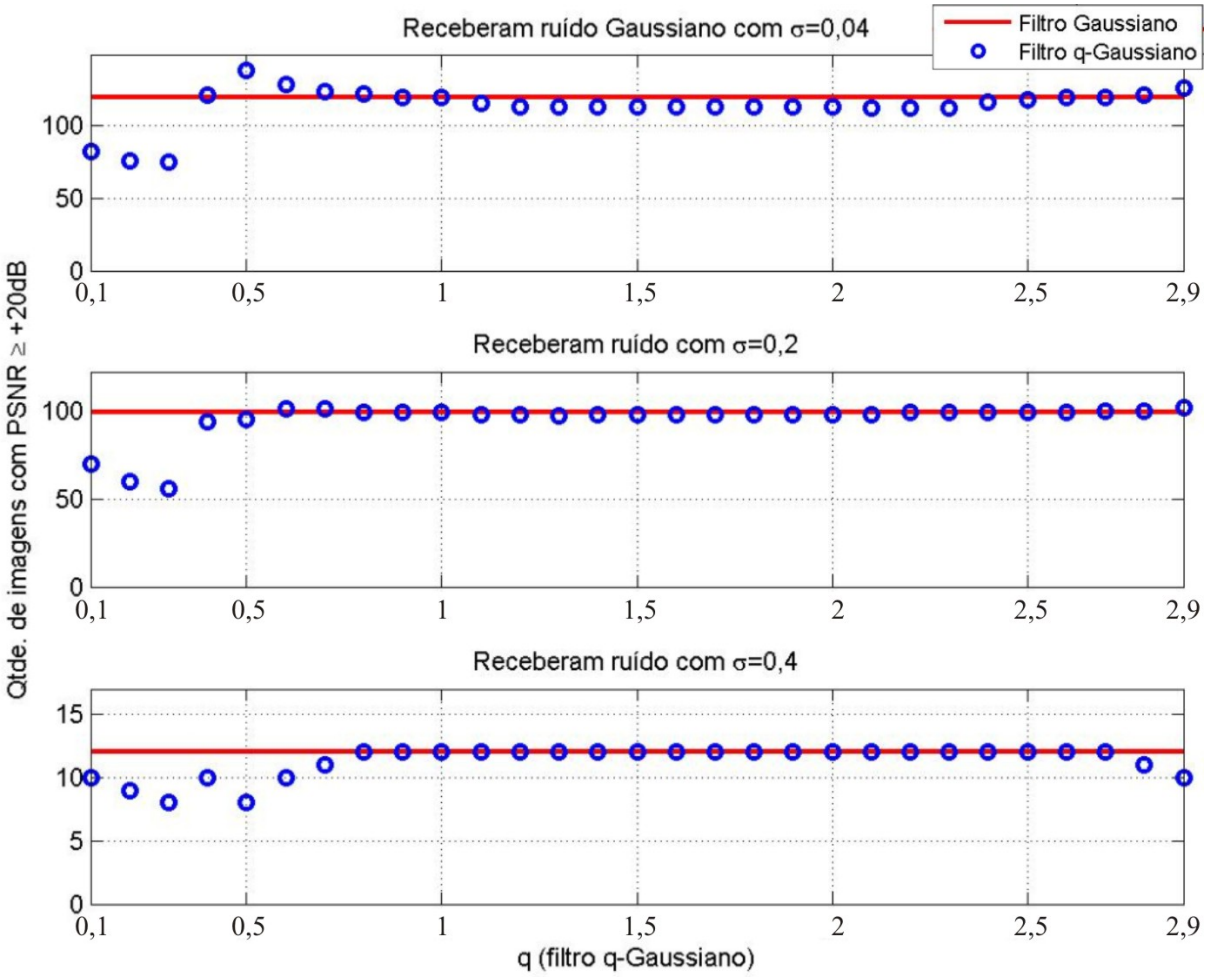


Fonte: Autor.

A partir dos valores de $PSNR$ calculados sobre todas as 27.000 imagens filtradas, agrupados de acordo com a ilustração da Figura 53, e definindo-se um limiar mínimo para o valor do $PSNR \geq +20dB$, foram computadas as quantidades de imagens que possuem valor de $PSNR \geq +20dB$, em cada valor de σ, tanto para o filtro Gaussiano quanto para os filtros

q-Gaussianos com os valores de $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, para cada valor de σ correspondente ao tipo de ruído. Como exemplo, a Figura 54 mostra as quantidades de imagens filtradas pelo filtro Gaussiano e também pelo filtros q-Gaussianos, com todos os 29 valores de q utilizados neste trabalho, considerando as 300 imagens da base de *Berkeley* que receberam os 3 tipos de ruídos Gaussianos, e que possuem valor de $PSNR \geq +20dB$.

Figura 54 – Quantidade de imagens filtradas considerando-se os 29 valores de q utilizados neste trabalho, assim como as 300 imagens da base de *Berkeley* que receberam os 3 tipos de ruídos Gaussianos, e que possuem valor de $PSNR \geq +20dB$.



Fonte: Autor.

A Figura 54 mostra que, entre as imagens que receberam ruído com $\sigma = 0{,}04$, o filtro q-Gaussiano com $q = 0{,}5$ foi aquele que mais produziu imagens filtradas com $PSNR \geq +20dB$. Mostra também que os filtros Gaussiano tradicional e q-Gaussiano com $q = [0{,}9; 1{,}0; 2{,}5]$, tiveram a mesma quantidade de imagens filtradas com $PSNR \geq +20dB$. A Figura 54 também

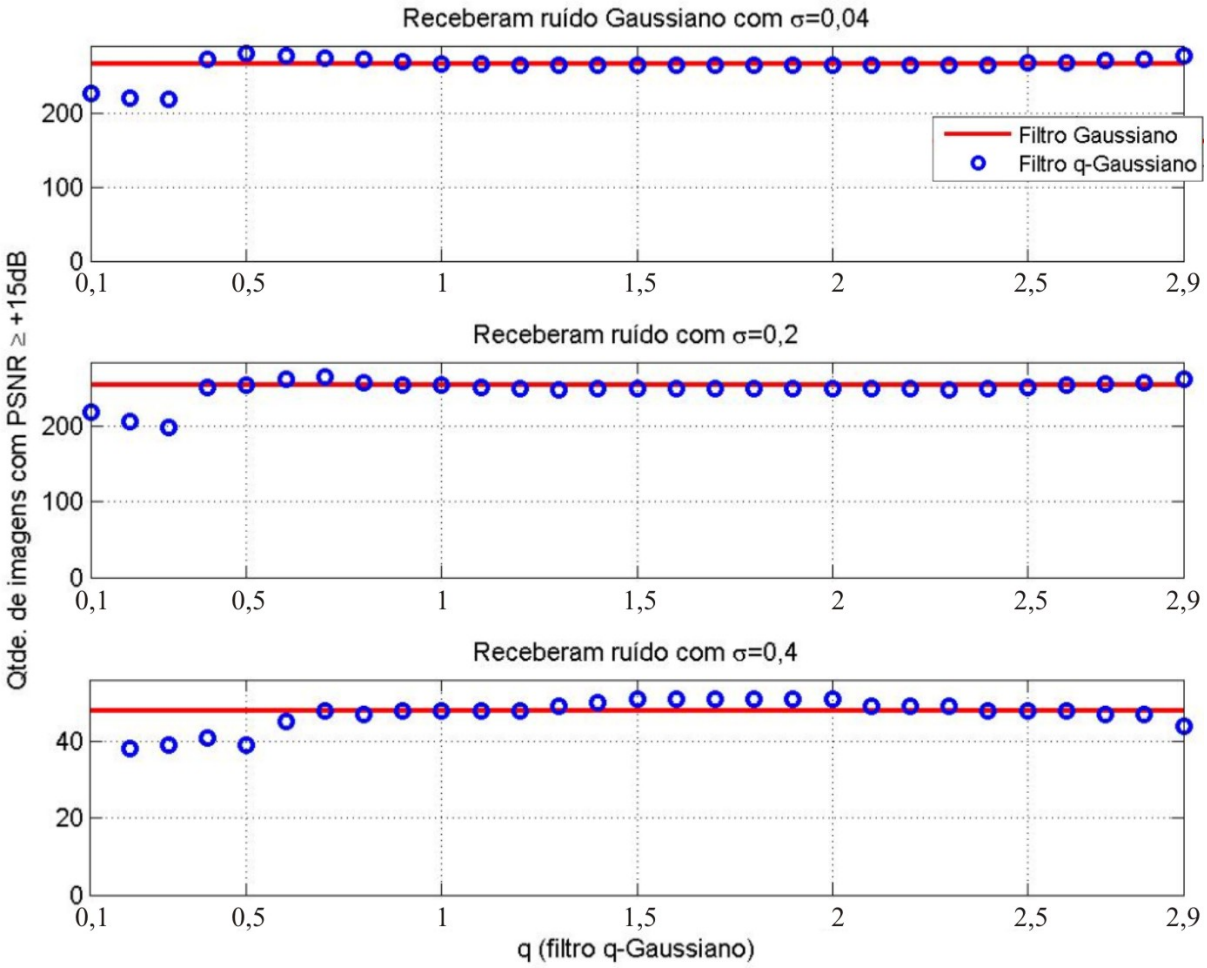
mostra que, além do valor de $q = 0{,}5$, outros valores de q também produziram uma quantidade maior de imagens em relação ao filtro Gaussiano tradicional, com $PSNR \geq +20dB$, sendo estes com valores de $q = [0{,}4; 0{,}6; 0{,}7; 0{,}8]$ e também aqueles com $q > 2{,}5$.

Referente às 300 imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$, a Figura 54 mostra que o filtro *q*-Gaussino com $q = 0{,}6$ foi aquele que produziu a maior quantidade de imagens filtradas, com $PSNR \geq +20dB$, em relação ao filtro Gaussiano tradicional. Mostra também que os filtros Gaussiano tradicional e *q*-Gaussiano tiveram a mesma quantidade de imagens em 11 variações do valor de q no filtro *q*-Gaussiano. A figura em questão também mostra que outros valores de $q = [0{,}4; 0{,}6; 0{,}7; 0{,}8]$ também produziram uma quantidade maior de imagens com $PSNR \geq +20dB$.

Ao analisarmos a Figura 54, no que diz respeito às imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$, nota-se que, para 20 valores de q, os filtros *q*-Gaussianos obtiveram quantidades idênticas de imagens filtradas, com $PSNR \geq +20dB$, se comparadas às quantidades obtidas com o filtro Gaussiano tradicional. Para este grupo de imagens, que são aquelas que receberam os maiores ruídos, os filtros *q*-Gaussianos não demonstraram maior eficiência do que os filtros *q*-Gaussianos, para esta configuração adotada neste trabalho.

A Figura 55 exibe os resultados das quantidades de imagens filtradas com todos os valores de q, também considerando as 300 imagens da base de *Berkeley*, com os 3 tipos de ruídos Gaussianos, porém, que possuem valor de $PSNR \geq +15dB$.

Figura 55 – Quantidade de imagens filtradas considerando-se os 29 valores de q utilizados neste trabalho, assim como as 300 imagens da base de *Berkeley* que receberam os 3 tipos de ruídos Gaussianos, e que possuem valor de $PSNR \geq +15dB$.



Fonte: Autor.

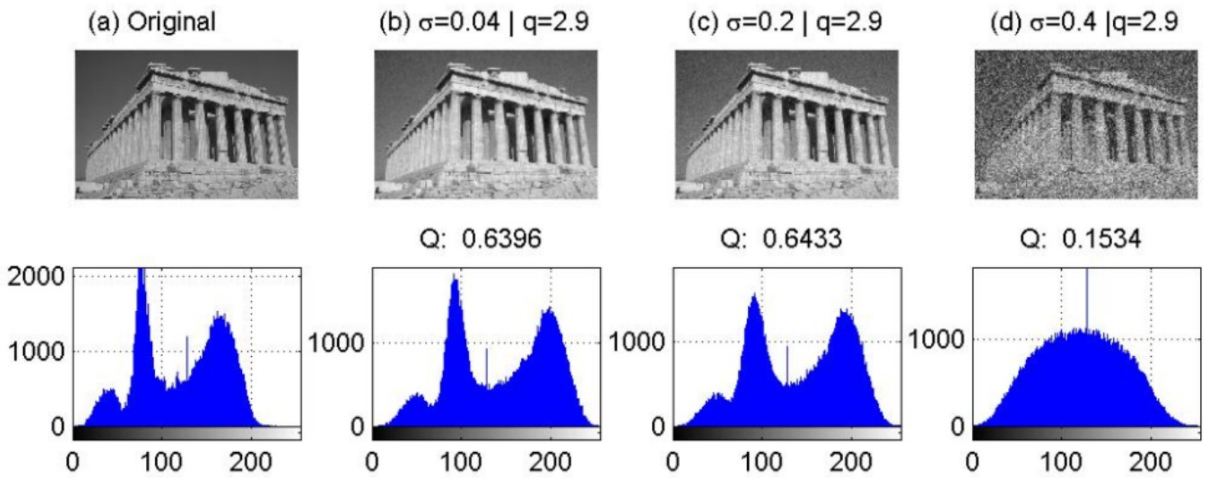
Nos resultados exibidos na Figura 55, nota-se que, mesmo para o grupo de imagens que recebeu ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$, há 11 valores de q no filtro q-Gaussiano, que produziram maiores quantidades de imagens filtradas com $PSNR \geq +15dB$, em relação ao filtro Gaussiano tradicional.

6.2.3.2 Análise do Índice Q das Imagens Filtradas

Na presente seção, apresentam-se os valores do índice Q que foram obtidos sobre as 27.000 imagens filtradas em comparação com as 300 imagens originais respectivas. Nas análises foram separados os resultados em 3 grupos, representados pelo valor do σ que foi utilizado na aplicação dos ruídos Gaussianos, sendo $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$.

A Figura 56 exibe um exemplo de imagem original que recebeu ruídos e, em seguida, foi filtrada por filtro q-Gaussiano, com $q = 2{,}9$. Na parte inferior da figura, são indicados os valores do índice Q calculados através da comparação entre as imagens filtradas $\times$ imagem original.

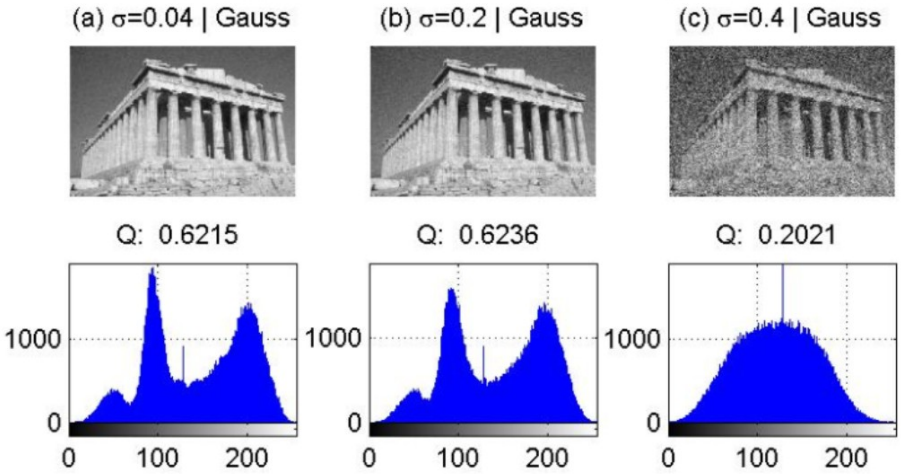
Figura 56 – Resultado das imagens filtradas por filtro q-Gaussiano com $q = 2{,}9$, com seus respectivos índices Q e histogramas.



Fonte: Autor. (a) Original. (b) Recebeu ruído com $\sigma = 0{,}04$. (c) Recebeu ruído com $\sigma = 0{,}2$. (d) Recebeu ruído com $\sigma = 0{,}4$.

A Figura 57 indica uma sequência de resultados obtidos a partir da filtragem feita por um filtro Gaussiano tradicional, a partir da imagem exibida na Figura 56(a) que recebeu ruídos Gaussianos com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$. Na parte inferior da figura, são exibidos os valores do índice Q calculados através da comparação entre as imagens filtradas $\times$ imagem original.

Figura 57 – Resultado das imagens filtradas por filtro Gaussiano tradicional, a partir da imagem original mostrada na Figura 56(a), com seus respectivos índices Q e histogramas:

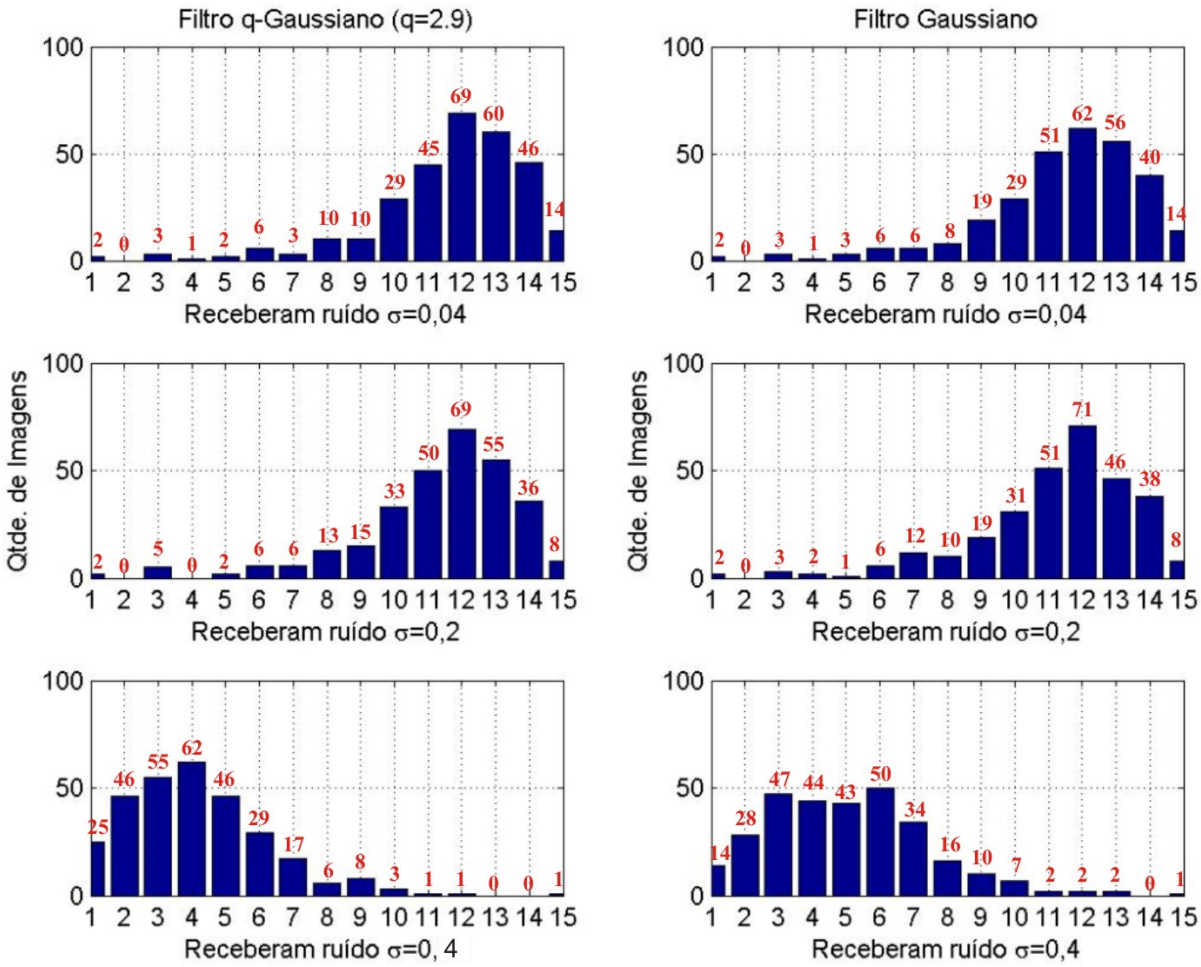


Fonte: Autor. (a) Recebeu ruído com $\sigma = 0{,}04$. (b) Recebeu ruído com $\sigma = 0{,}2$. (c) Recebeu ruído com $\sigma = 0{,}4$.

Analisando-se os valores do índice Q indicados nas Figuras 56 e 57, obtidos pela filtragem com filtro q-Gaussiano (com $q = 2{,}9$) e com filtro Gaussiano tradicional, respectivamente, nota-se que, para as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2]$ o filtro q-Gaussiano (com $q = 2{,}9$) produziu imagens filtradas com maiores índices de qualidade universal Q, se comparado com os resultados obtidos pelo filtro Gaussiano tradicional. Os melhores resultados de Q desta comparação estão indicados na Figura 56(b) e (c). Situação inversa verifica-se para a imagem que recebeu ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$, onde o filtro Gaussiano tradicional produziu melhor imagem filtrada, resultado este indicado na Figura 57(c).

Tomando-se todos os valores do índice Q das 300 imagens da base de *Berkeley*, a Figura 58 mostra histogramas que indicam as quantidades de imagens filtradas agrupadas em 15 entradas, calculadas através da comparação entre as imagens com ruídos $\times$ imagens originais. As imagens filtradas foram agrupadas pelo valor do σ referente ao ruído Gaussiano aplicado na imagem original.

Figura 58 – Quantidade de imagens agrupadas em 15 entradas, considerando os valores do índice Q das 300 imagens da base de *Berkeley*.



Fonte: Autor. (esquerda): filtradas por um filtro q-Gaussiano com $q = 2{,}9$. (direita): filtradas pro filtro Gaussiano tradicional.

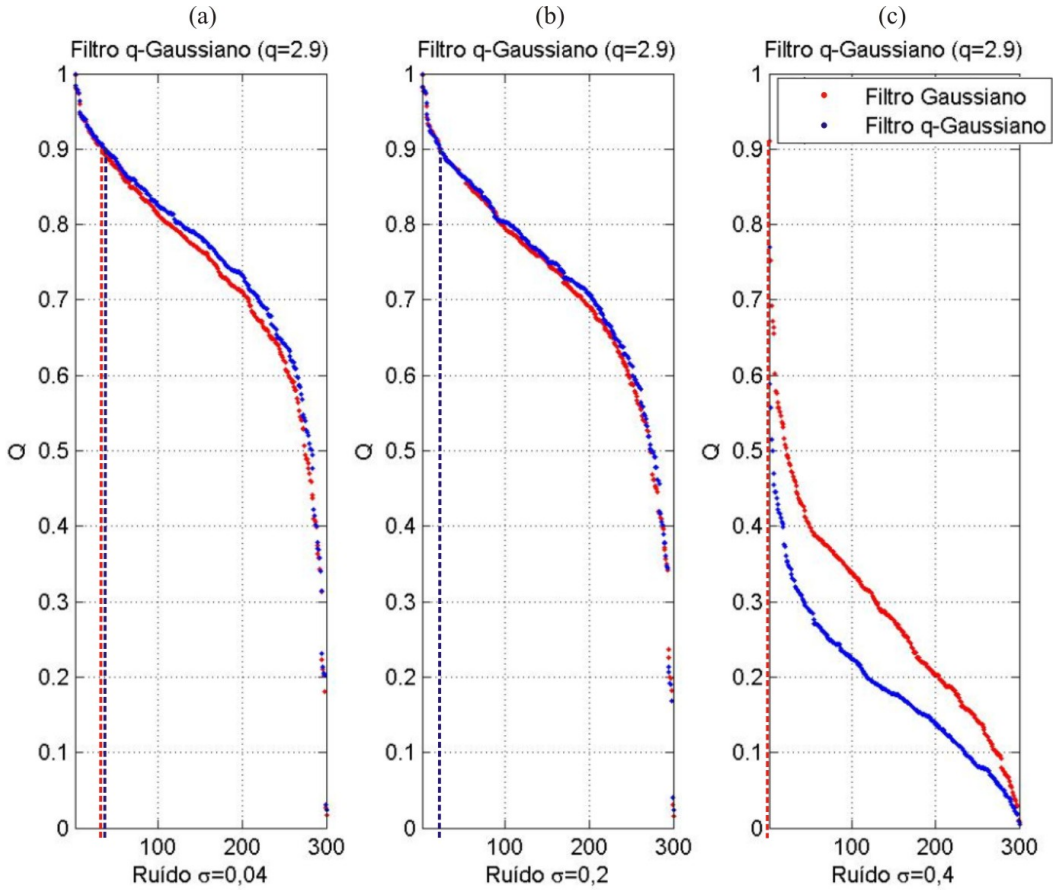
Cada uma das 15 entradas dos histogramas da Figura 58 representa um intervalo de valores do índice Q das imagens filtradas, ordenados de 1 a 15, considerando os menores valores de Q na entrada 1 e os maiores na entrada 15.

Considerando-se, como exemplo, as imagens filtradas que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$, e tomando-se apenas as quantidades em cada entrada, nota-se que, somando-se as quantidades a partir da entrada de maior frequência, neste exemplo a entrada 12, tem-se o total de 189 imagens filtradas pelo filtro q-Gaussiano (com $q = 2{,}9$), contra 172 imagens filtradas pelo filtro Gaussiano tradicional. Em cada histograma, os valores centrais de cada entrada variam, ordenadamente, do menor para o maior valor de Q. Neste exemplo, o valor central da entrada 6 para o filtro q-Gaussiano é $Q = 0{,}7714$, enquanto que, para o filtro Gaus-

siano tradicional é $Q = 0{,}7694$. Considerando-se, ainda, que os maiores valores de Q indicam melhor qualidade universal de imagem, agora pode-se concluir que, para este exemplo, o filtro q-Gaussiano foi mais eficiente do que o filtro Gaussiano tradicional, pois além de possuir maiores quantidades de imagens filtradas em relação àquelas indicadas para o filtro Gaussiano, também os valores centrais de cada entrada, medidos em Q, são maiores, portanto melhores.

Ao considerar os valores exibidos no exemplo da Figura 58, os índices Q foram representados como uma matriz bidimensional, aqui denotada por $Q(x,y)$, onde x representa as 300 imagens da base de *Berkeley* e y os respectivos valores do índice Q. A partir dos valores da matriz $Q(x,y)$, os resultados foram separados pelo valor de σ utilizado nos ruídos Gaussianos sobre as imagens originais, sendo $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}04]$. Em seguida, os valores de Q representados por y na matriz $Q(x,y)$ foram classificados em ordem decrescente de valores, e os resultados foram exibidos na Figura 59.

Figura 59 – Valores do índice Q em módulo, classificados em ordem decrescente, referente às 300 imagens da base de *Berkeley*, filtradas por um filtro q-Gaussiano com $q = 2{,}9$.

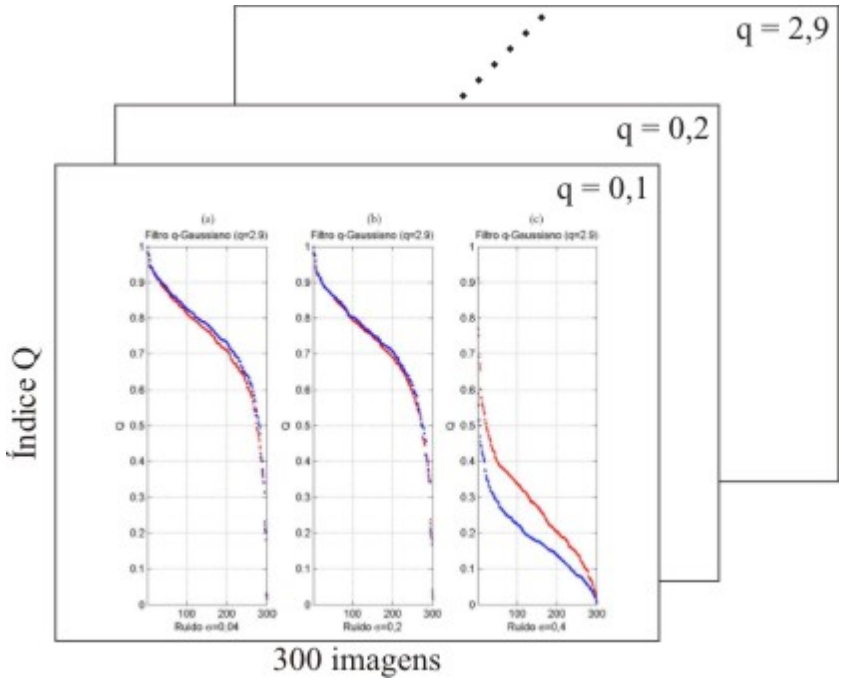


Fonte: Autor. As linhas verticais indicam as quantidades de imagens existentes onde o limiar $|Q| = 0{,}9$.

A partir dos valores do índice Q calculados sobre imagens filtrados mostradas no exemplo da Figura 59, foi definido um limiar mínimo para o valor do índice Q tal que represente imagens com a qualidade mínima considerada como aceitável para a filtragem. Como exemplo ilustrativo, definiu-se como limiar de corte o valor de $|Q| \geq 0{,}9$, este índice apresenta um range dinâmico de resultados que varia entre $[-1; 1]$, e, quanto mais próximo de 0 menor a semelhança entre as imagens. Desta forma, na matriz $Q(x,y)$, tem-se que $y = 0{,}9$, obtendo-se x, que indica a quantidade de imagens filtradas existentes com $|Q| \geq 0{,}9$, fazendo-se uma comparação direta entre os filtros *q*-Gaussiano $\times$ Gaussiano tradicional.

Entretanto, os mesmos agrupamentos apresentados pela Figura 59 foram realizados para os demais valores de parâmetro q. Assim, a matriz $Q()$ passou a ter 3 dimensões, sendo representada como $Q(x,y,z)$, onde z representa os 29 valores do parâmetro q utilizado nos filtros *q*-Gaussianos, sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, como mostra a ilustração da Figura 60

Figura 60 – Consolidação dos Resultados de Q: matriz $Q(x; y; z)$, onde x representa as 300 imagens de *Berkeley*, y representa o índice Q de cada imagem e z é uma classificação baseada nos 29 valores de q do filtro *q*-Gaussiano, sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$.



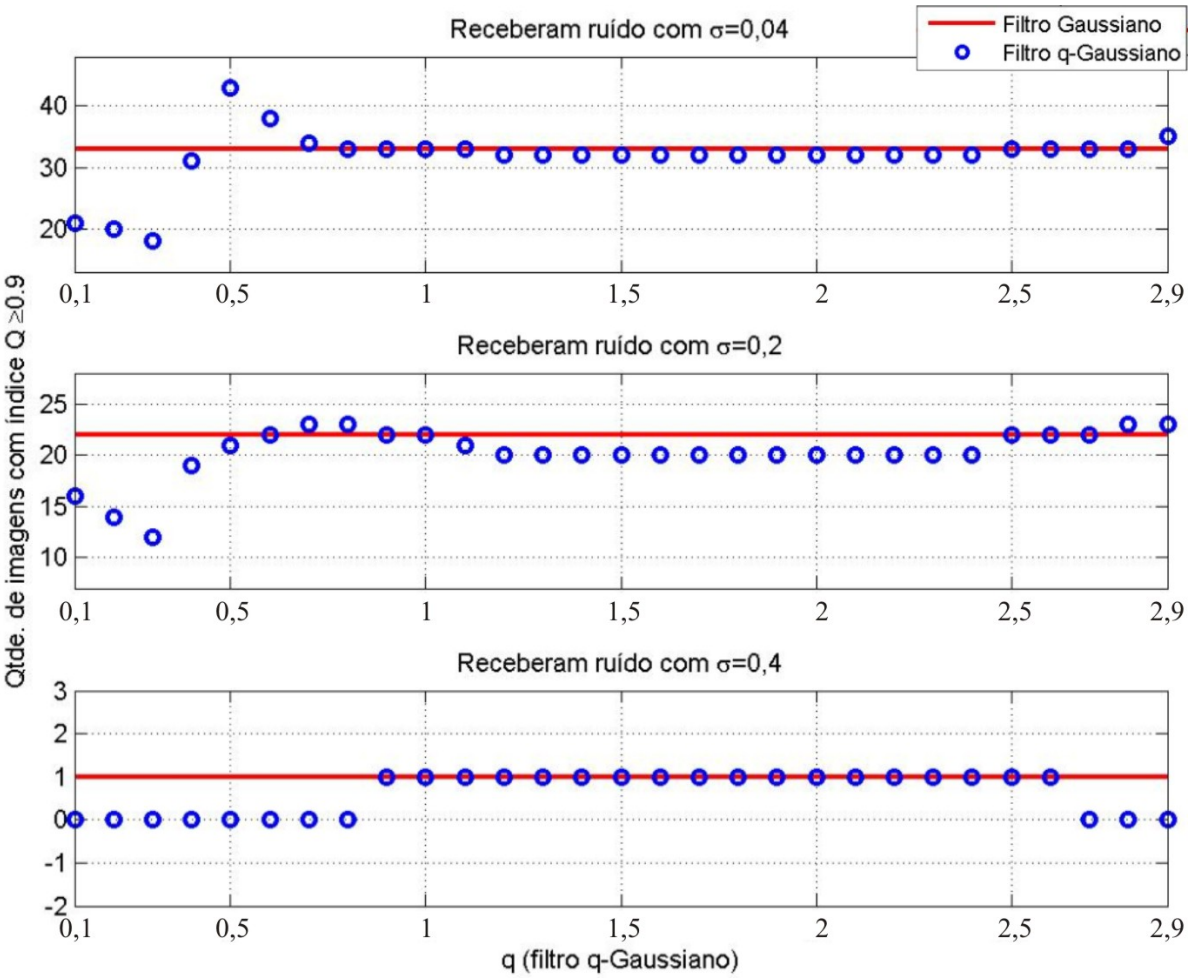
Fonte: Autor.

A partir dos valores de Q calculados sobre todas as 27.000 imagens filtrados, estes foram agrupados de acordo com a ilustração da Figura 60, sendo definido um limiar mínimo para o

valor do Q tal que demonstre a diferença entre a quantidade de imagens filtradas por Gaussiana tradicional em comparação ao filtro q-Gaussiano.

Para ilustrar, como exemplo, foram computadas quantidades de imagens que possuem valor de $|Q| \geq 0{,}9$. A Figura 61 mostra as quantidades de imagens filtradas que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$, que resultaram em $|Q| \geq 0{,}9$.

Figura 61 – Quantidade de imagens filtradas, que resultaram em $|Q| \geq 0{,}9$.



Fonte: Autor.

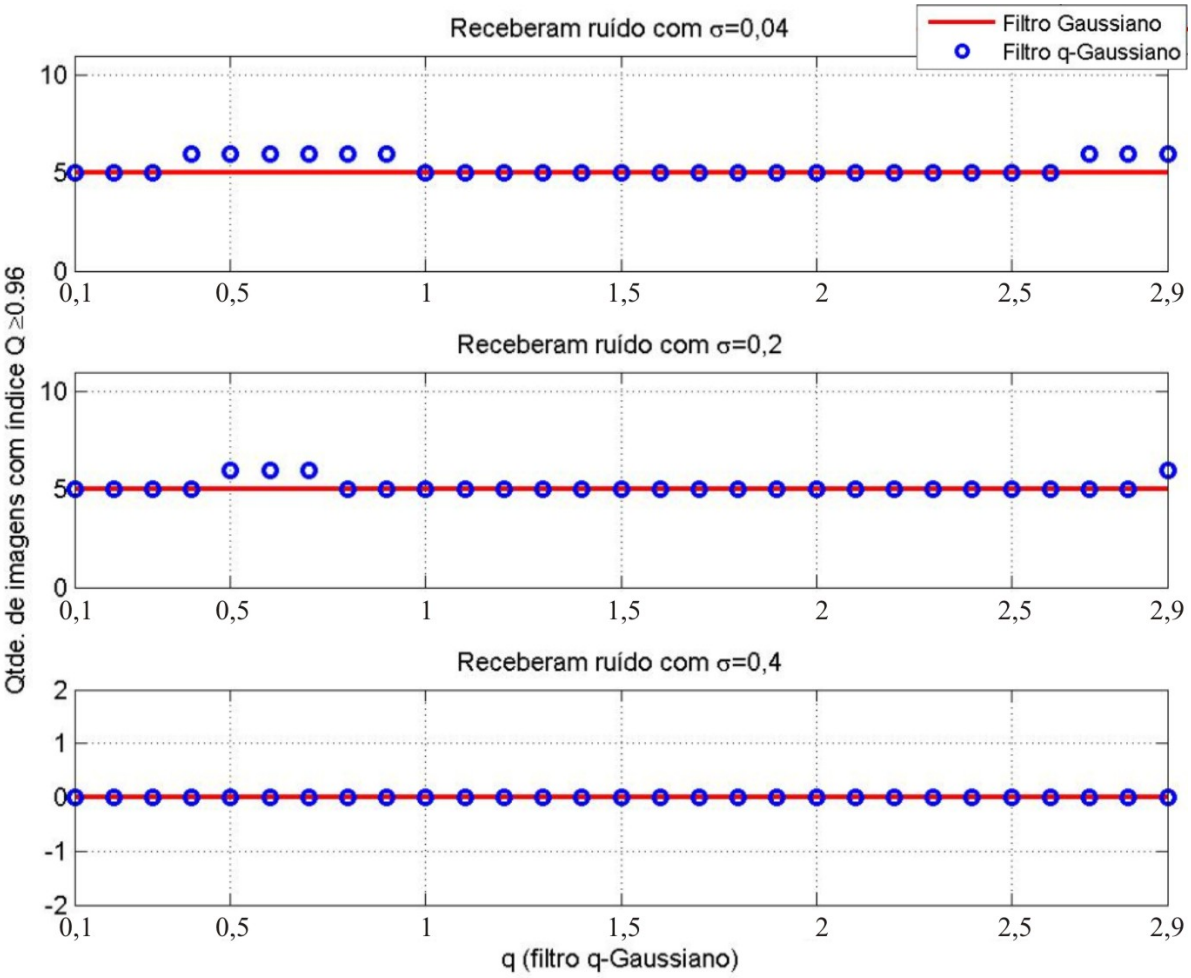
A Figura 61 mostra que, para 4 variações do filtro q-Gaussiano, com $q = [0{,}5; 0{,}6; 0{,}7; 2{,}9]$ foram computadas mais imagens com índice $|Q| \geq 0{,}9$, se comparadas às quantidades computadas sobre as imagens filtradas por filtro Gaussiano tradicional. Mostra também que, para 8 valores de q, os filtros q-Gaussianos resultaram na mesma quantidade de imagens com $|Q| \geq 0{,}9$ do que as imagens filtradas por filtro Gaussiano tradicional. Os experimentos também mostram

que, para o mesmo grupo de imagens mostrados na Figura 61, mas alterando o limiar de corte aplicado a este grupo para $|Q| \geq 0{,}96$, a maior quantidade de imagens foi computada quando da aplicação de filtro q-Gaussiano com 9 valores diferentes de q, como mostra a Figura 62, a seguir.

A Figura 61 mostra que, analisando as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$ e considerando o limiar de corte em $|Q| \geq 0{,}90$, também existem 4 variações do filtro q-Gaussiano, com $q = [0{,}7; 0{,}8; 2{,}8; 2{,}9]$, que foram computadas mais imagens com índice $|Q| \geq 0{,}9$ do que aquelas que receberam um filtro Gaussiano tradicional. Mostra também que, para 6 valores de q, os filtros q-Gaussianos resultaram na mesma quantidade de imagens com $|Q| \geq 0{,}9$ do que as imagens filtradas por filtro Gaussiano tradicional.

Os experimentos também indicaram que o maior limiar de corte o qual foi encontrado alguma imagem é $|Q| \geq 0{,}96$. Foram encontradas 6 imagens pertencentes a este limiar, uma a mais em relação ao filtro Gaussiano tradicional. Estas quantidades foram obtidas quando da aplicação de filtro q-Gaussiano com 9 diferentes valores do parâmetro q para $\sigma = 0{,}04$ e com 4 valores de q para $\sigma = 0{,}2$, como mostra a Figura 62.

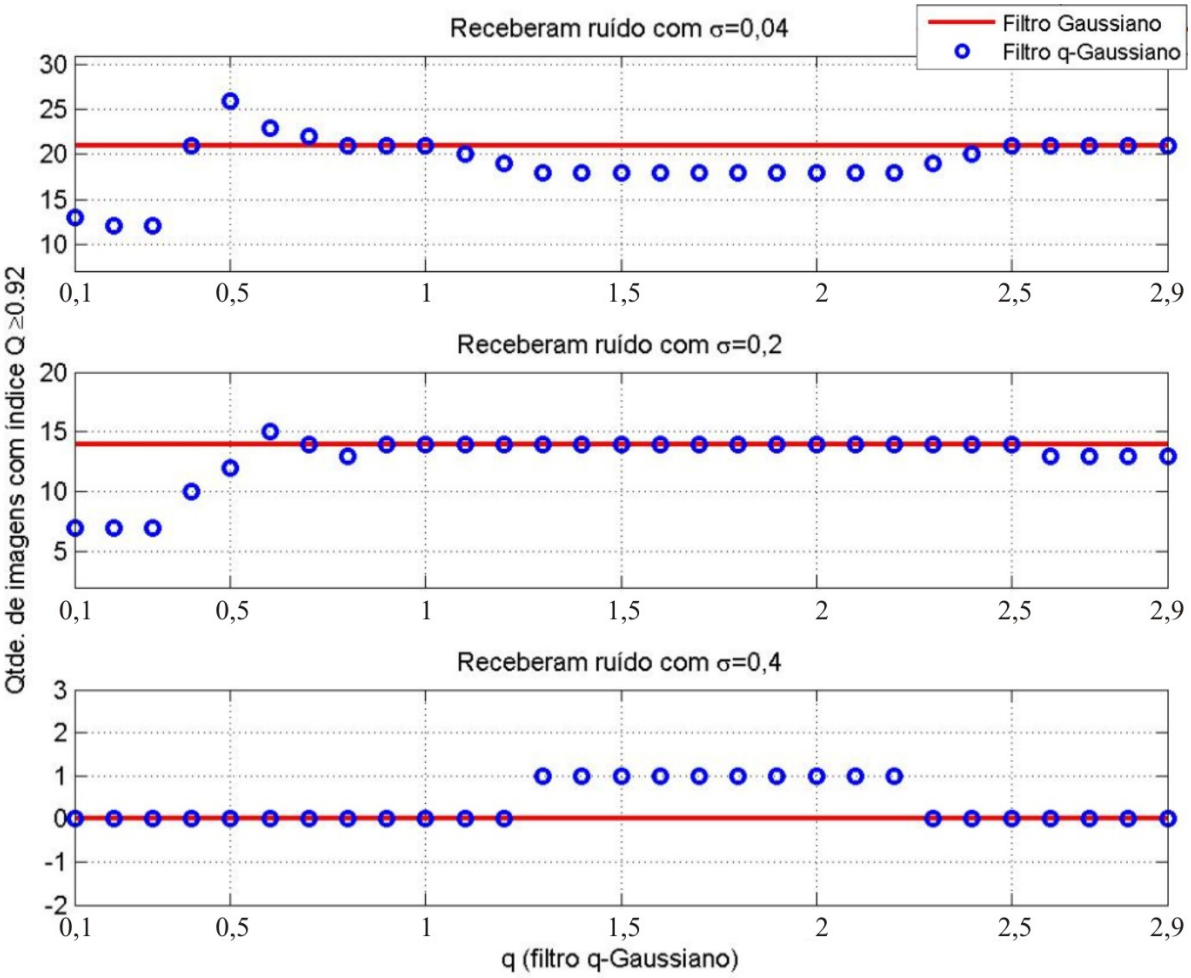
Figura 62 – Quantidade de imagens filtradas, que resultaram em $|Q| \geq 0{,}96$.



Fonte: Autor.

A Figura 62 mostra que considerando-se o limiar em $|Q| \geq 0{,}96$, nenhuma imagem pertencente a este limiar foi obtida nas imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$. Apenas quando foi reduzido o limiar de corte para $|Q| \geq 0{,}92$ é que foram encontrados valores de q do filtro q-Gaussiano que produziram maiores quantidades de imagens filtradas, se comparadas ao filtro Gaussiano tradicional. São 10 variações do filtro q-Gaussiano, sendo $1{,}3 \leq q \leq 2{,}2$, responsáveis por esta melhor performance, conforme mostra a Figura 63.

Figura 63 – Quantidade de imagens filtradas, que resultaram em $|Q| \geq 0{,}92$.



Fonte: Autor.

6.2.3.3 *Análise do Índice $PSNR$ das Imagens Segmentadas*

De acordo com a metodologia descrita na Seção 6.2.2, ilustrada pela Figura 39, a partir das imagens filtradas foram aplicadas duas técnicas de segmentação: a q-Entropia de Tsallis - com $q = \{0{,}8; 0{,}9; ...; 1{,}2\}$ - apresentada na Seção 2.1.3 e a entropia de Shannon Ponderada - com $\alpha = \{0{,}48; 0{,}49; ...; 0{,}52\}$ - apresentada na Seção 2.1.4.

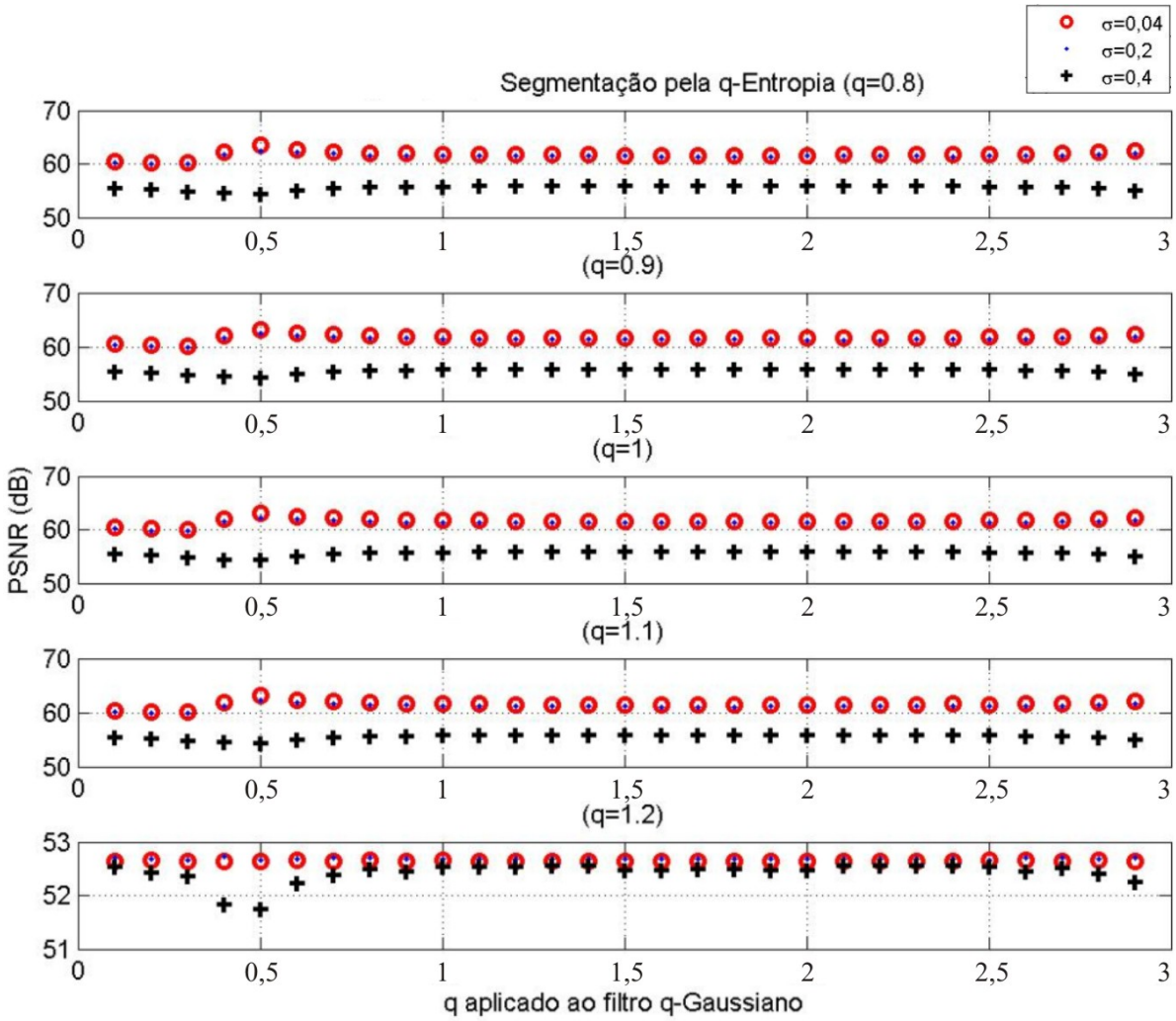
Portanto, foram aplicadas 5 variações de cada técnica de segmentação, ou seja, 10 diferentes segmentações sobre cada imagem filtrada, as quais foram comparadas com as respectivas

10 segmentações sobre cada imagem original. No total, foram 270.000 comparações efetuadas, as quais têm seus resultados consolidados e apresentados nesta seção.

A - Consolidação dos Resultados de Segmentação - Etapa 1

Primeiramente, foram consolidados os resultados do índice $PSNR$ dos experimentos de segmentação das imagens filtradas, agrupados a cada imagem original. Como exemplos, as Figuras 64 e 65 exibem os resultados das segmentações pela q-Entropia e pela entropia de Shannon Ponderada, respectivamente, a partir da mesma imagem original.

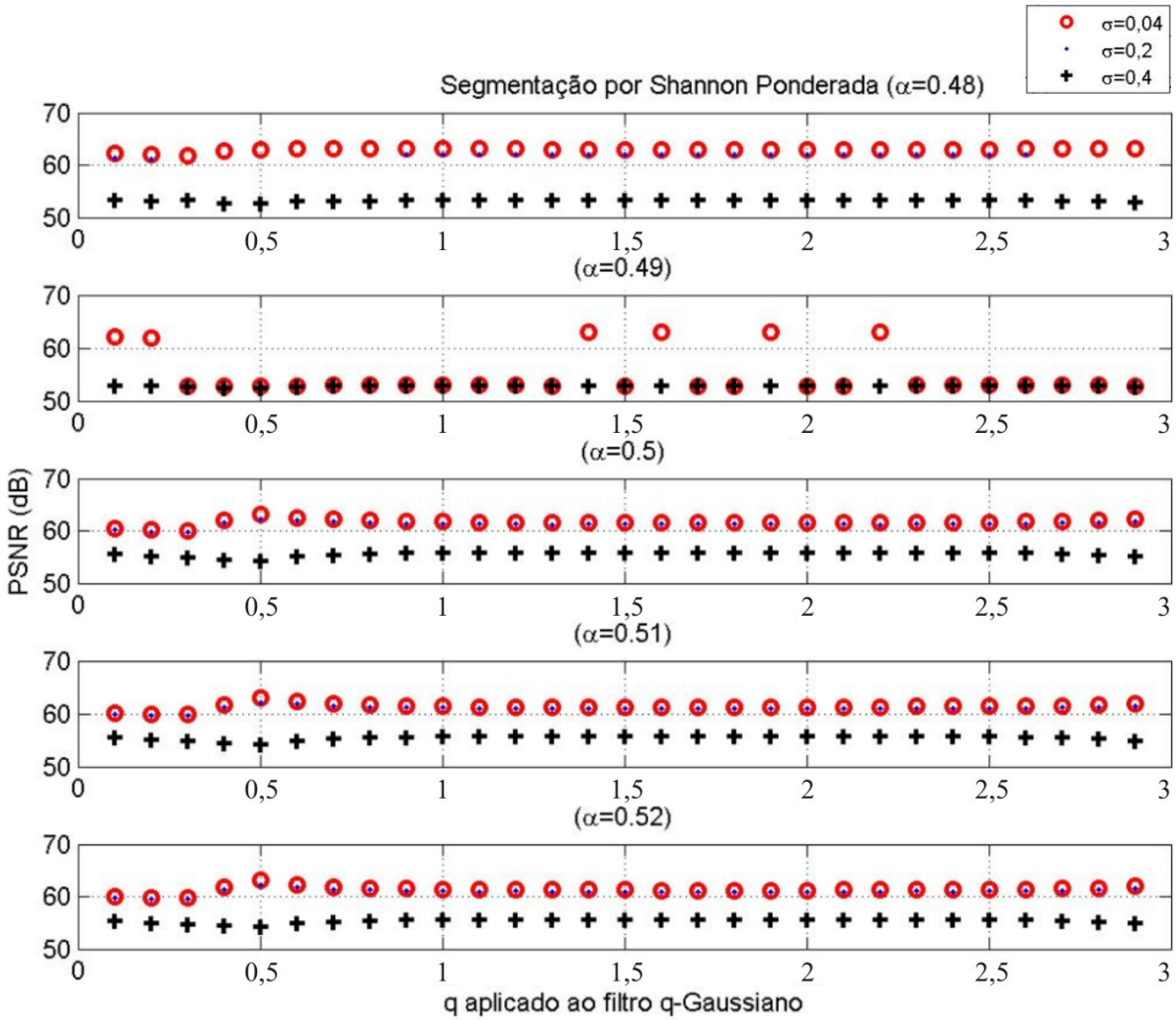
Figura 64 – Exemplo de valores do índice $PSNR$ calculado entre as segmentações das imagens filtradas $\times$ imagem original, a partir da imagem número $[274]$ da base de *Berkeley*.



Fonte: Autor. Todas as imagens receberam filtro q-Gaussiano bidimensional com valores de q indicados no eixo x dos gráficos. Todas as imagens filtradas foram segmentadas pela q-Entropia com valores de q indicados acima de cada figura.

Os gráficos exibidos na Figura 64 mostram todos os resultados dos índices $PSNR$, referentes à segmentação pela q-Entropia com $q = \{0{,}8; 0{,}9; ...; 1{,}2\}$, a partir da imagem original mostrada na Figura 56 (a), que recebeu ruídos Gaussianos com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$ e que foram filtradas por filtros q-Gaussianos com $q = \{0{,}1; 0{,}2...; 2{,}9\}$.

Figura 65 – Exemplo de valores do índice $PSNR$ calculado entre as segmentações das imagens filtradas $\times$ imagem original, a partir da imagem número $[274]$ da base de *Berkeley*.



Fonte: Autor. Todas as imagens receberam filtro q-Gaussiano bidimensional com valores de q indicados no eixo x dos gráficos. Todas as imagens filtradas foram segmentadas pela entropia de Shannon Ponderada com valores de α indicados acima de cada figura.

Os gráficos exibidos na Figura 65 mostram todos os resultados dos índices $PSNR$, referentes à segmentação pela entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = \{0{,}48; 0{,}49; ...; 0{,}52\}$,

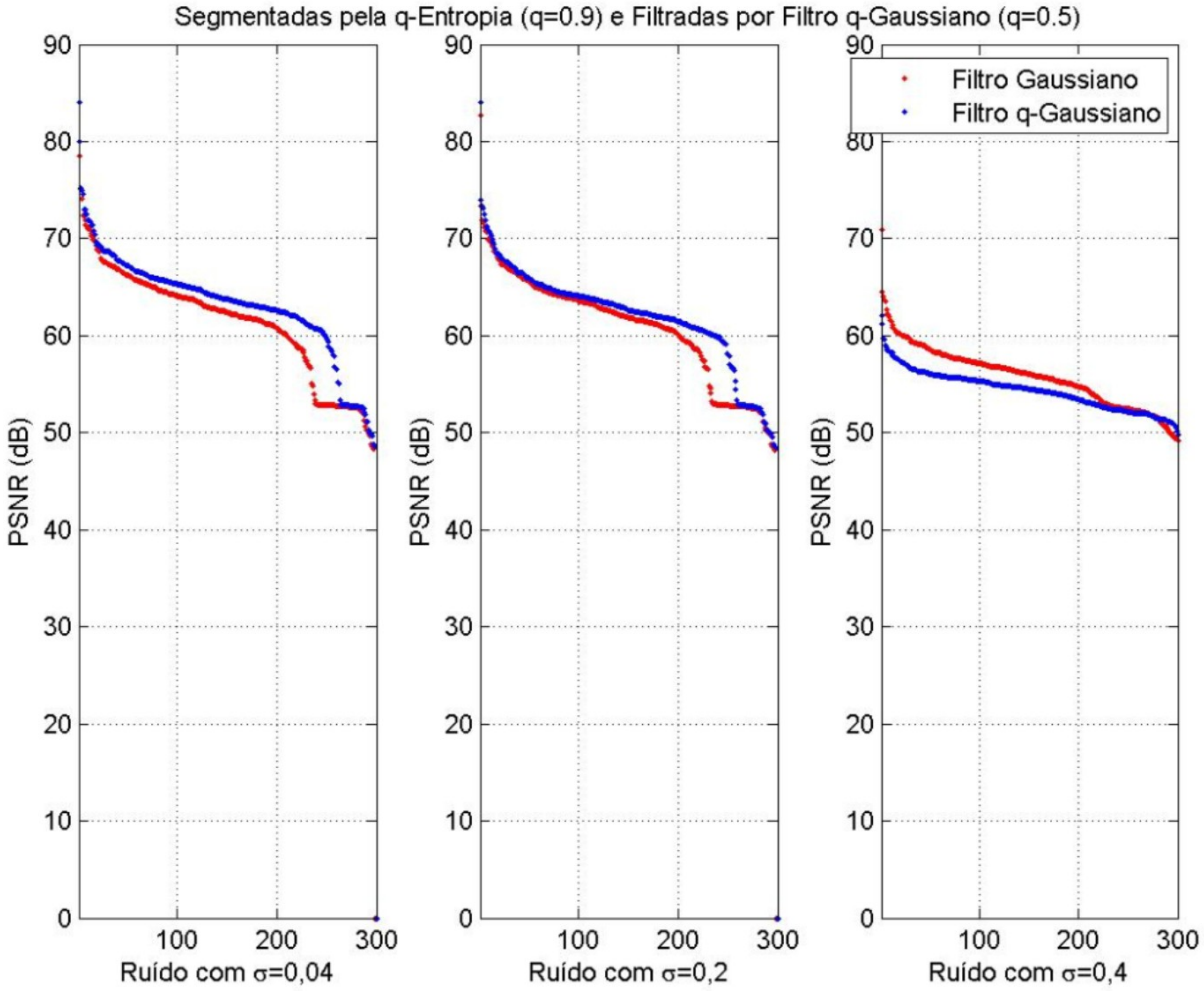
referentes à imagem original mostrada na Figura 56 (a), que recebeu ruídos Gaussianos com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$ e que foram filtradas por filtros q-Gaussianos bidimensionais com $q = \{0{,}1; 0{,}2...; 2{,}9\}$.

B - Consolidação dos Resultados de Segmentação - Etapa 2

A partir dos resultados agrupados por imagem original, conforme mostrado nas Figuras 64 e 65, na Etapa 2 foram consolidados os resultados considerando-se todas as 300 imagens originais da base de *Berkeley*. Para ilustrar os resultados obtidos na Etapa 2, as Figuras 66 e 67 exibem os resultados das segmentações pela q-Entropia e pela entropia de Shannon Ponderada, respectivamente, considerando-se as 300 imagens da base de *Berkeley*.

Os gráficos exibidos na Figura 66 mostram os valores de $PSNR$ classificados em ordem decrescente, referentes à segmentação pela q-Entropia com $q = 0{,}9$ - escolhido ao acaso para este exemplo - considerando as 300 imagens originais que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$ e que foram filtradas por filtros q-Gaussianos bidimensionais com $q = 0{,}5$, também escolhido ao acaso para ilustrar este exemplo.

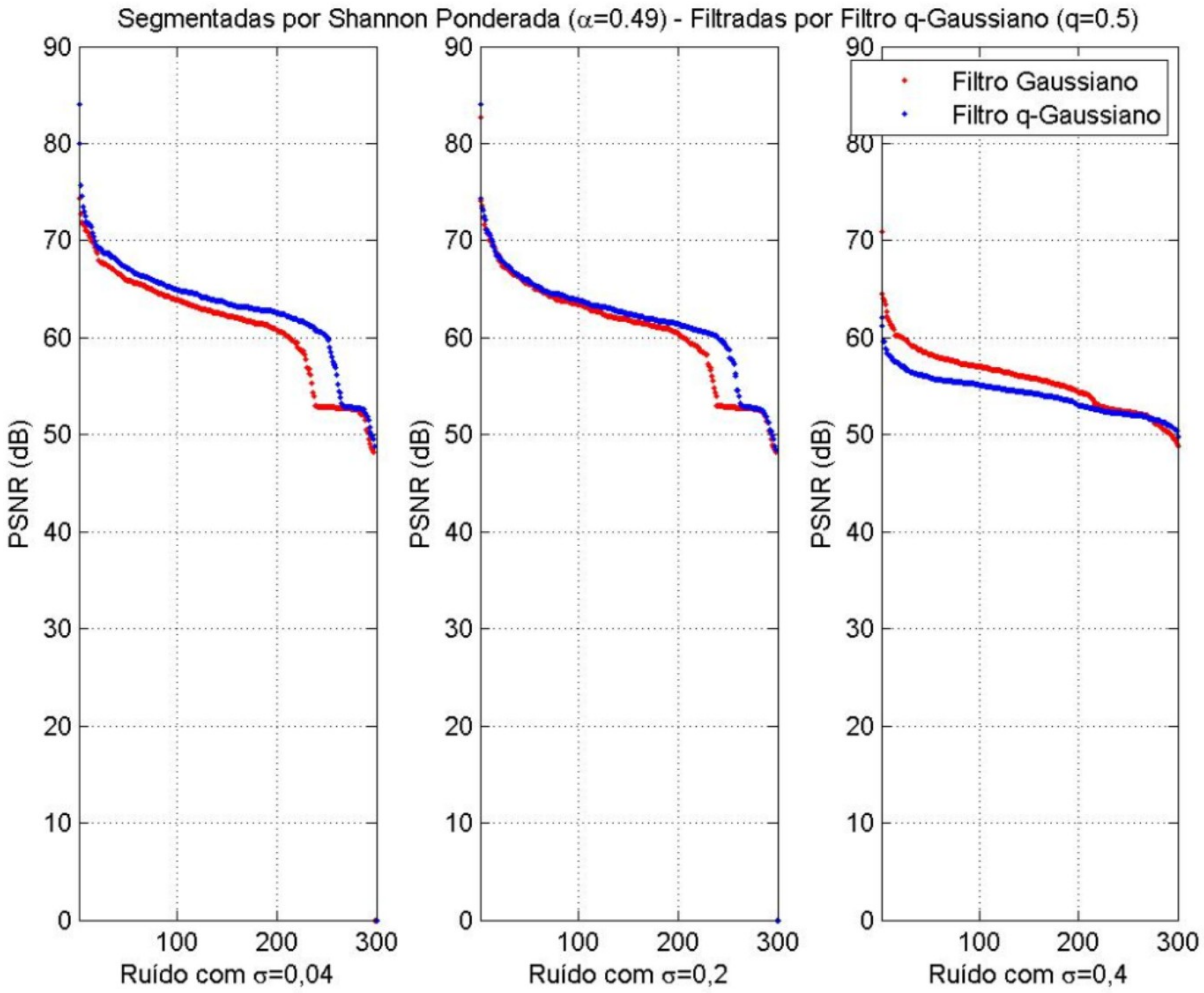
Figura 66 – Exemplo de valores do índice $PSNR$ das imagens receberam filtro q-Gaussiano bidimensional com $q = 0{,}5$ e foram segmentadas pela q-Entropia de Tsallis com $q = 0{,}9$.



Fonte: Autor. Índices $PSNR$ classificados em ordem decrescente, calculados entre as segmentações das imagens filtradas $\times$ imagem original.

Os gráficos exibidos na Figura 67 mostram os valores de $PSNR$ classificados em ordem decrescente, referentes à segmentação pela entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = 0{,}49$ - escolhido ao acaso para este exemplo - referentes às 300 imagens originais que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$ e que foram filtradas por filtros q-Gaussianos bidimensionais com $q = 0{,}5$, também escolhido ao acaso para ilustrar este exemplo.

Figura 67 – Exemplo de valores do índice $PSNR$ das imagens receberam filtro q-Gaussiano bidimensional com $q = 0{,}5$ e foram segmentadas pela entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = 0{,}49$.



Fonte: Autor. Índices $PSNR$ classificados em ordem decrescente, calculados entre as segmentações das imagens filtradas $\times$ imagem original.

C - Consolidação dos Resultados de Segmentação - Etapa 3

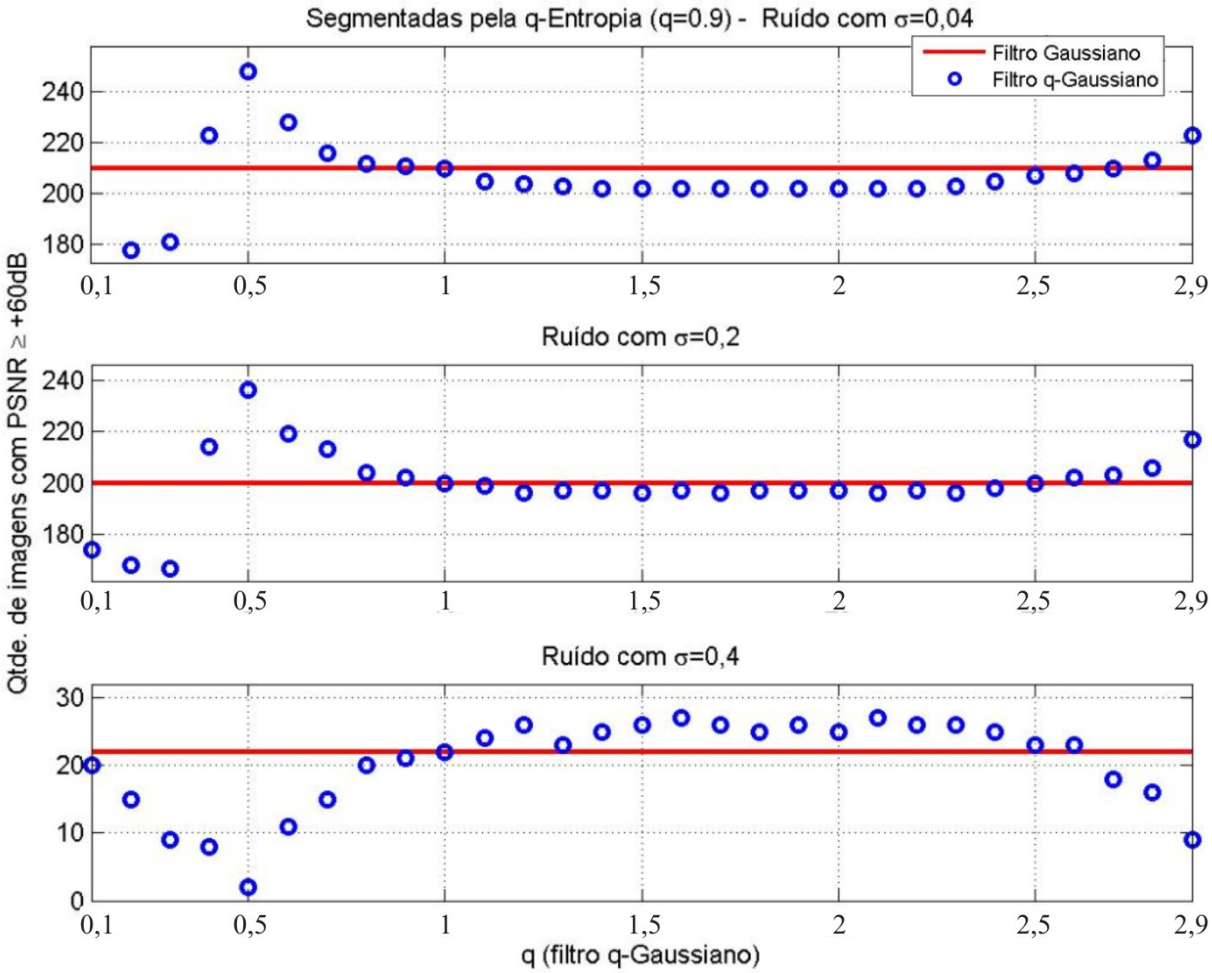
Tendo os valores de $PSNR$ ordenados de forma decrescente, como mostrado nas Figuras 66 e Figura 67, foram feitas análises dos resultados a partir da definição de um limiar de corte mínimo para o valor de $PSNR$, aqui denotado por $\xi_{(PSNR)}$, tal que pode-se computar a quantidade de segmentações existentes para $PSNR \geq \xi_{(PSNR)}$.

Nesta etapa da consolidação dos resultados das segmentações, foram pré-estabelecidos 4 limiares de corte, sendo $\xi_{(PSNR)} = [50; 60; 70; 80]$; considerando que quanto maior o valor de $PSNR$, menor a perda de energia e portanto melhor a qualidade da imagem analisada. Assim,

computaram-se as quantidades de segmentações existentes acima de $+50dB$, $+60dB$, $+70dB$, e $+80dB$, tanto pela q-Entropia de Tsallis, quanto pela entropia de Shannon Ponderada.

Para ilustrar a Etapa 3, as Figuras 68 e 69 mostram as quantidades de segmentações com $PSNR \geq +60dB$. Foram consideradas todas as 300 imagens da base de *Berkeley*. A Figura 68 mostra as quantidades de segmentações realizadas pela q-Entropia de Tsallis, com $PSNR \geq +60dB$. As segmentações foram realizadas sobre as imagens com ruídos que foram filtradas por 29 variações do filtro q-Gaussiano, sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2...; 2{,}9\}$, e também por um filtro Gaussiano Tradicional.

Figura 68 – Exemplo de quantidade de segmentações feitas pela q-Entropia de Tsallis, com $q = 0{,}9$, as quais produziram segemntações com $PSNR \geq +60dB$.

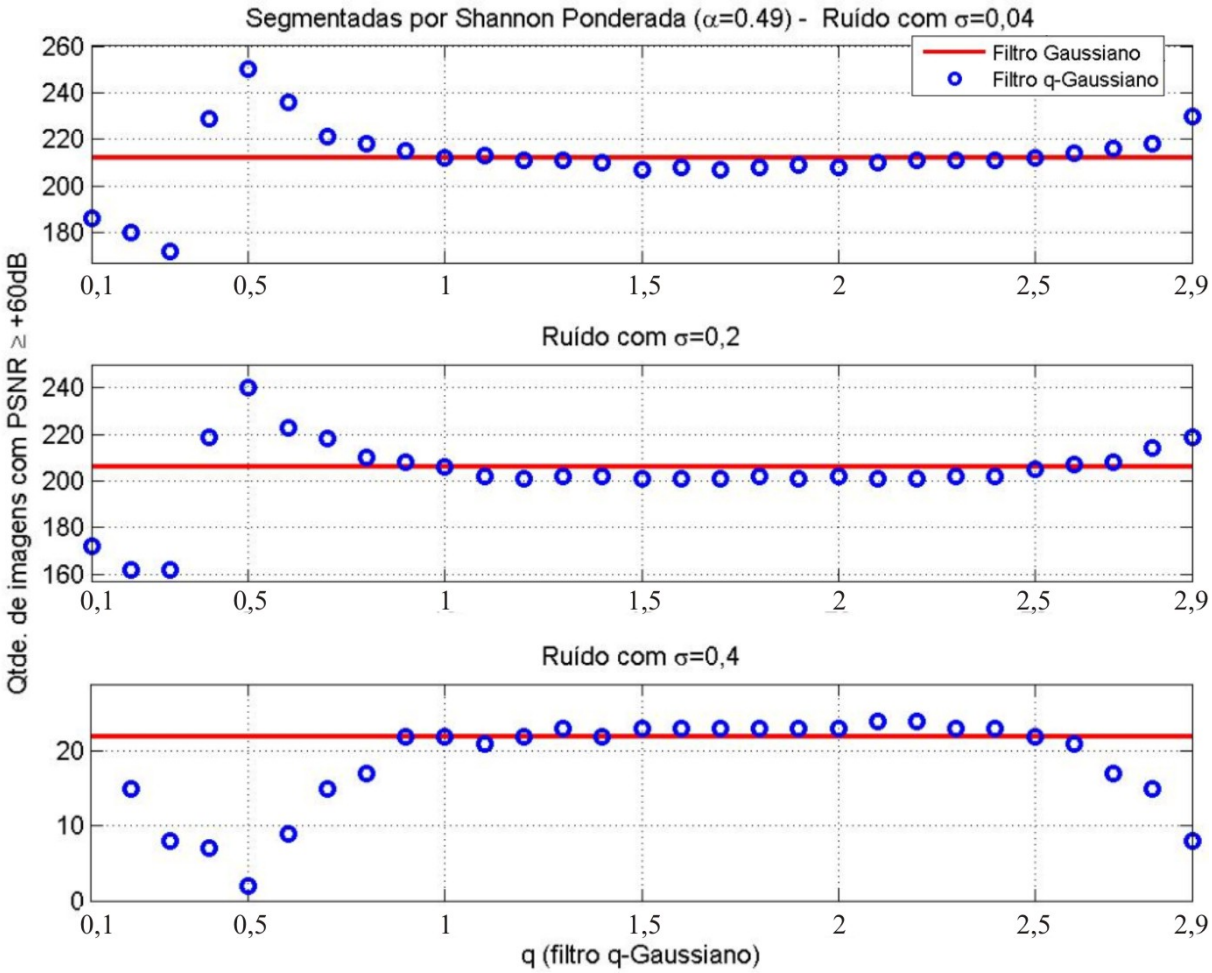


Fonte: Autor. Os valores de q utlizados nos filtros q-Gaussianos estão representados no eixo x dos gráficos.

A Figura 69 mostra as quantidades de segmentações realizadas pela entropia de Shannon Ponderada, com $PSNR \geq +60dB$. As segmentações também foram realizadas so-

bre as imagens com ruídos que foram filtradas por 29 variações do filtro q-Gaussiano, sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2...; 2{,}9\}$, e também por um filtro Gaussiano Tradicional.

Figura 69 – Exemplo de quantidade de segmentações feitas pela entropia de Shannon Ponderada, com $\alpha = 0{,}49$, as quais produziram segmentações com $PSNR \geq +60dB$.



Fonte: Autor. Os valores de q utlizados nos filtros q-Gaussianos estão representados no eixo x dos gráficos.

D - Consolidação dos Resultados de Segmentação - Etapa 4

Finalizando a consolidação dos resultados obtidos com os experimentos envolvendo a segmentação das imagens filtradas, na Etapa 4 os resultados receberam um novo agrupamento, descrito a seguir, tal que, permitiu a observação de todos os parâmetros envolvidos nos experimentos com as 300 imagens da base de *Berkeley*, considerando os 3 tipos de ruídos Gaussianos aplicados às imagens originais. Também nestes resultados são consideradas as 29 variações do

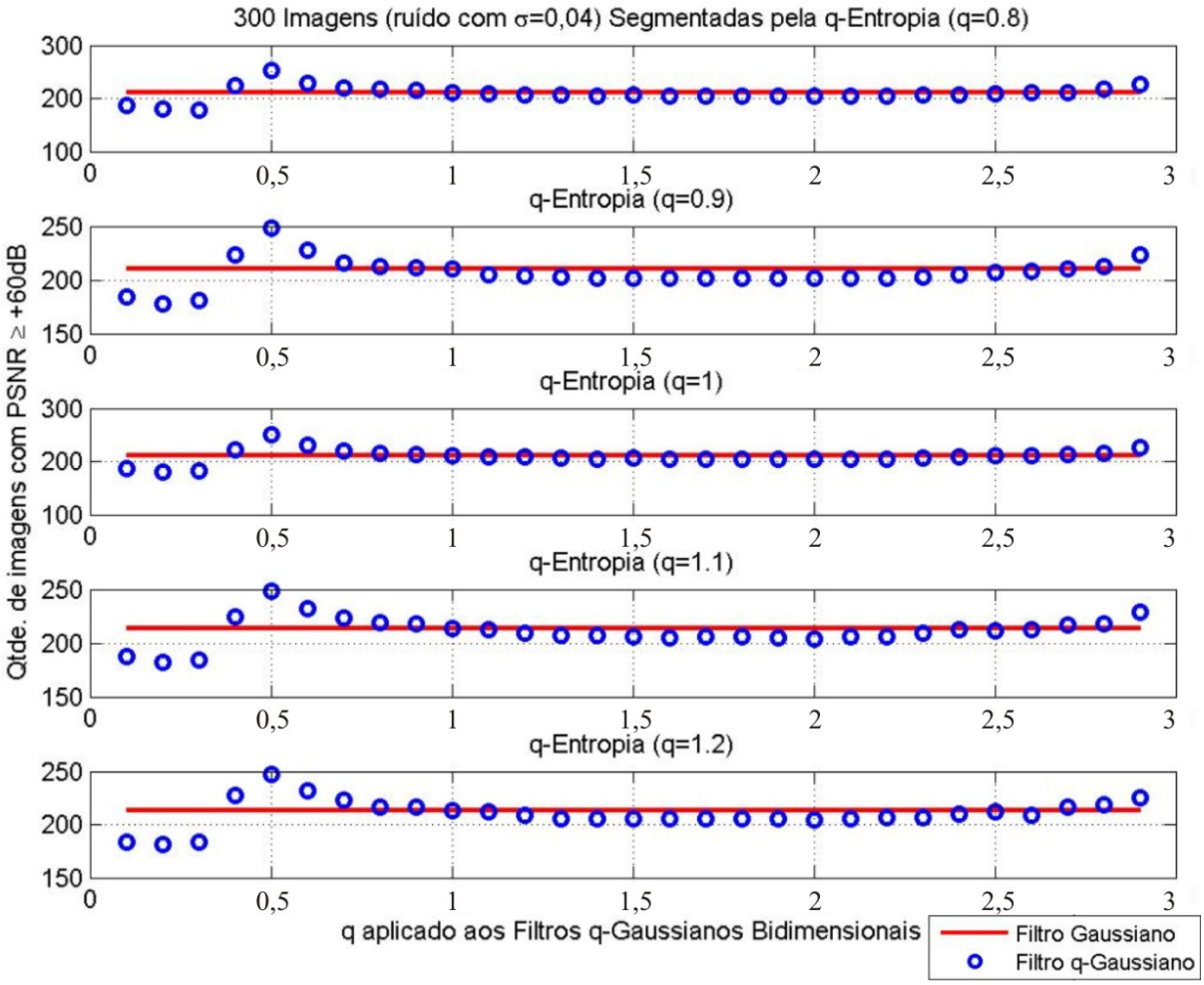
filtro q-Gaussiano bidimensional além do filtro Gaussiano tradicional, todos aplicados sobre as imagens com ruídos.

As Figuras 70, 71 e 72 apresentam os agrupamentos referentes às segmentações realizadas pela q-Entropia, enquanto que as Figuras 73, 74 e 75 mostram os agrupamentos obtidos através da segmentação pela entropia de Shannon Ponderada.

Iniciando a apresentação com os resultados obtidos com segmentação pela q-Entropia, a Figura 70 apresenta 5 gráficos que indicam os respectivos valores de q, sendo $q = \{0{,}8; 0{,}9; ...; 1{,}2\}$. Todos os resultados mostrados na Figura 70 tiveram origem nas imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$.

Observa-se na Figura 70, por exemplo, que o filtro q-Gaussiano com $q = 0{,}5$ foi aquele que provocou a maior quantidade de segmentações com valores de $PSNR \geq +60dB$, para todos os valores de q utilizados na q-Entropia. Também mostra-se que os filtros q-Gaussianos com $q = [0{,}4; 0{,}5; ...; 0{,}9]$ e $q = [2{,}7; 2{,}8; 2{,}9]$, computaram maior quantidade de segmentações do que aquelas computadas pelo filtro Gaussiano tradicional.

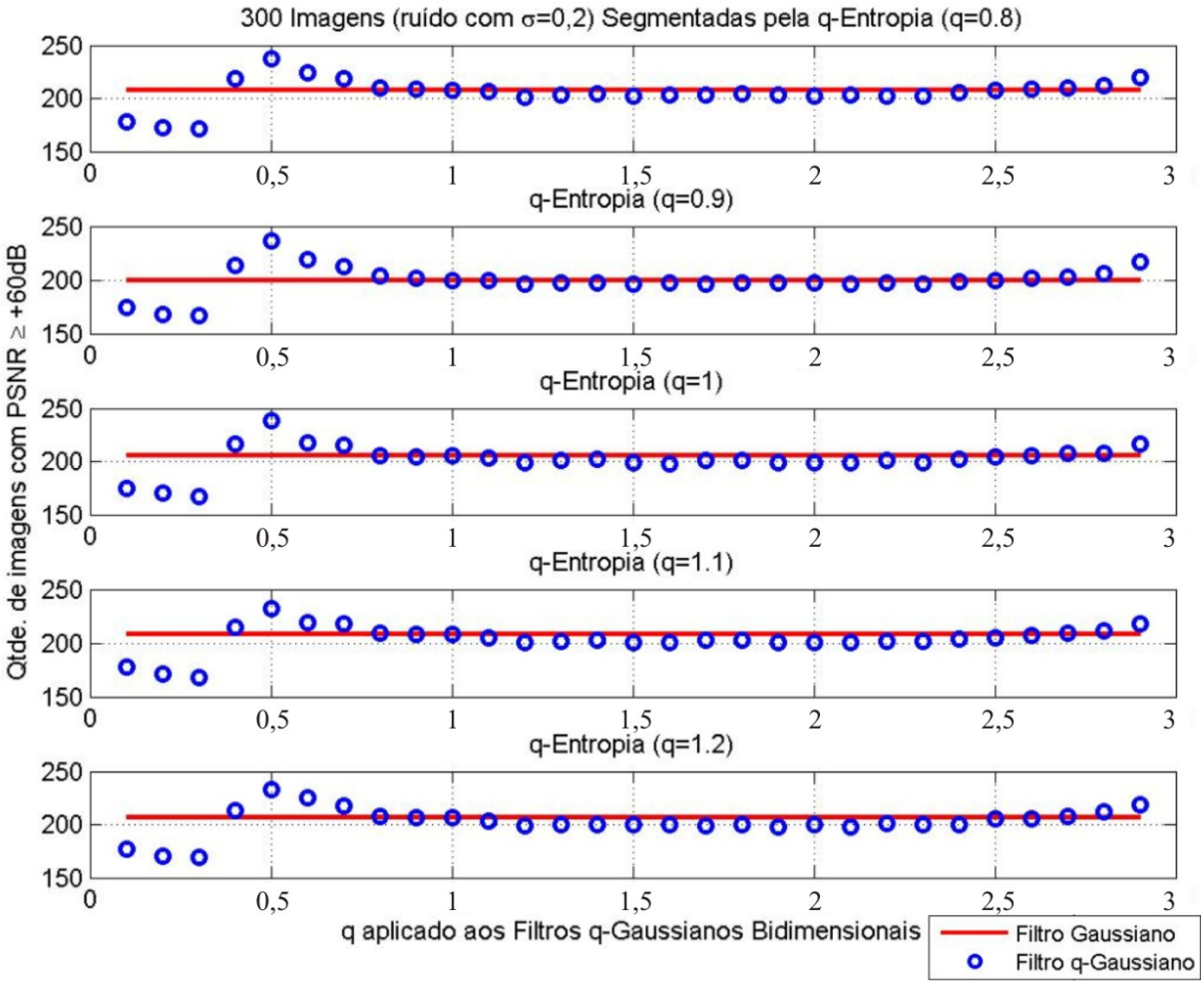
Figura 70 – Quantidade de segmentações feitas pela q-Entropia, as quais produziram segmentações com $PSNR \geq +60dB$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$.



Fonte: Autor. Os valores de q utlizados nos filtros q-Gaussianos bidimensionais estão representados no eixo x dos gráficos. Os valores de q utilizados na segmentação pela q-Entropia estão indicados acima de cada gráfico.

A Figura 71 mostra os gráficos com os resultados a partir da segmentação pela q-Entropia com os valores de $q = \{0{,}8; 0{,}9; ...; 1{,}2\}$. Os resultados tiveram origem nas imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$.

Figura 71 – Quantidade de segmentações pela q-Entropia, as quais produziram $PSNR \geq +60dB$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$.

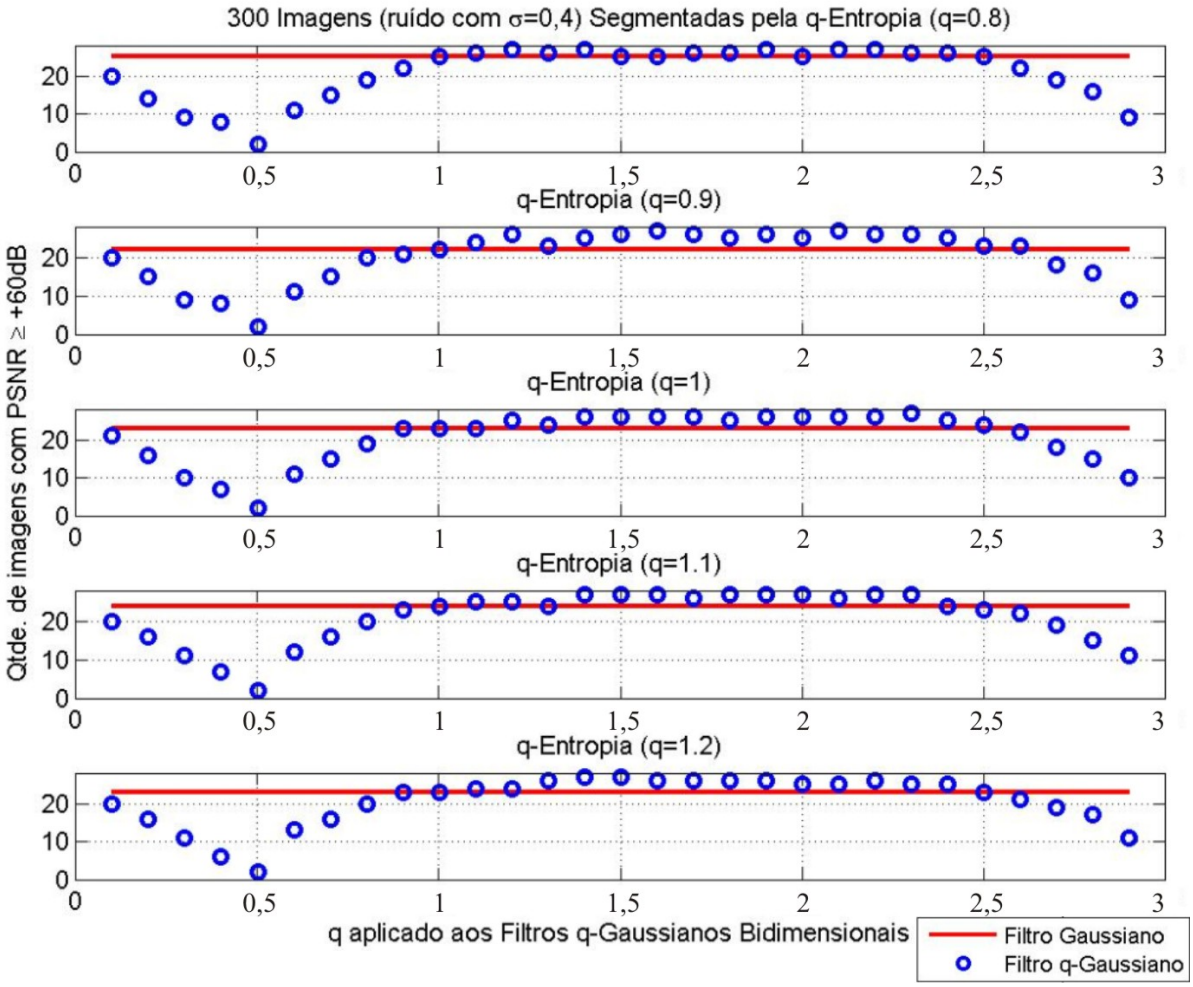


Fonte: Autor. Os valores de q utlizados nos filtros q-Gaussianos bidimensionais estão representados no eixo x dos gráficos. Os valores de q utilizados na segmentação pela q-Entropia estão indicados acima de cada gráfico.

Observando-se os resultados exibidos na Figura 71, nota-se que, para todos os valores de q aplicados na segmentação pela q-Entropia, os filtros q-Gaussianos que produziram as maiores quantidades de imagens com $PSNR \geq +60dB$ foram aqueles que utilizaram os valores de $q = [0{,}4; 0{,}5; ...; 0{,}7]$, mostrando também boa performance para os valores de $q = [2{,}8; 2{,}9]$.

Finalizando a exibição dos resultados a partir da segmentação pela q-Entropia de Tsallis, a Figura 72 mostra os resultados que tiveram origem nas imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$.

Figura 72 – Quantidade de segmentações feitas pela q-Entropia de Tsallis, as quais produziram segmentações com $PSNR \geq +60dB$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$.



Fonte: Autor. Os valores de q utlizados nos filtros q-Gaussianos bidimensionais estão representados no eixo x dos gráficos. Os valores de q utilizados na segmentação pela q-Entropia estão indicados acima de cada gráfico.

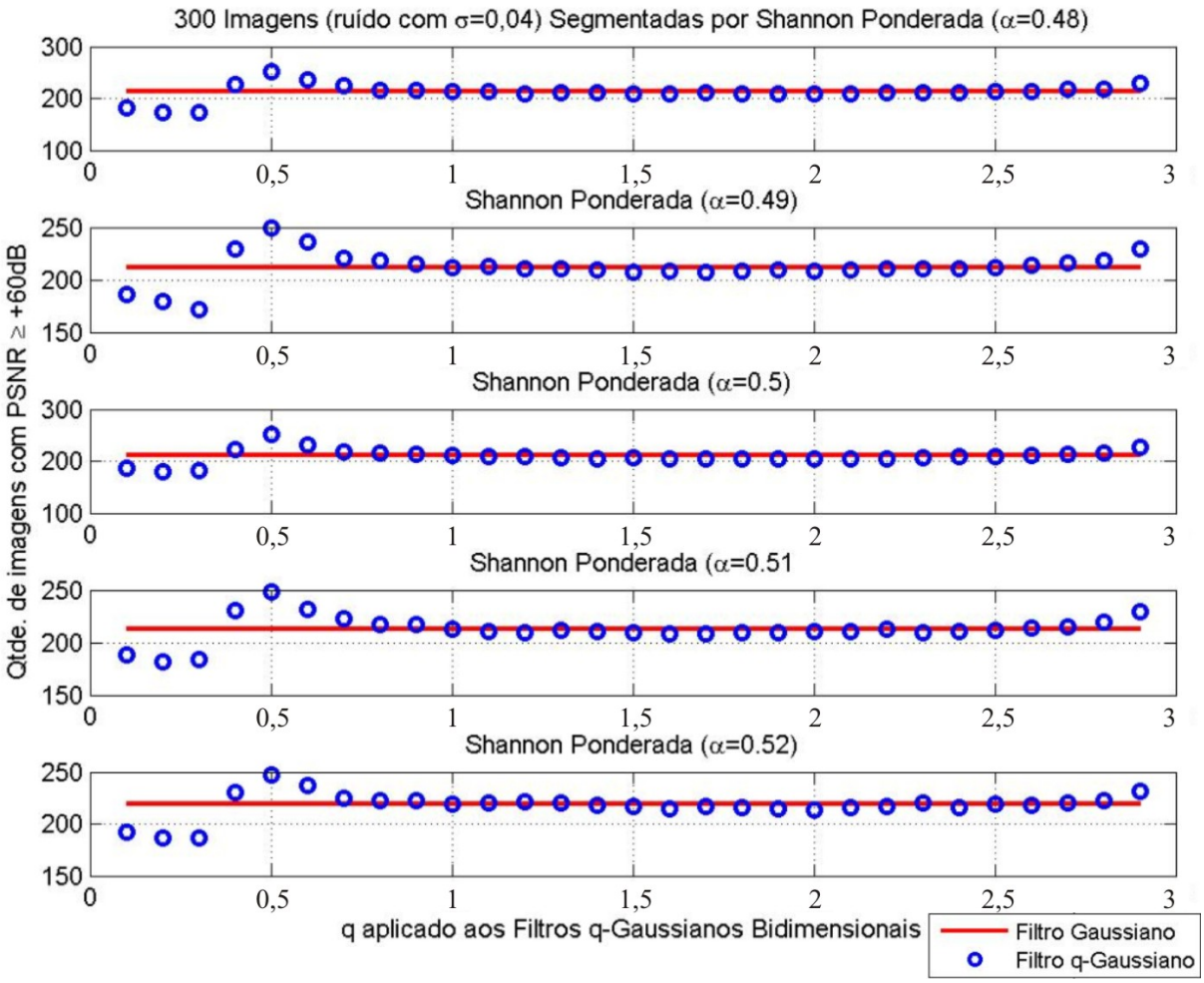
Pode-se notar na Figura 72 que houve uma mudança significativa na performance dos filtros q-Gaussianos bidimensionais no que diz respeito aos valores de q que mais produziram imagens acima do limiar de corte pré-estabelecido. Por exemplo, os filtros q-Gaussianos com valor de $q = 0{,}5$ foram aqueles que tiveram a melhor performance nas imagens que receberam ruídos com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2]$, entretanto, para ruídos com $\sigma = 0{,}4$, o valor de $q = 0{,}5$ produziu as menores quantidades. Por outro lado, os valores de q pertencentes ao intervalo $(1{,}1 \leq q \leq 2{,}4)$, que não haviam produzido maiores quantidades de imagens do que os filtros Gaussianos tradicionais para $\sigma = [0{,}04; 0{,}2]$, quando aplicados sobre imagens que receberam ruídos com

$\sigma = 0{,}4$, produziram maiores quantidades de imagens com $PSNR \geq +60dB$, se comparadas às quantidades produzidas pelos filtros Gaussianos tradicionais.

A partir deste ponto são exibidos os resultados obtidos a partir dos experimentos de segmentação de imagens pela entropia de Shannon Ponderada. As Figuras 73, 74 e 75 mostram todos os resultados obtidos, considerando também o limiar de corte com $PSNR \geq +60dB$.

A Figura 73 mostra os gráficos com os resultados a partir da segmentação pela entropia de Shannon Ponderada, com os valores de $\sigma = \{0{,}48; 0{,}49; ...; 0{,}52\}$. Os resultados tiveram origem nas imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$.

Figura 73 – Quantidade de segmentações pela entropia de Shannon Ponderada, as quais produziram segmentações com $PSNR \geq +60dB$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$.

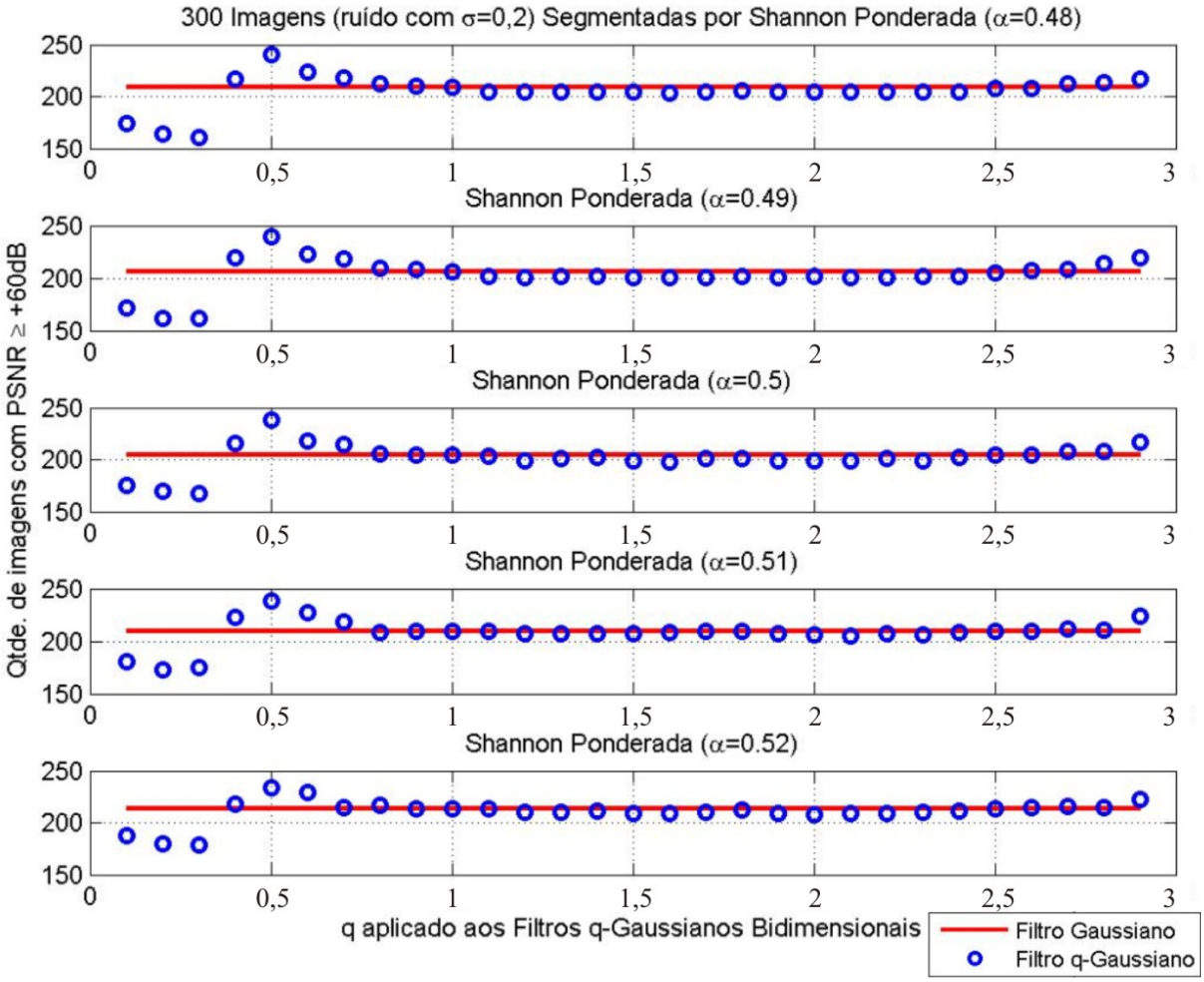


Fonte: Autor. Os valores de q utlizados nos filtros q-Gaussianos bidimensionais estão representados no eixo x dos gráficos. Os valores de α utilizados na segmentação pela entropia de Shannon Ponderada estão indicados acima de cada gráfico.

Pode-se observar nos resultados exibidos na Figura 73 que, por exemplo, os filtros q-Gaussianos com os valores de $q = [0{,}4; 0{,}5; ...; 0{,}7]$ e também com $q = 2{,}9$, produziram maiores quantidades de imagens com $PSNR \geq +60dB$ do que os filtros Gaussianos tradicionais, em todos os valores de α utilizados na entropia de Shannon Ponderada.

A Figura 74 mostra os gráficos com os resultados a partir da segmentação pela entropia de Shannon Ponderada, com os valores de $\alpha = \{0{,}48; 0{,}49; ...; 0{,}52\}$. Os resultados tiveram origem nas imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$.

Figura 74 – Quantidade de segmentações feitas pela entropia de Shannon Ponderada, as quais produziram segmentações com $PSNR \geq +60dB$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$.

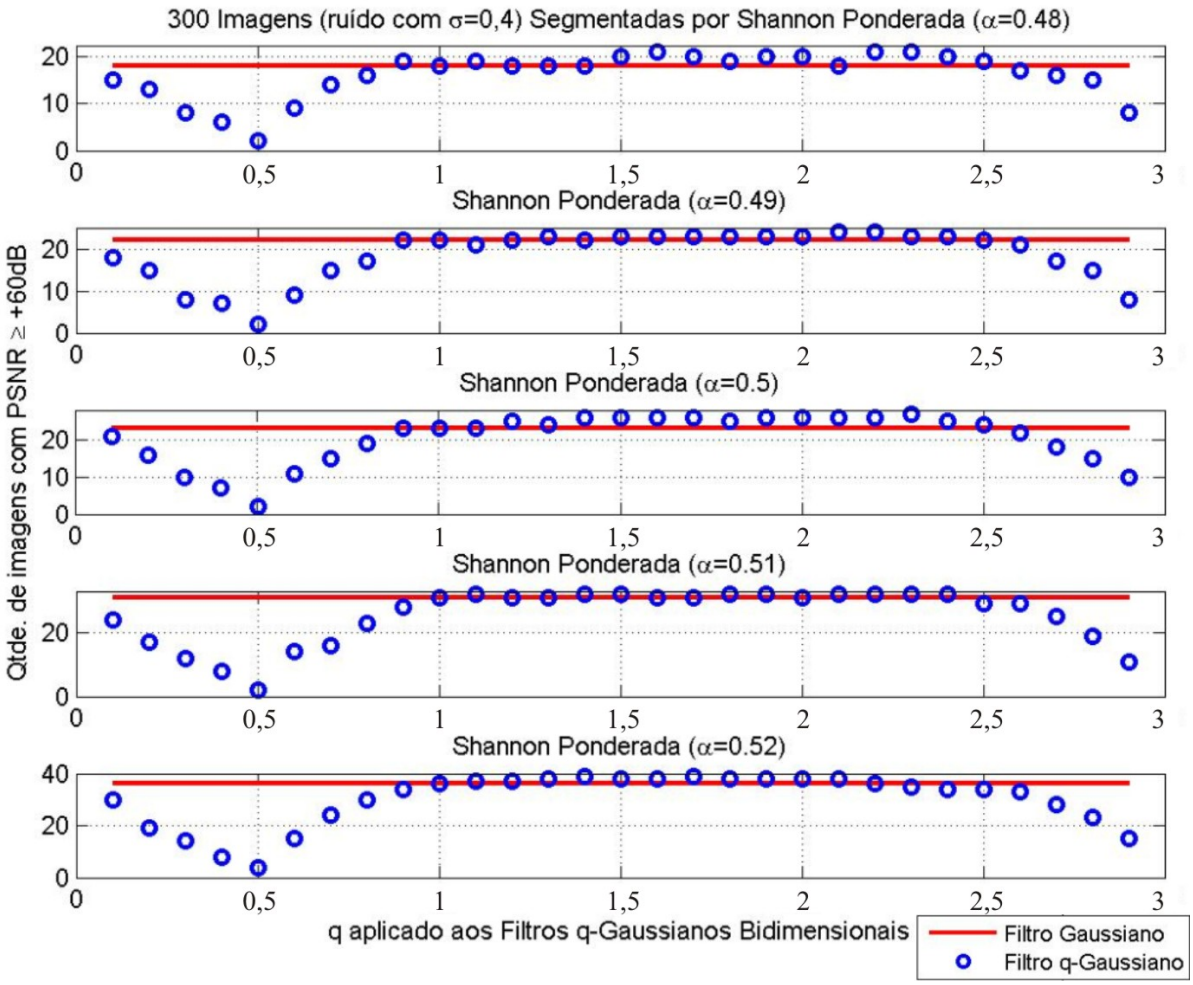


Fonte: Autor. Os valores de q utlizados nos filtros q-Gaussianos bidimensionais estão representados no eixo x dos gráficos. Os valores de α utilizados na segmentação pela entropia de Shannon Ponderada estão indicados acima de cada gráfico.

Para as imagens que receberam ruído com $\sigma = 0{,}2$, a Figura 74 mostra que a performance dos filtros q-Gaussianos é bastante semelhante àquelas observadas com as imagens que receberam ruído com $\sigma = 0{,}04$, exibidas na Figura 73, indicando os valores de $q = [0{,}4; 0{,}5; ...; 0{,}7]$ e também com $q = 2{,}9$, como aqueles que produziram as maiores quantidades de imagens com $PSNR \geq +60dB$.

A Figura 75 mostra os gráficos com os resultados a partir da segmentação pela entropia de Shannon Ponderada com os valores de $\sigma = \{0{,}48; 0{,}49; ...; 0{,}52\}$. Os resultados tiveram origem nas imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$.

Figura 75 – Quantidade de segmentações feitas pela entropia de Shannon Ponderada, as quais produziram segmentações com $PSNR \geq +60dB$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$.



Fonte: Autor. Os valores de q utlizados nos filtros q-Gaussianos bidimensionais estão representados no eixo x dos gráficos. Os valores de α utilizados na segmentação pela entropia de Shannon Ponderada estão indicados acima de cada gráfico.

Para as imagens que receberam ruído com $\sigma = 0{,}4$, da mesma forma como foi observado nos experimentos com a q-Entropia exibidos na Figura 72, nota-se uma alteração no comportamento do filtro q-Gaussiano bidimensional, no que se refere à quantidade de imagens produzidas acima do limiar de $PSNR \geq +60dB$. Nota-se, por exemplo, que o filtro q-Gaussiano com $q = 0{,}5$ foi aquele que produziu a menor quantidade de imagens segmentadas com $PSNR \geq +60dB$. Todos os valores de $q < 0{,}9$, assim como todo os valores de $q > 2{,}5$, produziram uma menor quantidade de imagens segmentadas com $PSNR \geq +60dB$, em todos os valores de α utilizados na entropia de Shannon Ponderada.

Como pode-se observar, uma série de análises podem ser extraídas dos resultados obtidos a partir da segmentação pela q-Entropia, mostrados nas Figuras 70, 71 e 72, e também aqueles obtidos a partir da segmentação pela entropia de Shannon Ponderada, mostrados nas Figuras 73, 74 e 75.

Para ilustrar a quantidade de informação que pode ser apurada a partir dos resultados obtidos, a Figura 76 apresenta todos os valores das quantidades computadas de imagens segmentadas com $PSNR \geq +60dB$, a partir de imagens que receberam ruído com $\sigma = 0{,}2$ em todos os experimentos realizados com as segmentações pela q-Entropia e entropia de Shannon Ponderada.

A Figura 76 mostra um comparativo entre as quantidades de segmentações obtidas pela q-Entropia e pela entropia de Shannon Ponderada, com valores de $PSNR \geq +60dB$. Nestes resultados foram considerados apenas as imagens que receberam ruído Gaussiano com $sigma = 0{,}2$ antes de serem filtradas.

Figura 76 – Quantidade de segmentações com $PSNR \geq +60dB$ das imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$ e foram filtradas com filtros q-Gaussianos.

(a) q Filtros	q = 0,8	α = 0,48	q = 0,9	α = 0,49	(b) q = 1	(c) α = 0,5	q = 1,1	α = 0,51	q = 1,2	α = 0,52	(d) TS q-Entropia	(e) WS Shannon P.	(f) WS-TS
0,1	178	174	174	172	175	175	178	181	177	188	0	0	0
0,2	173	164	168	162	170	170	171	173	170	180	0	0	0
0,3	171	161	167	162	167	167	168	175	169	179	0	0	0
0,4	219	217	214	219	216	216	215	223	213	218	49	51	2
0,5	237	240	236	240	238	238	232	238	233	234	148	148	0
0,6	224	224	219	223	218	218	219	227	225	229	77	79	2
0,7	219	218	213	218	215	215	218	218	218	215	55	42	-13
0,8	210	212	204	210	206	206	209	208	208	217	9	8	-1
0,9	209	210	202	208	204	204	208	210	207	213	3	3	0
(g) 1	208	209	200	206	205	205	208	209	207	213	0	0	0
1,1	207	204	199	202	203	203	205	209	203	213	0	0	0
1,2	201	204	196	201	199	199	201	207	199	210	0	0	0
1,3	203	204	197	202	201	201	202	207	200	210	0	0	0
1,4	204	204	197	202	202	202	203	207	200	211	0	0	0
1,5	202	204	196	201	199	199	201	207	200	209	0	0	0
1,6	203	203	197	201	198	198	201	208	200	209	0	0	0
1,7	203	204	196	201	201	201	203	209	199	210	0	0	0
1,8	204	206	197	202	201	201	203	209	200	212	0	0	0
1,9	203	204	197	201	199	199	201	207	198	209	0	0	0
2	202	204	197	202	199	199	201	206	200	208	0	0	0
2,1	203	204	196	201	199	199	201	205	198	209	0	0	0
2,2	202	205	197	201	201	201	202	207	201	209	0	0	0
2,3	202	205	196	202	199	199	202	206	200	210	0	0	0
2,4	205	205	198	202	202	202	204	208	200	211	-3	0	3
2,5	208	208	200	205	204	204	205	210	206	213	0	1	1
2,6	209	208	202	207	205	205	207	210	206	215	3	4	1
2,7	210	212	203	208	208	208	209	212	208	216	10	14	4
2,8	212	213	206	214	208	208	211	211	212	215	21	19	-2
2,9	220	217	217	219	217	217	218	224	219	222	63	57	-6
(h)	89	82	116	106	86	86	67	93	80	64	438	425	-9

Fonte: Autor. Valores em destaque na cor amarela representam maiores quantidades obtidas pelos filtros q-Gaussianos em relação ao Gaussiano tradicional após a segmentação pela q-Entropia, o mesmo para a cor azul, porém após a segmentação pela entropia de Shannon Ponderada.

Na Figura 76, as colunas indicadas com valores do parâmetro $q = \{0{,}8; 0{,}9; ...; 1{,}2\}$ mostram as quantidades obtidas pela q-Entropia, enquanto que nas colunas com valores do parâmetro $\alpha = \{0{,}48; 0{,}49; ...; 0{,}52\}$ são exibidas as quantidades obtidas pela entropia de Shannon Ponderada. Observa-se que as quantidades indicadas nas colunas (b) e (c) são idênticas, pois para os valores de $q = 1$ e $\alpha = 0{,}5$ as respectivas entropias reduzem-se à entropia BGS.

A coluna (a) da Figura 76 indica os valores de q utilizados nos filtros q-Gaussianos bidimensionais. Quando $q = 1$, a função q-Gaussiana bidimensional reduz-se à função Gaussiana tradicional, portanto, a linha com a indicação (g), onde $q = 1$, representa as quantidades obtidas

a partir do filtro Gaussiano tradicional, utilizado como comparação entre os resultados obtidos, motivo pelo qual a linha inteira aparece em destaque na Figura 76.

Para alguns valores de q dos filtros q-Gaussianos, indicados na coluna (a), foram obtidas quantidades de imagens com $PSNR \geq +60dB$ a mais do que as obtidas pelo filtro Gaussiano tradicional. Nestes casos, as quantidades são destacadas na cor amarela (para a q-Entropia) e azul (para a entropia de Shannon Ponderada). Estes valores destacados evidenciam as melhores performances dos respectivos valores de q no filtro q-Gaussiano, indicados na coluna (a). Para exemplificar esta análise, nota-se que na linha do filtro q-Gaussiano onde $q = 0{,}9$, há 209 segmentações produzidas pela q-Entropia (com $q = 0{,}8$), contra 208 do filtro Gaussiano tradicional indicado na linha (g); há 202 segmentações pela q-Entropia (com $q = 0{,}9$), contra 200 do filtro Gaussiano tradicional. Portanto, o somatório de 3 valores a mais é indicado na coluna (d).

Assim, nas colunas (d) e (e) foram computadas os somatórios das quantidades de segmentações com valores além daqueles computados pelos filtros Gaussiano tradicional, para a q-Entropia (TS) e para a entropia de Shannon Ponderada (WS). Por exemplo, foram encontradas 219 imagens segmentadas pela q-Entropia com $q = 0{,}8$, dentro do limiar $PSNR \geq +60dB$, que foram filtradas por filtro q-Gaussiano com $q = 0{,}4$. Entretanto, filtradas com filtro q-Gaussiano com $q = 1$ são apenas 208 imagens. A diferença, $219 - 208 = 11$ imagens, que, somadas com as diferenças obtidas em relação à segmentação pela q-Entropia com $q = \{0{,}9; 1{,}0; ..; 1{,}2\}$, resulta em $TS = 49$ imagens, como indica a coluna (d).

A coluna (f) indica a diferença entre estes dois somatórios, computando $(WS - TS)$. Nesta coluna, os valores negativos indicam vantagem para as quantidades obtidas pela q-Entropia, enquanto que os valores positivos indicam que as quantidades obtidas pela entropia de Shannon Ponderada são maiores do que aqueles obtidos pela q-Entropia. Deste modo, basta observar a coluna (f) para identificar qual das duas técnicas de segmentação obteve melhor performance nestes experimentos. Por exemplo, para os filtros q-Gaussianos com $q = 0{,}6$ há 2 segmentações a mais à favor da entropia de Shannon Ponderada, enquanto que para $q = 0{,}7$ nos filtros q-Gaussianos a vantagem é de 13 segmentações a mais para a q-Entropia.

Observando-se as segmentações pela q-Entropia, foram computadas 148 segmentações a mais na coluna (d), feitas a partir do filtro q-Gaussiano com $q = 0{,}5$ em comparação ao filtro Gaussiano tradicional. Ao observar as segmentações pela entropia de Shannon Ponderada na coluna (e), encontram-se também 148 segmentações a mais. Ao comparar os resultados através da diferença entre Shannon Ponderada (WS) e q-Entropia (TS) obtém-se 0 segmentações

indicadas na coluna (f) da Figura 76, ou seja, ambas as segmentações ofereceram a mesma performance, considerando este grupo de imagens analisadas.

Ao final da coluna (f), foi mostrado que, no total deste grupo de imagens, há 9 segmentações pela *q*-Entropia, com $PSNR \geq +60dB$, a mais do que aquelas obtidas pela entropia de Shannon Ponderada.

Ainda observando-se a Figura 76, a linha indicada por (h) mostra um somatório de cada coluna, computando-se apenas as quantidades de segmentações a mais do que aquelas obtidas pelo filtro Gaussiano tradicional. Por exemplo, nota-se que a *q*-Entropia com $q = 0{,}9$ produziu 116 segmentações com $PSNR \geq +60dB$ a mais do que o filtro Gaussiano tradicional, sendo este valor de q que obteve a melhor performance, em quantidade, neste grupo de segmentações. Observando-se a entropia de Shannon Ponderada, nota-se que a melhor performance em quantidade foi obtida pelo valor de $\alpha = 0{,}49$, com 106 segmentações a mais do que aquelas obtidas pelo filtro Gaussiano tradicional.

Apesar de não ser o objetivo central desta tese comparar a performance da *q*-Entropia e da entropia de Shannon Ponderada em relação à entropia BGS, é possível observar que a *q*-Entropia com $q = 0{,}9$ produziu 30 segmentações com $PSNR \geq +60dB$ a mais do que a entropia BGS, enquanto que a entropia de Shannon Ponderada produziu 20 a mais do que a entropia BGS, esta representada pelos valores das colunas (b) e (c).

A seguir, são exibidas nas Figuras 77 e 78, todas as quantidades obtidas com segmentações pela *q*-Entropia e pela entropia de Shannon Ponderada, a partir das imagens que receberam ruído Gaussiano, respectivamente com $\sigma = 0{,}04$ e $\sigma = 0{,}4$.

Na Figura 77, são exibidas as quantidades de segmentações obtidas a partir dos resultados das imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$. Nota-se, de modo geral, um comportamento bastante compatível com aqueles observados para as imagens com $\sigma = 0{,}2$, exibidos na Figura 76, com as maiores quantidades de segmentações com $PSNR \geq +60dB$ encontradas para os valores de q dos filtros *q*-Gaussianos dentro do intervalo de $(0{,}4 \leq q \leq 0{,}9)$ e também para $q \geq 2{,}6$. Entretanto, no cômputo total dos experimentos com imagens que receberam ruído com $\sigma = 0{,}04$, foram somadas 23 segmentações com $PSNR \geq +60dB$, a partir da entropia de Shannon Ponderada a mais do que as quantidades obtidas pela *q*-Entropia.

Figura 77 – Quantidade de segmentações com $PSNR \geq +60dB$ das imagens receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$ e foram filtradas com filtros q-Gaussianos.

(a) q Filtros	q = 0,8	α = 0,48	q = 0,9	α = 0,49	(b) q = 1	(c) α = 0,5	q = 1,1	α = 0,51	q = 1,2	α = 0,52	(d) TS q-Entropia	(e) WS Shannon P.	(f) WS-TS
0,1	186	181	184	186	186	186	187	188	184	192	0	0	0
0,2	181	173	178	180	180	180	182	182	181	186	0	0	0
0,3	179	174	181	172	182	182	184	184	183	186	0	0	0
0,4	225	227	223	229	223	223	225	231	228	230	65	71	6
0,5	252	251	248	250	251	251	248	248	247	247	187	178	-9
0,6	229	235	228	236	231	231	232	232	232	237	93	102	9
0,7	220	224	216	221	219	219	223	223	223	225	42	43	1
0,8	217	216	212	218	216	216	219	217	217	222	22	20	-2
0,9	215	215	211	215	214	214	218	217	217	222	16	14	-2
(g) 1	211	214	210	212	211	211	214	213	213	219	0	0	0
1,1	208	214	205	213	209	209	212	211	212	220	0	2	2
1,2	207	210	204	211	209	209	209	210	209	221	0	2	2
1,3	206	211	203	211	206	206	207	212	206	220	0	1	1
1,4	204	211	202	210	205	205	207	211	205	218	0	0	0
1,5	206	209	202	207	206	206	206	210	206	217	0	0	0
1,6	204	210	202	208	205	205	205	208	205	215	0	0	0
1,7	204	211	202	207	205	205	206	208	205	217	0	0	0
1,8	204	210	202	208	205	205	206	210	205	216	0	0	0
1,9	205	210	202	209	205	205	205	209	205	215	0	0	0
2	204	210	202	208	204	204	204	211	204	214	0	0	0
2,1	205	210	202	210	204	204	206	211	205	216	0	0	0
2,2	205	211	202	211	204	204	206	213	207	217	0	0	0
2,3	207	211	203	211	207	207	209	210	207	220	0	1	1
2,4	207	212	205	211	208	208	212	211	210	216	0	0	0
2,5	209	213	207	212	210	210	211	212	212	219	0	0	0
2,6	212	214	208	214	211	211	212	214	209	218	1	3	2
2,7	212	217	210	216	213	213	217	215	216	220	9	12	3
2,8	217	219	213	218	216	216	218	219	219	223	24	26	2
2,9	227	230	223	230	226	226	229	230	225	231	71	78	7
(h)	116	108	94	128	110	110	103	116	107	90	529	547	23

Fonte: Autor. Valores em destaque na cor amarela representam maiores quantidades obtidas pelos filtros q-Gaussianos em relação ao Gaussiano tradicional após a segmentação pela q-Entropia, o mesmo para a cor azul, porém após a segmentação pela entropia de Shannon Ponderada.

Para o caso das imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$, portanto com grande quantidade de ruído, medido por baixos valores de $PSNR$, como indicados nas Figuras 64 e 65, houve uma mudança no comportamento geral observado a partir das quantidades de imagens segmentadas com $PSNR \geq +60dB$, conforme mostra a Figura 78. Diferentemente dos resultados obtidos a partir das imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2]$ e mostradas nas Figuras 76, e 77, aqui, as maiores quantidades foram observadas para valores de q dos filtros q-Gaussianos compreendidos no intervado de $1{,}1 \leq q \leq 2{,}6$. Esta mudança

de comportamento observada demonstra uma sensibilidade do parâmetro q aplicado aos filtros q-Gaussianos, relacionada com a quantidade de ruído existente na imagem a ser filtrada.

Figura 78 – Quantidade de segmentações com $PSNR \geq +60dB$ das imagens receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$ e foram filtradas com filtros q-Gaussianos.

	(a)					(b)	(c)					(d)	(e)	(f)
	q Filtros	q = 0,8	α = 0,48	q = 0,9	α = 0,49	q = 1	α = 0,5	q = 1,1	α = 0,51	q = 1,2	α = 0,52	TS q-Entropia	WS Shannon P.	WS-TS
	0,1	20	15	20	18	21	21	20	24	20	30	0	0	0
	0,2	14	13	15	15	16	16	16	17	16	19	0	0	0
	0,3	9	8	9	8	10	10	11	12	11	14	0	0	0
	0,4	8	6	8	7	7	7	7	8	6	8	0	0	0
	0,5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	0	0	0
	0,6	11	9	11	9	11	11	12	14	13	15	0	0	0
	0,7	15	14	15	15	15	15	16	16	16	24	0	0	0
	0,8	19	16	20	17	19	19	20	23	20	30	0	0	0
	0,9	22	19	21	22	23	23	23	28	23	34	0	1	1
(g)	1	25	18	22	22	23	23	24	31	23	36	0	0	0
	1,1	26	19	24	21	23	23	25	32	24	37	5	3	-2
	1,2	27	18	26	22	25	25	25	31	24	37	10	3	-7
	1,3	26	18	23	23	24	24	24	31	26	38	6	4	-2
	1,4	27	18	25	22	26	26	27	32	27	39	15	7	-8
	1,5	25	20	26	23	26	26	27	32	27	38	14	9	-5
	1,6	25	21	27	23	26	26	27	31	26	38	14	9	-5
	1,7	26	20	26	23	26	26	26	31	26	39	13	9	-4
	1,8	26	19	25	23	25	25	27	32	26	38	12	7	-5
	1,9	27	20	26	23	26	26	27	32	26	38	15	9	-6
	2	25	20	25	23	26	26	27	31	25	38	11	8	-3
	2,1	27	18	27	24	26	26	26	32	25	38	14	8	-6
	2,2	27	21	26	24	26	26	27	32	26	36	15	9	-6
	2,3	26	21	26	23	27	27	27	32	25	35	14	9	-5
	2,4	26	20	25	23	25	25	24	32	25	34	8	6	-2
	2,5	25	19	23	22	24	24	23	29	23	34	2	2	0
	2,6	22	17	23	21	22	22	22	29	21	33	1	0	-1
	2,7	19	16	18	17	18	18	19	25	19	28	0	0	0
	2,8	16	15	16	15	15	15	15	19	17	23	0	0	0
	2,9	9	8	9	8	10	10	11	11	11	15	0	0	0
	(h)	16	23	51	13	36	36	30	9	36	22	168	101	-66

Fonte: Autor. Valores em destaque na cor amarela representam maiores quantidades obtidas pelos filtros q-Gaussianos em relação ao Gaussiano tradicional após a segmentação pela q-Entropia, o mesmo para a cor azul, porém após a segmentação pela entropia de Shannon Ponderada.

Observa-se também, na Figura 78, que no cômputo total dos experimentos com imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$, foram encontradas 66 segmentações com $PSNR \geq +60dB$, a partir da q-Entropia, a mais do que as quantidades obtidas pela entropia de Shannon Ponderada, conforme indica a soma total da coluna (f).

6.2.3.4 Análise do Índice $Kappa$ das Imagens Segmentadas

De acordo com a metodologia descrita na Seção 6.2.2, ilustrada pela Figura 39, a partir das imagens segmentadas pelas duas técnicas de segmentação, a saber, a q-Entropia com $q = \{0{,}8; 0{,}9; ...; 1{,}2\}$ e a entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = \{0{,}48; 0{,}49; ...; 0{,}52\}$, aplicadas sobre as imagens filtradas, foram feitas análises utilizando o índice $Kappa$, descrito na Seção 2.9.1.

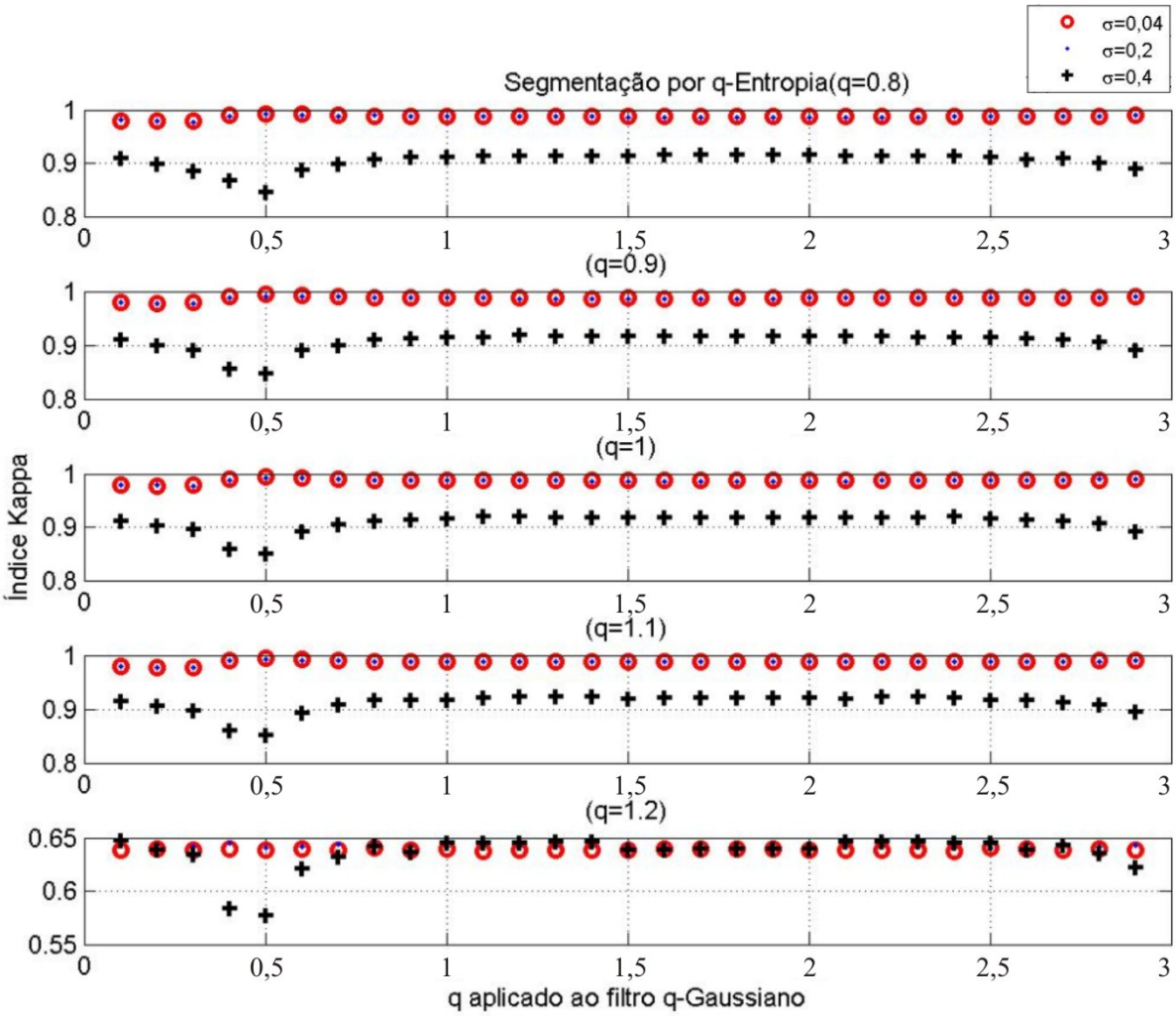
Para o cálculo do índice $Kappa$, foram feitas comparações entre as imagens filtradas segmentadas $\times$ imagem original segmentada e os resultados são apresentados na presente seção.

A - Consolidação dos Resultados Através do Índice Kappa - Etapa 1

Para iniciar, foram consolidados os resultados do índice $Kappa$ dos experimentos de segmentação das imagens filtradas sobre cada imagem original. Como exemplos, as Figuras 79 e 81 exibem os resultados das segmentações pela q-Entropia e pela entropia de Shannon Ponderada, respectivamente, indicando o índice $Kappa$ a partir da mesma imagem original.

Os gráficos exibidos na Figura 79 mostram os resultados dos índices $Kappa$ referentes à segmentação pela q-Entropia com $q = \{0{,}8; 0{,}9; ...; 1{,}2\}$, a partir da imagem original mostrada na Figura 56 (a), que recebeu ruídos Gaussianos com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$ e que foram filtradas por filtros q-Gaussianos com $q = \{0{,}1; 0{,}2...; 2{,}9\}$.

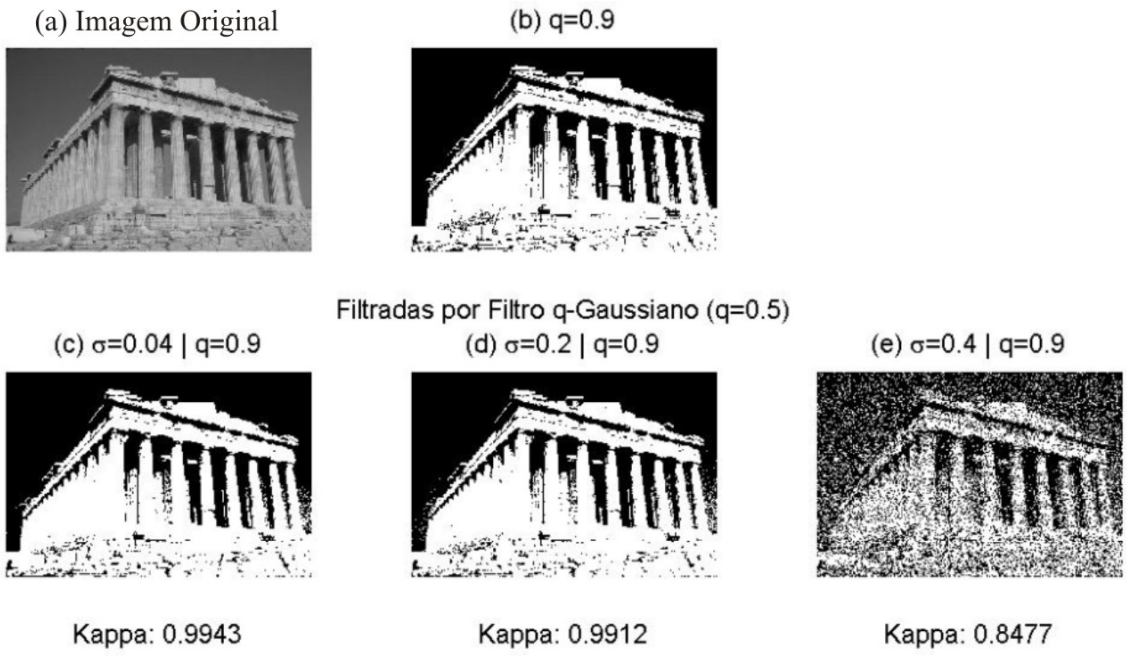
Figura 79 – Exemplo de valores do índice $Kappa$ calculado entre as segmentações das imagens filtradas $\times$ imagem original, a partir de uma imagem da base de *Berkeley*.



Fonte: Autor. Todas as imagens receberam filtro q-Gaussiano bidimensional com valores de q indicados no eixo x dos gráficos. Todas as imagens filtradas foram segmentadas pela q-Entropia com valores de q indicados acima de cada gráfico.

A Figura 80 mostra exemplos de segmentação pela q-Entropia, a partir da imagem original mostrada na Figura 56 (a) e que, por conveniência, é repetida aqui na Figura 80 (a).

Figura 80 – Exemplo de segmentação pela q-Entropia, com valor de $q = 0{,}9$

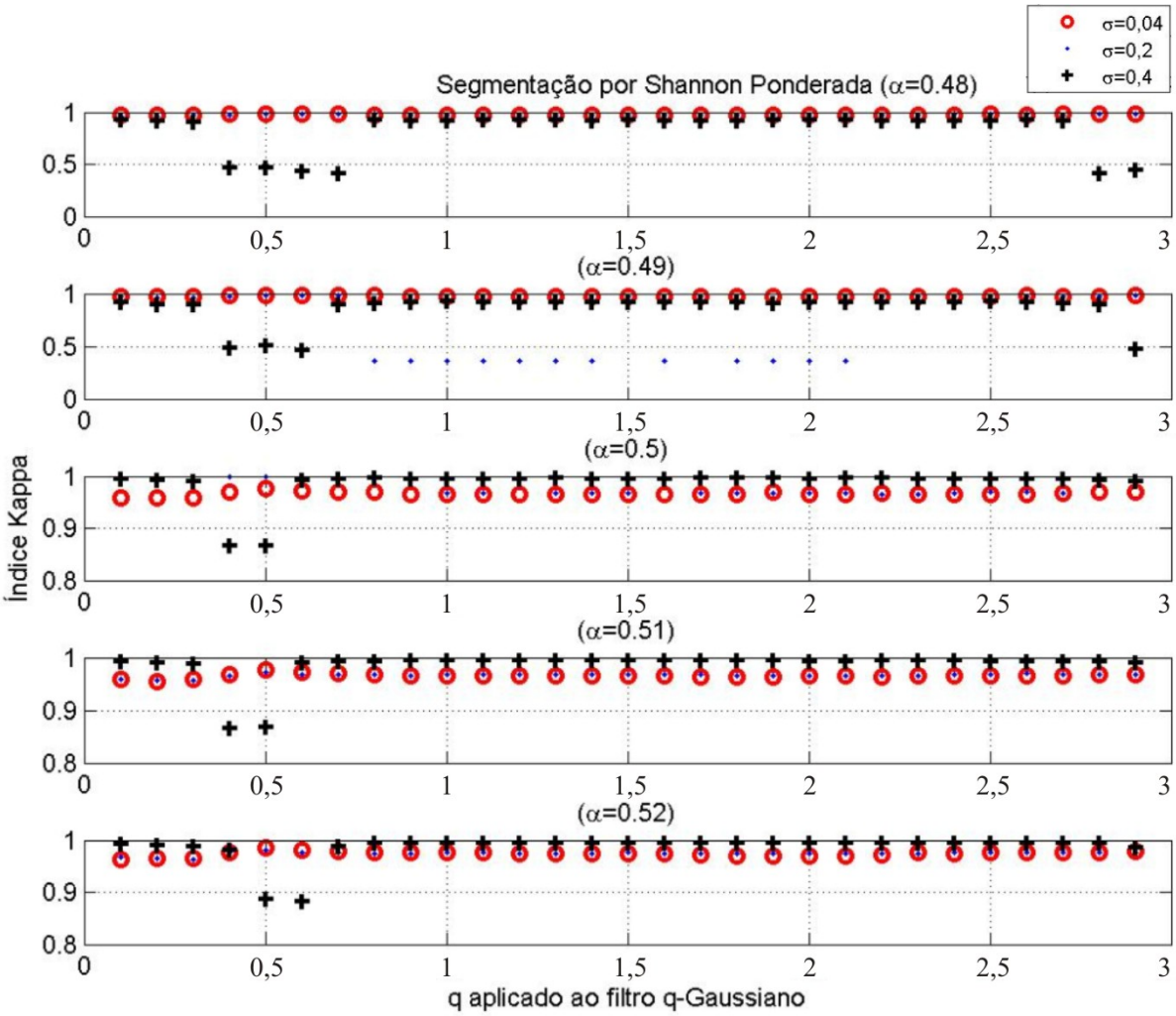


Fonte: Autor. (a) Imagem original. (b) Imagem original segmentada. As imagens em (c), (d) e (e) receberam ruído Gaussiano com valor de σ indicado acima da imagem, e foram filtradas por filtro q-Gaussiano com $q = 0{,}5$.

A partir da imagem original mostrada na Figura 80 (a) foi feita a segmentação pela q-Entropia com $q = 0{,}9$, cujo resultado é mostrado na Figura 80 (b). As imagens exibidas na Figura 80 (c), (d) e (e) receberam ruídos Gaussianos com valores de $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$, respectivamente. Em seguida, estas imagens com ruídos receberam o filtro q-Gaussiano com $q = 0{,}5$, para então serem segmentadas pela q-Entropia com $q = 0{,}9$. Na parte inferior das imagens da Figura 80 (c), (d) e (e) são indicados os respectivos índices $Kappa$ calculados pela comparação entre estas segmentações e a segmentação feita a partir da imagem original mostrada na Figura 80 (b).

Os gráficos exibidos na Figura 81 mostram todos os resultados dos índices $Kappa$, calculados sobre as segmentações pela entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = \{0{,}48; 0{,}49; ...; 0{,}52\}$, a partir da imagem original mostrada na Figura 56 (a) que recebeu ruídos Gaussianos com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$ e que foram filtradas por filtros q-Gaussianos bidimensionais com $q = \{0{,}1; 0{,}2...; 2{,}9\}$.

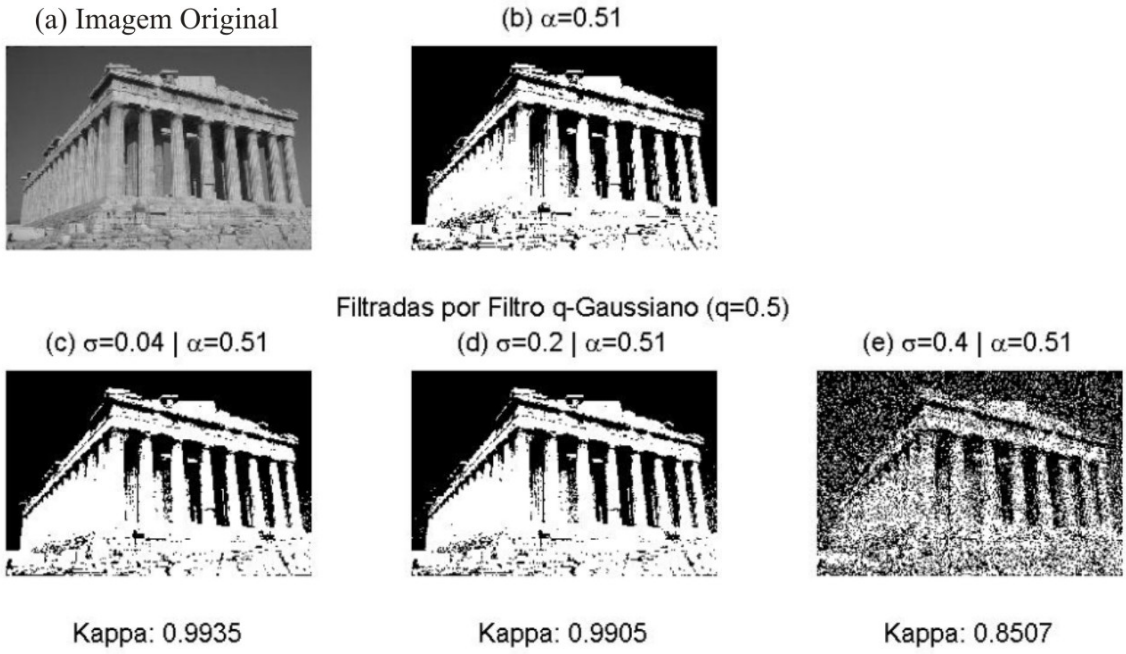
Figura 81 – Exemplo de valores do índice $Kappa$ calculado entre as segmentações das imagens filtradas $\times$ imagem original, a partir de uma imagem da base de *Berkeley*.



Fonte: Autor. As imagens foram filtradas por filtro q-Gaussiano bidimensional, com valores de q indicados no eixo x dos gráficos, e foram segmentadas pela entropia de Shannon Ponderada com valores de α indicados acima de cada gráfico.

A Figura 82 mostra exemplos de segmentação pela entropia de Shannon Ponderada, a partir da imagem original mostrada na Figura 56 (a), sendo esta repetida aqui na Figura 82 (a).

Figura 82 – Exemplo de segmentação pela entropia de Shannon Ponderada, com valor de $\alpha = 0{,}51$.



Fonte: Autor. (a) Imagem original. (b) Imagem segmentada. As imagens em (c), (d) e (e) receberam ruído Gaussiano indicados pelo valor de σ, e foram filtradas por filtro q-Gaussiano com $q = 0{,}5$.

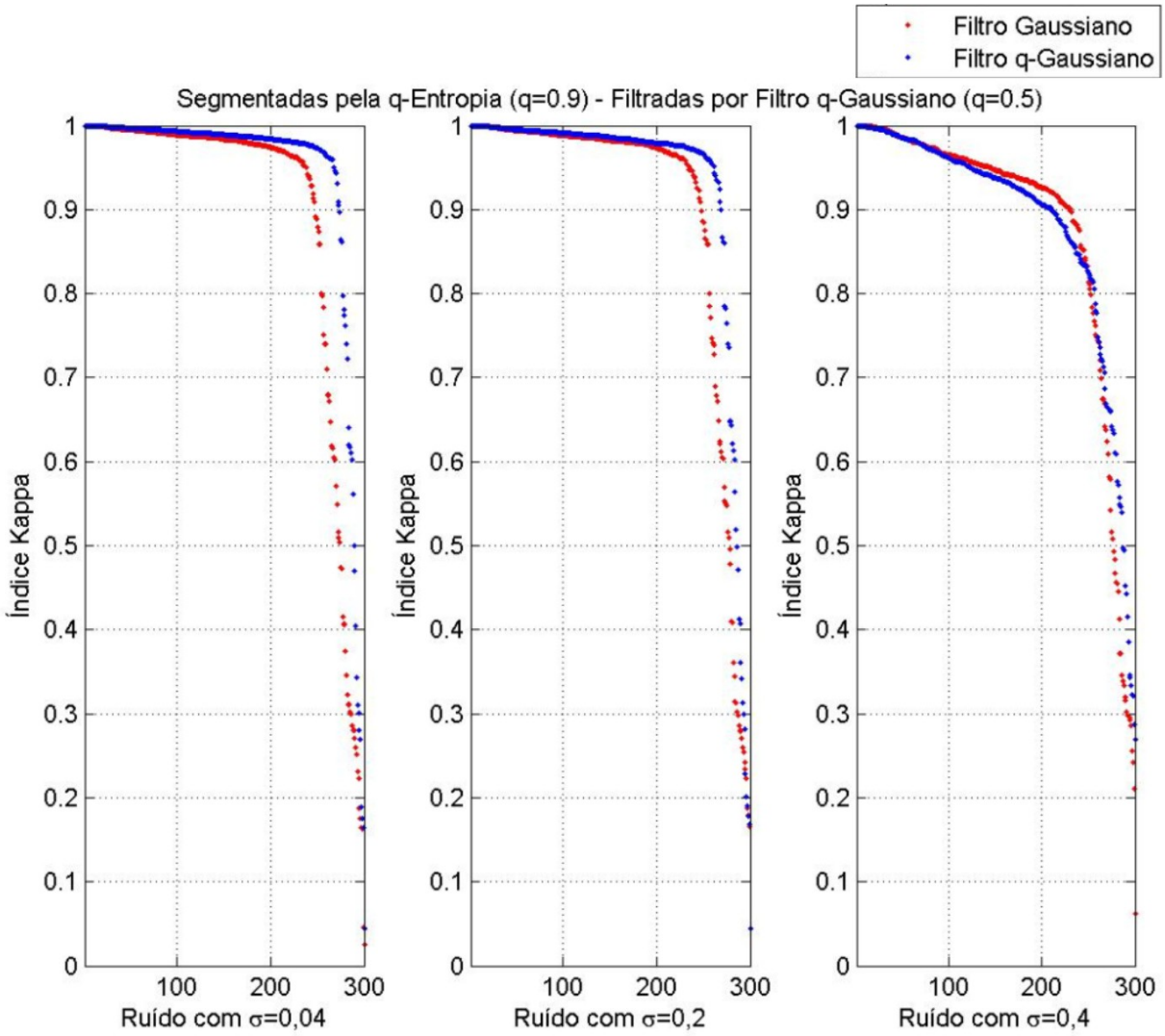
A partir da imagem original mostrada na Figura 82 (a) foi feita a segmentação pela entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = 0{,}51$, mostrada na Figura 82 (b). As imagens exibidas na Figura 82 (c), (d) e (e) receberam ruídos Gaussianos com valores de $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$, respectivamente. Em seguida, estas imagens com ruídos receberam o filtro q-Gaussiano com $q = 0{,}5$ para então serem segmentadas pela entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = 0{,}51$. Na parte inferior das imagens da Figura 82 (c), (d) e (e) são indicados os respectivos índices $Kappa$ calculados pela comparação entre estas segmentações e a segmentação realizada a partir da imagem original mostrada na Figura 82 (b).

B - Consolidação dos Resultados Através do Índice Kappa - Etapa 2

A partir dos resultados agrupados por imagem original, conforme mostrado nas Figuras 79 e 81, nesta etapa foram consolidados os resultados considerando-se todas as 300 imagens originais da base de *Berkeley*. Para ilustrar tais resultados, as Figuras 83 e 84 exibem as segmentações realizadas pela q-Entropia e pela entropia de Shannon Ponderada, respectivamente, considerando-se as 300 imagens da base de *Berkeley*.

Os gráficos exibidos na Figura 83 mostram os valores de $Kappa$ classificados em ordem decrescente, referentes à segmentação pela q-Entropia com $q = 0{,}9$ - valores de q escolhido para este exemplo - considerando as 300 imagens originais que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$ e que foram filtradas por filtros q-Gaussianos bidimensionais com $q = 0{,}5$, também escolhido ao acaso neste exemplo.

Figura 83 – Exemplo de valores do índice $Kappa$ classificados em ordem decrescente. Imagens filtradas por filtro q-Gaussiano bidimensional com $q = 0{,}5$ e foram segmentadas pela q-Entropia de Tsallis com $q = 0{,}9$.

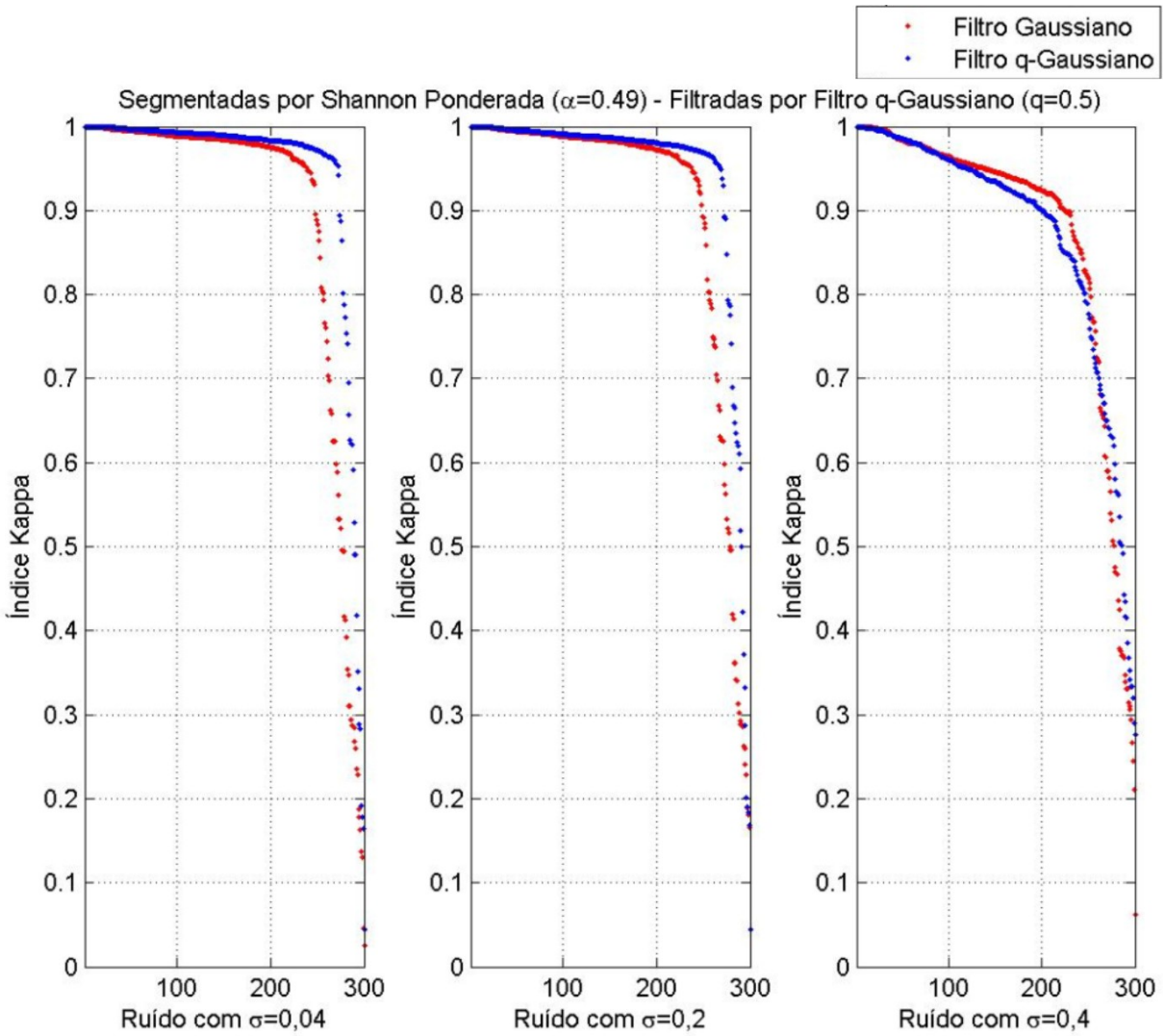


Fonte: Autor. $Kappa$ calculado entre as segmentações das imagens filtradas $\times$ imagem original.

Os gráficos exibidos na Figura 84, mostram os valores de $Kappa$ classificados em ordem decrescente, referentes à segmentação pela entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = 0{,}49$, es-

colhido para exemplificar estes procedimentos, considerando às 300 imagens originais que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$ e que foram filtradas por filtros q-Gaussianos bidimensionais com $q = 0{,}5$, escolhido ao acaso para ilustrar este exemplo.

Figura 84 – Exemplo de valores do índice $Kappa$ classificados em ordem decrescente. Imagens filtradas por filtro q-Gaussiano bidimensional com $q = 0{,}5$ e segmentadas pela entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = 0{,}49$.



Fonte: Autor. $Kappa$ calculado entre as segmentações das imagens filtradas $\times$ imagem original.

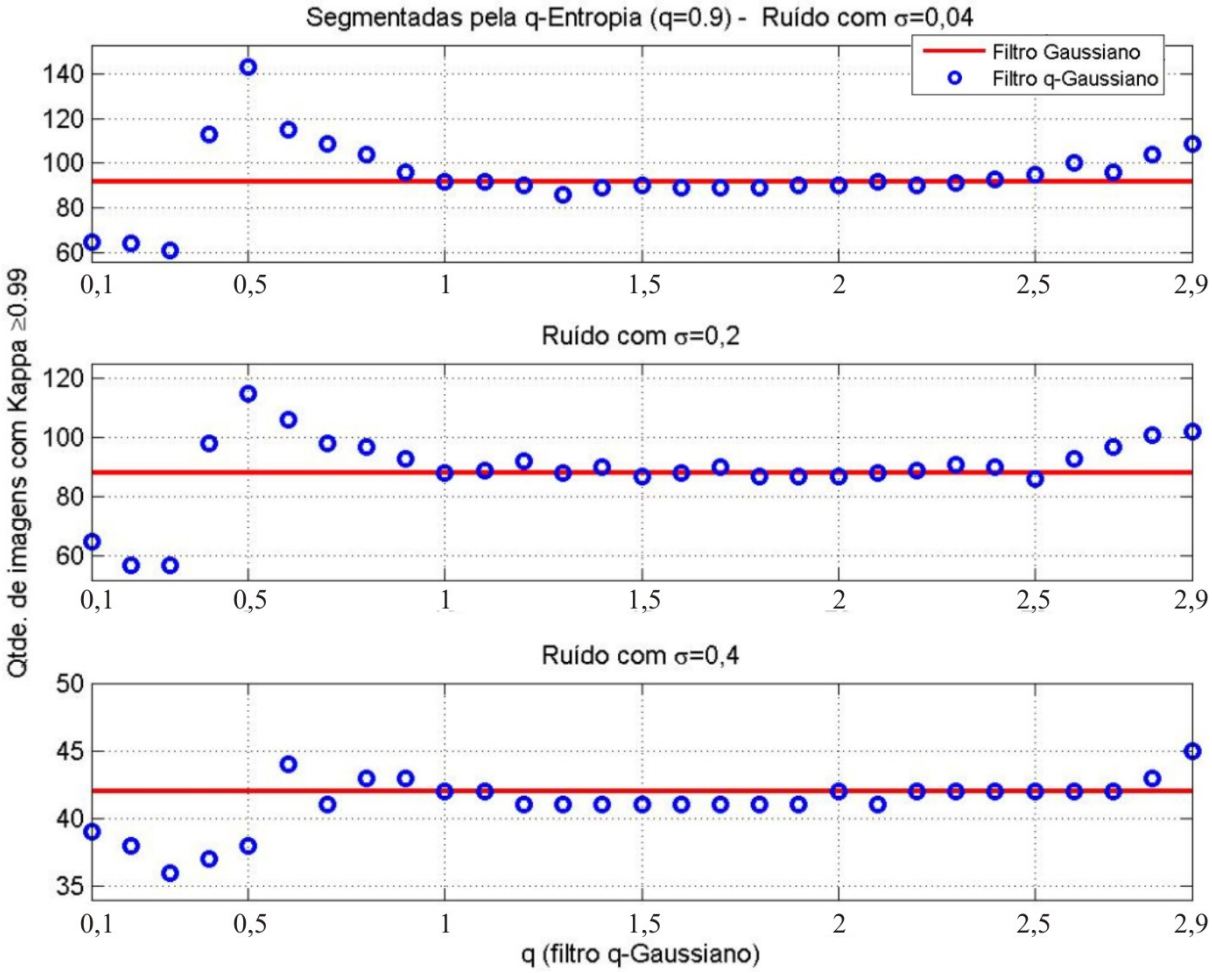
C - Consolidação dos Resultados Através do Índice Kappa - Etapa 3

Tomando-se os valores de $Kappa$ ordenados de forma decrescente, como mostrado nas Figuras 83 e Figura 84, foram feitas análises dos resultados a partir da definição de um limiar de corte mínimo para o valor de $Kappa$, aqui denotado por $\xi_{(Kappa)}$, tal que, pode-se computar a quantidade de segmentações existentes para $Kappa \geq \xi_{(Kappa)}$.

Nesta etapa da consolidação dos resultados das segmentações, para demonstrar os procedimentos aqui adotados, foi observado o limiar de corte com $\xi_{(Kappa)} = 0{,}99$, considerando-se o intervalo entre $0, 1$, onde $Kappa = 1$ significa semelhança total entre as imagens filtradas segmentadas e a imagem original segmentada. Assim, computaram-se as quantidades de segmentações existentes, tanto pela *q*-Entropia, quanto pela entropia de Shannon Ponderada. Para ilustrar a Etapa 3, as Figuras 85 e 86 mostram as quantidades de segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$, sendo consideradas todas as 300 imagens da base de *Berkeley*.

Para exemplificar os procedimentos aqui adotados, a Figura 85, mostra as quantidades de segmentações realizadas pela *q*-Entropia, com $Kappa \geq 0{,}99$, subdivididas em 3 gráficos agrupados pelo valor de σ do ruído Gaussiano aplicado sobre as imageens originais. As segmentações foram realizadas sobre as imagens com ruídos que foram filtradas por 29 variações do filtro *q*-Gaussiano, sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2...; 2{,}9\}$, e também por um filtro Gaussiano Tradicional.

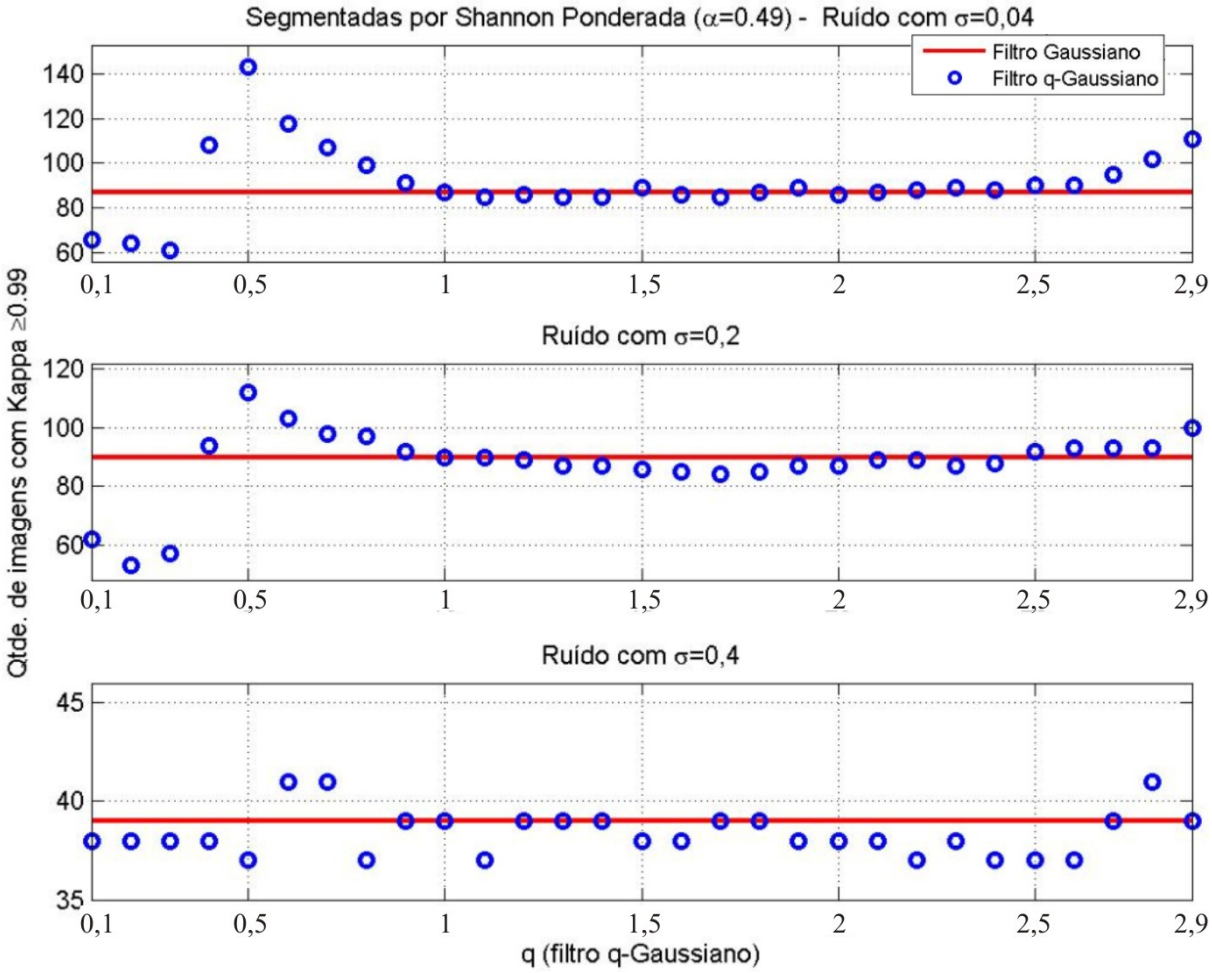
Figura 85 – Exemplo de quantidade de segmentações feitas pela q-Entropia de Tsallis, com $q = 0{,}9$, as quais produziram segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$.



Fonte: Autor. Os valores de q utlizados nos filtros q-Gaussianos estão representados no eixo x dos gráficos.

A Figura 86 mostra as quantidades de segmentações realizadas pela entropia de Shannon Ponderada com $Kappa \geq 0{,}99$. As segmentações também foram realizadas sobre as imagens com ruídos que foram filtradas por 29 variações do filtro q-Gaussiano, sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2...; 2{,}9\}$, e também por um filtro Gaussiano Tradicional.

Figura 86 – Exemplo de quantidade de segmentações feitas pela entropia de Shannon Ponderada, com $\alpha = 0{,}49$, as quais produziram segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$.



Fonte: Autor. Os valores de q utilizados nos filtros q-Gaussianos estão representados no eixo x dos gráficos.

D - Consolidação dos Resultados Através do Índice Kappa - Etapa 4

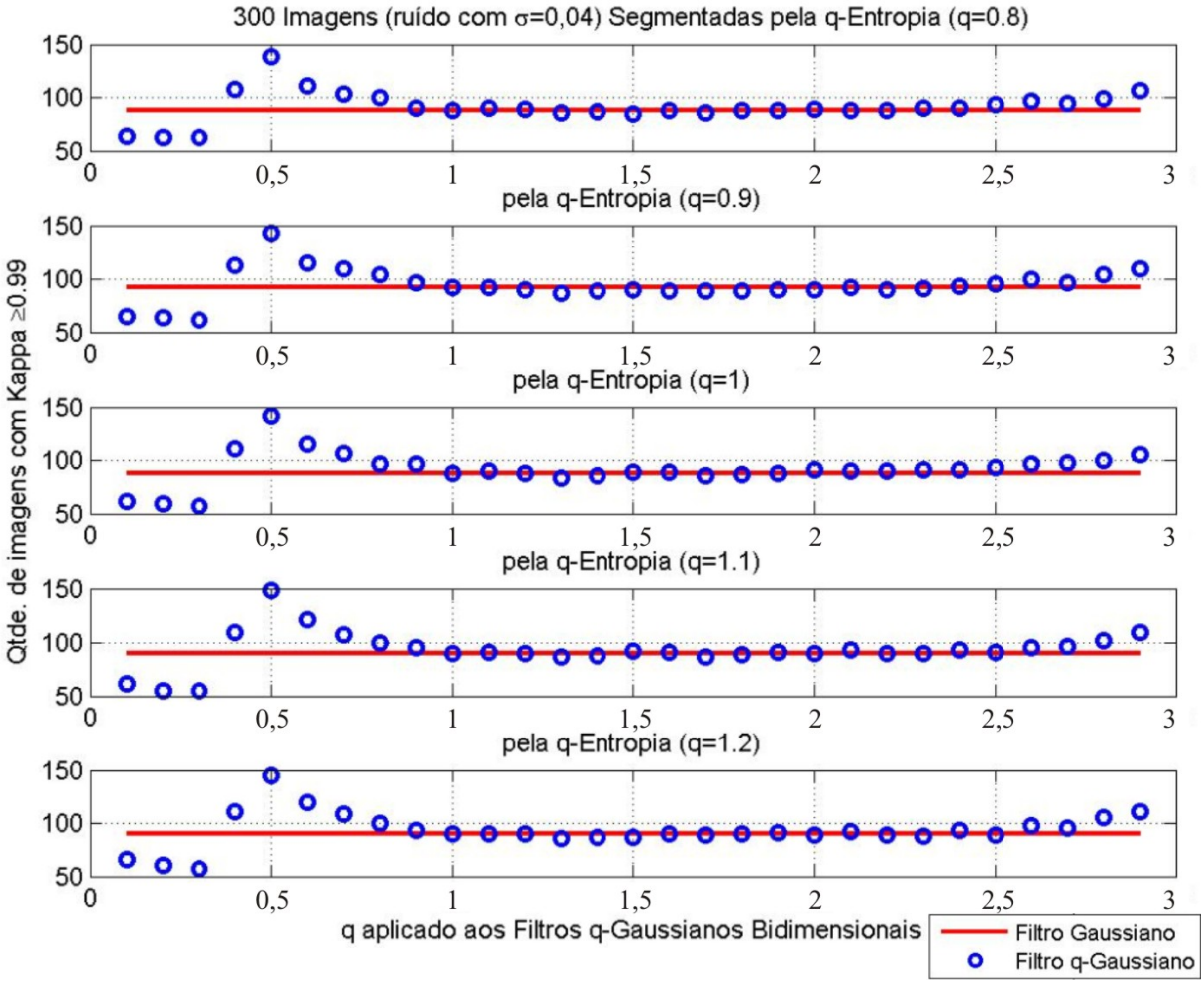
Finalizando a consolidação dos resultados obtidos com os experimentos envolvendo a análise através do índice $Kappa$ sobre a segmentação das imagens filtradas, na Etapa 4 os resultados receberam um novo agrupamento, tal que, permitiu a observação de todos os parâmetros envolvidos nos experimentos com as 300 imagens da base de *Berkeley*, considerando os 3 tipos de ruídos Gaussianos aplicados às imagens originais. Também nestes resultados são considerados as 29 variações do filtro q-Gaussiano bidimensional além do filtro Gaussiano tradicional, todos aplicados sobre as imagens com ruídos.

As Figuras 87, 88 e 89 mostram as quantidades obtidas com todos os resultados referentes às segmentações realizadas pela q-Entropia, enquanto que as Figuras 90, 91 e 92, mostram

as quantidades de todos os resultados produzidos através da segmentação pela entropia de Shannon Ponderada.

Iniciando a apresentação dos resultados obtidos com a segmentação pela q-Entropia, a Figura 87 apresenta 5 gráficos que indicam os valores de $q = \{0{,}8; 0{,}9; ...; 1{,}2\}$, respectivamente. Todos os resultados considerados na Figura 87 tiveram origem nas imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$.

Figura 87 – Quantidade de segmentações feitas pela q-Entropia, as quais produziram segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$ sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$.



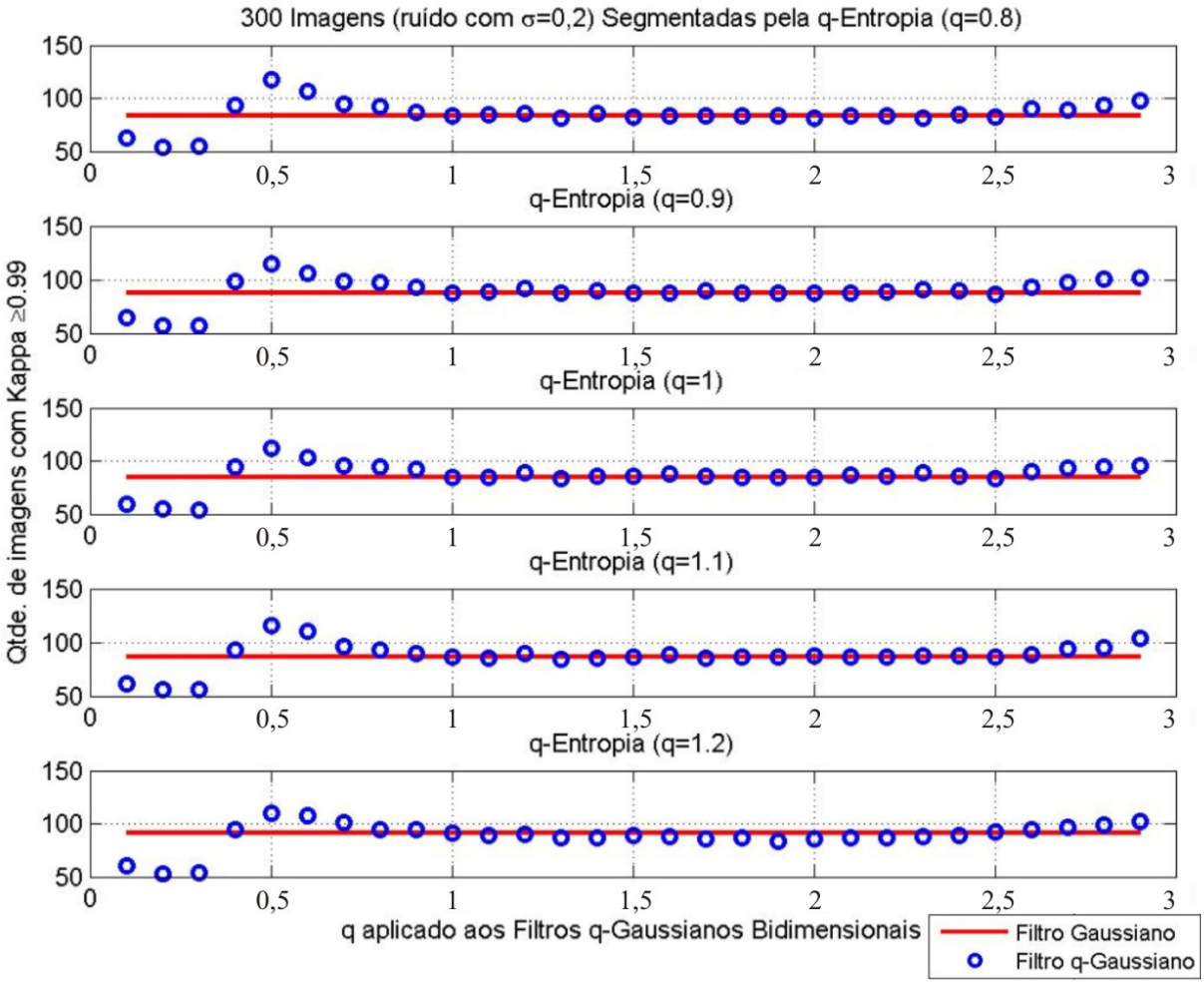
Fonte: Autor. Os valores de q utilizados nos filtros q-Gaussianos bidimensionais estão representados no eixo x dos gráficos. Os valores de q utilizados na segmentação pela q-Entropia estão indicados acima de cada gráfico.

Observando-se a Figura 87, nota-se, por exemplo, que o filtro q-Gaussiano com $q = 0{,}5$ foi aquele que provocou a maior quantidade de segmentações com valores de $Kappa \geq$

$0{,}99$, para todos os valores de q utilizados na q-Entropia. Também mostra que os filtros q-Gaussianos com $q = [0{,}4; 0{,}5; ...; 0{,}9]$ e $q = [2{,}6; 2{,}7; ...; 2{,}9]$ computaram maiores quantidades de segmentações do que aquelas computadas pelo filtro Gaussiano tradicional.

A Figura 88 mostra os gráficos com os resultados a partir da segmentação pela q-Entropia com os valores de $q = \{0{,}8; 0{,}9; ...; 1{,}2\}$. Os resultados tiveram origem nas imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$.

Figura 88 – Quantidade de segmentações feitas pela q-Entropia, as quais produziram segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$ sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$.



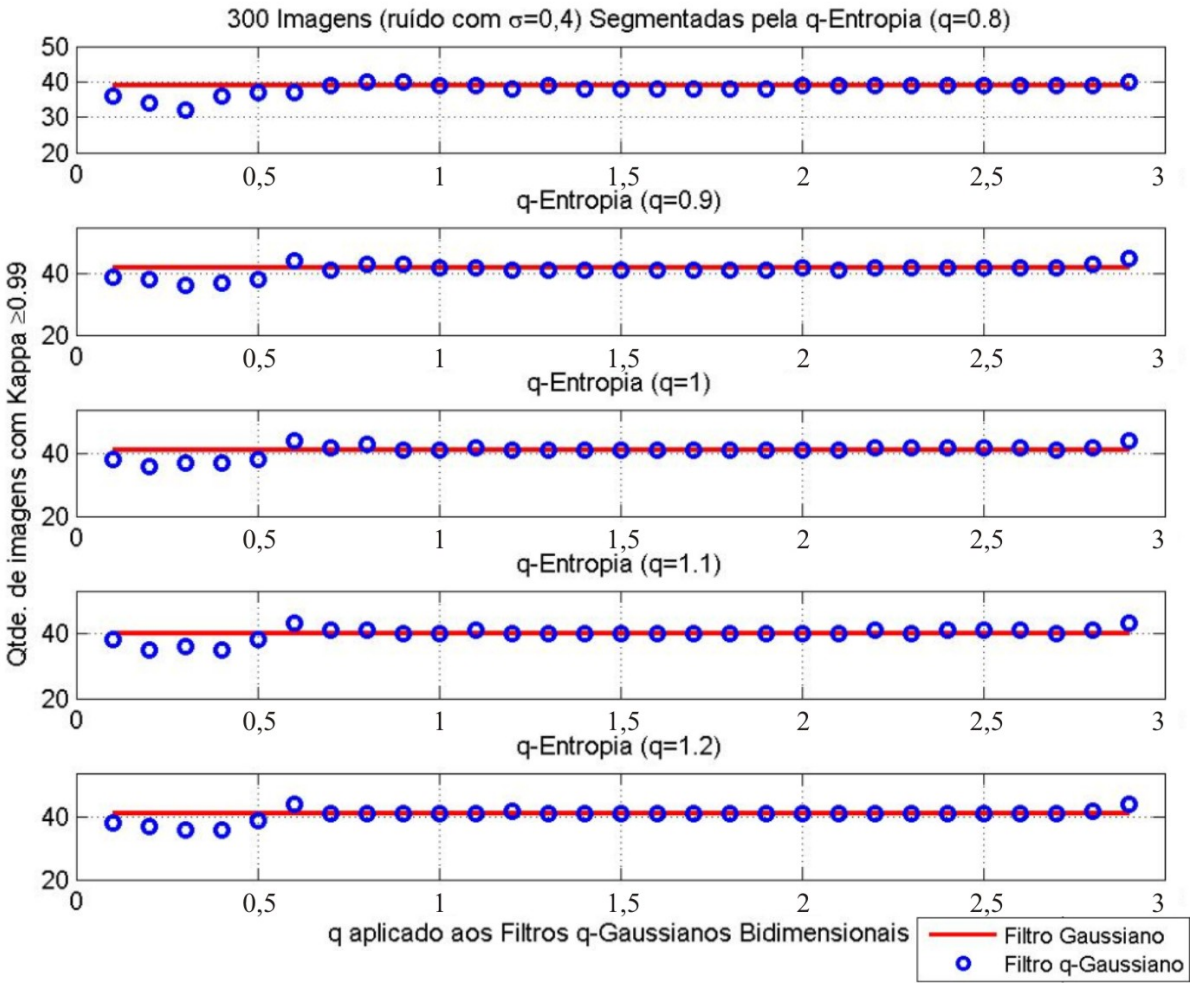
Fonte: Autor. Os valores de q utilizados nos filtros q-Gaussianos bidimensionais estão representados no eixo x dos gráficos. Os valores de q utilizados na segmentação pela q-Entropia estão indicados acima de cada gráfico.

Observando-se os resultados exibidos na Figura 88 nota-se que, para todos os valores de q aplicados na segmentação pela q-Entropia, os filtros q-Gaussianos que produziram as maiores

quantidades de imagens com $Kappa \geq 0{,}99$ foram aqueles que utilizaram os valores de $q = [0{,}4; 0{,}5; ...; 0{,}9]$, mostrando também boa performance para os valores de $q = [2{,}6; 2{,}7; ...; 2{,}9]$.

Finalizando a exibição das quantidades de resultados a partir da segmentação pela q-Entropia, a Figura 89 mostra os resultados que tiveram origem nas imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$.

Figura 89 – Quantidade de segmentações feitas pela q-Entropia, as quais produziram segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$ sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$.



Fonte: Autor. Os valores de q utilizados nos filtros q-Gaussianos bidimensionais estão representados no eixo x dos gráficos. Os valores de q utilizados na segmentação pela q-Entropia estão indicados acima de cada gráfico.

Pode-se notar na Figura 89, que houve poucas ocorrências de quantidades obtidas pelo uso do filtro q-Gaussiano a mais do que aquelas obtidas pelo filtro Gaussiano tradicional, que produziram imagens acima do limiar de corte pré-estabelecido. Por exemplo, os filtros q-

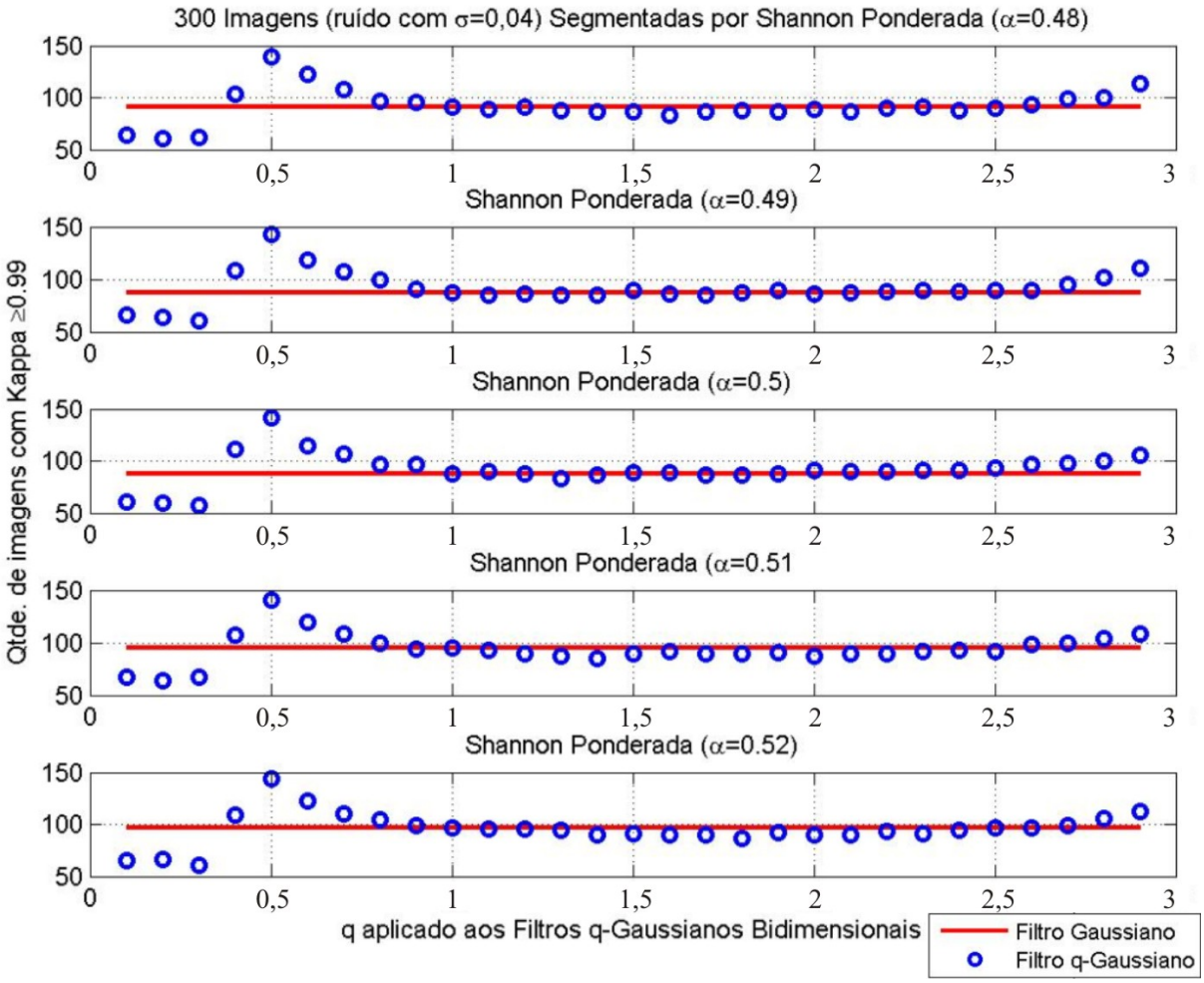
Gaussianos com valor de $q = 0{,}5$ foram aqueles que tiveram a melhor performance nas imagens que foram segmentadas pela q-Entropia com $q = [0{,}9; 1; ...; 1{,}2]$, entretanto, isso não ocorreu para $q = 0{,}8$ na q-Entropia. Por outro lado, o valores de $q = 2{,}9$ nos filtros q-Gaussianos produziram as maiores quantidades de imagens com $Kappa \geq 0{,}99$ para todos os valores de q utilizados na segmentação pela q-Entropia.

A partir deste ponto são exibidas as quantidades de resultados obtidos a partir dos experimentos de segmentação de imagens pela entropia de Shannon Ponderada. As Figuras 90, 91 e 92 mostram todos os resultados obtidos, também considerando o limiar de corte com $Kappa \geq 0{,}99$.

A Figura 90 mostra os gráficos com os resultados a partir da segmentação pela entropia de Shannon Ponderada com os valores de $\sigma = \{0{,}48; 0{,}49; ...; 0{,}52\}$. Os resultados tiveram origem nas imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$.

Pode-se observar nos resultados exibidos na Figura 90, que, por exemplo, os filtros q-Gaussianos com os valores de $q = [0{,}4; 0{,}5; 0{,}6; 0{,}7; 0{,}8; 0{,}9]$ e também com $q = [2{,}7; 2{,}8; 2{,}9]$, produziram maiores quantidades de imagens com $Kappa \geq 0{,}99$ do que os filtros Gaussianos tradicionais, em todos os valores de α utilizados na entropia de Shannon Ponderada.

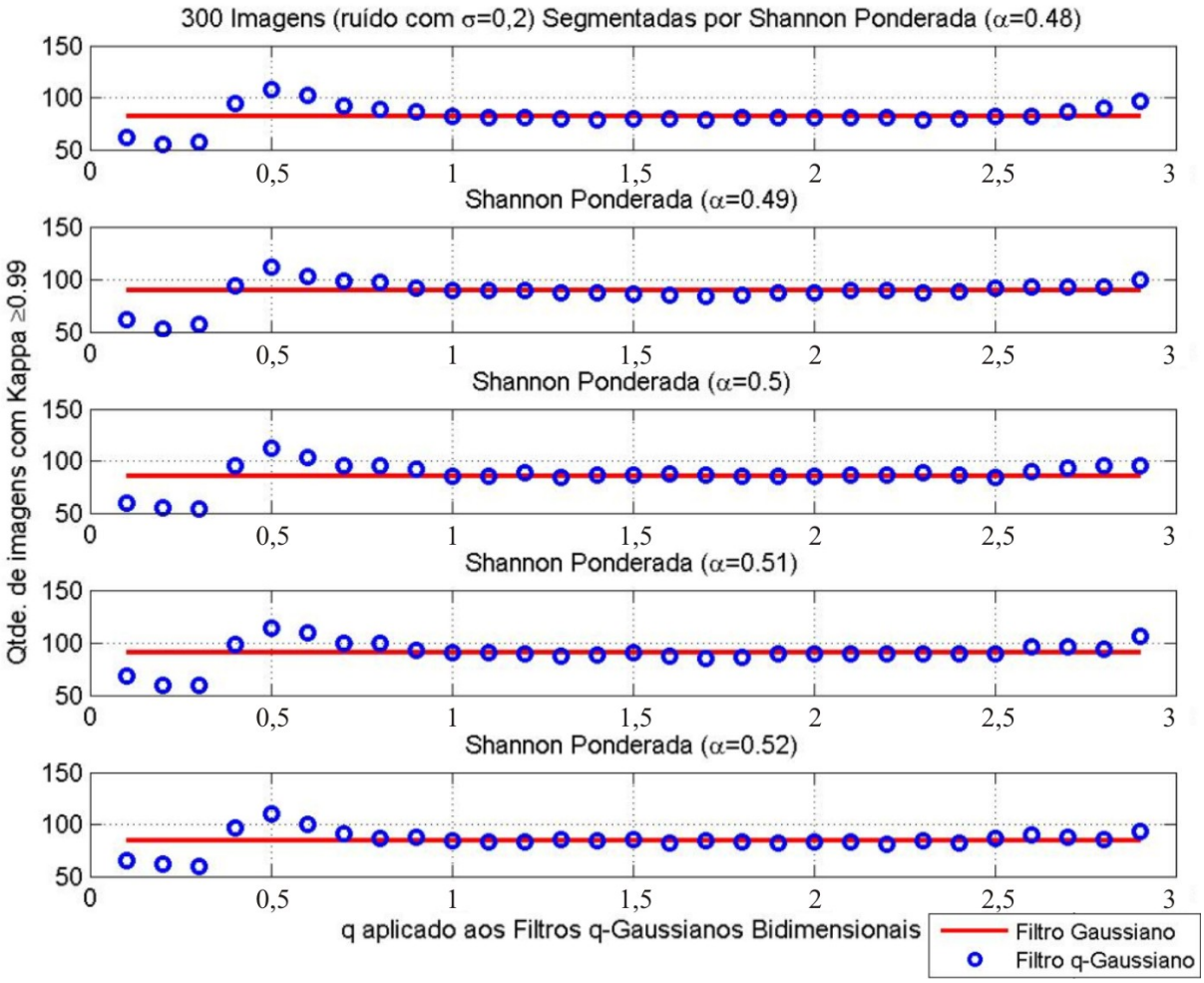
Figura 90 – Quantidade de segmentações feitas pela entropia de Shannon Ponderada, as quais produziram segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$.



Fonte: Autor. Os valores de q utilizados nos filtros q-Gaussianos bidimensionais estão representados no eixo x dos gráficos. Os valores de α utilizados na segmentação pela entropia de Shannon Ponderada estão indicados acima de cada gráfico.

A Figura 91 mostra os gráficos com as quantidades de resultados a partir da segmentação pela entropia de Shannon Ponderada com os valores de $\alpha = \{0{,}48; 0{,}49; ...; 0{,}52\}$. Os resultados tiveram origem nas imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$.

Figura 91 – Quantidade de segmentações feitas pela entropia de Shannon Ponderada, as quais produziram segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$.

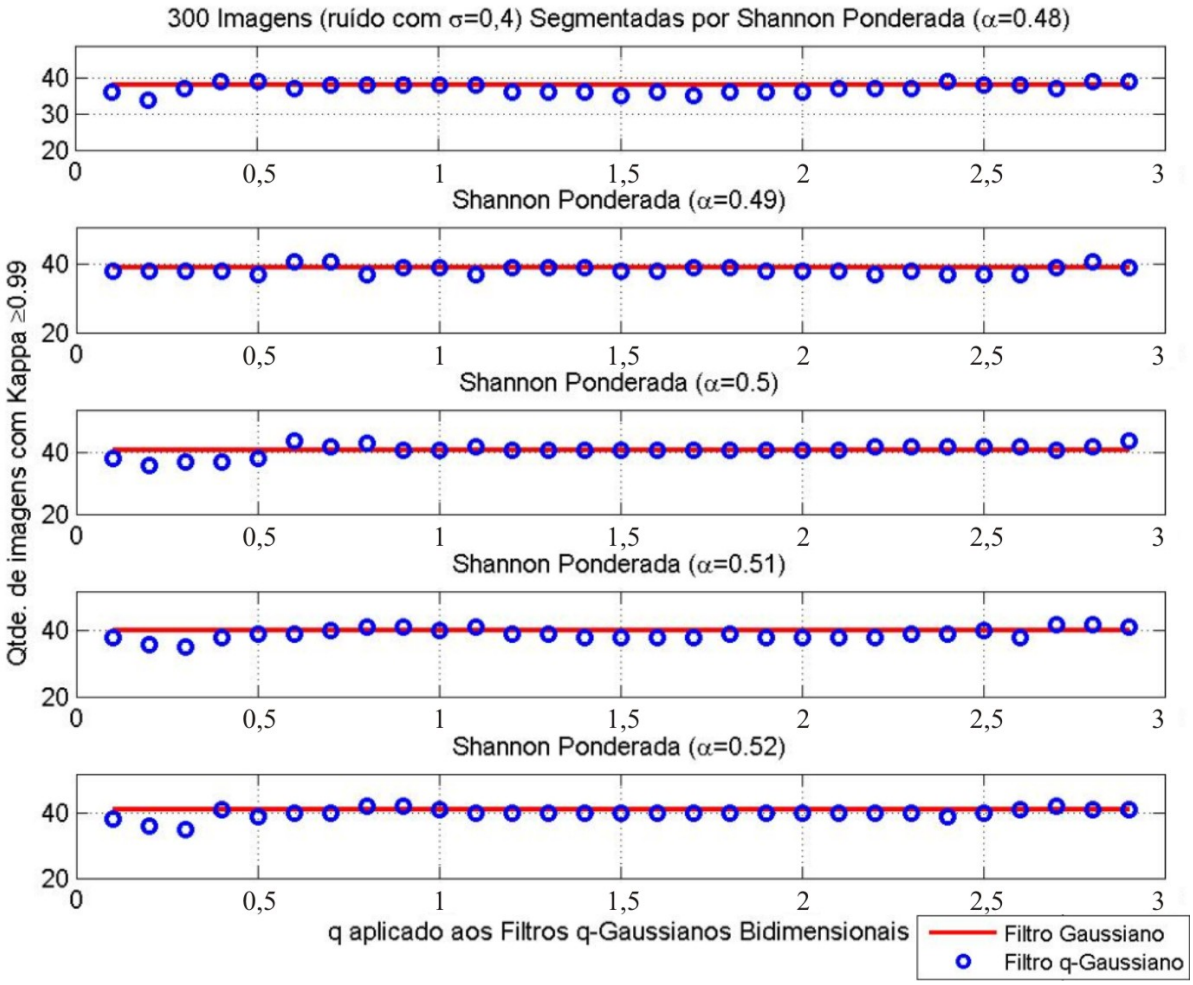


Fonte: Autor. Os valores de q utilizados nos filtros q-Gaussianos bidimensionais estão representados no eixo x dos gráficos. Os valores de α utilizados na segmentação pela entropia de Shannon Ponderada estão indicados acima de cada gráfico.

Para as imagens que receberam ruído com $\sigma = 0{,}2$, a Figura 91 mostra que a performance dos filtros q-Gaussianos é bastante semelhante àquelas observadas com as imagens que receberam ruído com $\sigma = 0{,}04$, exibidas na Figura 90, indicando os valores de $q = [0{,}4; 0{,}5; 0{,}6; 0{,}7; 0{,}8; 0{,}9]$ e também com $q = [2{,}6; 2{,}7; 2{,}8; 2{,}9]$ como aqueles que produziram as maiores quantidades de imagens com $Kappa \geq 0{,}99$.

A Figura 92 mostra os gráficos com as quantidades de resultados a partir da segmentação pela entropia de Shannon Ponderada com os valores de $\sigma = \{0{,}48; 0{,}49; ...; 0{,}52\}$. Os resultados tiveram origem nas imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$.

Figura 92 – Quantidade de segmentações feitas pela entropia de Shannon Ponderada, as quais produziram segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$, sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$.



Fonte: Autor. Os valores de q utilizados nos filtros q-Gaussianos bidimensionais estão representados no eixo x dos gráficos. Os valores de α utilizados na segmentação pela entropia de Shannon Ponderada estão indicados acima de cada gráfico.

Para as imagens que receberam ruído com $\sigma = 0{,}4$, da mesma forma como foi observado nos experimentos com a q-Entropia exibidos na Figura 89, nota-se que foram poucos os casos com quantidades maiores produzidas pelos filtros q-Gaussianos em relação ao filtro Gaussiano tradicional, considerando as imagens segmentadas com $Kappa \geq 0{,}99$, em todos os valores de α utilizados na entropia de Shannon Ponderada.

Como pode-se observar, uma série de análises podem ser extraídas dos resultados obtidos a partir da segmentação pela q-Entropia mostrados nas Figuras 87, 88 e 89, e também a partir da entropia de Shannon Ponderada mostrados nas Figuras 90, 91 e 92.

Para ilustrar a quantidade de informação que pode ser apurada a partir dos resultados obtidos, a Figura 93 apresenta todos os valores das quantidades computadas de imagens segmentadas com $Kappa \geq 0{,}99$, a partir de imagens que receberam ruído com $\sigma = 0{,}2$ em todos os experimentos de segmentação realizados pela q-Entropia e pela entropia de Shannon Ponderada.

Figura 93 – Quantidade de segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$. Antes da segmentação, as imagens receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$ e foram filtradas com filtros q-Gaussianos.

(a) q Filtros	q = 0,8	α = 0,48	q = 0,9	α = 0,49	(b) q = 1	(c) α = 0,5	q = 1,1	α = 0,51	q = 1,2	α = 0,52	(d) TS q-Entropia	(e) WS Shannon P.	(f) WS-TS
0,1	63	62	65	62	59	59	61	68	60	65	0	0	0
0,2	54	55	57	53	55	55	56	60	53	62	0	0	0
0,3	55	57	57	57	54	54	56	59	54	60	0	0	0
0,4	93	94	98	94	95	95	93	98	94	97	40	46	6
0,5	118	108	115	112	112	112	116	114	110	110	138	124	-14
0,6	107	102	106	103	103	103	110	109	108	100	101	85	-16
0,7	95	92	98	98	96	96	96	100	101	91	53	45	-8
0,8	92	89	97	97	95	95	93	100	95	87	39	36	-3
0,9	87	87	93	92	92	92	90	93	94	88	23	20	-3
(g) 1	83	82	88	90	85	85	86	91	91	84	0	0	0
1,1	85	81	89	90	85	85	85	91	89	83	3	0	-3
1,2	86	81	92	89	89	89	90	89	90	83	15	4	-11
1,3	81	80	88	87	84	84	84	87	87	85	0	1	1
1,4	86	79	90	87	86	86	85	88	87	84	6	1	-5
1,5	82	80	87	86	86	86	86	91	89	85	1	2	1
1,6	84	80	88	85	88	88	89	87	88	82	7	3	-4
1,7	83	79	90	84	86	86	85	85	86	84	3	1	-2
1,8	83	81	87	85	85	85	86	86	87	83	0	0	0
1,9	84	81	87	87	85	85	86	89	84	82	1	0	-1
2	81	81	87	87	85	85	87	89	86	83	1	0	-1
2,1	83	81	88	89	87	87	86	90	87	83	2	2	0
2,2	83	81	89	89	86	86	86	90	87	81	2	1	-1
2,3	81	79	91	87	89	89	88	90	88	84	9	4	-5
2,4	85	80	90	88	86	86	87	90	89	82	6	1	-5
2,5	82	82	86	92	84	84	86	89	92	87	1	5	4
2,6	90	82	93	93	90	90	89	96	95	90	24	19	-5
2,7	89	86	97	93	93	93	94	96	97	88	37	24	-13
2,8	93	90	101	93	95	95	95	94	99	85	50	25	-25
2,9	98	97	102	100	96	96	104	106	102	93	69	60	-9
(h)	144	107	135	77	135	135	131	96	86	94	631	509	-122

Fonte: Autor. Valores em destaque na cor amarela representam maiores quantidades obtidas pelos filtros q-Gaussianos em relação ao Gaussiano tradicional após a segmentação pela q-Entropia, o mesmo para a cor azul, porém após a segmentação pela entropia de Shannon Ponderada.

A Figura 93 mostra um comparativo entre as quantidades de segmentações obtidas pela q-Entropia e pela entropia de Shannon Ponderada, com valores de $Kappa \geq 0{,}99$. Nestes

resultados foram considerados apenas as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$ antes de serem filtradas.

Na Figura 93, as colunas indicadas com valores de $q = \{0{,}8; 0{,}9; ...; 1{,}2\}$ mostram as quantidades obtidas pela q-Entropia, enquanto que nas colunas com valores de $\alpha = \{0{,}48; 0{,}49; ...; 0{,}52\}$ são exibidas as quantidades obtidas pela entropia de Shannon Ponderada. Observa-se que as quantidades indicadas nas colunas (b) e (c) são idênticas, pois para os valores de de $q = 1$ e $\alpha = 0{,}5$ as respectivas entropias reduzem-se à entropia BGS.

A coluna (a) da Figura 93 indica os valores de q utilizados nos filtros q-Gaussianos bidimensionais. Quando $q = 1$, a função q-Gaussiana bidimensional reduz-se à função Gaussiana tradicional, portanto, a linha com a indicação (g), onde $q = 1$, representa as quantidades obtidas a partir do filtro Gaussiano tradicional, utilizado como comparação entre os resultados obtidos, motivo pelo qual a linha inteira aparece em destaque na Figura 93.

Para alguns valores de q do filtros q-Gaussianos, indicados na coluna (a), foram obtidas quantidades de imagens com $Kappa \geq 0{,}99$ a mais do que as obtidas pelo filtro Gaussiano tradicional, indicados na linha (g). Nestes casos, as quantidades são destacadas na cor amarela (para a q-Entropia) e azul (para a entropia de Shannon Ponderada). Estes valores destacados evidenciam as melhores performances dos respectivos valores de q no filtro q-Gaussiano, indicados na coluna (a). Para exemplificar esta análise, nota-se que na linha do filtro q-Gaussiano onde $q = 0{,}9$, há 94 segmentações produzidas pela q-Entropia (com $q = 1{,}2$), contra 91 do filtro Gaussiano tradicional indicado na linha (g); há 88 segmentações pela q-Entropia (com $q = 0{,}52$), contra 84 do filtro Gaussiano tradicional.

Assim, nas colunas (d) e (e) foram computados os somatórios das quantidades de segmentações com valores além daqueles computados pelos filtros Gaussiano tradicional, para a q-Entropia (TS) e para a entropia de Shannon Ponderada (WS). Por exemplo, são 23 segmentações pela q-Entropia (que receberam filtro q-Gaussiano com $q = 0{,}9$) a mais do que aquelas obtidas pelo filtro Gaussiano tradicional. A coluna (f) indica a diferença entre estes dois somatórios, computando $(TS - WS)$. Nesta coluna, os valores negativos indicam vantagem para as quantidades obtidas pela q-Entropia, enquanto que os valores positivos indicam que as quantidades obtidas pela entropia de Shannon Ponderada são maiores do que aqueles obtidos pela q-Entropia. Deste modo, basta observar a coluna (f) para identificar qual das duas técnicas de segmentação obteve melhor performance nestes experimentos. Por exemplo, para os filtros q-Gaussianos com $q = 0{,}4$ há 6 segmentações a mais a favor da entropia de Shannon Ponderada,

enquanto que para $q = 0{,}5$ nos filtros q-Gaussianos a vantagem é de 14 segmentações a mais para a q-Entropia.

Ao final da coluna (f) foi mostrado que, no total deste grupo de imagens, há 122 segmentações pela q-Entropia com $Kappa \geq 0{,}99$, a mais do que aquelas obtidas pela entropia de Shannon Ponderada.

Ainda observando-se a Figura 93, a linha indicada por (h) mostra um somatório de cada coluna, computando-se apenas as quantidades de segmentações a mais do que aquelas obtidas pelo filtro Gaussiano tradicional. Por exemplo, nota-se que a q-Entropia com $q = 0{,}8$ produziu 144 segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$ a mais do que o filtro Gaussiano tradicional, sendo este valor de q aquele que obteve a melhor performance, em quantidade, neste grupo de segmentações. Observando-se a entropia de Shannon Ponderada, nota-se que a melhor performance em quantidade foi obtida pelo valor de $\alpha = 0{,}5$, com 135 segmentações a mais do que aquelas obtidas pelo filtro Gaussiano tradicional, sendo esta a performace igualmente obtida pela entropia BGS.

Apesar de não ser objetivo central desta tese comparar a performance da q-Entropia e da entropia de Shannon Ponderada em relação à entropia BGS, é possível observar na linha (h) que a q-Entropia com $q = 0{,}8$ produziu 9 segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$ a mais do que a entropia BGS, enquanto que a entropia de Shannon Ponderada não produziu nenhuma segmentação a mais do que a entropia BGS.

A seguir, são exibidas nas Figuras 94 e 95, todas as quantidades obtidas com segmentações pela q-Entropia e pela entropia de Shannon Ponderada, a partir das imagens que receberam ruído Gaussiano, respectivamente com $\sigma = 0{,}04$ e $\sigma = 0{,}4$.

Nota-se na Figura 94, de modo geral, um comportamento bastante compatível com aqueles observados para as imagens com $\sigma = 0{,}2$, exibidos na Figura 93, com as maiores quantidades de segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$ encontradas para os valores de q dos filtros q-Gaussianos onde $q \in \{0{,}4 \leq q \leq 0{,}9\}$ ou $q \geq 2{,}6$. No cômputo total dos experimentos com imagens que receberam ruído com $\sigma = 0{,}04$, foram somadas 113 segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$, a partir da q-Entropia a mais do que as quantidades obtidas pela entropia de Shannon Ponderada.

Figura 94 – Quantidade de segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$. Antes da segmentação, as imagens receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$ e foram filtradas com filtros q-Gaussianos.

	(a)					(b)	(c)					(d)	(e)	(f)
	q Filtros	q = 0,8	α = 0,48	q = 0,9	α = 0,49	q = 1	α = 0,5	q = 1,1	α = 0,51	q = 1,2	α = 0,52	TS q-Entropia	WS Shannon P.	WS-TS
	0,1	64	64	65	66	61	61	61	67	66	65	0	0	0
	0,2	63	61	64	64	59	59	55	64	60	66	0	0	0
	0,3	63	62	61	61	57	57	55	67	57	61	0	0	0
	0,4	108	103	113	108	111	111	109	107	111	109	104	80	-24
	0,5	138	139	143	143	142	142	148	141	145	144	268	251	-17
	0,6	111	122	115	118	115	115	121	120	120	123	134	140	6
	0,7	103	108	109	107	107	107	107	108	109	110	87	82	-5
	0,8	100	97	104	99	97	97	100	99	100	104	53	38	-15
	0,9	90	96	96	91	97	97	95	94	93	99	23	20	-3
(g)	1	88	91	92	87	88	88	90	95	90	97	0	0	0
	1,1	90	89	92	85	90	90	91	93	90	96	5	2	-3
	1,2	89	91	90	86	88	88	90	90	90	95	1	0	-1
	1,3	86	88	86	85	83	83	86	87	86	94	0	0	0
	1,4	87	87	89	85	86	86	88	85	87	90	0	0	0
	1,5	85	87	90	89	89	89	92	89	87	91	3	3	0
	1,6	88	83	89	86	89	89	91	92	90	90	2	1	-1
	1,7	86	87	89	85	86	86	86	90	89	90	0	0	0
	1,8	88	88	89	87	87	87	89	89	90	86	0	0	0
	1,9	88	87	90	89	88	88	91	91	91	92	2	2	0
	2	89	89	90	86	91	91	90	87	89	90	4	3	-1
	2,1	88	86	92	87	90	90	93	89	92	90	7	2	-5
	2,2	88	90	90	88	90	90	90	89	89	93	2	3	1
	2,3	90	91	91	89	91	91	90	92	88	91	5	5	0
	2,4	90	88	93	88	91	91	93	93	93	94	12	4	-8
	2,5	93	90	95	90	93	93	91	92	89	97	14	8	-6
	2,6	97	93	100	90	97	97	95	98	98	97	39	17	-22
	2,7	94	99	96	95	98	98	96	99	96	99	32	32	0
	2,8	99	100	104	102	100	100	102	104	105	106	62	54	-8
	2,9	107	114	109	111	106	106	109	108	111	112	94	93	-1
	(h)	180	161	173	205	212	212	194	129	194	133	945	815	-113

Fonte: Autor. Valores em destaque na cor amarela representam maiores quantidades obtidas pelos filtros q-Gaussianos em relação ao Gaussiano tradicional após a segmentação pela q-Entropia, o mesmo para a cor azul, porém após a segmentação pela entropia de Shannon Ponderada.

Para o caso das imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$, portanto com grande quantidade de ruído, medido por baixos valores de $PSNR$, como indicados nas Figuras 64 e 65, observam-se poucas quantidades de imagens segmentadas com $Kappa \geq 0{,}99$, conforme mostra a Figura 95.

Figura 95 – Quantidade de segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$. Antes da segmentação, as imagens receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$ e foram filtradas com filtros q-Gaussianos.

	(a)					(b)	(c)					(d)	(e)	(f)
	q Filtros	q = 0,8	α = 0,48	q = 0,9	α = 0,49	q = 1	α = 0,5	q = 1,1	α = 0,51	q = 1,2	α = 0,52	TS q-Entropia	WS Shannon P.	WS-TS
	0,1	36	36	39	38	38	38	38	38	38	38	0	0	0
	0,2	34	34	38	38	36	36	35	36	37	36	0	0	0
	0,3	32	37	36	38	37	37	36	35	36	35	0	0	0
	0,4	36	39	37	38	37	37	35	38	36	41	0	1	1
	0,5	37	39	38	37	38	38	38	39	39	39	0	1	1
	0,6	37	37	44	41	44	44	43	39	44	40	11	5	-6
	0,7	39	38	41	41	42	42	41	40	41	40	2	3	1
	0,8	40	38	43	37	43	43	41	41	41	42	5	4	-1
	0,9	40	38	43	39	41	41	40	41	41	42	2	2	0
(g)	1	39	38	42	39	41	41	40	40	41	41	0	0	0
	1,1	39	38	42	37	42	42	41	41	41	40	2	2	0
	1,2	38	36	41	39	41	41	40	39	42	40	1	0	-1
	1,3	39	36	41	39	41	41	40	39	41	40	0	0	0
	1,4	38	36	41	39	41	41	40	38	41	40	0	0	0
	1,5	38	35	41	38	41	41	40	38	41	40	0	0	0
	1,6	38	36	41	38	41	41	40	38	41	40	0	0	0
	1,7	38	35	41	39	41	41	40	38	41	40	0	0	0
	1,8	38	36	41	39	41	41	40	39	41	40	0	0	0
	1,9	38	36	41	38	41	41	40	38	41	40	0	0	0
	2	39	36	42	38	41	41	40	38	41	40	0	0	0
	2,1	39	37	41	38	41	41	40	38	41	40	0	0	0
	2,2	39	37	42	37	42	42	41	38	41	40	2	1	-1
	2,3	39	37	42	38	42	42	40	39	41	40	1	1	0
	2,4	39	39	42	37	42	42	41	39	41	39	2	2	0
	2,5	39	38	42	37	42	42	41	40	41	40	2	1	-1
	2,6	39	38	42	37	42	42	41	38	41	41	2	1	-1
	2,7	39	37	42	39	41	41	40	42	41	42	0	3	3
	2,8	39	39	43	41	42	42	41	42	42	41	4	6	2
	2,9	40	39	45	39	44	44	43	41	44	41	13	5	-8
	(h)	3	5	8	6	16	16	14	8	8	3	49	38	-11

Fonte: Autor. Valores em destaque na cor amarela representam maiores quantidades obtidas pelos filtros q-Gaussianos em relação ao Gaussiano tradicional após a segmentação pela q-Entropia, o mesmo para a cor azul, porém após a segmentação pela entropia de Shannon Ponderada.

Observa-se também, na Figura 95, que no cômputo total dos experimentos com imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$, foram encontradas apenas 11 segmentações com $Kappa \geq 0{,}99$, a partir da q-Entropia, a mais do que as quantidades obtidas pela entropia de Shannon Ponderada, conforme indica a soma total da coluna (f).

6.3 RESULTADOS DAS APLICAÇÕES DA FUNÇÃO q-GAUSSIANA EM REDE SOM

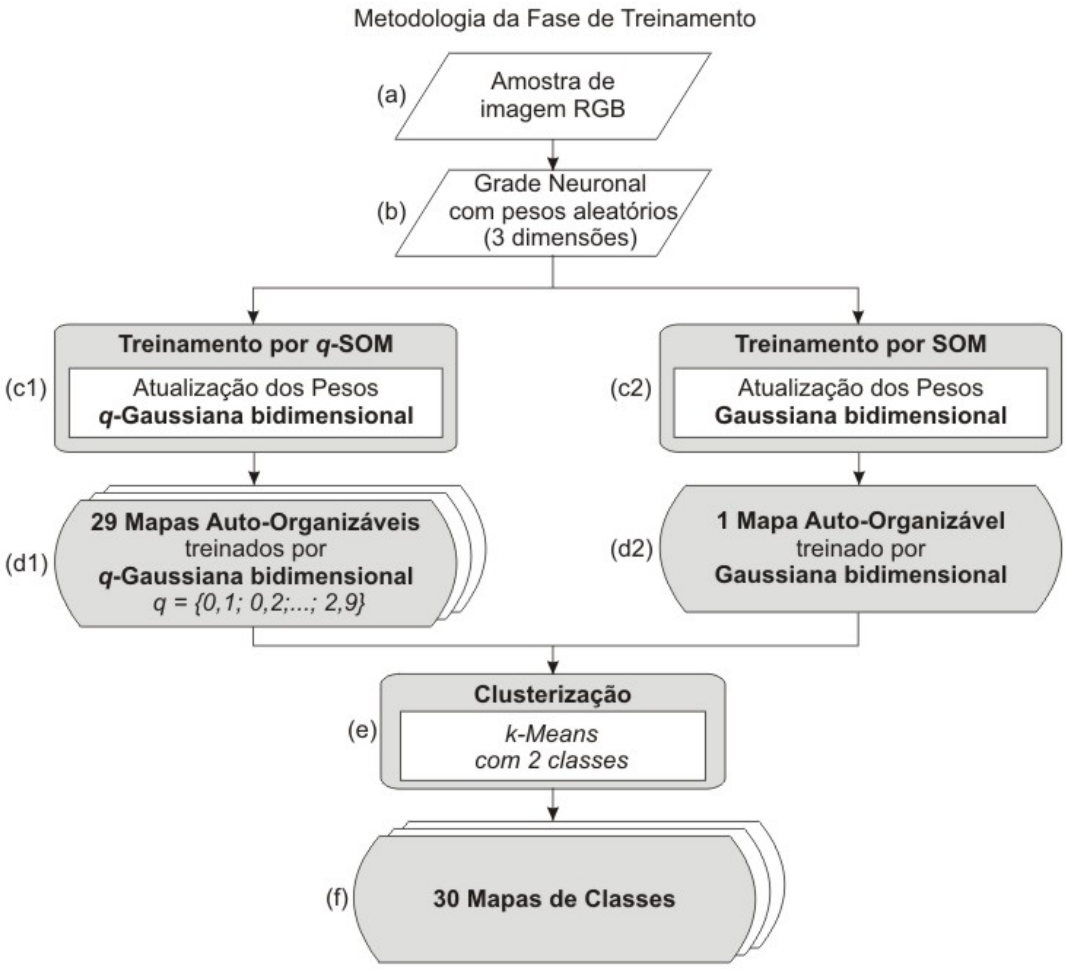
No Capítulo 5 foram propostos experimentos utilizando Mapas Auto-Organizáveis q-SOM para a segmentação de imagens digitais, cujos procedimentos foram descritos na Seção 5.2. A presente seção descreve os experimentos e apresenta os resultados obtidos com o treinamento do modelo q-SOM para a segmentação de imagens. Os experimentos com a imagem *Lena*, apresentada na Figura 97(a), foram realizados como forma de ilustrar a metodologia aplicada ao modelo q-SOM, entretanto, as análises, discussões e conclusões foram realizadas com base nos resultados obtidos a partir da base de *Berkeley*, apresentada na Seção 6.1.

Os experimentos com Mapas Auto-Organizáveis são descritos em 3 fases sequenciais. A primeira fase trata do treinamento dos Mapas Auto-Organizáveis através do modelo q-SOM até a geração dos mapas de classes feito pelo algoritmo *k-Means*, descrito na Seção 6.3.1. A segunda fase, apresentada na Seção 6.3.2, mostra a segmentação da imagem original a partir dos Mapas Auto-Organizáveis q-SOM, e inclui também a segmentação da imagem original feita diretamente pelos algoritmos *k-Means* e SOM tradicional, para posteriores comparações. A Seção 6.3.3 mostra a terceira fase, com as técnicas de análises estatístisticas aplicadas sobre as imagens segmentadas para analisar a qualidade dos resultados.

6.3.1 Fase de Treinamento dos Mapas Auto-Organizáveis

A Figura 96 ilustra a metodologia aplicada ao treinamento da RNA SOM, e do modelo q-SOM. Os experimentos tiveram uma fase de pré-processamento dada pela redução da resolução da imagem original a ser segmentada, gerando uma imagem de amostra de tamanho reduzido. Também definiu-se previamente o tamanho da grade de neurônios utilizada como matriz de pesos, inicializada com valores aleatórios, representando a grade de neurônios com os pesos iniciais. Tanto as imagens originais, as imagens de amostras e as grades de neurônios possuem 3 dimensões de cores, determinadas pelo sistema RGB, com valores de 0 a 255 em cada dimensão de cor.

Figura 96 – Metodologia aplicada aos experimentos na fase de treinamento dos Mapas Auto-Organizáveis q-SOM.



Fonte: Autor.

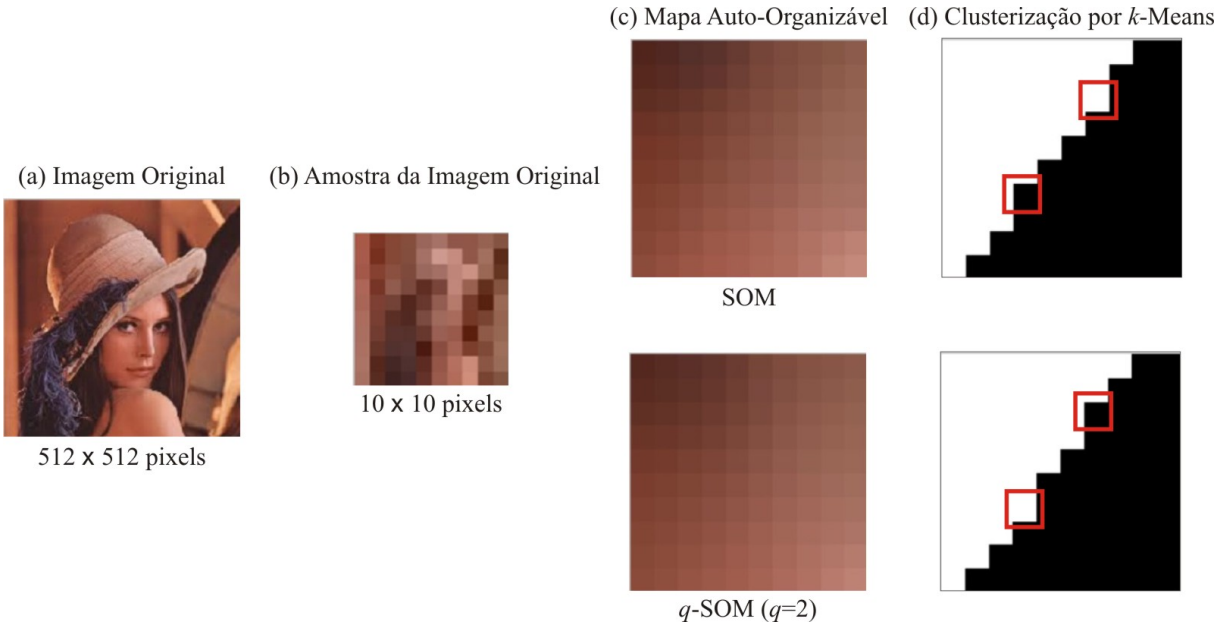
A fase de treinamento dos Mapas Auto-Organizáveis, em síntese, inicia-se a partir de uma imagem original da qual obtém-se uma amostra com resolução reduzida, ilustrada na Figura 96(a), utilizada como padrão de entrada para o treinamento. A grade neuronal, ilustrada na Figura 96(b), é iniciada com pesos aleatórios, que são atualizados pelo algortimo à cada iteração. O treinamento se encerra quando a quantidade de iterações é atingida, resultando no Mapa Auto-Organizável.

Ao utilizar o algortimo SOM tradicional no treinamento, é produzido apenas 1 Mapa Auto-Organizável, conforme ilustram as Figuras 96(c2) e (d). O treinamento com o modelo q-SOM foi realizado com variações nos valores de q da função q-Gaussiana bidimensional

- responsável pela atualização dos pesos na grade neuronal - sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, produzindo 29 Mapas Auto-Organizáveis, conforme ilustra a Figura 96(c1) e (c2).

Finalizando a fase de treinamento, os Mapas Auto-Organizáveis são clusterizados pelo algoritmo *k-Means*, em duas classes, gerando 30 Mapas de Classes, ilustrados pelas Figuras 96(e) e (f). Para ilustrar a metodologia aplicada na fase de treinamento dos Mapas Auto-Organizáveis, a Figura 97 a seguir, exemplifica tais procedimentos.

Figura 97 – Exemplo da fase de treinamento do SOM tradicional e do modelo q-SOM.



Fonte: Autor. As imagens da parte superior das colunas (c) e (d) foram produzidas a partir do SOM tradicional, enquanto que as imagens da parte inferior foram obtidas com o modelo q-SOM com $q = 2$.

A partir da imagem original, mostrada na Figura 97(a), foi obtida uma amostra com resolução reduzida, mostrada na Figura 97(b). Esta amostra da imagem original é o padrão de entrada utilizado no treinamento com os Mapas Auto-Organizáveis, neste trabalho. Após o treinamento, é obtido o Mapa Auto-Organizável, mostrado na Figura 97(c), obtido pelo SOM tradicional (na parte superior) e pelo modelo q-SOM com $q = 2$ (na parte inferior).

Após a obtenção dos Mapas Auto-Organizáveis, o algoritmo *k-Means* é utilizado para a clusterização em duas classes, mostrado na Figura 97(d). Os marcadores existentes nas clusterizações exibidas na coluna (d) - na cor vermelha - indicam diferenças observadas nas clusterizações pelo SOM tradicional (parte superior) e pelo modelo q-SOM com $q = 2$ (na parte inferior).

6.3.1.1 Pré-definições para o Treinamento dos Mapas Auto-Organizáveis

Na fase de treinamento dos Mapas Auto-Organizáveis algumas configurações iniciais foram necessárias, como a definição da amostra da imagem que será segmentada e o tamanho da grade neuronal, representados respectivamente na Figura 96 (a) e (b). Tais configurações são descritas a seguir.

A - Definição da Amostra da Imagem

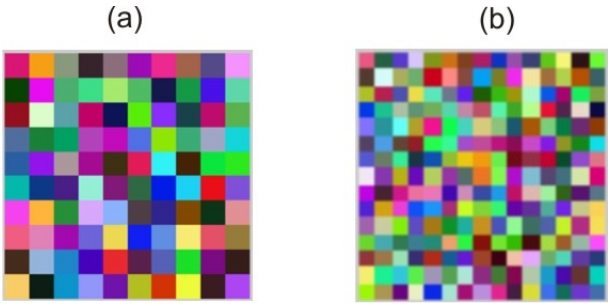
Para exemplificar a aplicação do processo competitivo do algoritmo SOM, descrito na Seção 2.8.1 como base para o modelo q-SOM, tomou-se a amostra da imagem *Lena* como padrão de entrada, mostrada na Figura 97(b). Nestes experimentos, o tamanho do padrão de entrada foi obtido com a redução da resolução da imagem original *Lena*, de tamanho 512×512 pixels, para apenas 10×10 pixels. A Figura 97(a) mostra a imagem original *Lena*. Todas as imagens da base de *Berkeley* também passaram por este pré-processamento onde foram obitadas as 300 imagens de amostra.

B - Definição da Grade Neuronal

Para a definição da grade neuronal, optou-se por utilizar uma matriz quadrada de tamanho $N \times N$ neurônios, ou seja, $i = (1, 2,..., N)$ e $j = (1, 2,..., N)$. Os pesos iniciais destas grades de neurônios são inicializados de forma aleatória pelo algoritmo. Entretanto, para garantir que em todos os experimentos as grades tenham os mesmos valores inciais de pesos, estes são repetidos em cada variação de q no modelo q-SOM. A Figura 96 (b) mostra a matriz com pesos aleatórios, de tamanho $N \times N$ pixels, como entrada da fase de treinamento dos Mapas Auto-Organizáveis.

Para observar diferenças nos resultados das segmentações pela variação no tamanho da grade de neurônios, definiu-se o valor de $N = 10$, o que produz uma grade de pesos com 100 neurônios, e repete-se os experimentos com $N = 15$, ou seja, com 225 neurônios, respectivamente mostrados nas Figuras 98 (a) e (b).

Figura 98 – Imagens dos mapas de pesos sinápticos iniciais gerados a partir de valores aleatórios, utilizados em todos os experimentos.



Fonte: Autor. (a) 10×10 neurônios. (b) 15×15 neurônios.

A variação da quantidade de neurônios N provoca alterações nos valores do parâmetro β da função q-Gaussiana bidimensional e permite observar alterações nos resultados dos Mapas Auto-Organizáveis, que por sua vez refletem diferenças nas segmentações produzidas. Estas diferenças ocorrem devido à influência do valor de N sobre o valor do parâmetro β, uma vez que $\beta = \frac{1}{(3-q)\sigma^2}$ e o valor inicial de σ, que neste trabalho foi definido como 80% do valor de N, isto é, $\sigma_0 = 0{,}8N$.

C - Definição Automática da Quantidade de Iterações

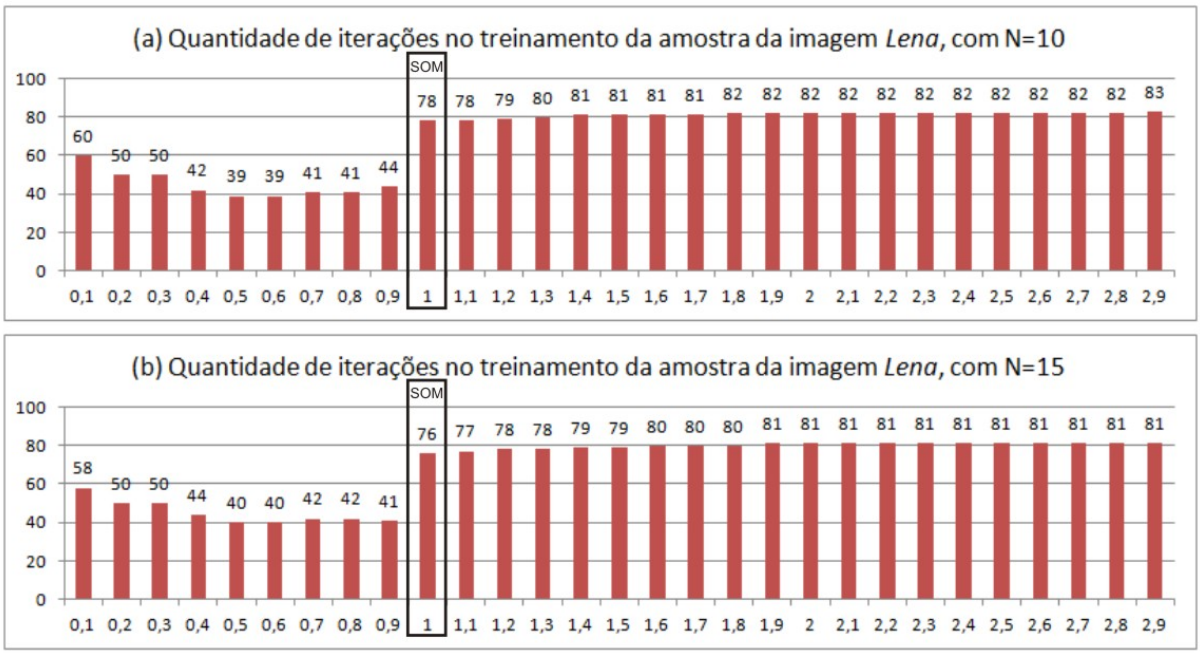
Todos os padrões de entrada, isto é, cada um dos pixels da imagem de amostra, fazem parte do processo competitivo, sendo realizado o treinamento com t iterações para cada variação do valor de q. Para analisar se há alguma diferença significativa na quantidade de iterações t necessárias para a rede q-SOM convergir, se comparada ao treinamento de uma rede SOM tradicional, em princípio não foi fixada uma quantidade de iterações para o treinamento, mas sim foi estabelecido um critério para encerrar o treinamento automaticamente, descrito a seguir.

Foi computado o somatório da distância Euclidiana entre os pesos da grade nas iterações $\tau(t)$ e $\tau(t-1)$, representando a diferença entre as atualizações dos pesos nas duas últimas iterações, chamado aqui de índice de aprendizagem Δ_w. Com o passar do tempo discreto, aqui representado pelas iterações τ, tem-se que $\Delta_w \to 0$, reduzindo seu valor à cada iteração. Quanto mais próximo de zero, menor a atualização dos pesos e menor o aprendizado da rede, até que este aprendizado se torne irrelevante para a atualização dos pesos.

Para observar possíveis variações na quantidade de iterações em função da mudança do parâmetro q do modelo q-SOM, foi feita a definição automática da quantidade de iterações para cada variação de q, aplicando o modelo q-SOM no treinamento da imagem *Lena*. Os gráficos

apresentados na Figura 99 mostram em cada valor de q, a quantidade de iterações necessárias, definidas automaticamente nos treinamentos pelo modelo q-SOM, de modo que $\Delta_w < 0{,}0005$, sendo que o gráfico na parte superior mostra os resultados com $N = 10$ e na parte inferior com $N = 15$.

Figura 99 – Definição automática da quantidade de iterações necessárias para o treinamento da imagem *Lena*, através do modelo q-SOM, variando $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$.



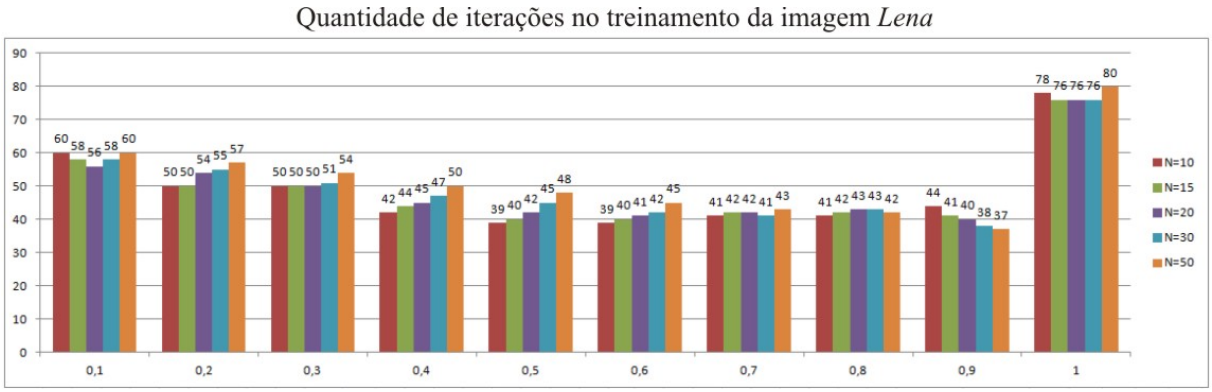
Fonte: Autor. Definiu-se o limiar $\Delta_w < 0.0005$: (a) Com o valor de $N = 10$. (b) Com o valor de $N = 15$.

Observando-se os gráficos da Figura 99, nota-se que o treinamento com a imagem *Lena*, realizado pelo algoritmo q-SOM, computou diferentes quantidades de iterações necessárias para o treinamento atingir o limiar de índice de treinamento pré-definido por $\Delta_w < 0.0005$. Para valores de $q \leq 0{,}9$, as quantidades foram inferiores do que para valores de $q \geq 1$. Nota-se, também, que os resultados computados pelo treinamento com o algoritmo SOM tradicional são os mesmos daqueles computados pelo algoritmo q-SOM, quando $q = 1$.

Após observar - no exemplo do treinamento do modelo q-SOM a partir da imagem *Lena* - que a quantidade de iterações para o treinamento é sensível à variação do parâmetro q, novos treinamentos foram realizados com outros três tamanhos diferentes de grades de neurônios, na expectativa de observar se a definição automática da quantidade de iterações para o treinamento do modelo q-SOM também pode ser sensível à variação do tamanho da grade neuronal.

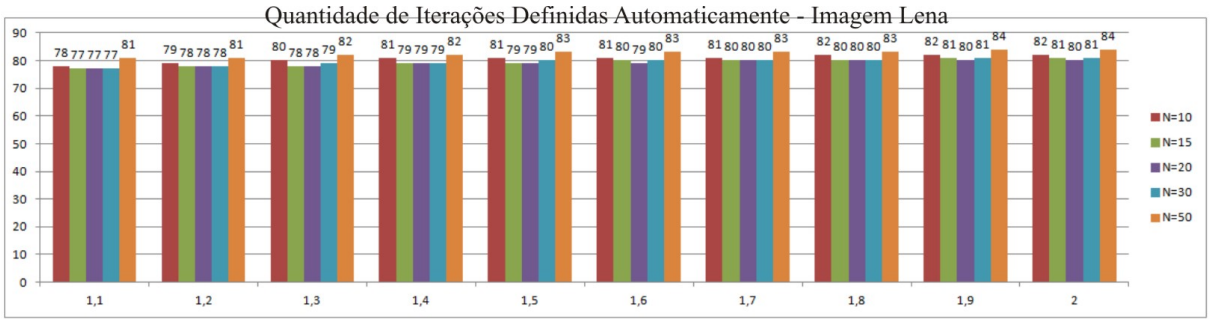
Os resultados obtidos com os 5 tamanhos de grades neuronais são apresentados nos gráficos das Figuras 100, 101 e 102, que mostram a variação da quantidade de iterações necessárias para o treinamento pelo modelo q-SOM em função da variação do valor de $N = [10; 15; 20; 30; 50]$, para cada valor de $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, considerando apenas o exemplo da imagem *Lena*.

Figura 100 – Definição automática da quantidade de iterações necessárias para o treinamento da imagem *Lena*, através do modelo q-SOM, variando $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 1{,}0\}$ e também o tamanho da grade neuronal em $N = [10; 15; 20; 30; 50]$.



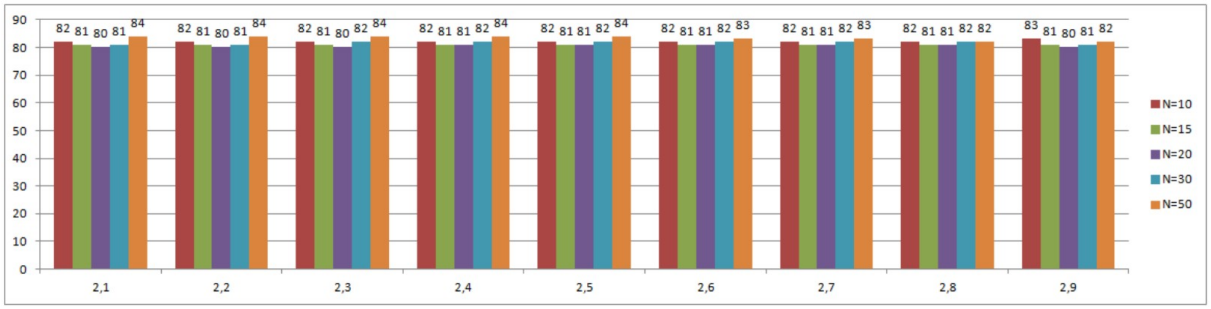
Fonte: Autor. Definiu-se o limiar $\Delta_w < 0{,}0005$.

Figura 101 – Definição automática da quantidade de iterações necessárias para o treinamento da imagem *Lena*, através do modelo q-SOM, variando $q = \{1{,}1; 1{,}2; ...; 2{,}0\}$ e também o tamanho da grade neuronal em $N = [10; 15; 20; 30; 50]$.



Fonte: Autor. Definiu-se o limiar $\Delta_w < 0{,}0005$.

Figura 102 – Definição automática da quantidade de iterações necessárias para o treinamento da imagem *Lena*, através do modelo q-SOM, variando $q = \{2{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$ e também o tamanho da grade neuronal em $N = [10; 15; 20; 30; 50]$.



Fonte: Autor. Definiu-se o limiar $\Delta_w < 0{,}0005$.

O gráfico da Figura 100 mostra que a quantidade de iterações necessárias para o treinamento do modelo SOM é menor para valores de $q \leq 0{,}9$ em relação aos valores de $q \geq 1$. As variações observadas nas quantidades de iterações sugerem que o treinamento com o modelo q-SOM é sensível também à variação do tamanho da grade neuronal.

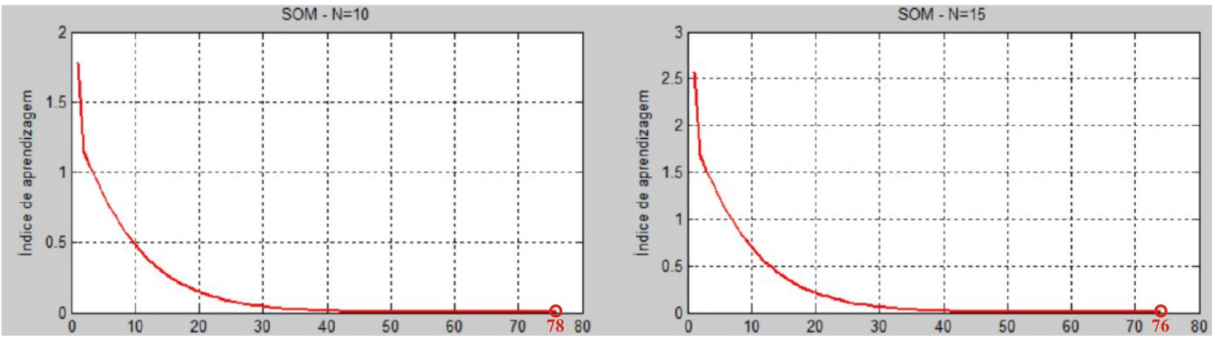
O fato de haver diferenças na quantidade de iterações para o treinamento dos Mapas Auto-Organizáveis pode não representar relevância no resultado final do treinamento, no que se refere aos valores dos pesos computados na última iteração da fase de treinamento. Portanto, neste trabalho, foram feitas segmentações das imagens originais a partir dos Mapas Auto-Organizáveis para então analisar a qualidade da segmentação e, consequentemente, do treinamento. As análises estatísticas sobre a qualidade das segmentações produzidas pelo modelo q-SOM com variações dos valores de q, são apresentadas na Seção 6.3.3.

Pelo fato do algoritmo SOM tradicional ser amplamente reconhecido pela comunidade da Ciência da Computação, nesta tese utilizou-se dele para determinar automaticamente a quantidade de iterações necessárias para atingir o limiar $\Delta_w = 0{,}0005$. Sendo assim, definiu-se que a quantidade de iterações utilizada na fase de treinamento dos Mapas Auto-Organizáveis do modelo q-SOM, será a mesma para todos os valores do parâmetro q, valor este definido a partir do treinamento do algoritmo SOM tradicional. Com este critério, as análises realizadas ao final do treinamento tiveram em comum a quantidade de iterações utilizadas para o treinamento de cada imagem.

Portanto, nos exemplos utilizados com a imagem *Lena*, a quantidade de iterações no treinamento com o modelo q-SOM foi definido como 78 para $N = 10$, e 76 para $N = 15$. Os

gráficos da Figura 103 ilustram o cálculo do índice de aprendizagem obtido à cada iteração do treinamento da imagem *Lena*, a partir do algoritmo SOM tradicional.

Figura 103 – Definição automática da quantidade de iterações necessárias para o treinamento da imagem *Lena*, através do algoritmo SOM tradicional, com o limiar $\Delta_w < 0{,}0005$.



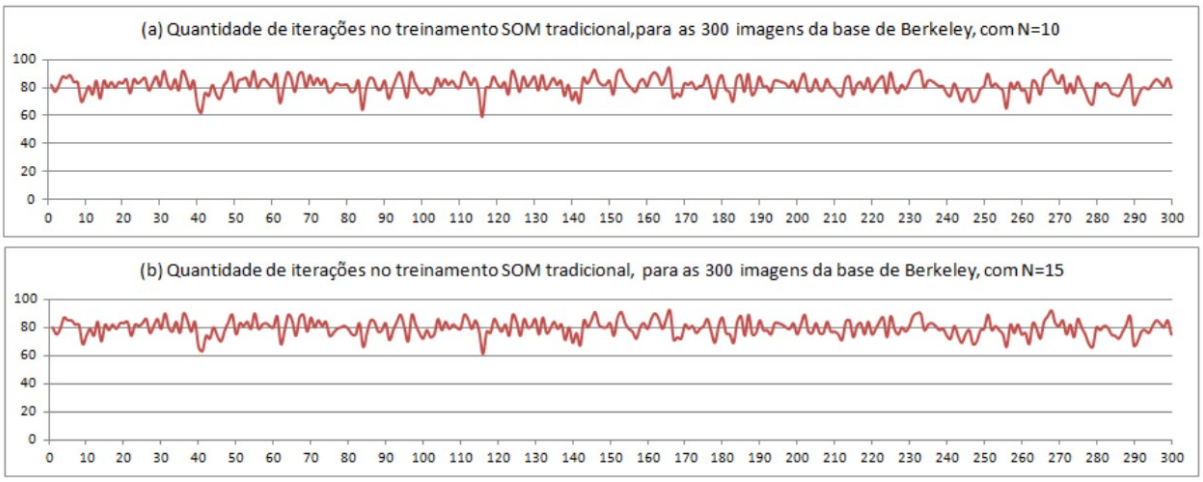
Fonte: Autor. (esquerda) com o valor de $N = 10$, sendo necessárias 78 iterações. (direita) com o valor de $N = 15$, sendo necessárias 76 iterações.

Com o limite $\Delta_w = 0{,}0005$ estabelecido, assumiu-se que o treinamento pode ser encerrado pois as atualizações dos pesos não produziram mais diferenças significativas nos resultado do treinamento. Com isto, ficou evidente que a quantidade de iterações necessárias para cada treinamento pode variar, sendo sensível ao tamanho da grade neuronal.

Para as imagens da base de *Berkeley*, também adotou-se o mesmo critério, definindo-se automaticamente a quantidade de iterações na fase de treinamento dos Mapas Auto-Organizáveis a partir do treinamento com o SOM tradicional. Entretanto, estes valores variam à cada nova imagem. Assim, foram realizados treinamentos com todas as 300 imagens da base de *Berkeley*, através do algoritmo SOM tradicional, com $N = 10$ e $N = 15$, conforme ilustrado na metodologia exibida nas Figuras 96(c2) e (d2), e assim obtidas as quantidades de iterações necessárias para atingir o limite $\Delta_w = 0{,}0005$.

Os gráficos da Figura 104, mostram as quantidades de iterações computadas automaticamente para atingir o limiar $\Delta_w < 0{,}0005$ no treinamento das 300 imagens de *Berkeley*, através do algoritmo SOM tradicional.

Figura 104 – Gráfico ilustrando a quantidade de iterações necessárias para o treinamento das 300 imagens da base de *Berkeley*, definidas a partir do treinamento pelo algoritmo SOM tradicional, com o limiar $\Delta_w < 0{,}0005$.



Fonte: Autor. (a) Com $N = 10$. (b) Com $N = 15$.

D - Atualização dos Pesos Sinápticos pela Função q-Gaussiana Bidimensional

A partir das entradas mostradas nas Figuras 96 (a) e (b), inicia-se o treinamento com o modelo q-SOM com 29 valores de q, sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, e obtém-se como saída da fase de treinamento um Mapa Auto-Organizável para cada valor de q, respectivamente representados nas Figuras 96 (c1) e (d1).

O modelo de Mapa Auto-Organizável q-SOM utiliza-se de uma função q-Gaussiana bidimensional, proposta na Seção 4.1.2, para compor a função de atualização dos pesos sinápticos. A atualização dos pesos é descrita na Seção 2.8.2.

Definiu-se também o valor da constante de tempo que expressa uma taxa fixa de decaimento do valor do σ dado por $\tau_1 = 0{,}05$. A atualização dos pesos sinápticos ocorre somente sobre os neurônios ij que pertencem à vizinhança h_{ij} através da função de atualização descrita pela Equação (47). Nos experimentos deste trabalho foi definido que a taxa de aprendizagem deve começar com um valor inicial $\eta_0 = 0{,}1$ e decrescer através de uma função exponecial descrita pela Equação (48). Também definiu-se a utilização do decaimento exponencial dado pela Equação (46), que ocorre à cada iteração da fase de treinamento, e garante a redução do tamanho de σ à cada iteração, conforme apresentado na Seção 2.8.2.

Ao final desta etapa da fase de treinamento, o neurônio vencedor w_{ij} da matriz de pesos sinápticos é identificado, onde as coordenadas ij marcam o centro de uma vizinhança topológica

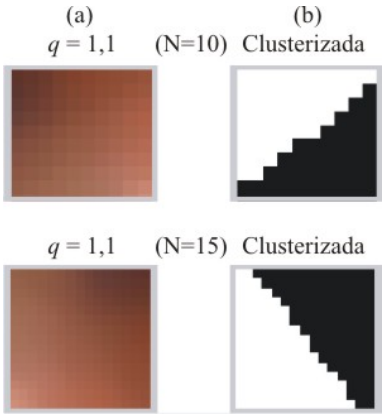
na grade de neurônios. Após todas as iterações, obtém-se como resultados os Mapas Auto-Organizáveis de tamanho $N \times N$. Nestes experimentos, cada um dos Mapas Auto-Organizáveis foram submetidos ao processo de clusterização com apenas 2 classes, visando a segmentação das 300 imagens da base de *Berkeley*. A fase de clusterização é descrita na Seção a seguir.

6.3.1.2 Clusterização dos Mapas Auto-Organizáveis

Após a etapa de treinamento dos Mapas Auto-Organizáveis realizou-se a clusterização destes. Para cada imagem treinada produziram-se 30 Mapas Auto-Organizáveis, sendo 1 através do algoritmo SOM tradicional e 29 pelo modelo q-SOM, sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$. Neste trabalho, para a clusterização, optou-se pela utilização do algoritmo *k-Means*, descrito na Seção 2.5.1, pré-defindo em 2 classes, conforme mostra a metodologia ilustrada nas Figuras 96 (e) e (f).

A Figura 105 mostra, na coluna (a), exemplos de Mapas Auto-Organizáveis e na coluna (b) suas respectivas clusterizações em 2 classes produzidas através do algoritmo *k-means*.

Figura 105 – Exemplos de Mapas Auto-Organizáveis da imagem *Lena*, clusterizados por *k-Means* em 2 classes.



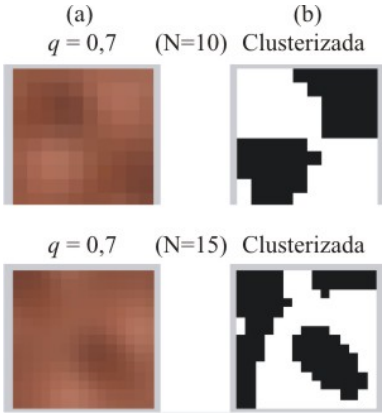
Fonte: Autor. (a) Mapas Auto-Organizáveis q-SOM (com $q = 1{,}1$). (b) Mapas Auto-Organizáveis clusterizados.

Com a clusterização, pode-se observar que os Mapas Auto-Organizáveis produzidos pelo modelo q-SOM formaram uma rede elástica com topologia de uma grade bidimensional, fornecendo uma representação das características importantes dos padrões de entrada, como sugerem Haykin (2001), Ritter (1995). Observa-se que os vetores de pesos sinápticos da vizi-

nhança topológica moveram-se juntos com o neurônio vencedor na fase de treinamento, resultando em mapas topológicos com pequenas variações entre os pesos dos neurônios, evidenciada pela clusterização dos mapas em duas classes, como pode ser visto nas Figuras 105 e 106. Assim, pode-se observar variações na sensibilidade dos Mapas Auto-Organizáveis em relação ao parâmetro q, em função dos diversos valores de q aplicados, e também ao valor de β, em função dos valores de N definidos para estes experimentos.

As imagens da parte superior da Figura 105 foram produzidas utilizando grade de neurônios com $N = 10$, e as imagens da parte inferior com $N = 15$. Observa-se que ambas as clusterizações produzem uma separação quase que linear entre as duas classes. A separação linear não é o objetivo desta metodologia, pois não pode-se afirmar que existe alguma linearidade na separação entre as classes. A Figura 106, mostra a clusterização produzida a partir dos Mapas Auto-Organizáveis q-SOM (com $q = 0{,}7$), a qual resulta em uma separação não-linear entre as classes.

Figura 106 – Exemplos de clusterização da imagem *Lena*, em 2 classes com *k-Means*: (

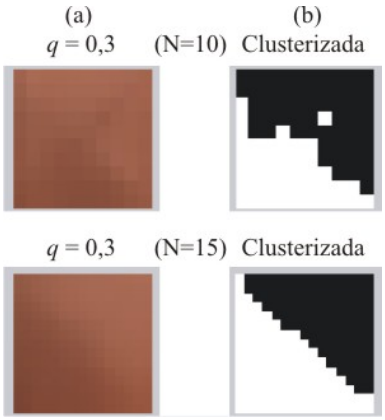


Fonte: Autor. (a) Mapas Auto-Organizáveis q-SOM (com $q = 0{,}7$). (b) Mapas Auto-Organizáveis clusterizados.

As clusterizações mostradas na Figura 106 mostram que, no treinamento do q-SOM (com $q = 0{,}7$), os vetores de pesos sinápticos da vizinhança topológica produziram uma separação não-linear entre as classes. Não se pode afirmar sobre a qualidade do resultado do treinamento realizado apenas pela linearidade, ou não-linearidade, da separação entre as classes. Portanto, análises sobre as segmentações produzidas pelos Mapas Auto-Organizáveis, com as 300 imagens da base de *Berkeley*, foram realizadas e os resultados apresentados na Seção 6.3.3.

Observando-se os Mapas Auto-Organizáveis treinados para a segmentação da imagem *Lena*, nota-se também a influência do tamanho da grade de neurônios, dada pelo valor de N, refletida na variação do valor de β da função q-Gaussiana bidimensional, utilizada no modelo q-SOM. A Figura 107 mostra os Mapas Auto-Organizáveis por q-SOM (com $q = 0{,}3$).

Figura 107 – Exemplos de clusterização da imagem *Lena*, em 2 classes com *k-Means*.



Fonte: Autor. (a) Mapas Auto-Organizáveis q-SOM (com $q = 0{,}3$). (b) Mapas Auto-Organizáveis clusterizados.

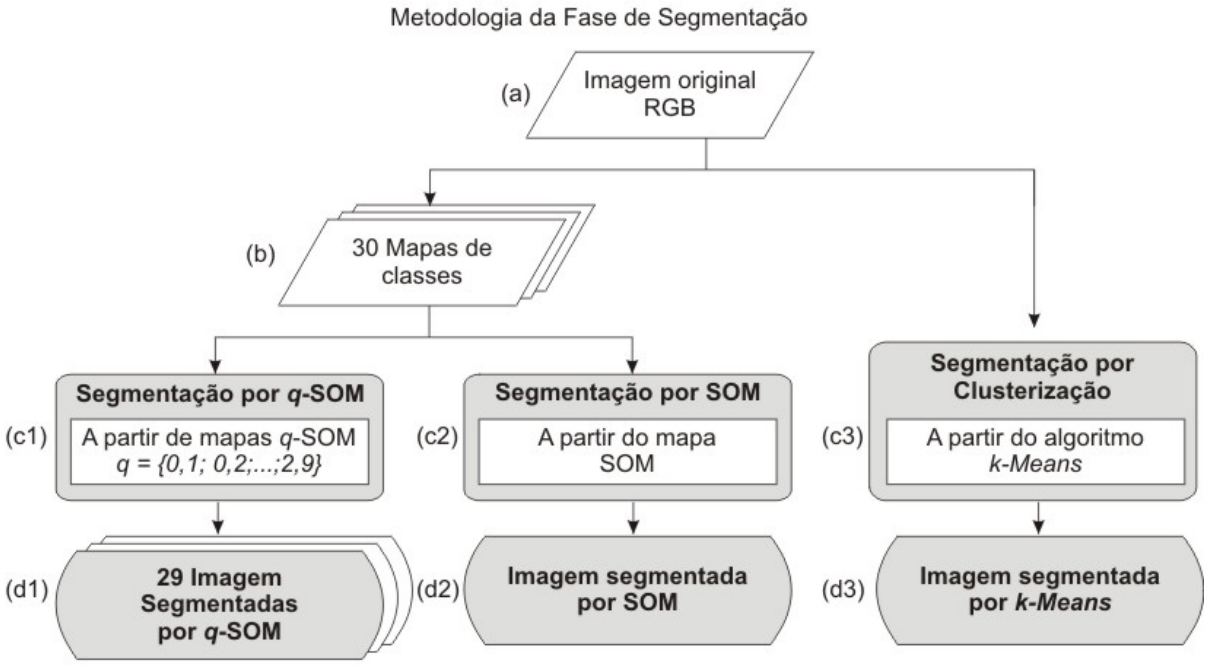
Observando-se a Figura 107, nota-se que os vetores de pesos sinápticos da grade neuronal com $N = 10$ moveram-se juntos com o neurônio vencedor, mas não produziram um mapa topológico cuja clusterização em duas classes resultou em separação próxima à linear. Entretanto, com mesmo valor do parâmetro $q = 0{,}3$, a grade neuronal com $N = 15$ produziu uma separação próxima à linear após a clusterização do Mapa Auto-Organizável. Este comportamento sugere que o tamanho da grade neuronal pode influenciar nos resultados do treinamentos e, por consequência, na clusterização dos Mapas Auto-Organizáveis. Na Seção 6.3.3, são feitas análises estatísticas sobre as imagens segmentadas a partir da clusterização.

6.3.2 Fase da Segmentação a partir dos Mapas Auto-Organizáveis

A Figura 108 mostra a metodologia aplicada na fase de segmentação dos experimentos realizados neste trabalho. A imagem *Lena*, apresentada na Figura 97(a), foi utilizada como exemplo para descrever a metodologia; entretanto, as análises finais baseiam-se na aplicação desta metodologia sobre as 300 imagens da base de *Berkeley*.

A partir de um padrão de entrada, que nestes experimentos são as imagens originais representadas na Figura 108(a), três diferentes abordagens para segmentação das imagens foram aplicadas: a partir de Mapas Auto-Organizáveis SOM, a partir do modelo q-SOM, e também diretamente a partir de clusterização, sem a utilização de Mapas Auto-Organizáveis.

Figura 108 – Metodologia aplicada aos experimentos de segmentação a partir dos Mapas Auto-Organizáveis SOM e q-SOM.



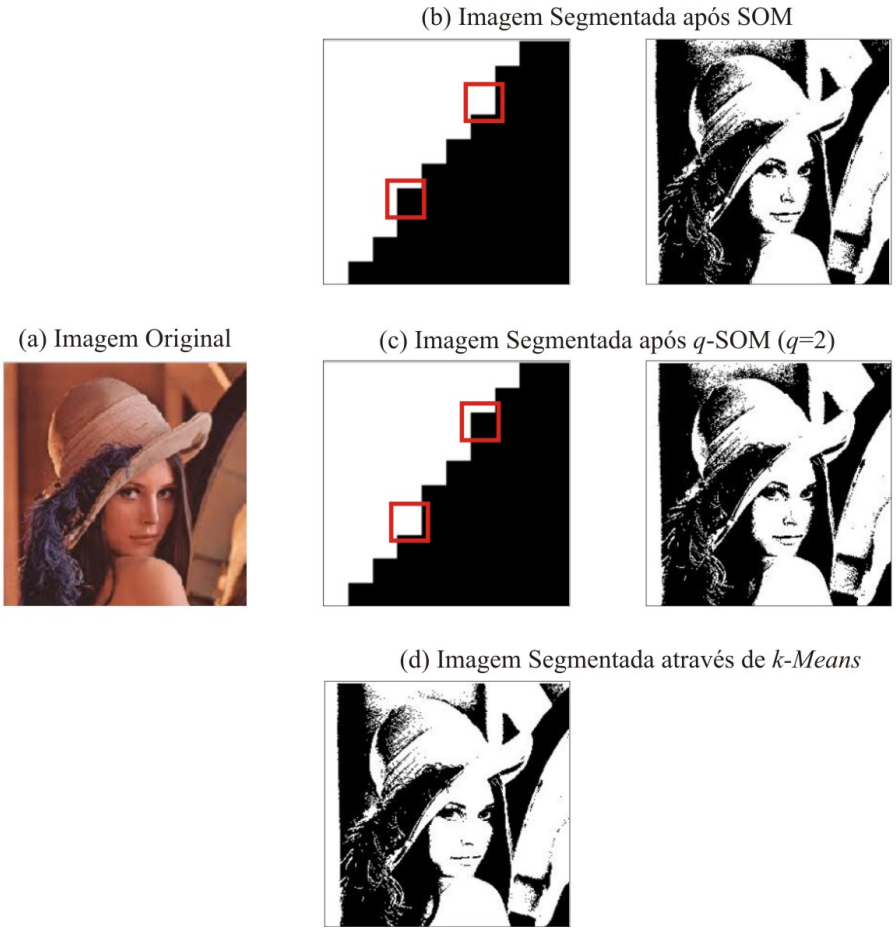
Fonte: Autor.

A partir de uma imagem original, foram feitas as 29 segmentações através do modelo q-SOM, sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, como mostram as Figuras 108(c1) e (d1). Também foi realizada a segmentação da imagem original através do algoritmo SOM tradicional, produzindo uma única imagem segmentada, como mostram as Figuras 108(c2) e (d2). Finalizando, foi aplicado o algoritmo *k-Means* diretamente sobre a imagem original e assim produzida uma segmentação da imagem original, sem utilização de Mapa Auto-Organizável. Para ilustrar a metodologia aplicada na fase de segmentação a partir dos Mapas Auto-Organizáveis, a Figura 109 a seguir, exemplifica tais procedimentos.

A Figura 109(a), a seguir, exibe a imagem original *Lena*, que foi segmentada neste exemplo. Na Figura 109(b), pode-se ver o Mapa Auto-Organizável produzido pelo algortimo SOM tradicional e sua respectiva segmentação. Na Figura 109(c) é exibido o Mapa Auto-

Organizável produzido pelo modelo q-SOM ($q = 2$) e sua respectiva imagem segmentada. Por fim, a Figura 109(d) exibe a segmentação realizada diretamente seobre a imagem original, sem Mapas Auto-Organizáveis, utilizando-se somente o algoritmo *k-Means*.

Figura 109 – Exemplo da fase de segmentação pelo modelo q-SOM, SOM tradicional e *k-Means*.



Fonte: Autor. (a) Imagem original. (b) Mapa de classes e imagem segmentada pelo algoritmo SOM. (c) Mapa de classes e imagem segmentada pelo modelo q-SOM (q=2). (d) Imagem segmentada pelo algoritmo *k-Means*. Os marcadores na cor vermelha, indicam diferenças entre os mapas de classes.

6.3.2.1 Segmentação a partir do Modelo q-*SOM*

No procedimento de segmentação da imagem original a partir dos Mapas Auto-Organizáveis q-SOM, toma-se a imagem original como entrada e aplica-se a etapa do processo competitivo do modelo q-SOM, onde o neurônio vencedor, identificado através da minimização da distância

euclidiana entre w_{ij} e x, é classificado de acordo com a posição ij no mapa de classes, produzido na fase de treinamento, conforme ilustrado na metodologia apresentada nas Figuras 108(b) e (c1). Obtém-se, como saídas, as 29 imagens segmentadas por *q*-SOM, ilustradas na Figura 108(d1), isto é, o modelo *q*-SOM produz uma segmentação para cada variação do parâmetro q, sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$.

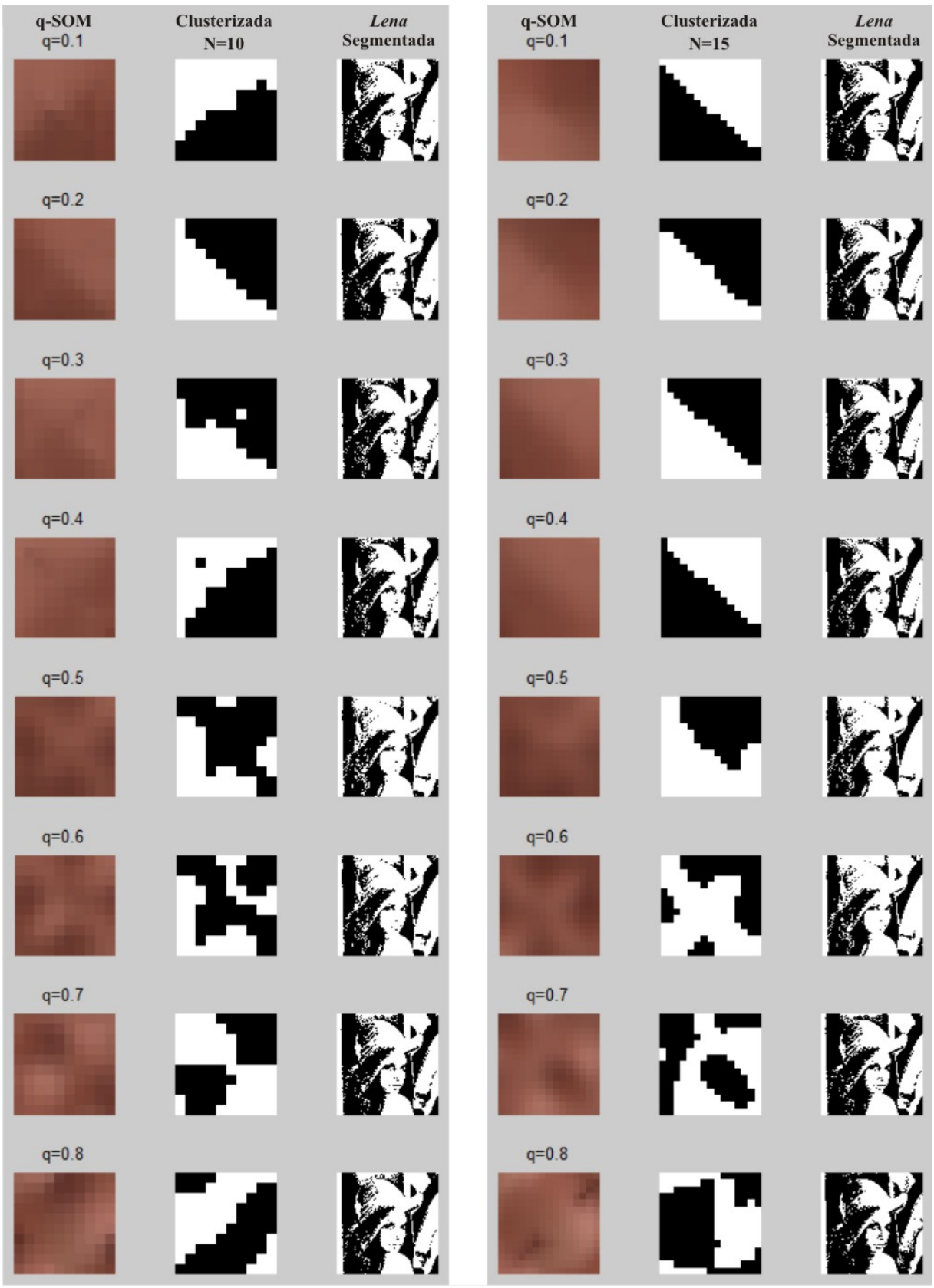
A segmentação feita a partir do algoritmo SOM tradicional, conforme mostra a Figura 108(c2), utiliza-se o mapa de classes gerado pelo algortimo SOM, na fase de treinamento. Da mesma forma, assim como no modelo *q*-SOM, esta abordagem também encontra o neurônio vencedor e classifica de acordo com o mapa de classes. Assim, obtém-se uma única segmentação, conforme ilustra a Figura 108(d2).

Para a segmentação feita a partir do algortimo *k-Means*, é aplicada a clusterização diretamente sobre a imagem original, conforme apresentado na Seção 2.5.1, sem haver utilização de Mapas Auto-Organizáveis, como ilustrado na Figura 108(c3), resultando em apenas uma segmentação da imagem original, ilustrada na Figura 108(d3). Considerando o *k-Means* como sendo um algoritmo tradicional de segmentação de imagens, foram feitas comparações do resultado deste com os resultados obtidos pelo algoritmo SOM tradicional e pelo modelo *q*-SOM, e os resultados são apresentados na Seção 6.3.3.

Toda estas etapas da fase de segmentação foram repetida duas vezes, sendo uma com a grade neuronal 10×10 e outra com a grade de tamanho 15×15 neurônios. Com a obtenção das imagens segmentadas pelos algoritmos SOM tradicional, *q*-SOM e *k-Means*, faz-se as análises comparativas entre os resultados através da aplicação das técnicas estatísticas de medição, como as descritas na Seção 2.9. As metodologias aplicadas nas análises estatísticas são mostradas na Figura 115.

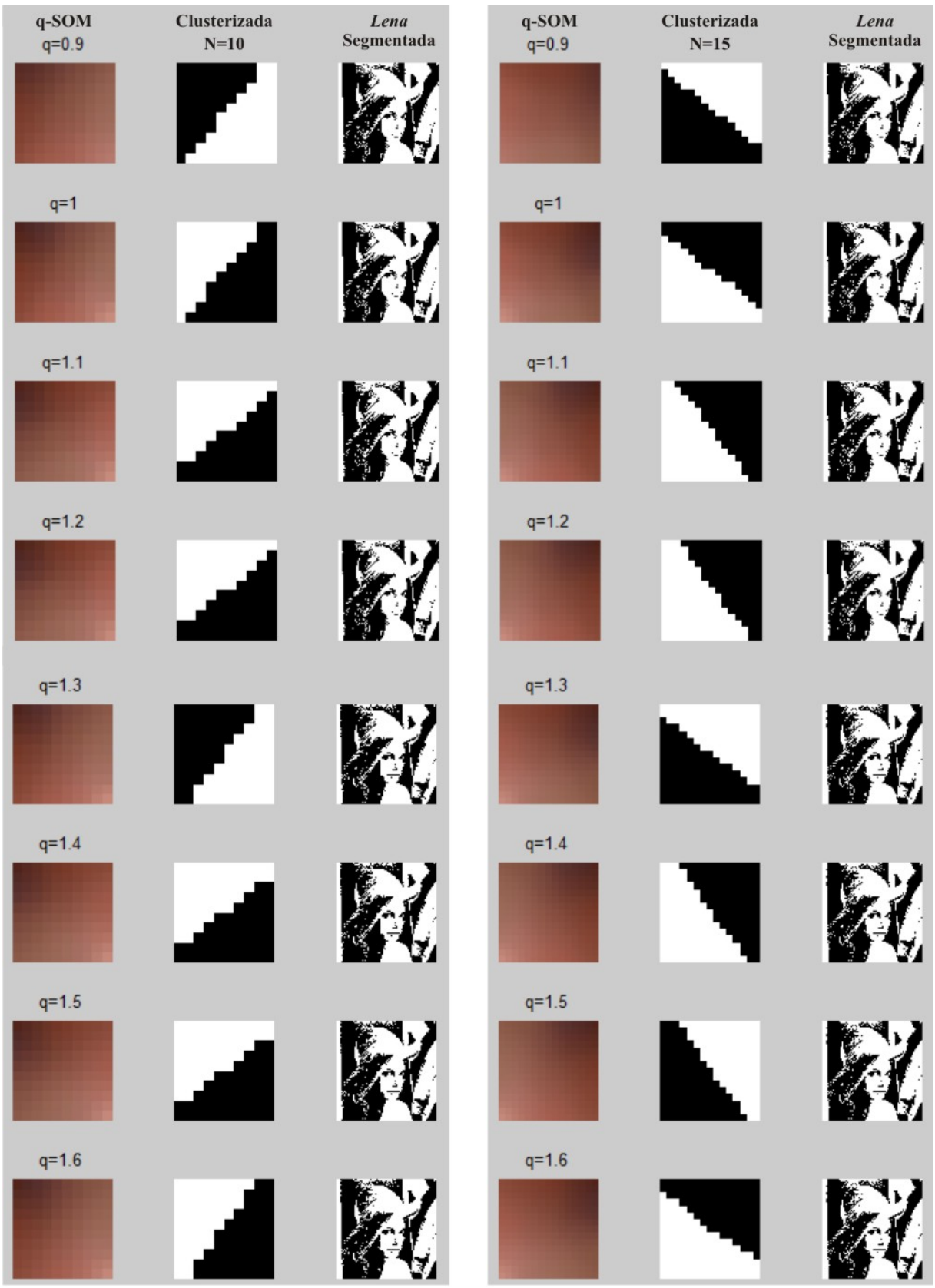
Da mesma forma como foram feitas as segmentações a partir da imagem original *Lena*, foram também efetuadas as segmentações das 300 imagens originais da base de *Berkeley*. Para exemplificar os procedimentos de segmentação de imagens aqui descritos, as Figuras 110, 111, 112 e 113 a seguir, mostram os resultados das segmentações realizadas nos experimentos com a imagem *Lena*.

Figura 110 – Resultados das segmentações da imagem *Lena*, pelo modelo q-SOM com $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 0{,}8\}$.



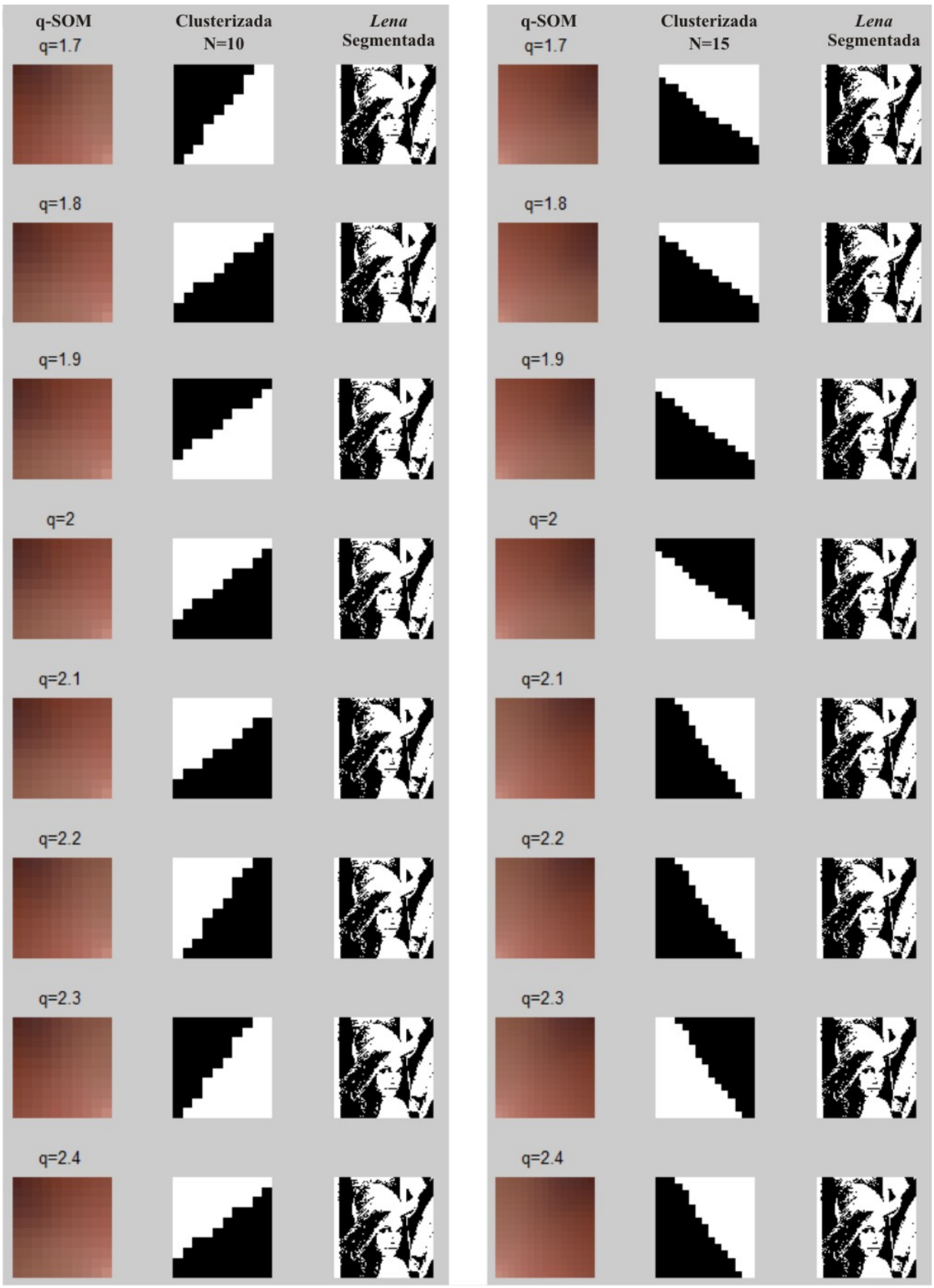
Fonte: Autor. (esquerda) Grade neuronal com $N = 10$. (direita) Grade neuronal com $N = 15$.

Figura 111 – Resultados das segmentações da imagem *Lena*, através do modelo q-SOM, com $q = \{0{,}9; 1{,}0; ...; 1{,}6\}$.



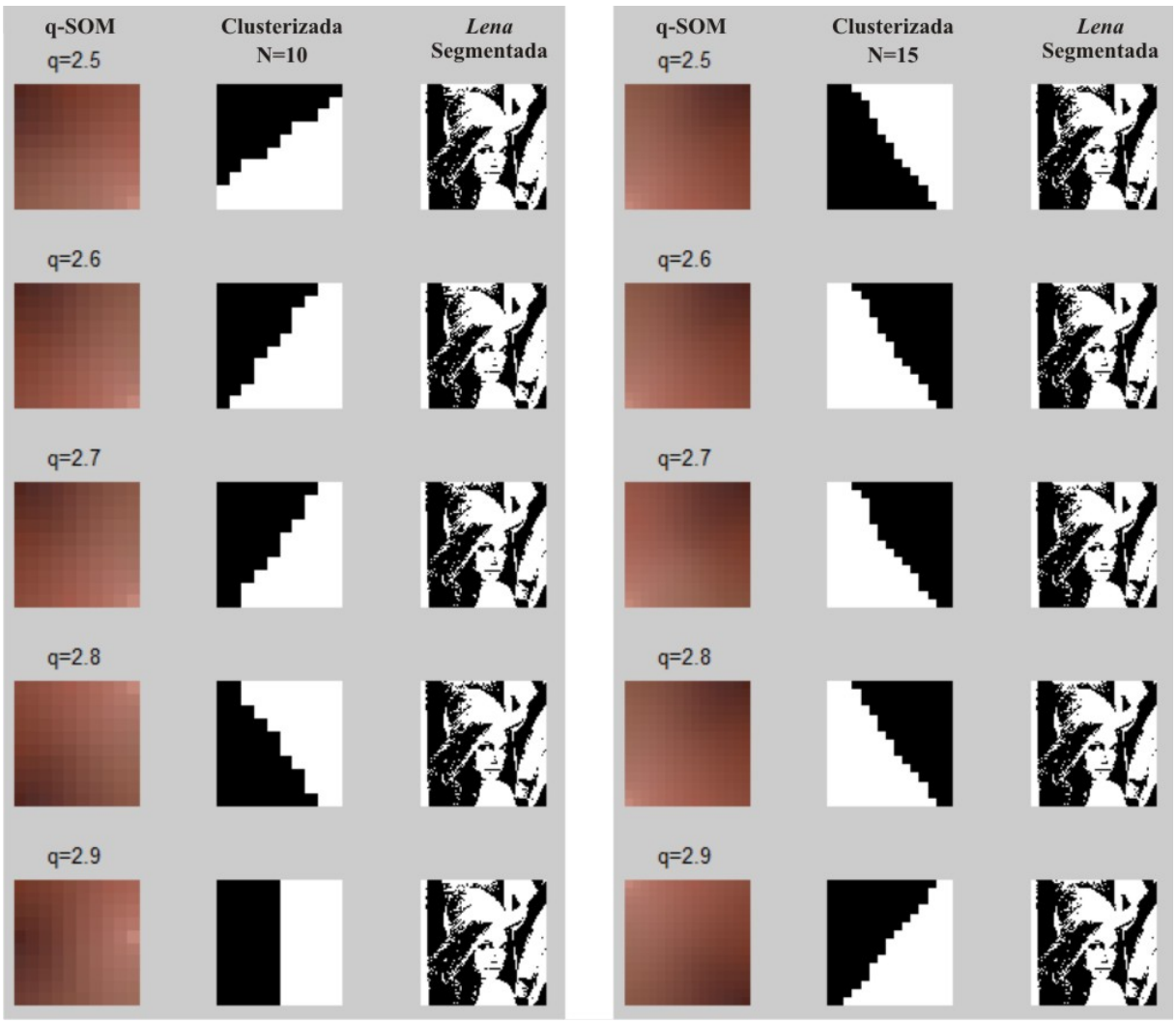
Fonte: Autor. (esquerda) Grade neuronal com $N = 10$. (direita) Grade neuronal com $N = 15$.

Figura 112 – Resultados das segmentações da imagem *Lena*, através do modelo q-SOM, com $q = \{1{,}7; 1{,}8; ...; 2{,}4\}$.



Fonte: Autor. (esquerda) Grade neuronal com $N = 10$. (direita) Grade neuronal com $N = 15$.

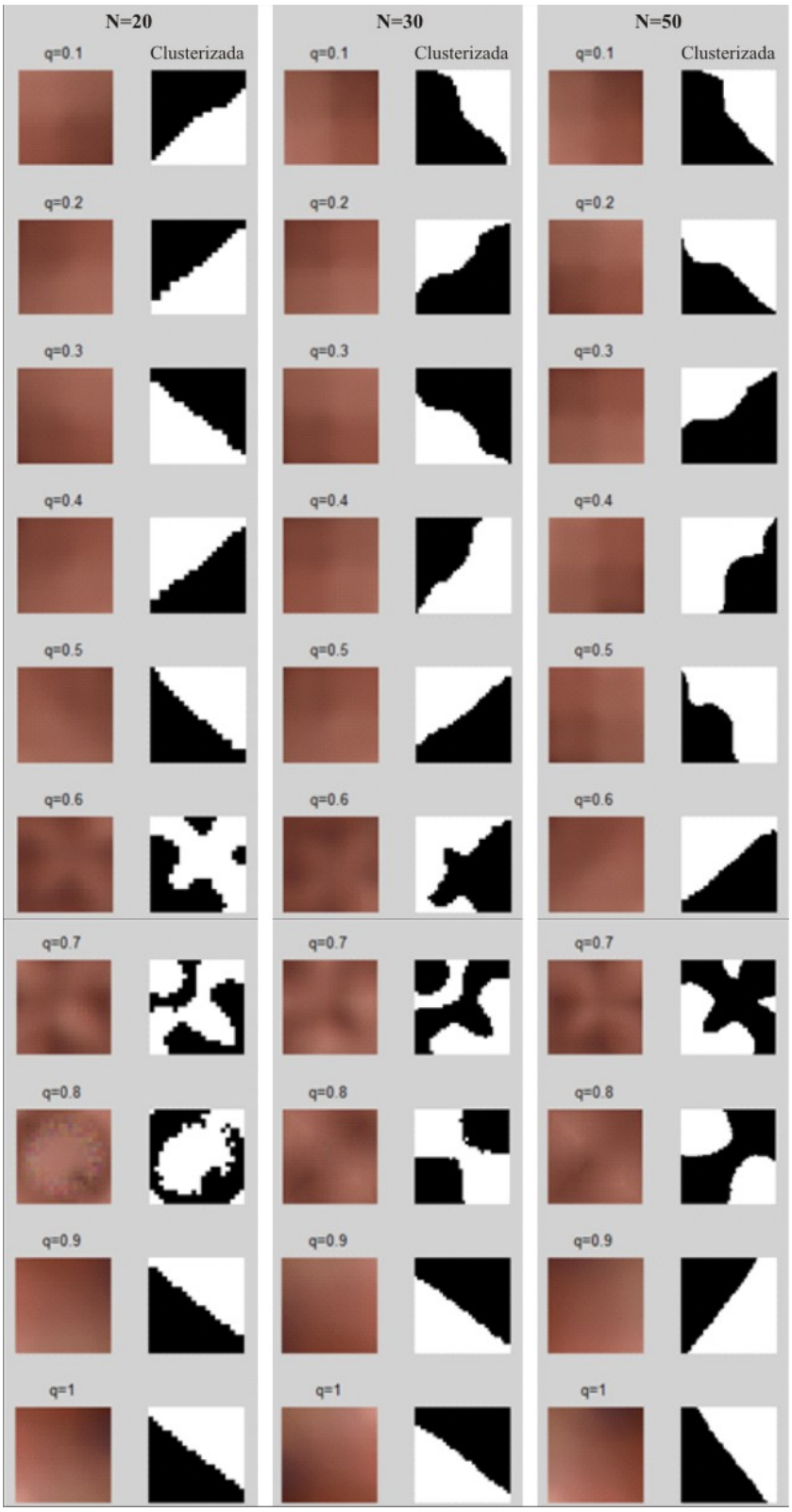
Figura 113 – Resultados das segmentações da imagem *Lena*, através do modelo q-SOM, com $q = \{2{,}5; 2{,}6; ...; 2{,}9\}$.



Fonte: Autor. (esquerda) Grade neuronal com $N = 10$. (direita) Grade neuronal com $N = 15$.

Para os valores de $q < 0{,}9$, na clusterização dos Mapas Auto-Organizáveis q-SOM, raramente foram obtidas separações entre as classes tais que pudessem ser consideradas próximas à linear, tanto para $N = 10$ quanto para $N = 15$, conforme mostram os resultados da clusterização na Figura 110. Os resultados das clusterizações mostram alterações bastante consideráveis, obtidas pela sensibilidade do modelo q-SOM com o tamanho da grade neuronal N. Portanto, novos experimentos de treinamento e segmentação de imagens, foram repetidos com outros valores de N, sendo $N = [20; 30; 50]$, e seus resultados são exibidos na Figura 114.

Figura 114 – Resultados das segmentações da imagem *Lena* através do modelo q-SOM, com $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 1\}$, variando o tamanho da grade neuronal em $N = [10; 15; 20; 30; 50]$.



Fonte: Autor. Os Mapas-Auto-Organizáveis foram clusterizados em 2 classes por *k-Means*.

Ainda analisando os experimentos de exemplo com a imagem *Lena*, o treinamento do modelo q-SOM com valores de $q \geq 0{,}9$, em todas as clusterizações foram obtidas separações entre as classes que podem ser consideradas próximas à linear, tanto para $N = 10$ quanto para $N = 15$, conforme mostram os resultados das clusterizações nas Figuras 111, 112 e 113. Entretanto, as análises sobre a qualidade das segmentações produzidas são apresentadas na Seção 6.3.3.

A Figura 114, mostra os resultados obtidos com as clusterizações produzidas pelos Mapas Auto-Organizáveis q-SOM, com valores de $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 1\}$, com tamanho da grade neuronal variando em $N = [20; 30; 50]$. Os resultados deste exemplo sugerem que a quantidade de iterações necessárias para o treinamento pelo modelo q-SOM não foi definida pelo tamanho de N, mas sim pelo valor do parâmetro q. Entretanto, as análises estatísticas sobre a qualidade das segmentações da base de *Berkeley* descritas na Seção 6.3.3 mostram conclusões sobre este comportamento.

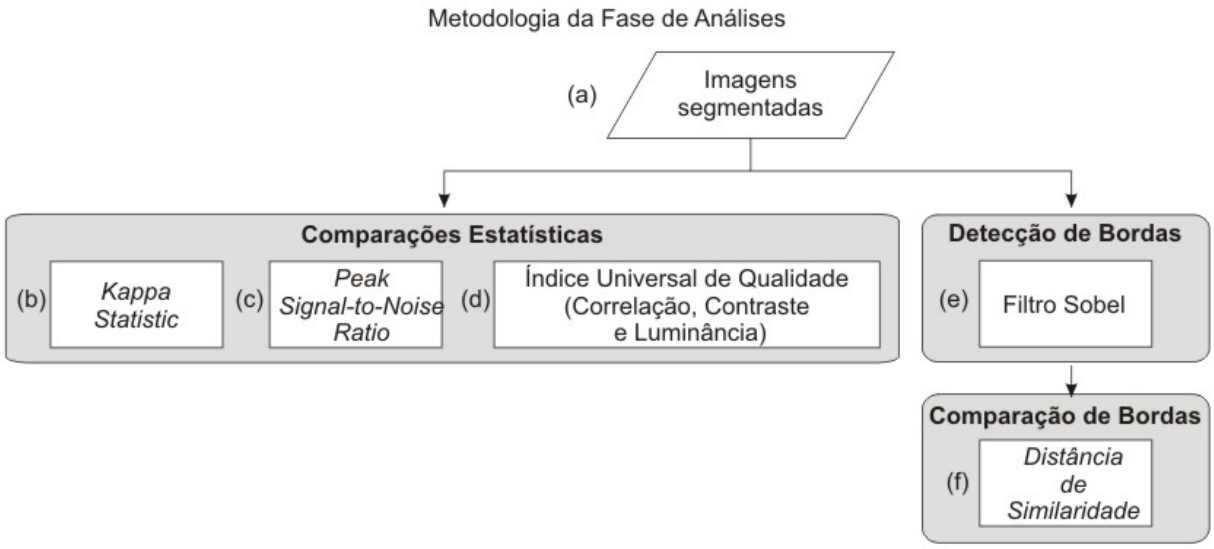
6.3.3 Análises Comparativas

Após o treinamento e a segmentação das imagens a partir do modelo q-SOM, SOM tradicional e *k-Means*, este trabalho apresenta um conjunto de análises estatísticas estabelecidas pela comparação das segmentações produzidas por q-SOM $\times$ SOM tradicional e também por q-SOM $\times$ *k-Means*.

A metodologia aplicada nas análises é ilustrada pela Figura 115, onde, a partir da imagens segmentadas nos experimentos descritos nas seções anteriores, são aplicadas medidas estatísticas como a *Kappa Statistic* (Seções 6.3.3.1, 6.3.3.2 e 6.3.3.3), a relação *Peak Signal-to-Noise Ratio* (Seções 6.3.3.4, 6.3.3.5 e 6.3.3.6) e o índice Universal de Qualidade (Q), que relaciona a Distorção de Luminância, a Distorção de Contraste e a perda da Correçação Linear (Seções 6.3.3.7, 6.3.3.8 e 6.3.3.9).

Para aferir a qualidade das segmentações, foram feitas comparações entre as bordas extraídas das imagens segmentadas, automaticamente, utilizando-se de um filtro *Sobel*, e as bordas extraídas manualmente, originais da base de imagens de *Berkeley*. Esta comparação é calculada através da aplicação da Distância de Similaridade (Seção 6.3.3.10).

Figura 115 – Metodologia das análises estatísticas aplicadas aos experimentos de segmentação a partir dos Mapas Auto-Organizáveis q-SOM.



Fonte: Autor.

6.3.3.1 Coeficiente de Concordância - Kappa Statistic

Para aferir o grau de concordância existente entre as imagens segmentadas pelo modelo q-SOM $\times$ *k-Means* e também pelo modelo q-SOM $\times$ SOM tradicional, foi utilizada a *Kappa Statistic*, apresentada na Seção 2.9.1, e ilustrada na metodologia descrita na Figura 115(b).

Para demonstrar a aplicação da *Kappa Statistic* nos experimentos com os Mapas Auto-Organizáveis, como exemplo, foram comparadas a segmentação da imagem *Lena* por *k-Means* $\times$ SOM tradicional. Os resultados são exibidos na Figura 116(a), que mostra a imagem *Lena* segmentada por *k-Means*, e a Figura 116(b), que exibe a imagem *Lena* segmentada por SOM tradicional.

Figura 116 – Exemplo de aplicação do índice $Kappa$, com o cálculo do coeficiente de concordância entre as segmentações da imagem *Lena*.

(a) *k-Means* (b) SOM (c) *Kappa:* 0,96182

Fonte: Autor. (a) Segmentada por *k-Means*. (b) Segmentada por SOM tradicional. (c) Índice $Kappa$ entre as duas segmentações.

A Figura 116(c) ilustra uma imagem como representação da divergência pixel-a-pixel entre as duas segmentações utilizadas neste exemplo, calculada em $3{,}58\%$, e que tem o índice $Kappa = 0{,}96182$. Estes resultados mostram que há uma forte concordância entre as duas segmentações. Entretanto, há diferenças entre as duas segmentações, quantificadas pelo percentual de divergência, que faz parte do cálculo do índice $Kappa$. A seguir, é descrita a metodologia utilizada para o cálculo do índice $Kappa$.

Considera-se a quantidade total de pixels da imagem como sendo a população a ser analisada. Cada pixel da imagem segmentada em duas classes, pode conter o valor 0 ou 255. Durante o processo de segmentação, foi utilizado o mesmo valor $[0, 255]$ para as 3 dimensões de cores da imagem, assim, pode-se analisar a cor em apenas uma das dimensões, pois as demais são iguais, ou seja, 0 representa a cor preta, enquanto que 255 representa a cor branca, nas 3 dimensões de cores. A Figura 117, a seguir, representa a Matriz de Erro da População, cujos valores foram extraídos das imagens do referido exemplo.

Figura 117 – Exemplo de aplicação do índice $Kappa$ sobre a imagem *Lena*: Matriz de Erro da População, representada pela quantidade de pixels, iguais ou diferentes, em cada posição *ij*, em cada segmentação.

Imagem *Lena*		segmentada por *k-Means*		
		0	255	
segmentada por SOM	0	22964	1792	24756
	255	21	25848	25869
		22985	27640	50625

Fonte: Autor.

A Matriz de Erro da População, apresentada na Figura 117, mostra em sua diagonal que há 22.964 pixels com a cor 0 e 25.848 pixels com a cor 255, nas mesmas posições *ij*, nas duas imagens. Assim, a concordância observada entre as cores é dada por $p_o = (22964 \,.\, 25848)/50625$; ou seja, $p_o = 0{,}9642$. Isto significa dizer que em $96{,}42\%$ das posições *ij* não há divergência entre os pixels das duas imagens, portanto há $3{,}58\%$ de divergência. como mostrado na Figura 116(c).

Para calcular a probabilidade da concordância esperada, observa-se na Figura 117 que a cor 0 foi encontrada em 24.756 pixels $(48{,}9\%)$ na segmentação por SOM, contra 22.985 pixels $(45{,}4\%)$ na segmentação por *k-Means*. Calcula-se, então, a probabilidade da concordância esperada para a cor 0 como sendo $p_{e0} = (48{,}9\% \,.\, 45{,}4\%)$; ou seja, a cor 0 aparece em $22{,}2\%$ dos pixels. Da mesma forma, calcula-se a probabilidade de aparecer a cor 255, que é dada por $p_{e255} = (51{,}1\% \,.\, 54{,}6\%)$; ou seja, em $27{,}9\%$ dos pixels. Com estas informações, calcula-se a probabilidade global da concordância esperada, dada por $p_e = p_{e0} + p_{e255}$, ou seja, $p_e = 50{,}1\%$.

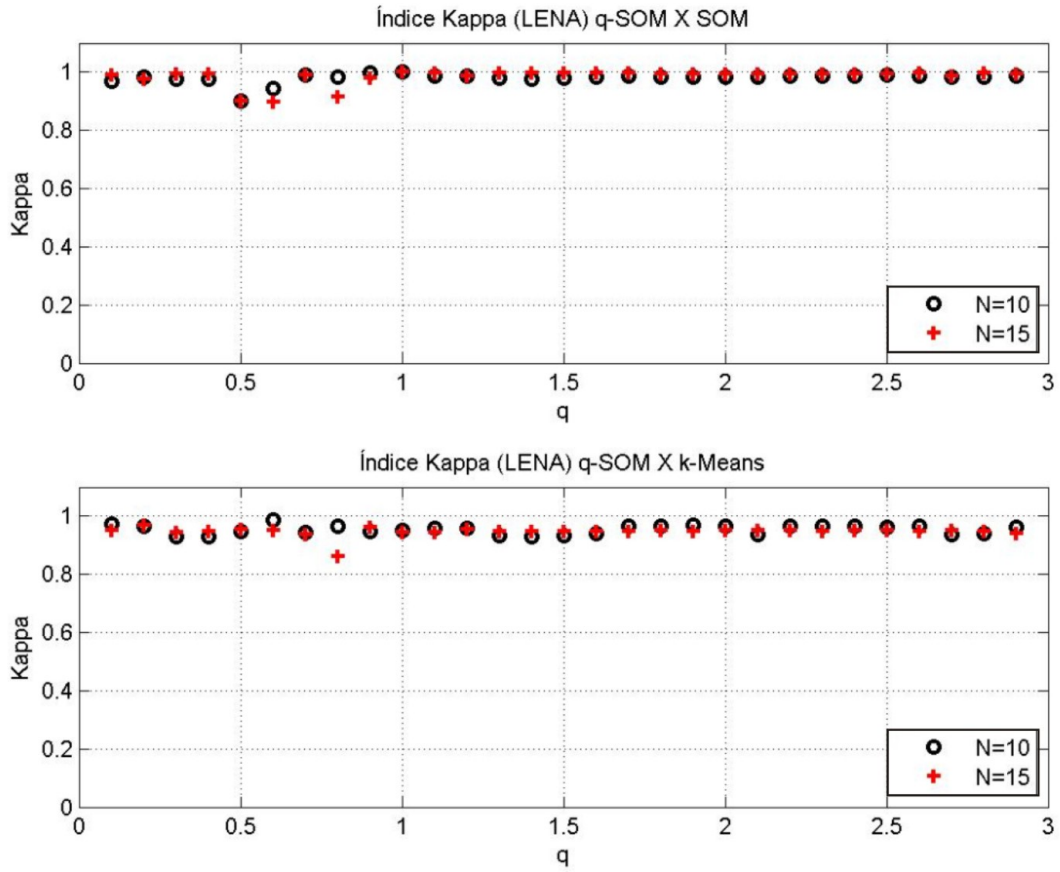
Assim, tem-se que o índice $Kappa$ é calculado por $kappa = (p_o - p_e)/(1 - p_e)$, ou seja, o coeficiente de concordância entre as imagens segmentadas por *k-Means* $\times$ SOM tradicional é $kappa = 0{,}9618$. De acordo com a escala para avaliação de concordância de Landis e Koch (1977), apresentada na Seção 2.9.1, o valor do índice $kappa = 0{,}9618$ indica que esta concordância é quase perfeita, conforme se esperava para este exemplo.

6.3.3.2 *Índice* $Kappa$ *sobre a Imagem* Lena *Segmentada*

Foi calculado o índice $Kappa$ de acordo com o modelo exemplificado na Seção 6.3.3.1, para todo o conjunto de imagens *Lena* segmentadas pelo modelo *q*-SOM, com $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, em comparação à segmentação pelos algoritmos *k-Means* e SOM tradicional.

A Figura 118 mostra o valor do índice $Kappa$ calculado sobre as segmentações da imagem *Lena*. A parte superior da Figura 118, mostra o índice $Kappa$ entre *q*-SOM $\times$ SOM, e na parte inferior mostra o índice $Kappa$ entre *q*-SOM $\times$ *k-Means*.

Figura 118 – Índice $Kappa$ calculado sobre as segmentações da imagem *Lena*.



Fonte: Autor. (superior) SOM $\times$ *q*-SOM. (inferior) *k-Means* $\times$ *q*-SOM.

Observando-se a Figura 118, nota-se uma certa regularidade nos valores do índice $Kappa$ quando $q \geq 0{,}9$, com valores muito próximos a máximo, nos 2 gráficos comparativos. Este com-

portamento confirma o alto grau de concordância das segmentações por q-SOM, em comparação à segmentação por SOM tradicional e *k-Means*, tanto para $N = 10$, quanto para $N = 15$.

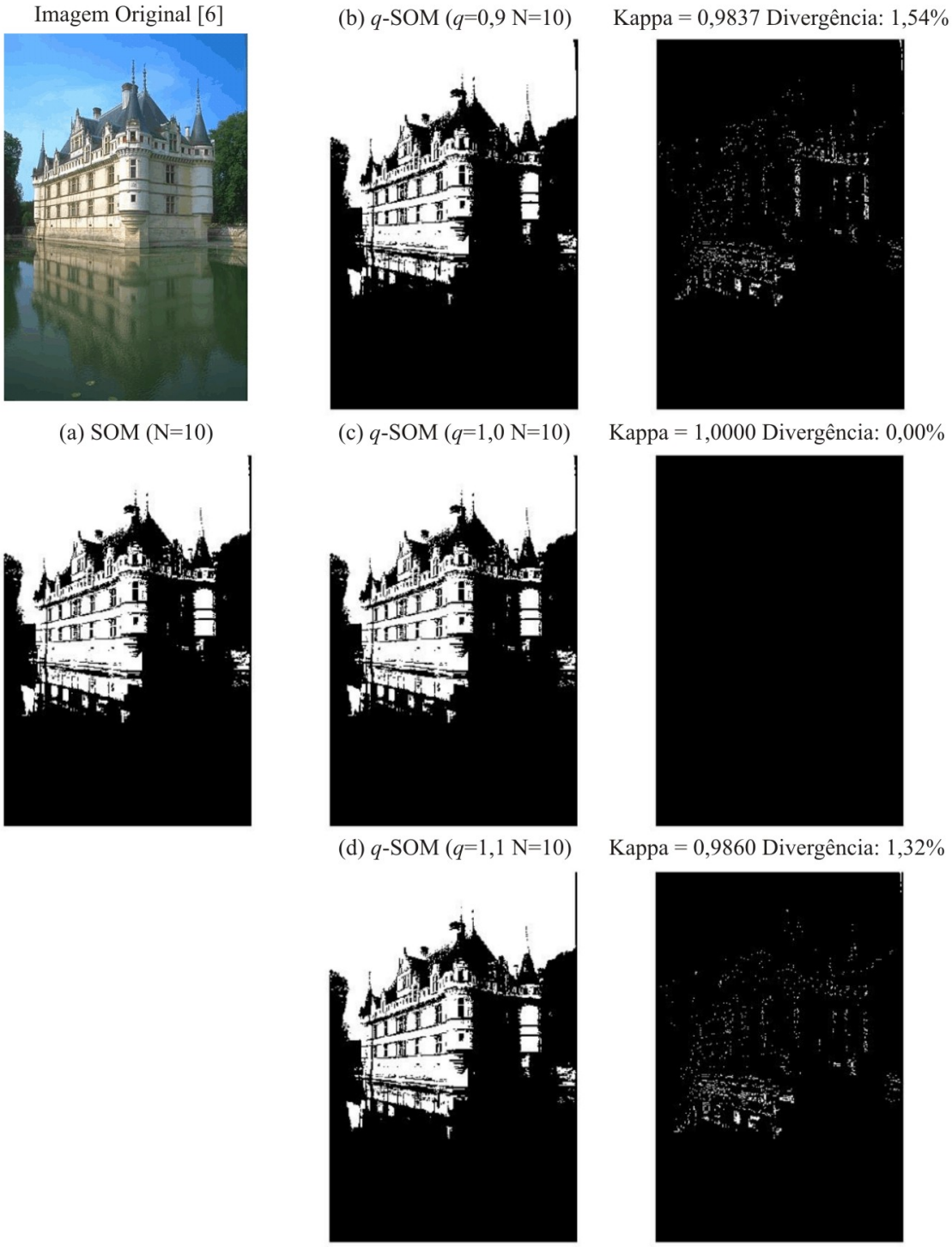
Com a criação do modelo q-SOM, não se busca a maior correlação em relação aos algoritmos SOM tradicional ou *k-Means*. A utilização da função q-Gaussiana no *kernel* do modelo q-SOM provoca pequenas deformações no modelo SOM tradicional, permitindo gerar resultados diferentes e com uma gama maior de possibilidades de análises a respeito da segmentação da imagem.

6.3.3.3 Índice $Kappa$ sobre as Imagens Segmentadas da Base de Berkeley

Foi calculado o índice $Kappa$, de acordo com o modelo exemplificado na Seção 6.3.3.1, para todas as imagens da base de *Berkeley* que foram segmentadas pelo modelo q-SOM, com $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, em comparação às segmentações pelos algoritmos *k-Means* e SOM tradicional.

A Figura 119(c), a seguir, mostra que para $q = 1$ a imagem segmentada por q-SOM é idêntica à imagem segmentada por SOM tradicional, exibida na Figura 119(a), com $Kappa = 1$. Também mostra que, com os valores de $q = 0{,}9$ e $q = 1{,}1$, há variação da divergência pixel-a-pixel medida pelo índice de concordância, sendo $Kappa = 0{,}9837$ e $Kappa = 0{,}9860$, respectivamente, apesar de serem muito próximos ao valor 1 que indicaria a concordância máxima. Esta variação nos permite afirmar que o modelo q-SOM é realmente sensível à variação do parâmetro q, permitindo produzir novas segmentações apenas pela variação deste parâmetro. Os resultados apresentados na Figura 119 foram produzidos com a grade neuronal $N = 10$ no modelo q-SOM, entretanto, nesta tese, o mesmo procedimento foi adotado com $N = 15$, variando $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$.

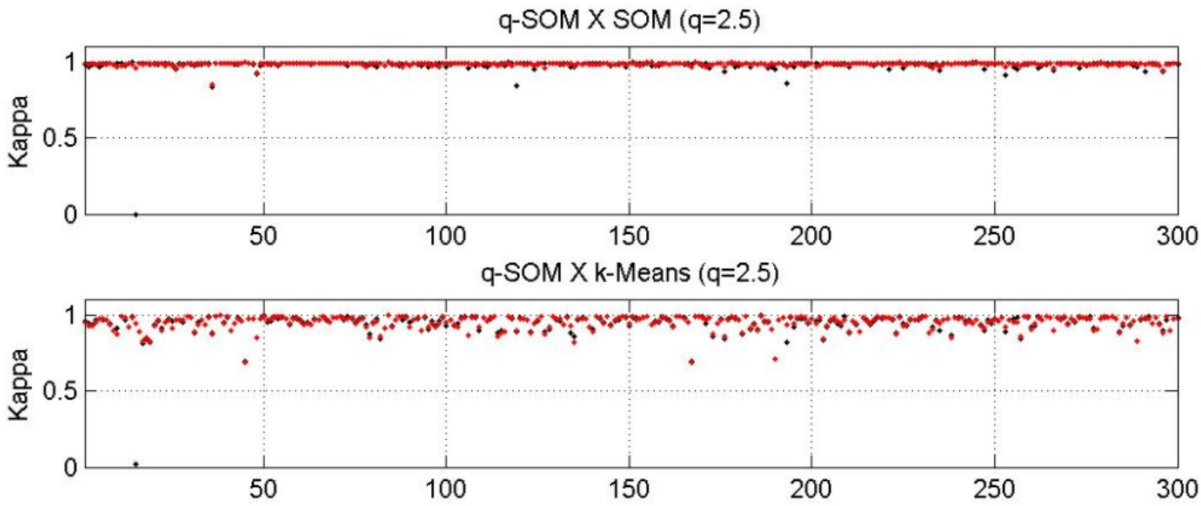
Figura 119 – Exemplo do índice $Kappa$ obtido a partir das segmentações da imagem número [6] da base de *Berkeley*.



Fonte: Autor. (a) SOM tradicional com $N = 10$. (b) q-SOM, com $q = 0{,}9$; (c) q-SOM, com $q = 1{,}0$. (d) q-SOM, com $q = 1{,}1$. Na coluna da direita, são exibidas as imagens que representam a divergência pixel-a-pixel com o $Kappa$ entre as comparações de (a) $\times$ (b), (a) $\times$ (c) e (a) $\times$ (d).

Após o cálculo do índice $Kappa$ sobre toda a base de imagens de *Berkeley*, os resultados foram agrupados de forma a exibí-los separados pelo valor do parâmetro q. A Figura 120 mostra dois gráficos como exemplo comparativo envolvendo as imagens de *Berkeley* segmentadas pelo modelo q-SOM $\times$ SOM tradicional, em comparação com as mesmas imagens segmentadas pelo modelo q-SOM $\times$ *k-Means*. Nestes exemplos, considerou-se o valor de $q = 2{,}5$ ao acaso.

Figura 120 – Gráficos com os índices $Kappa$ calculados sobre as 300 imagens segmentadas da base de *Berkeley*. A segmentação por q-SOM foi realizada com o parâmetro $q = 2{,}5$.



Fonte: Autor. Grade de neurônios com $N = 10$ (em preto) e $N = 15$ (em vermelho).

O gráfico da parte superior da Figura 120 mostra o índice $Kappa$ calculado entre as imagens segmentadas por SOM tradicional $\times$ q-SOM (com $q = 2{,}5$). O gráfico da parte inferior mostra o índice $Kappa$ calculado por *k-Means* $\times$ q-SOM (com $q = 2{,}5$).

Nota-se na Figura 120 que os valores de $Kappa$ estão muito próximos a 1, com média para q-SOM $\times$ SOM, com $Kappa_{med} = 0{,}9676$ ($N = 10$) e $Kappa_{med} = 0{,}9871$ ($N = 15$), e também para q-SOM $\times$ *k-Means*, com $Kappa_{med} = 0{,}9294$ ($N = 10$) e $Kappa_{med} = 0{,}9454$ ($N = 15$).

As médias dos valores de $Kappa$ em cada variação do parâmetro q, são apresentadas na Tabela 3. As colunas (a) e (b) mostram as médias calculadas através da comparação das imagens segmentadas por SOM tradicional $\times$ q-SOM, sendo que em (a) $N = 10$ e em (b) $N = 15$. As colunas (c) e (d) mostram o $Kappa$ extraído da comparação por *k-Means* $\times$ q-SOM, sendo que (c) $N = 10$ e em (d) $N = 15$.

Analisando os valores das médias exibidos na Tabela 3, pode-se observar que as médias nos valores de $q < 1$ são inferiores às médias nos valores de $q > 1$. Por exemplo, na coluna (a), tem-se que a média dos valores médios para $q < 1$ é de $Kappa_{med} = 0{,}9055$, enquanto que para $q > 1$ é de $Kappa_{med} = 0{,}9795$. Isso demonstra que os Mapas Auto-Organizáveis treinados pelo modelo *q*-SOM, com $q > 1$, produziram as segmentações mais próximas da segmentação utilizada como parâmetro de comparação, ou seja, *k-Means* e SOM tradicional.

Tabela 3 – Médias dos valores dos índices $Kappa$ calculados sobre as imagens segmentadas da base de *Berkeley*.

	SOM × *q*-SOM		*k-Means* × *q*-SOM	
q	(a) N=10	(b) N=15	(c) N=10	(d) N=15
0,1	0,9323	0,9505	0,9030	0,9112
0,2	0,9225	0,9445	0,8940	0,9081
0,3	0,9053	0,9201	0,8815	0,8837
0,4	0,8658	0,9210	0,8527	0,8860
0,5	0,8524	0,8725	0,8374	0,8562
0,6	0,8756	0,8307	0,8431	0,8045
0,7	0,9273	0,9374	0,8929	0,9044
0,8	0,9316	0,9285	0,9020	0,9010
0,9	0,9367	0,9496	0,9041	0,9126
1,0	1,0	1,0	0,9440	0,9419
1,1	0,9924	0,9901	0,9459	0,9474
1,2	0,9914	0,9942	0,9438	0,9435
1,3	0,9913	0,9889	0,9444	0,9456
1,4	0,9723	0,9889	0,9271	0,9466
1,5	0,9899	0,9915	0,9460	0,9442
1,6	0,9865	0,9913	0,9472	0,9435
1,7	0,9861	0,9913	0,9482	0,9444
1,8	0,9886	0,9865	0,9461	0,9479
1,9	0,9848	0,9915	0,9463	0,9447
2,0	0,9684	0,9909	0,9244	0,9444
2,1	0,9885	0,9908	0,9460	0,9433
2,2	0,9828	0,9906	0,9494	0,9438
2,3	0,9826	0,9909	0,9448	0,9440
2,4	0,9842	0,9882	0,9466	0,9471
2,5	0,9676	0,9871	0,9294	0,9454
2,6	0,9468	0,9851	0,9111	0,9480
2,7	0,9646	0,9848	0,9488	0,9314
2,8	0,9786	0,9844	0,9303	0,9305
2,9	0,9636	0,9683	0,9314	0,9282

Fonte: Autor.

Estas constatações baseadas apena no índice $Kappa$ não determinam a qualidade da imagem segmentada. Outras análises sobre a qualidade das segmentações através do $PSNR$, do índice Q e da distância de similaridade sobre as bordas extraídas das imagens são apresentadas a seguir.

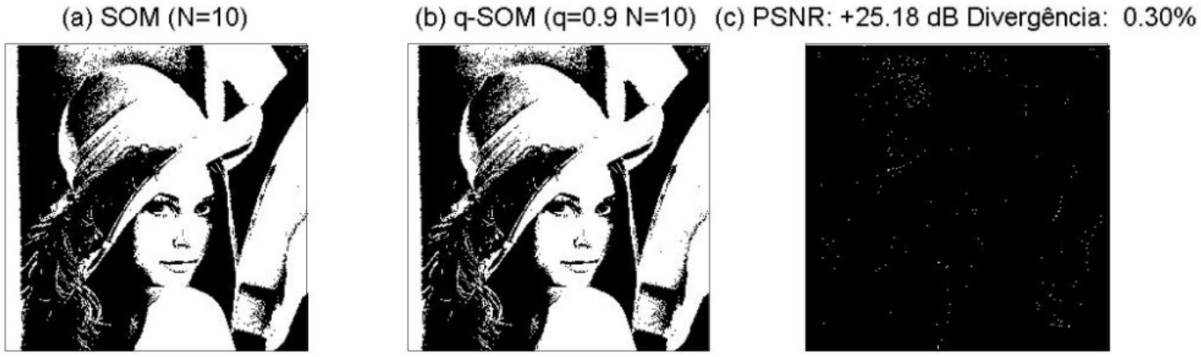
6.3.3.4 Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR*)*

A Relação Sinal-Ruído de Pico ($PSNR$), conforme mostrada na Seção 2.9.2, foi utilizada para definir a relação entre a máxima energia de um sinal, aqui medida em pixels de uma imagem segmentada, e o ruído que afeta sua representação, aqui representado pela divergência entre os pixels equivalentes em outra imagem segmentada. O $PSNR$ é expresso por uma escala logarítmica cuja unidade é o decibel (dB). Quanto maior o valor de $PSNR$, menor terá sido a perda de energia, ou o sinal-ruído divergente entre as imagens.

Em seguida, foi calculado o $PSNR$ entre a imagem segmentada por SOM tradicional e as 29 imagens segmentadas pelo Modelo *q*-SOM, com $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$. Também foi calculado o $PSNR$ entre a imagem segmentada por *k-Means* e as imagens segmentadas por *q*-SOM, com as mesmas variações dos valores de *q*.

Para ilustrar um cálculo do $PSNR$ em comparação com a divergência pixel-a-pixel entre duas imagens, a Figura 121(a) mostra a imagem *Lena* segmentada por SOM tradicional com $N = 10$, e a Figura 121(b) exibe a imagem *Lena* segmentada por *q*-SOM, tendo $q = 0{,}9$ e $N = 10$. Esperava-se como resultado, e foi confirmado pelo índice $PSNR$, uma baixa perda de energia entre as duas imagens segmentadas neste exemplo, dada a grande similaridade percebida pelo olho humano entre as duas segmentações analisadas.

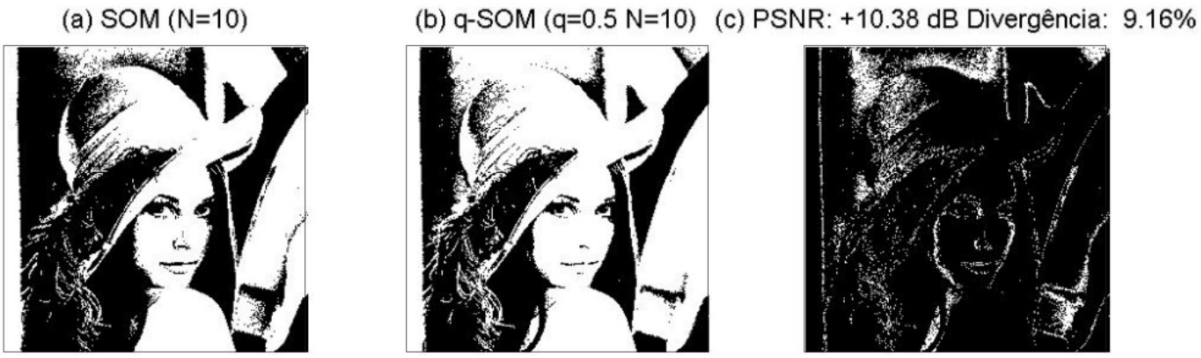
Figura 121 – Exemplo de $PSNR > +20dB$, calculado entre as segmentações da imagem *Lena*, com valor de $N = 10$.



Fonte: Autor. (a) Segmentada por SOM tradicional. (b) Segmentada por q-SOM, com $q = 0{,}9$. (c) Divergência pixel-a-pixel entre as duas segmentações e índice $PSNR$.

A Figura 121 mostra que, com uma baixa divergência pixel-a-pixel entre as imagens, dada por apenas $0{,}3\%$, foi calculado $PSNR = +25{,}18\ dB$, estando acima da faixa de $+20dB$ considerada como aceitável para perda de energia. Ainda para ilustrar a relação entre a divergência pixel-pixel e o $PSNR$, a Figura 122(a) mostra a imagem *Lena* segmentada por SOM tradicional, e a Figura 122(b) exibe a imagem *Lena* segmentada por q-SOM, com $q = 0{,}5$. Esperava-se como resultado, uma alta perda de energia entre as duas imagens segmentadas, dada as significativas diferenças observadas pelo olho humano entre as duas segmentações, e esta espectativa foi confirmada pelo índice $PSNR$.

Figura 122 – Exemplo de $PSNR < +20\ dB$, calculado entre as segmentações da imagem *Lena*, com valor de $N = 10$.



Fonte: Autor. (a) Segmentada por SOM tradicional. (b) Segmentada por q-SOM, com $q = 0{,}5$. (c) Divergência pixel-a-pixel entre as duas segmentações e índice $PSNR$.

A Figura 122 mostra que, com uma alta divergência pixel-a-pixel entre as imagens, dada por $9{,}16\%$, foi calculado o $PSNR = +10{,}75\ dB$, estando abaixo da faixa de $+20\ dB$, considerada como aceitável. Assim, mostra-se que há uma relação inversa entre a divergência pixel-a-pixel e o $PSNR$. Quanto maior a divergência, menor é o índice $PSNR$.

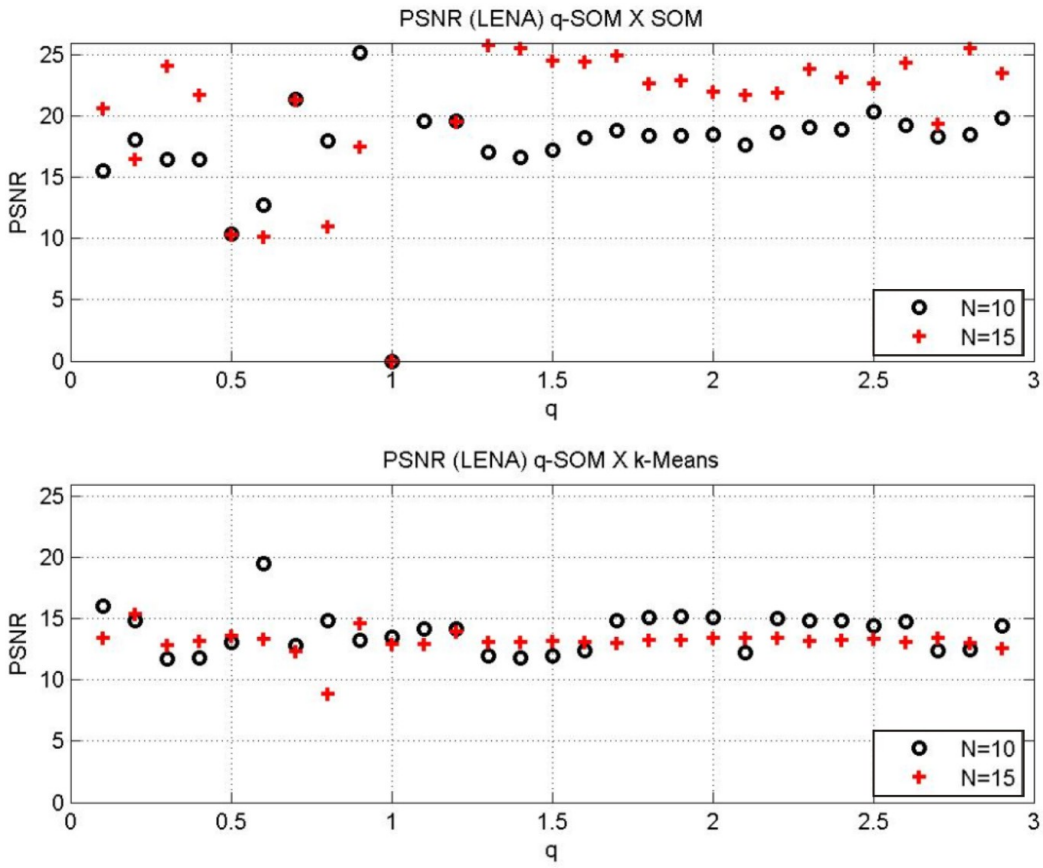
Não se busca, nestes experimentos, igualar a qualidade da segmentação entre SOM e *q*-SOM, com valores altos de $PSNR$, mas sim, encontrar uma gama de valores do parâmetro q que produzam segmentações nos mesmos níveis daquelas produzidas por SOM tradicional ou *k-Means*, e com possibilidade de melhoria na qualidade da segmentação obtida pela variação do parâmetro q no modelo *q*-SOM. A seguir, são feitas as descrições dos cálculos do $PSNR$ para os experimentos de segmentação da imagem *Lena* (Seção 6.3.3.5) e das imagens da base de *Berkeley* (Seção 6.3.3.6).

6.3.3.5 $PSNR$ *sobre a Imagem* **Lena** *Segmentada*

O valor do índice $PSNR$ foi calculado de acordo com o modelo exemplificado na seção anterior, entre a imagem *Lena* segmentada pelos algoritmos *k-Means* e SOM tradicional, e todo o conjunto de imagens *Lena*, segmentadas pelo modelo *q*-SOM com $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$.

A Figura 123, mostra dois gráficos com os valores de $PSNR$ obtidos pela comparação das imagens segmentadas por SOM tradicional $\times$ *q*-SOM, mostradas na parte superior, e pela comparação entre as imagens segmentadas por *k-Means* $\times$ *q*-SOM, mostradas na parte inferior. Em ambos os gráficos, há um comparativo entre os valores de N utilizados no treinamento e na segmentação das imagens pelos algoritmos SOM e *q*-SOM.

Figura 123 – $PSNR$ calculado sobre as segmentações da imagem *Lena*



Fonte: Autor. (superior) Entre SOM $\times$ q-SOM. (inferior) Entre *k-Means* $\times$ q-SOM.

Observando-se o gráfico da parte superior da Figura 123, com os valores de $PSNR$ encontrados pela comparação das segmentações realizadas pelos algoritmos SOM $\times$ q-SOM, nota-se que, para valores do parâmetro $q \geq 0{,}9$, todos os valores de $PSNR$ estão acima de $+17\ dB$, em contrapartida, para $q < 0{,}9$, apenas três comparações apresentam valores acima de $+17\ dB$. Se considerarmos o limiar de $+20\ dB$ para valores que indicam baixa perda de energia, certamente os valores de $q \geq 0{,}9$ são mais promissores quando da utilização do modelo q-SOM.

No gráfico da parte inferior da Figura 123, cujos valores de $PSNR$ foram calculados pela comparação das segmentações realizadas pelos algoritmos *k-Means* $\times$ q-SOM, nota-se uma maior perda de energia entre as segmentações em todo o conjunto de imagens, pois a maioria das imagens encontram-se entre $+10\ dB$ e $+20\ dB$. Este comportamento é apenas um indicativo da maior diferença naturalmente existente entre os resultados da segmentação

entre *k-Means* e SOM tradicional, mostrado na Figura 116, que reflete-se na comparação entre *k-Means* e q-SOM.

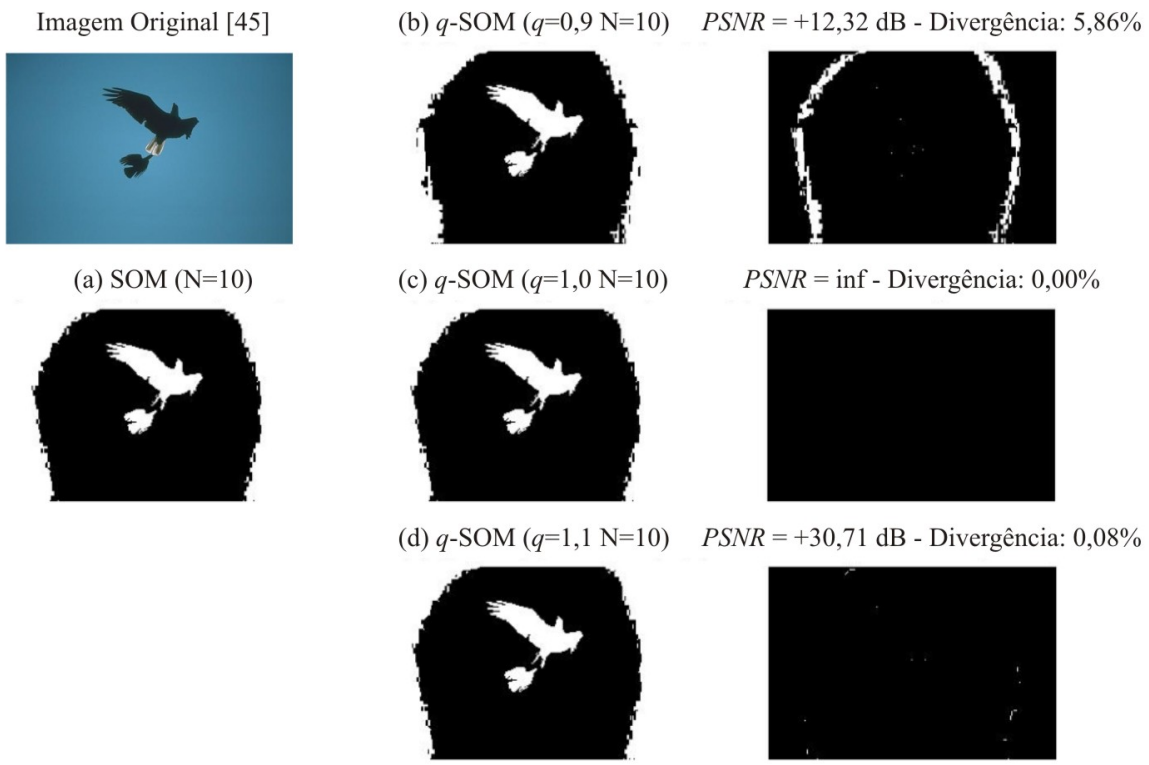
Também é possível observar na parte inferior da Figura 123 que, para valores de $q \geq 0{,}9$ há menor variação entre os valores de $PSNR$ se comparada às variações para valores de $q < 0{,}9$, sugerindo que, também sob a análise do $PSNR$, os valores onde $q < 0{,}9$ mostram-se mais sensíveis às variações dos valores do parâmetro q.

6.3.3.6 $PSNR$ *sobre as Imagens Segmentadas da Base de* **Berkeley**

Foi calculado o $PSNR$ para todo o conjunto de imagens da base de *Berkeley*, segmentadas pelo modelo q-SOM, com $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, em comparação à segmentação das mesmas imagens produzidas pelos algoritmos *k-Means* e SOM tradicional.

Para ilustrar alguns resultados destes procedimentos, a Figura 124(a) mostra a segmentação pelo SOM tradicional de imagem original da base de *Berkeley*.

Figura 124 – Exemplo do índice do $PSNR$ obtido a partir de segmentações da imagem número $[45]$ da base de *Berkeley*.



Fonte: Autor. (a) Por SOM tradicional com $N = 10$. (b) Por q-SOM com $q = 0{,}9$; (c) Por q-SOM com $q = 1{,}0$. (d) Por q-SOM com $q = 1{,}1$. Na coluna da direita, são exibidas as imagens que representam a divergência pixel-a-pixel e o $PSNR$ entre as comparações de (a) $\times$ (b), (a) $\times$ (c) e (a) $\times$ (d).

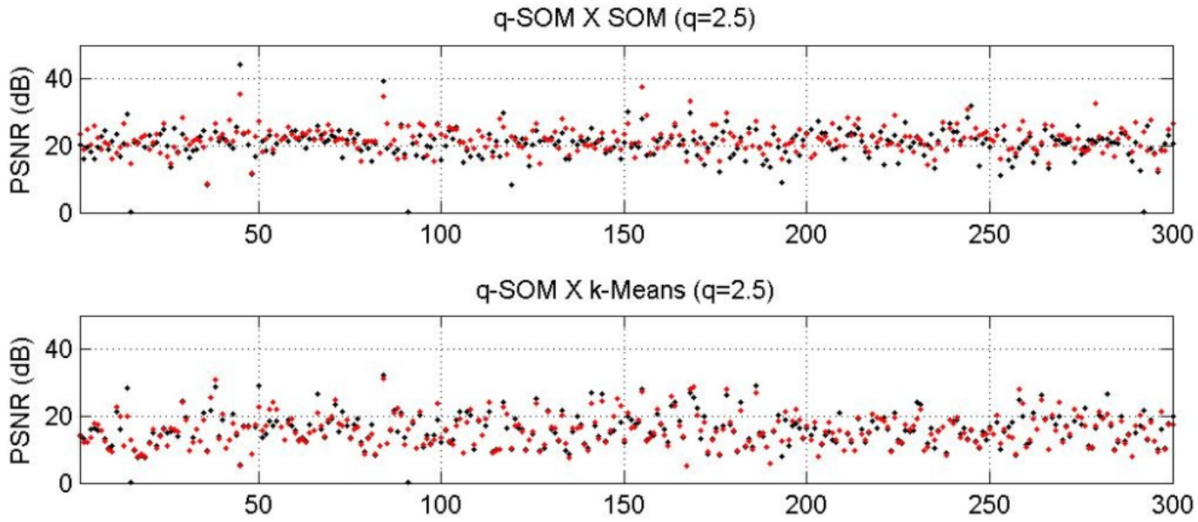
A Figura 124, mostra que para $q = 1$, a imagem segmentada por q-SOM é identica à imagem segmentada por SOM tradicional, onde o cálculo do $PSNR$ tende a infinito. Também mostra que, com a variação de $q = 0{,}9$ e $q = 1{,}1$, há variação da divergência pixel-a-pixel, que apresenta uma relação inversa ao sinal-ruído, sendo $PSNR = +12{,}32dB$ e $PSNR = +30{,}71dB$, respectivamente. Quanto maior o $PSNR$ menor a divergência, e vice-versa. Esta variação nos permite novamente afirmar que o modelo q-SOM é sensível à variação do parâmetro q, permitindo produzir novas segmentações apenas pela variação do valor de q.

Este mesmo procedimento foi adotado para o cálculo do $PSNR$ na comparação entre as segmentações produzidas pelo SOM tradicional $\times$ q-SOM (com $N = 15$) e pelo *k-Means* $\times$ q-SOM (com $N = [10; 15]$), sempre variando $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$.

Com o objetivo de observar o comportamento das segmentações produzidas por este grupo de imagens e analisar a sensibilidade do modelo q-SOM à variação do parâmetro q, a

Figura 125 mostra gráficos de uma das imagens da base de *Berkeley*, exibindo na parte superior da figura, os valores de $PSNR$ calculados sobre as segmentações produzidas pelos algoritmos SOM tradicional $\times$ q-SOM com $q = 2{,}5$, e na parte inferior os resultados de $PSNR$ calculados sobre as segmentações produzidas por *k-Means* $\times$ q-SOM com $q = 2{,}5$.

Figura 125 – Índice $PSNR$ calculado sobre as 300 imagens segmentadas da base de *Berkeley*. A segmentação por q-SOM foi realizada com o parâmetro $q = 2{,}5$.



Fonte: Autor. Grade de neurônios com $N = 10$ (em preto) e $N = 15$ (em vermelho).

O gráfico da parte superior da Figura 125, mostra o $PSNR$ calculado entre as imagens segmentadas por q-SOM (com $q = 2{,}5$) $\times$ SOM tradicional, todas treinadas e segmentadas com $N = 10$. A média dos valores de $PSNR$ está acima de $+20dB$, sendo $PSNR_{med} = +20{,}60dB$ (para $N = 10$) e $PSNR_{med} = +21{,}42dB$ (para $N = 15$), indicando baixa perda de energia e portanto boa qualidade das imagens.

A parte inferior da Figura 125 mostra o $PSNR$ calculado entre as imagens segmentadas por q-SOM (com $q = 2{,}5$ e $N = 10$) $\times$ *k-Means*. As médias dos valores de $PSNR$ estão abaixo de $+20dB$, sendo $PSNR_{med} = +14{,}92dB$ ($N = 10$) e $PSNR_{med} = +15{,}25dB$ ($N = 15$), apenas demonstrando maior diferença entre as segmentações q-SOM em relação à segmentação por *k-Means*.

Após o cálculo do $PSNR$ em todos estes experimentos, agruparam-se os resultados de forma a exibí-los ordenadamente através do parâmetro q, conforme ilustra a Tabela 4, que mostra as médias dos valores de $PSNR$ em cada variação do parâmetro q. As colunas (a) e (b) mostram as médias calculadas através da comparação das imagens segmentadas por SOM

tradicional $\times$ q-SOM, sendo que em (a) $N = 10$ e em (b) $N = 15$. As colunas (c) e (d) mostram o $PSNR$ extraído da comparação por *k-Means* $\times$ q-SOM, sendo que (c) $N = 10$ e em (d) $N = 15$.

Tabela 4 – Médias dos valores de $PSNR$ calculados sobre as imagens segmentadas da base de *Berkeley*.

	SOM $\times$ q-SOM		*k-Means* $\times$ q-SOM	
q	(a) N=10	(b) N=15	(c) N=10	(d) N=15
0,1	14,6502	16,5567	13,1268	13,5632
0,2	13,4707	15,3449	12,1997	13,0673
0,3	12,1185	14,5781	11,4099	12,1645
0,4	10,9635	14,2292	11,0862	11,7136
0,5	9,9669	10,6160	9,9054	10,4283
0,6	11,0243	9,0204	10,2976	9,1265
0,7	15,1673	15,3214	13,5031	12,7698
0,8	14,7887	14,5741	12,4636	12,4867
0,9	16,9190	16,4802	14,3647	14,0839
1,0	$+\infty$	$+\infty$	15,4121	14,9917
1,1	23,4768	24,3197	15,4641	15,3871
1,2	22,6958	23,8628	15,2771	15,1903
1,3	22,2611	22,7168	15,1253	15,1189
1,4	21,2194	22,6612	14,9072	15,3109
1,5	21,5719	22,6333	15,3137	15,0731
1,6	21,4972	22,3839	15,4335	14,9699
1,7	21,0163	22,5689	15,1733	15,2441
1,8	21,1938	21,8966	15,3197	15,4189
1,9	20,8662	22,3796	15,2751	15,3180
2,0	20,7706	22,0213	14,6773	15,3562
2,1	20,8397	22,1184	15,1917	15,1802
2,2	20,7642	21,7460	15,1334	15,1912
2,3	20,4922	21,9202	15,1014	15,2533
2,4	20,5747	21,6101	15,3596	15,3486
2,5	20,5993	21,4244	14,9200	15,2490
2,6	19,1115	21,3968	14,5239	15,3093
2,7	19,5024	21,2682	15,3628	15,1339
2,8	19,5978	20,8118	14,9217	15,0430
2,9	18,9699	20,3164	14,9315	14,6728

Fonte: Autor.

Analisando os valores das médias exibidos na Tabela 4, pode-se observar que as médias nos valores de $q < 1$ são inferiores às médias nos valores de $q > 1$. Por exemplo, na coluna (a), tem-se que a média dos valores médios para $q < 1$ é de $PSNR_{med} = +13{,}23dB$, enquanto que

para $q > 1$ é de $PSNR_{med} = +20{,}89dB$. Isso demonstra que os Mapas Auto-Organizáveis treinados pelo modelo *q*-SOM, com $q > 1$, produziram as segmentações mais próximas da segmentação utilizada como parâmetro de comparação, ou seja, *k-Means* e SOM tradicional.

6.3.3.7 Índice Universal de Qualidade de Imagem (Q)

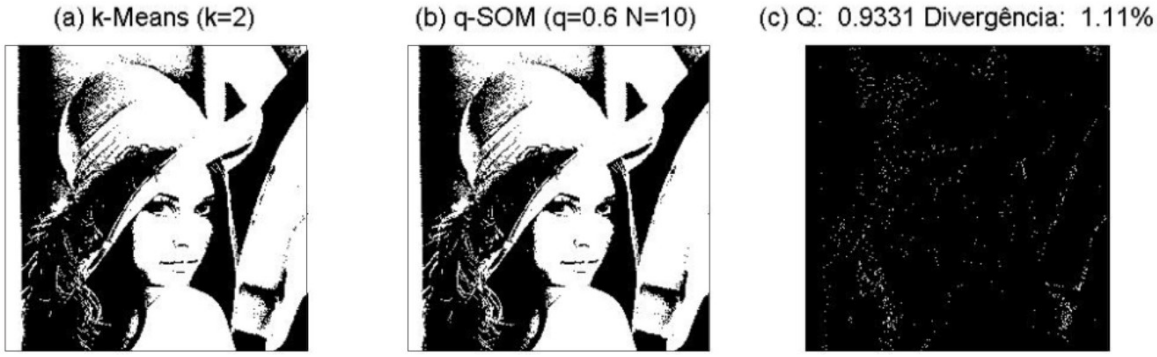
O índice universal de qualidade de imagem, chamado de índice Q, conforme mostrado na Seção 2.9.3, é habitualmente utilizado como uma forma de analisar as distorções percebidas pelo sistema visual humano. Trata-se de um índice de fidelidade medido através da perda de correlação linear, de distorções na luminância e de distorções no contraste entre as imagens. Nesta tese, aplicou-se o índice Q como comparação entre as imagens segmentadas pelos algoritmos SOM tradicional $\times$ *q*-SOM, e também como comparação entre as segmentações por *k-Means* $\times$ *q*-SOM.

Primeiramente, foi calculado o grau da correlação linear entre duas imagens segmentadas, aqui representadas por *x* e *y*, indicando a perda de correlação $lC(x,y)$ existente entre as imagens segmentadas, através da Equação (52). Em seguida, calculou-se a distorção da luminância $Ld(x,y)$ entre as imagens segmentadas, que mede o quão perto a luminância média está entre as imagens *x* e *y*, dada pela Equação (53). A distorção do contraste $Cd(x,y)$, dada pela Equação (54), é então calculada como o terceiro componente do índice Q, que pode ser compreendido como sendo uma estimativa do contraste entre as imagens.

Com o cálculo destes três componentes, obtém-se o índice universal de qualidade das imagens segmentadas pelo modelo *q*-SOM, em relação às imagens segmentadas pelos algortimos SOM tradicional e *k-Means*, através da expressão $Q(x,y) = lC(x,y)\ .\ Ld(x,y)\ .\ Cd(x,y)$, onde $Q \in \{-1,..,1\}$.

Para exemplificar um cálculo do índice Q em comparação com a divergência pixel-a-pixel entre duas imagens, a Figura 126(a) mostra a imagem *Lena* segmentada por *k-Means* e a Figura 126(b) exibe a imagem *Lena* segmentada por *q*-SOM com $q = 0{,}6$ e $N = 10$. Esperava-se como resultado, e foi confirmado pelo índice Q, um alto índice de qualidade universal, dada a grande similaridade percebida pelo olho humano entre as duas segmentações analisadas.

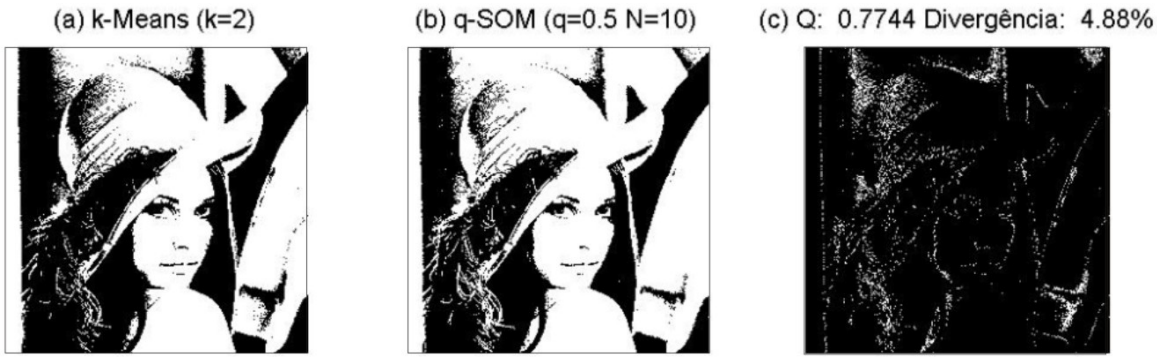
Figura 126 – Exemplo de alto índice de qualidade universal de imagem Q, calculado entre as segmentações da imagem *Lena*.



Fonte: Autor. (a) Segmentada por *k-Means*. (b) Segmentada por q-SOM com $q = 0{,}6$ e $N = 10$. (c) Divergência pixel-a-pixel entre as duas segmentações e índice Q.

A Figura 126 mostra que, com uma baixa divergência pixel-a-pixel entre as imagens, dada por apenas $1{,}11\%$, foi calculado $Q = 0{,}9331$, sendo considerado como de alto nível de qualidade. Ainda para ilustrar a relação entre a divergência pixel-a-pixel e o índice Q, a Figura 127(a) mostra a imagem *Lena* segmentada por *k-Means* e a Figura 127(b) exibe a imagem *Lena* segmentada por q-SOM com $q = 0{,}5$. Esperava-se como resultado, um baixo índice de qualidade universal, devido às significativas diferenças observadas pelo olho humano entre as duas segmentações, e esta espectativa foi confirmada pelo índice Q.

Figura 127 – Exemplo de baixo índice de qualidade universal Q, calculado entre as segmentações da imagem *Lena*.



Fonte: Autor. (a) Segmentada por *k-Means*. (b) Segmentada por q-SOM com $q = 0{,}5$ e $N = 10$. (c) Divergência pixel-a-pixel entre as duas segmentações e índice Q.

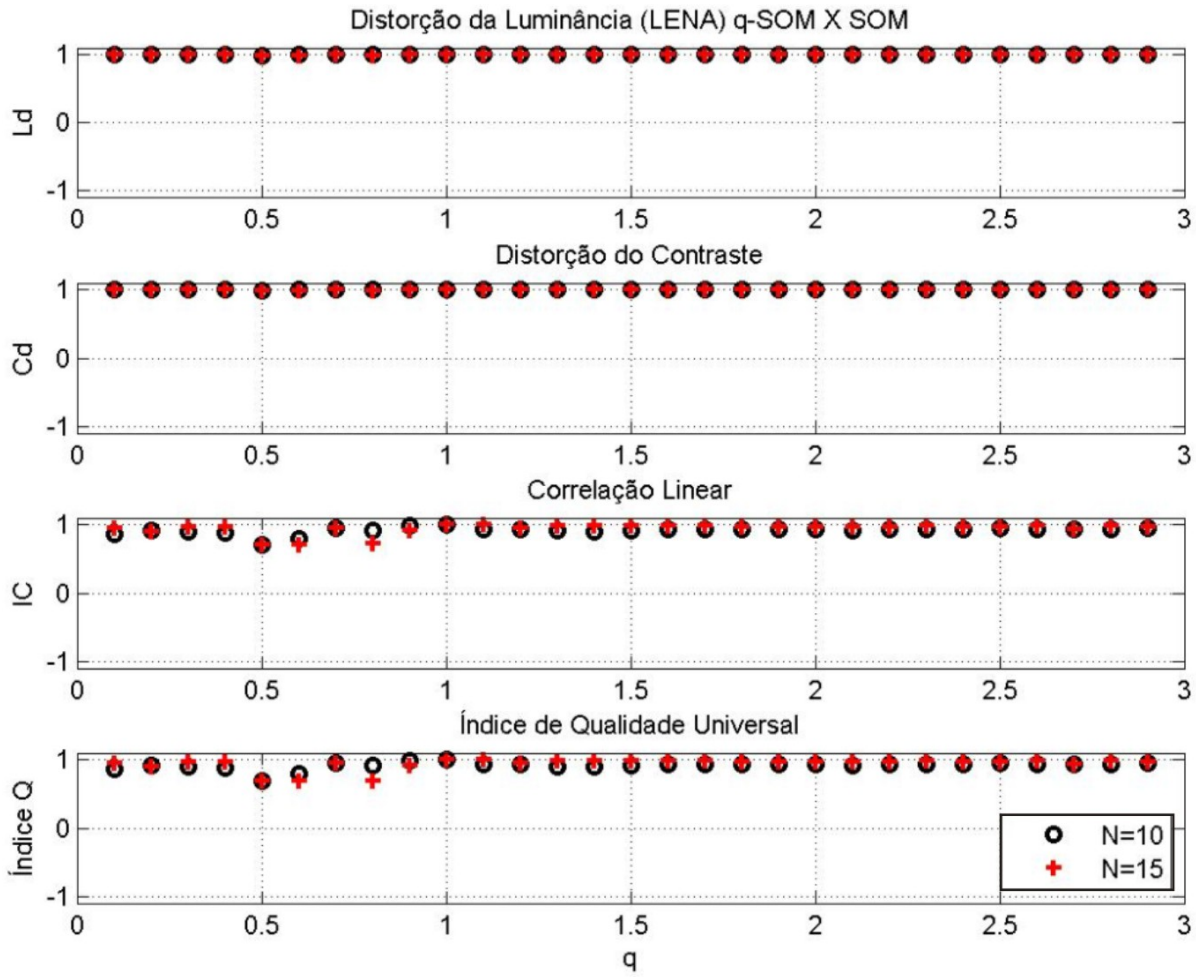
A Figura 127 mostra que, com o aumento da divergência pixel-a-pixel entre as imagens, calculado por $4{,}88\%$, computou-se $Q = 0{,}7744$, diminuindo o índice Q em relação ao exemplo apresentado pela Figura 126. Assim, mostra-se que há uma relação direta entre a divergência pixel-a-pixel e o índice Q. Quanto maior a divergência, mais o índice Q aproxima-se de 0.

A seguir, são descritos os experimentos onde calculou-se o índice Q, sobre as segmentações da imagem *Lena* (Seção 6.3.3.8) e também sobre as segmentações das imagens da base de *Berkeley* (Seção 6.3.3.9).

6.3.3.8 Índice Q sobre a Imagem Lena *Segmentada*

Calculou-se o valor de índice Q de acordo com o modelo descrito na seção anterior, entre a imagem *Lena* segmentada pelos algoritmos *k-Means* e SOM tradicional, em comparação com todo o conjunto de imagens *Lena* segmentadas pelo modelo *q*-SOM, com $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$. A utilização da imagem *Lena* é para exemplificar os procedimentos adotados neste trabalho. Os resultados obtidos pela comparação entre as segmentações produzidas por *q*-SOM $\times$ SOM, são exibidos na Figura 128, e a comparação entre *q*-SOM $\times$ *k-Means*, são exibidos na Figura 129.

Figura 128 – Valores obtidos a partir da comparação entre as segmentações da imagem *Lena*, produzidas por SOM tradicional $\times$ q-SOM, com valores de $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$.



Fonte: Autor.

Na Figura 128, pode-se observar que há pouca distorção de luminância e de contraste entre as imagens segmentadas comparadas, pois os valores de $Ld(x,y)$ e $Cd(x,y)$ são todos muito próximos ao valor máximo 1. O valor de $Ld(x,y) = 1$ somente ocorre se $\bar{x} = \bar{y}$, indicando que as imagens são iguais. Os resultados da distorção do contraste $Cd(x,y)$ também variam entre 0 e 1 e, quanto mais próximos do valor 1 forem os resultados de Cd, mais as imagens são parecidas, onde o valor 1 é obtido se $\sigma_x = \sigma_y$.

A correlação linear $lC(x,y)$, por definição, retorna um valor entre -1 e 1. Quanto mais próximo dos extremos -1 e 1, maior é a correlação linear entre as imagens, sendo que o sinal apenas representa a correlação positiva ou negativa. Quanto mais próximo a zero, menor será

a correlação $lC(x,y)$ entre as imagens. Pode-se observar na Figura 128, que também há pouca perda de correlação entre as imagens, também sugerindo que as imagens segmentadas são bem similares, apresentando um pouco mais de perda para os valores de $q = 0{,}5$, $q = 0{,}6$ e $q = 0{,}8$.

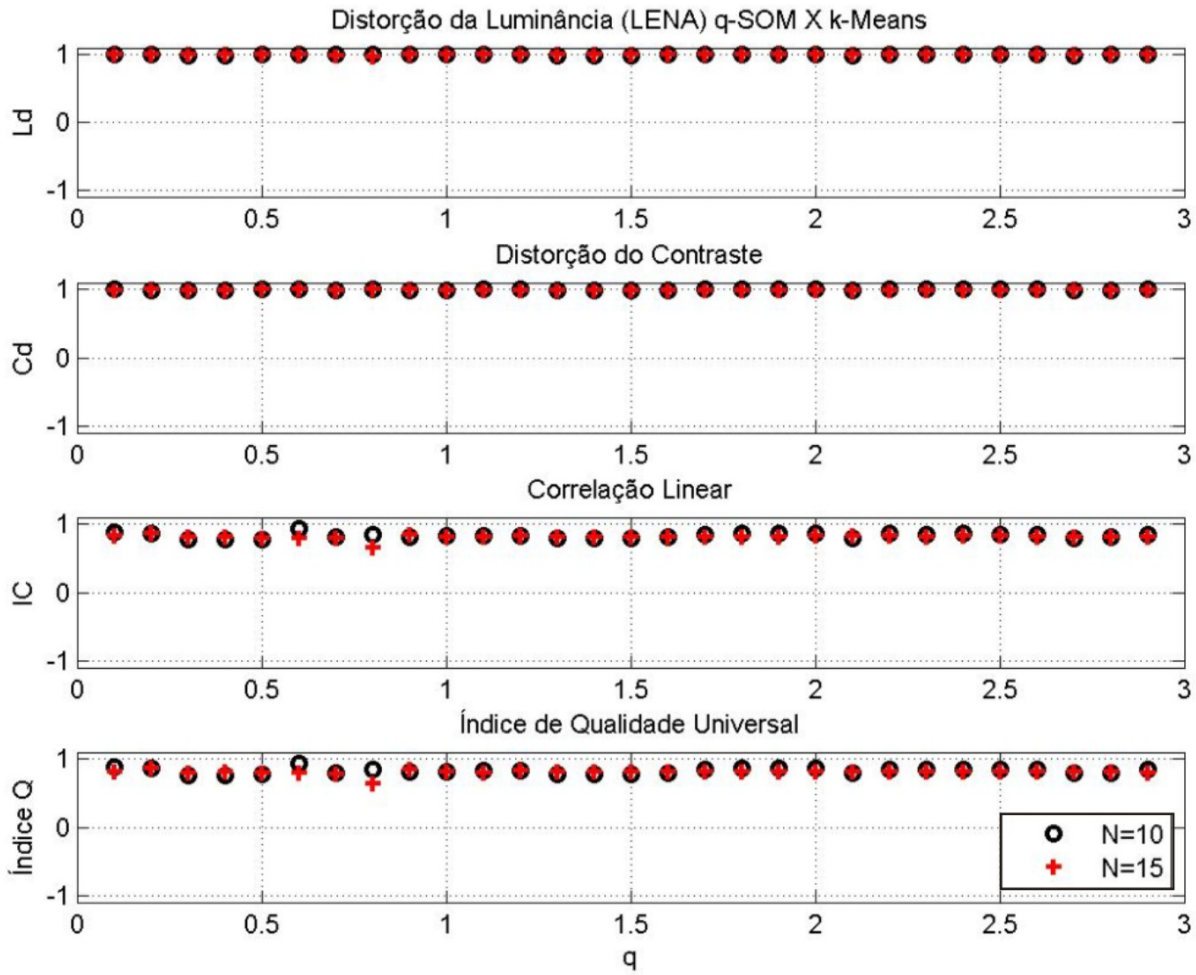
Por fim, a Figura 128 mostra o índice Q, como resultado da multiplicações dos três componentes anteriores, apresentando também extremos entre -1 e 1, calculado entre as segmentações da imagem *Lena* produzidas pelos algoritmos SOM tradicional e *q*-SOM. Observando-se o índice Q apresentado na Figura 128, encontra-se o menor índice onde $q = 0{,}5$. Nestes experimentos, um baixo índice Q representa que o parâmetro q utilizado na segmentação pelo *q*-SOM apresenta maior sensibilidade a novos resultados e não necessariamente pior qualidade da imagem segmentada, pois a comparação para o cálculo do índice Q neste exemplo, se deu pela segmentação obtida pelo algoritmo SOM tradicional, utilizado aqui apenas para referência nos cálculos, mas sem o compromisso de representar a qualidade máxima de segmentação.

A Figura 129 a seguir, mostra os resultados obtidos no cálculo do índice Q quando da comparação entre a segmentação *q*-SOM $\times$ *k-Means*.

Como resultados obtidos pelo cálculo do índice Q, apresentados na Figura 129, observam-se menores correlações lineares, se comparadas com aquelas apresentadas pela comparação *q*-SOM $\times$ SOM tradicional, o que é natural, pois, conforme já demonstrado pelos índices $Kappa$ e $PSNR$, a segmentação por *k-Means* apresenta significativas diferenças entre a segmentação pelo SOM tradicional, resultando em diferenças maiores na comparação entre *q*-SOM $\times$ *k-Means*.

O que procura-se com estes experimentos, é encontrar valores do parâmetro q do modelo *q*-SOM que possam oferecer novas possibilidades de resultados, sem implicar necessariamente, neste momento, em melhores resultados. A análise da qualidade dos resultados das segmentações foi descrita, neste trabalho, pelo índice de similaridade (SIM), na Seção 6.3.3.10.

Figura 129 – Valores obtidos a partir da comparação entre as segmentações da imagem *Lena*, produzidas por *k-Means* X q-SOM com valores de $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$.



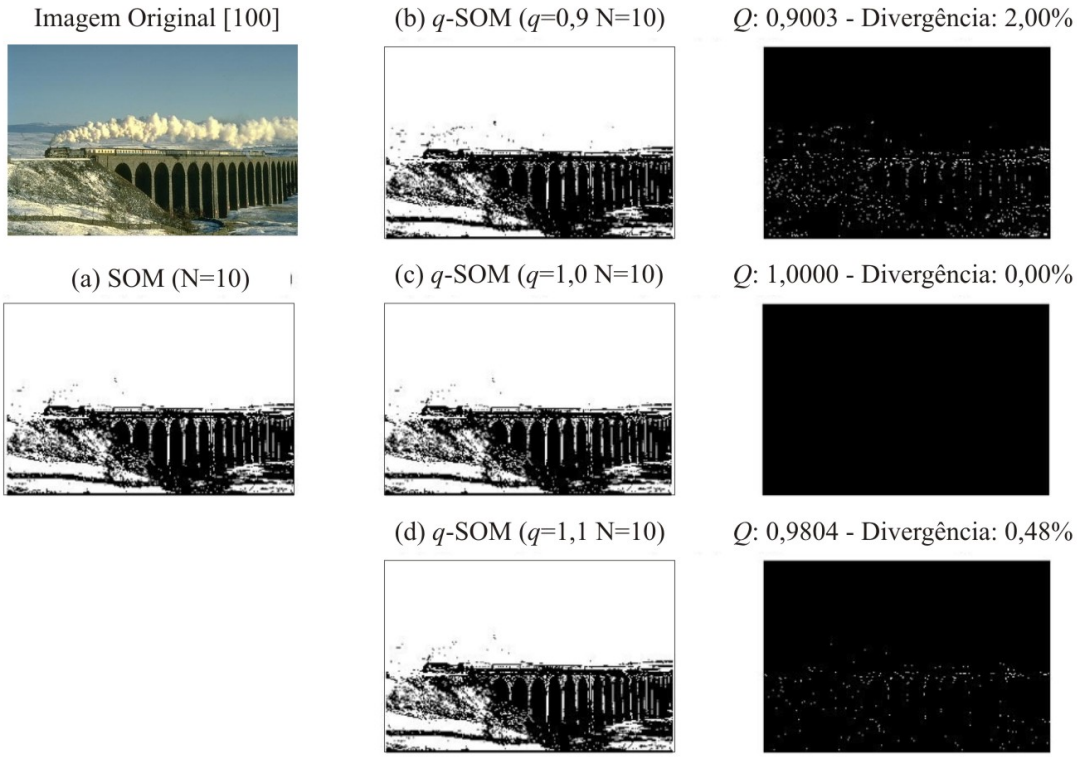
Fonte: Autor.

6.3.3.9 Índice Q sobre as Imagens Segmentadas da Base de Berkeley

Foram calculadas as medidas estatísticas para verificação da distorção de luminância e de contraste, da perda de correlação linear e do índice universal de qualidade de imagem (Q), para todo o conjunto de imagens da base de *Berkeley*, segmentadas pelo modelo q-SOM com $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, em comparação às segmentações produzidas pelos algoritmos *k-Means* e SOM tradicional, das mesmas imagens.

Para ilustrar os experimentos realizados para o cálculo do índice Q, são apresentados na Figura 130 exemplos dos resultados de três segmentações de uma imagem da base de *Berkeley* através do modelo q-SOM, com $q = [0{,}9; 1{,}0; 1{,}1]$, em comparação com a segmentação da mesma imagem pelo algoritmo SOM tradicional, com o objetivo de apurar a sensibilidade do modelo q-SOM em relação à variação do valor de q. São calculadas as distorções de luminosidade e de contraste, as correlações lineares e o Índice Q conforme descrito na Seção 6.3.3.7.

Figura 130 – Exemplos de segmentações de uma imagem da base de *Berkeley*: (a) Por SOM tradicional. (b) Por q-SOM com $q = 0{,}9$; (c) Por q-SOM com $q = 1{,}0$. (d) Por q-SOM com $q = 1{,}1$. Na coluna da direita, são exibidas as imagens que representam a divergência pixel-a-pixel entre as comparações de (a) $\times$ (b), (a) $\times$ (c) e (a) $\times$ (d), e os respectivos valores do índice Q.



Fonte: Autor.

A Figura 130, mostra que para $q = 1$, a imagem segmentada por q-SOM é identica à imagem segmentada por SOM tradicional, com divergência pixel-a-pixel igual zero e $Q = 1$, evidenciando a q-SOM (para $q = 1$) como uma generalização do algoritmo SOM tradicional. Mostra também que, nos exemplos com valores de $q = 0{,}9$ e $q = 1{,}1$, houve mudança na

divergência pixel-a-pixel, seguida pelo índice Q, mostrando a sensibilidade do modelo q-SOM em relação à variação dos valores do parâmetro q.

As Figuras 131 e 132, apresentam amostras das medições efetuadas para o cálculo do índice Q, a partir da segmentação da imagem original mostrada na Figura 130, com comparações entre SOM $\times$ q-SOM e *k-Means* $\times$ q-SOM, exibindo os experimentos com $q = [0{,}9; 1{,}0; 1{,}1]$, tanto com $N = 10$, quanto com $N = 15$.

Figura 131 – Comparações entre SOM $\times$ q-SOM com amostras dos valores utilizados para o cálculo do índice Q, complementando o exemplo da Figura 130.

Comparações entre SOM X q-SOM

	N=10					N=15				
[imco100]	**Divergência**	***Ld***	***Cd***	***lC***	***Q***	**Divergência**	***Ld***	***Cd***	***lC***	***Q***
SOM X q-SOM (q = 0,9)	2,00%	0,9996	0,978	0,9209	0,9003	2,55%	0,9993	0,9025	0,977	0,8811
SOM X q-SOM (q = 1,0)	0%	1	1	1	1	0%	1	1	1	1
SOM X q-SOM (q = 1,1)	0,48%	1	0,9993	0,9812	0,9804	0,32%	1	1	0,9815	0,9815

Fonte: Autor.

Figura 132 – Comparações entre *k-Means* $\times$ q-SOM com amostras dos valores utilizados para o cálculo do índice Q, complementando o exemplo da Figura 130.

Comparações entre *k-Means* X q-SOM

	N=10					N=15				
[imco100]	**Divergência**	***Ld***	***Cd***	***lC***	***Q***	**Divergência**	***Ld***	***Cd***	***lC***	***Q***
k-Means X q-SOM (q = 0,9)	5,71%	0,9968	0,879	0,9039	0,7919	6,96%	0,9951	0,7239	1	0,758
k-Means X q-SOM (q = 1,0)	3,71%	0,9987	0,9546	0,9085	0,8661	4,44%	0,9981	0,9295	0,9026	0,8374
k-Means X q-SOM (q = 1,1)	4,19%	0,9983	0,9433	0,9044	0,8516	4,56%	0,9980	0,9298	0,8982	0,8335

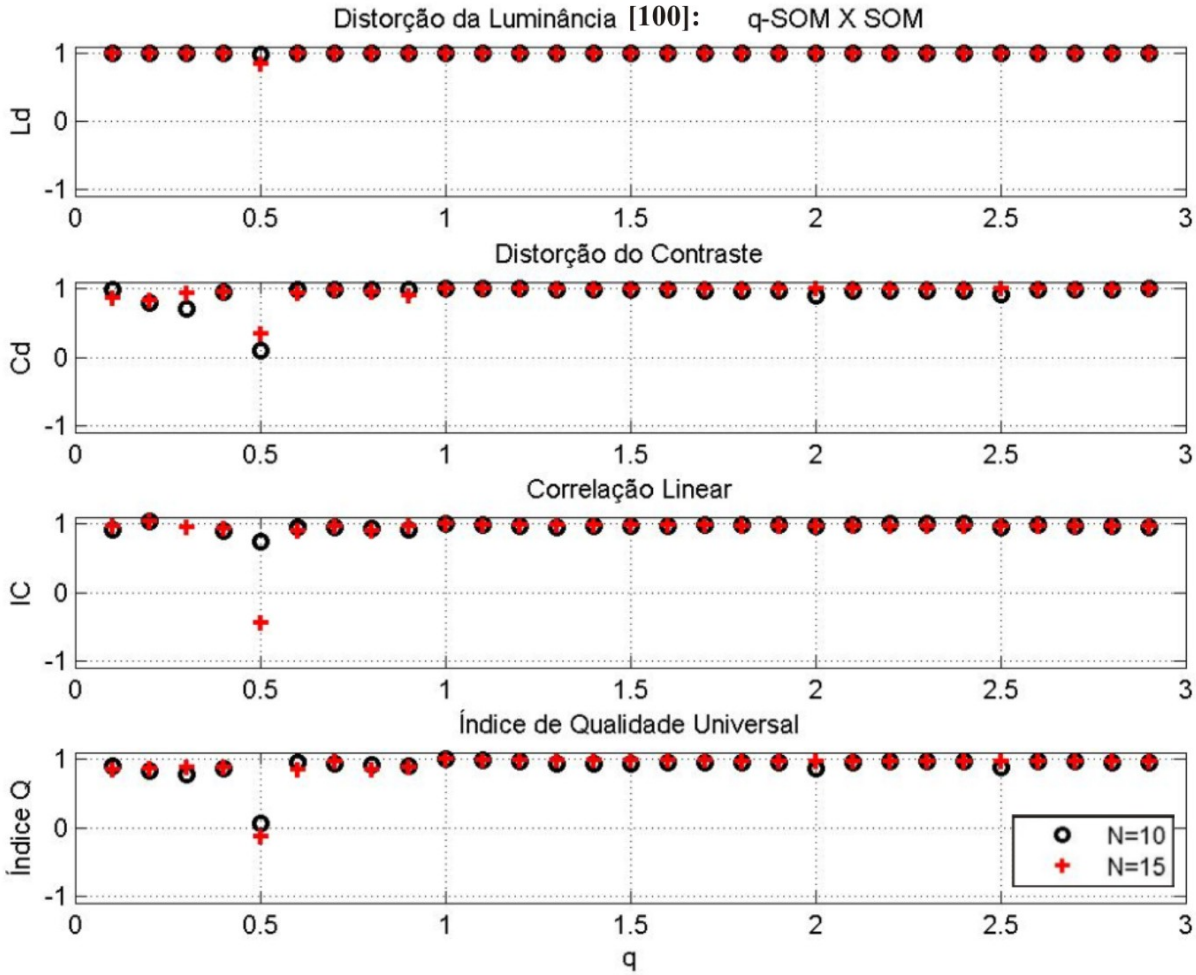
Fonte: Autor.

As Figuras 131 e 132, mostram que com a variação do parâmetro q no modelo q-SOM há variação no índice Q e de todos os elementos que o compõem, tanto na comparação entre q-SOM $\times$ SOM tradicional, quanto entre q-SOM $\times$ *k-Means*, independente do tamanho da grade neuronal $N = [10; 15]$. Estas figuras tratam apenas de exemplos com 3 valores de q, entretanto, nos experimentos desta tese, foram calculadas comparações utilizando-se de 29 valores do parâmetro q, onde $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, e com todas as 300 imagens da base de *Berkeley*, que comprovaram a sensibilidade do parâmetro q do modelo q-SOM.

Para observar os resultados obtidos nestes experimentos, estes foram agrupados por imagens, separadas pelos índices de distorção de luminância e de contraste, de coeficiente linear e

de prório índice Q. As Figuras 133 e 134, apresentam gráficos com os valores da medidas estatísticas que compõem o índice Q, tomando-se como exemplo as comparações efetuadas sobre as segmentações produzidas por SOM $\times$ q-SOM e *k-Means* $\times$ q-SOM, respectivamente. Sob análise, está a mesma imagem apresentada na Figura 130.

Figura 133 – Valores da distorção de luminância e de contraste, do coeficiente linear e do índice Q, das comparações entre as segmentações SOM $\times$ q-SOM com $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$.

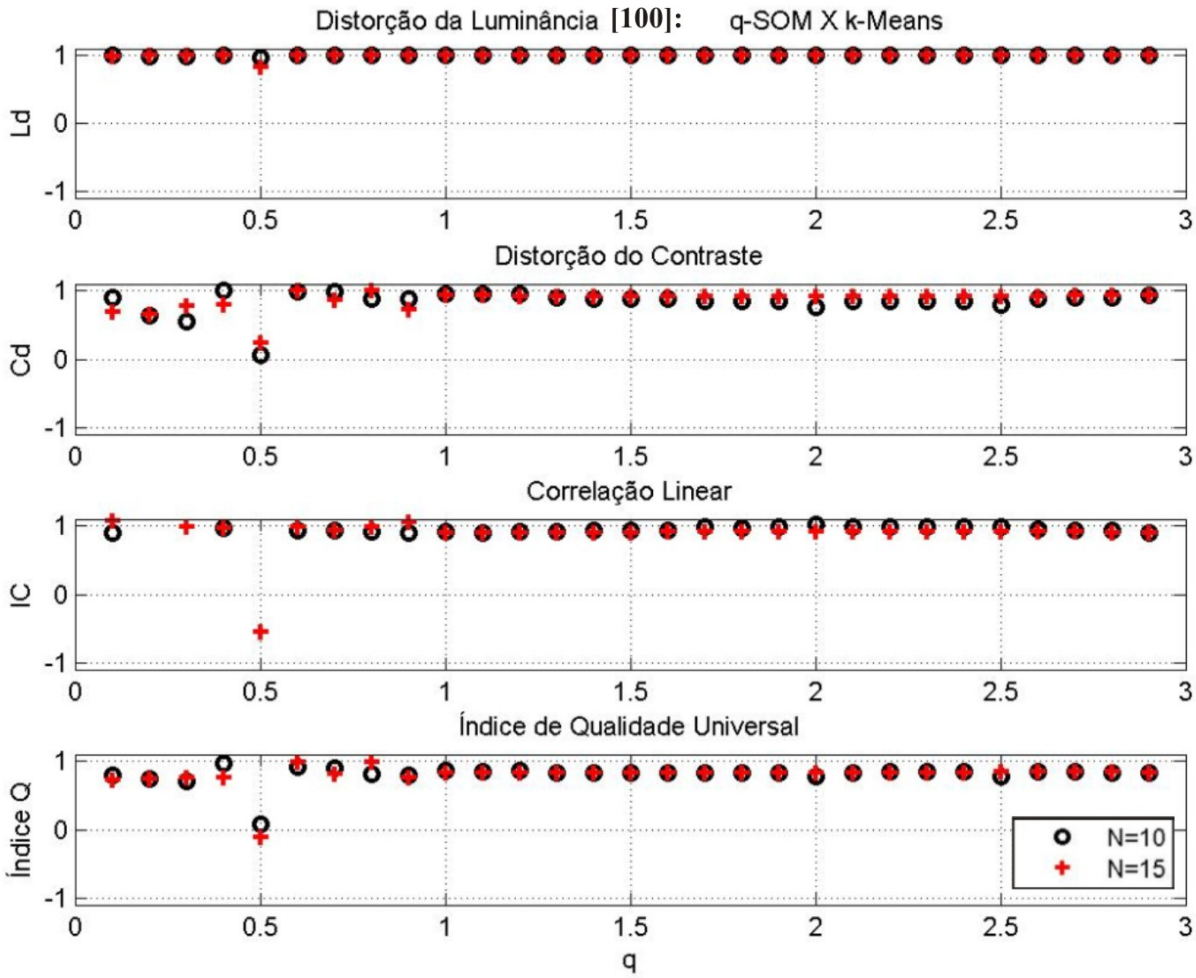


Fonte: Autor. Grade de neurônios de tamanho $N = 10$ (em preto) e $N = 15$ (em vermelho), calculados sobre a mesma imagem apresentada na Figura 130.

A Figura 133, mostra que a imagem em análise possui baixa distorção de luminância em todos os valores de q, com valores muito próximos a 1. Mostra também que, para $q = 0{,}5$, a imagem apresenta uma forte perda de contraste e de correlação linear na comparação entre as segmentações, resultando também num baixo valor do índice Q, no modelo q-SOM com

$q = 2{,}5$. O mesmo comportamento para o parâmetro $q = 0{,}5$, observado na Figura 133, também é observado na comparação entre as segmentações de *k-Means* $\times$ *q*-SOM, mostradas na Figura 134. Conforme dito anteriormente, um baixo índice Q representa que o parâmetro q utilizado na segmentação pelo *q*-SOM apresenta maior sensibilidade a novos resultados e não necessariamente pior qualidade da imagem segmentada. Para analisar a qualidade das segmentações, a Seção 6.3.3.10 apresenta os resultados sobre as medidas de similaridades entre as segmentações em relação às bordas extraídas das imagens segmentadas, computadas pelo índice SIM.

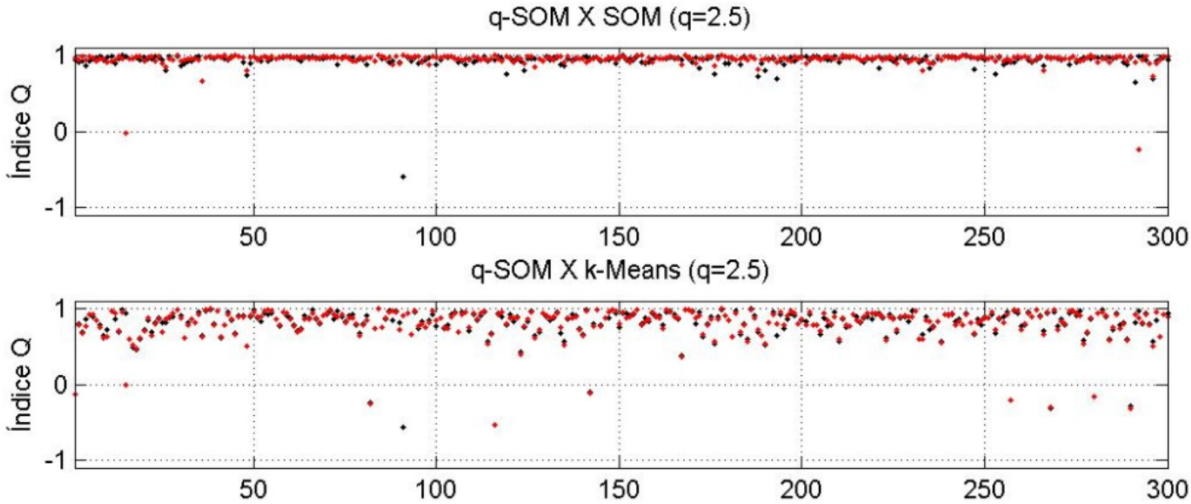
Figura 134 – Valores da distorção de luminância e de contraste, do coeficiente linear e do índice Q, das comparações entre as segmentações *k-Means* $\times$ *q*-SOM, com $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$.



Fonte: Autor. Grade de neurônios de tamanho $N = 10$ (em preto) e $N = 15$ (em vermelho), calculados sobre a mesma imagem apresentada na Figura 130.

Para exemplificar os cálculos do índice Q incluindo todas as 300 imagens da base de *Berkeley*, a Figura 135 apresenta dois gráficos com os valores do índice Q, mostrando na parte superior os valores da comparação entre SOM $\times$ q-SOM e na parte inferior os valores entre *k-Means* $\times$ q-SOM.

Figura 135 – Gráficos com os índices Q calculados sobre as 300 imagens segmentadas da base de *Berkeley*. A segmentação por q-SOM foi realizada com o parâmetro $q = 2{,}5$.



Fonte: Autor. Grade de neurônios com $N = 10$ (em preto) e $N = 15$ (em vermelho).

Agrupando-se os resultados como apresentados na Figura 135, pode-se calcular os valores médios do índice Q para cada variação do parâmetro q do modelo q-SOM. Nos exemplos exibidos na Figura 135, foram calculadas as médias das comparações entre SOM $\times$ q-SOM, sendo $Q_{med(2,5)} = 0{,}9279$ para $(N = 10)$ e $Q_{med(2,5)} = 0{,}9445$ para $(N = 15)$. Também foram calculadas as médias entre *k-Means* $\times$ q-SOM, sendo $Q_{med(2,5)} = 0{,}7970$ para $(N = 10)$ e $Q_{med(2,5)} = 0{,}7997$ para $(N = 15)$.

A Tabela 5, mostra as médias dos valores do índice Q em cada variação do parâmetro q do modelo q-SOM. As colunas (a) e (b) mostram as médias calculadas através da comparação das imagens segmentadas por SOM $\times$ q-SOM, sendo que em (a) $N = 10$ e em (b) $N = 15$. As colunas (c) e (d) mostram o índice Q extraído da comparação por *k-Means* $\times$ q-SOM, sendo que (c) $N = 10$ e em (d) $N = 15$.

Tabela 5 – Médias dos valores dos índices Q calculados sobre as imagens segmentadas da base de *Berkeley*.

	SOM × *q*-SOM		*k-Means* × *q*-SOM	
q	(a) N=10	(b) N=15	(c) N=10	(d) N=15
0,1	0,8016	0,8557	0,7219	0,7416
0,2	0,7854	0,8484	0,7066	0,7409
0,3	0,7198	0,8090	0,6623	0,7116
0,4	0,6660	0,7815	0,6398	0,6875
0,5	0,5821	0,6363	0,5786	0,6341
0,6	0,6484	0,5505	0,6438	0,5627
0,7	0,8201	0,8127	0,7521	0,7244
0,8	0,7960	0,8216	0,7236	0,7450
0,9	0,8733	0,8552	0,7564	0,7397
1,0	1,0	1,0	0,8100	0,8069
1,1	0,9669	0,9719	0,8164	0,8111
1,2	0,9609	0,9719	0,8135	0,8088
1,3	0,9590	0,9638	0,8129	0,8085
1,4	0,9427	0,9629	0,8008	0,8107
1,5	0,9372	0,9632	0,7993	0,8084
1,6	0,9486	0,9638	0,8117	0,8064
1,7	0,9310	0,9605	0,8000	0,8079
1,8	0,9323	0,9422	0,7992	0,7973
1,9	0,9291	0,9608	0,7994	0,8100
2,0	0,9168	0,9609	0,7821	0,8093
2,1	0,9297	0,9597	0,8001	0,8069
2,2	0,9261	0,9577	0,8001	0,8083
2,3	0,9419	0,9582	0,8130	0,8088
2,4	0,9259	0,9544	0,7988	0,8109
2,5	0,9279	0,9445	0,7970	0,7997
2,6	0,9120	0,9406	0,7828	0,8038
2,7	0,9229	0,9396	0,7995	0,8035
2,8	0,9226	0,9382	0,8040	0,8041
2,9	0,9185	0,9330	0,7995	0,7923

Fonte: Autor.

Analisando os valores das médias exibidos na Tabela 5, pode-se observar que as médias nos valores de $q < 1$ são inferiores às médias nos valores de $q > 1$. Isso demonstra que os Mapas Auto-Organizáveis treinados pelo modelo *q*-SOM com $q > 1$, produziram as segmentações mais próximas daquelas obtidas pelos algoritmos *k-Means* e SOM tradicional. Portanto, da mesma forma como constatado pelos resultados obtidos através dos índices $PSNR$ e $Kappa$, também pelo índice Q observa-se uma maior sensibilidade nos valores do parâmetro q do mo-

delo q-SOM quando $q < 1$, podendo sugerir que este intervalo de valores possa oferecer uma maior gama de possibilidades de novos resultados.

Na seção a seguir, são descritas as análises feitas a partir da comparação entre as bordas extraídas manualmente $\times$ bordas extraídas automaticamente por filtro *Sobel*, proporcionando uma verificação a respeito da qualidade das segmentações obtidas nestes experimentos, a partir das 300 imagens da base de *Berkeley*.

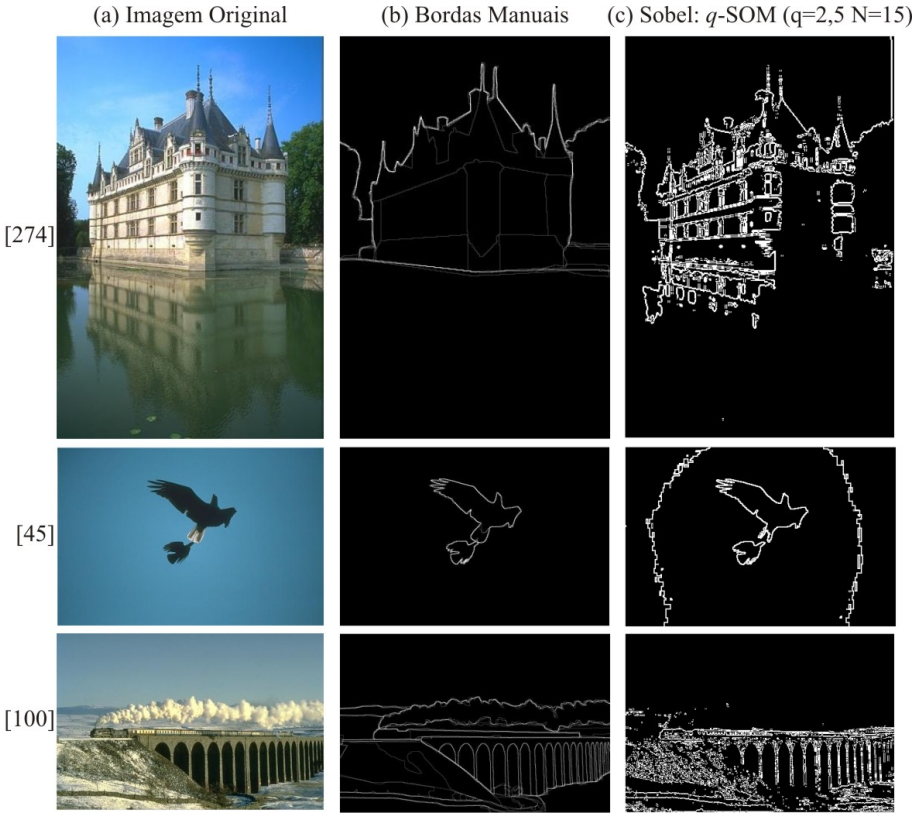
6.3.3.10 Distância de Similaridade sobre as Imagens Segmentadas da Base de Berkeley

Para a análise dos resultados através do cálculo da distância de similaridade entre as bordas extraídas automaticamente pelo q-SOM, SOM tradicional e *k-Means*, em comparação com as bordas extraídas manualmente, foram executadas 5 etapas até a consolidação final dos resultados.

A - Consolidação do Resultados do Índice SIM - Etapa 1

Para iniciar, foi aplicado um filtro *Sobel* sobre todas as imagens segmentadas nos experimentos relizados com o modelo q-SOM, com variações de $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, para a extração automática das bordas das imagens segmentadas. A Figura 136, exibe 3 imagens da base de *Berkeley* como exemplo do processo de extração das bordas, de forma manual e também automática através de filtro *Sobel*. As bordas manuais fazem parte da base de imagens de *Berkeley*.

Figura 136 – Exemplos da extração de bordas a partir de 3 imagens da base de *Berkeley*



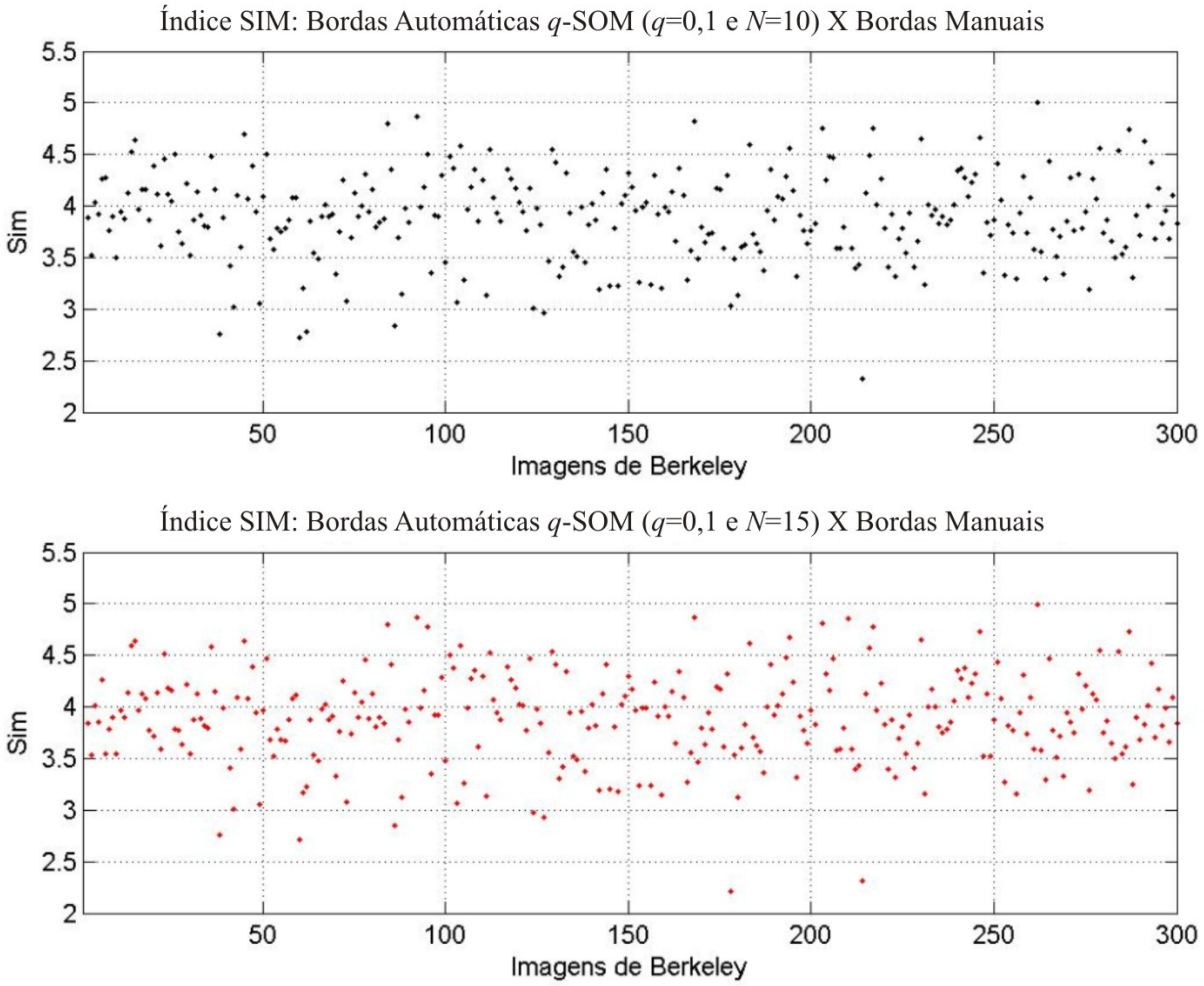
Fonte: Imagens extraídas da base de *Berkeley*.

B - Consolidação do Resultados do Índice SIM - Etapa 2

Na Etapa 2 foram calculadas as distâncias de similaridades, de acordo com a descrição do índice SIM apresentada na Seção 2.9.4, entre as bordas extraídas de cada uma das imagens segmentadas nos experimentos com *q*-SOM, SOM tradicional e *k-Means*, em relação às bordas extraídas manualmente pertencentes à base de *Berkeley*, apresentada na Seção 6.1 e utilizada como padrão dourado no cálculo do índice SIM.

A Figura 137 mostra exemplos dos resultados obtidos pelo cálculo do índice SIM, calculado entre as bordas extraídas das segmentações pelo modelo *q*-SOM com $q = 0{,}1 \times$ bordas manuais. Quanto mais próximo do valor 0, mais similares são as imagens analisadas.

Figura 137 – Exemplo com valores do índice SIM, calculados sobre as bordas extraídas das segmentações pelo modelo q-SOM com $q = 0{,}1 \times$ bordas manuais, considerando-se as 300 imagens de *Berkeley*.



Fonte: Autor.

Calculando-se as médias entre os valores do índice SIM, considerando-se apenas os valores de q-SOM com $q = 0{,}1$ e $N = 10$, exibidos na parte superior da Figura 137, temos $SIM_{med} = 3{,}8276$, enquanto que a média dos valores onde $q = 0{,}1$ e $N = 15$, exibidos na parte inferior da Figura 137, temos $SIM_{med} = 3{,}8362$. Portanto, neste exemplo, a segmentação das imagens produzidas pelo modelo q-SOM com grade neuronal $N = 10$ produziu imagens segmentadas, na média, mais próximas da segmentação considerada padrão dourado nestes experimentos, se comparada à grade neuronal $N = 15$, para o modelo q-SOM com $q = 0{,}1$.

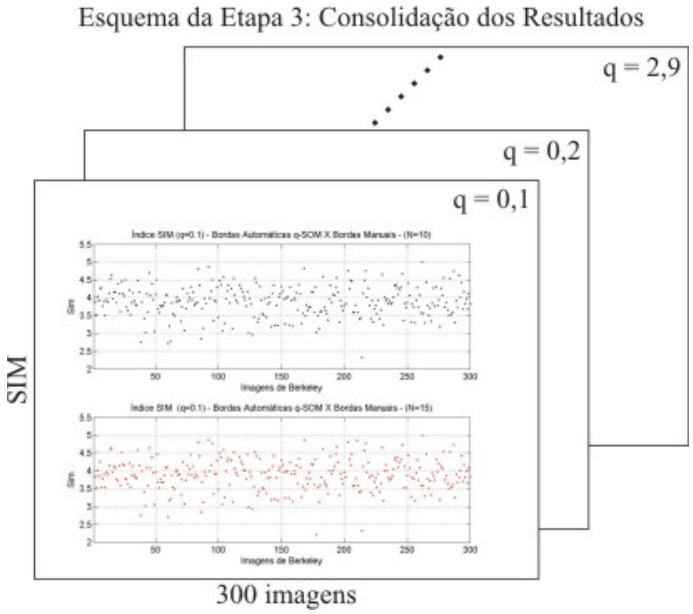
Ainda analisando este exemplo, ao computar a média obtida dos valores do índice SIM, considerando-se o algoritmo SOM tradicional com $N = 10$, temos $SIM_{med} = 3{,}8422$, por-

tanto, maior do que a média do modelo q-SOM com $q = 0{,}1$ e $N = 10$. O mesmo comportamento ocorre com a média dos valores do índice SIM, considerando-se o algoritmo SOM tradicional com $N = 15$,sendo também maior do que a média do modelo q-SOM com $q = 0{,}1$ e $N = 15$. Apesar dos valores médios serem muito próximos, houve uma pequena vantagem obetida com o modelo q-SOM.

C - Consolidação do Resultados do Índice SIM - Etapa 3

Na Etapa 3, foram feitos agrupamentos dos resultados do índice SIM computados na Etapa 2, através de uma matriz em 3 dimensões de dados - aqui denotada por $etapa3(x,y,z)$ - onde x representa as 300 imagens de *Berkeley*, y representa o índice SIM de cada imagem e z é uma classificação baseada nos 29 valores de q do modelo q-SOM. A Figura 138 ilustra um esquema representativo da Etapa 3.

Figura 138 – Consolidação dos Resultados - Etapa 3: matriz $etapa3(x,y,z)$, onde x representa as 300 imagens de *Berkeley*, y representa o índice SIM de cada imagem e z é uma classificação baseada nos 29 valores de q do modelo q-SOM.



Fonte: Autor.

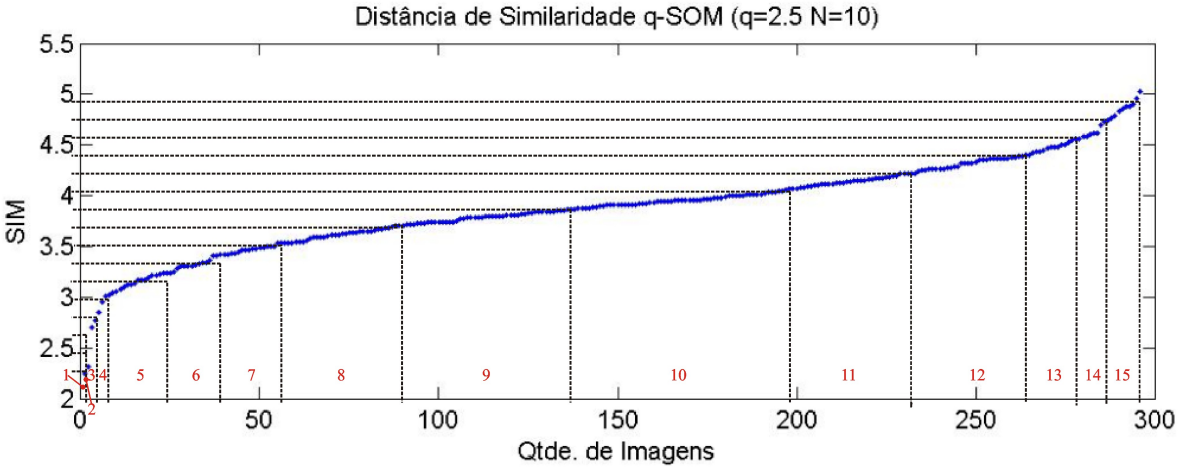
Assim, após o cálculo da distância de similaridade entre as bordas extraídas automaticamente das segmentações provenientes do modelo q-SOM em comparação às bordas extraídas manualmente a partir da base de *Berkeley*, os resultados foram agrupados pelo valor de q, tanto para $N = 10$, quanto para $N = 15$.

D - Consolidação do Resultados do Índice SIM - Etapa 4

A partir das distâncias de similaridades agrupadas pelo valor de q, como apresentado no exemplo da Figura 137, foi aplicado um histograma separando os resultados em 15 *bins*, para então computar as quantidades existentes em cada *bin*. Cada *bin* representa $\frac{1}{15}$ dos valores de y encontrados na matriz $etapa3(x,y,z)$, sendo os menores valores aqueles posicionados à esquerda no histograma. Este procedimento determina o início da Etapa 4, e foi repetido em cada uma das imagens da base de *Berkeley*.

A Figura 139 ilustra a subdivisão dos resultados das Distâncias de Similaridades em 15 bins. Neste exemplo, aparecem os resultados de todas as imagens de *Berkeley* segmentadas por q-SOM (com $q = 2{,}5$) e também por SOM tradicional, ambos com $N = 10$.

Figura 139 – Subdivisão dos valores das Distâncias de Similaridades em 15 *bins*, sobre os resultados a partir do modelo q-SOM, com $q = 2{,}5$ e $N = 10$.



Fonte: Autor.

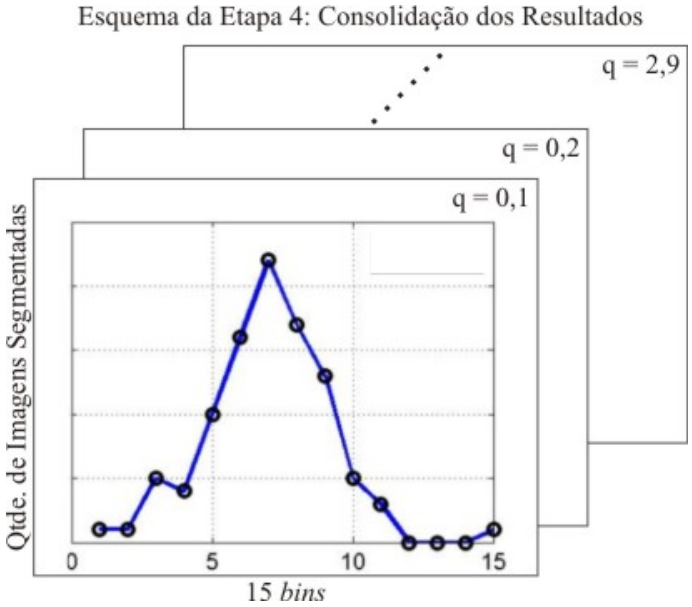
Na Figura 139 cada corte no eixo y - representando o índice SIM - tem seu respectivo correspondente no eixo x - que representa a quantidade de imagens segmentadas. Assim, tem-se o eixo x subdividido em 15 *bins*, sendo que cada bin é rotulado com um número sequencial e, em cada bin, há uma quantidade de segmentações agrupadas pelo corte no eixo y. Com este procedimento, produz-se um histograma dos resultados, para cada valor de q do modelo q-SOM, para $N = 10$ e $N = 15$.

Na Etapa 4 também foi construída um nova matriz em 3 dimensões de dados - aqui denotada por $etapa4(x,y,z)$ - onde x representa 15 *bins* de um histograma envolvendo todas as imagens de *Berkeley*, calculado a partir da matriz $etapa3(x,y,z)$, y representa a quantidade de

imagens segmentadas pertencentes a cada *bin* e z representa uma classificação pelos valores de q do modelo q-SOM, conforme ilustrado no exemplo da Figura 139.

A Figura 140 ilustra um esquema representativo da Etapa 4 da consolidação dos resultados.

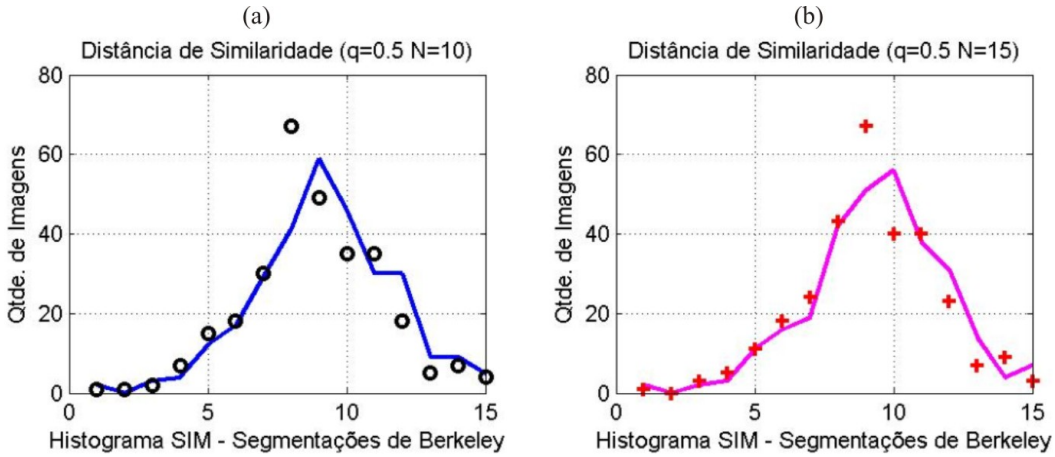
Figura 140 – Consolidação dos Resultados - Etapa 4: matriz $etapa4(x,y,z)$, onde x representa 15 *bins* de um histograma calculado sobre a matriz $etapa3(x,y,z)$ das imagens de Berkeley, y representa o índice SIM e z é representação dos valores de q do modelo q-SOM.



Fonte: Autor.

A Figura 141 mostra um exemplo da matriz $etapa4(x,y,z)$, sendo z a representação do parâmetro $q = 0{,}5$, escolhido ao acaso.

Figura 141 – Gráfico ilustrativo das Distâncias de Similaridades agrupadas em 15 bins, considerando todas as 300 imagens da base de *Berkeley*, segmentadas por *q*-SOM com $q = 0{,}5$, escolhido ao acaso para este exemplo. (a) com $N = 10$. (b) com $N = 15$. As linhas contínuas representam as quantidades de imagens segmentadas pelo SOM tradicional.



Fonte: Autor.

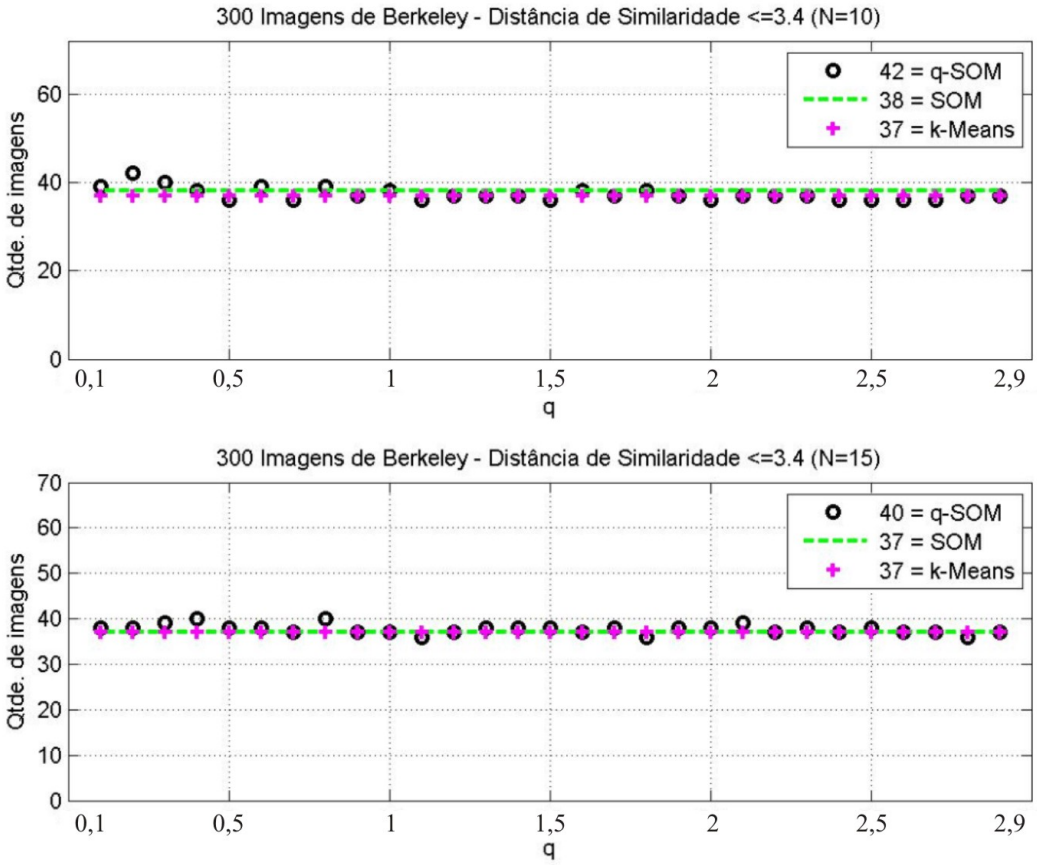
E - Consolidação do Resultados do Índice SIM - Etapa 5

A partir dos histogramas na Etapa 4, conforme ilustrado na Figura 141, um novo agrupamento dos dados foi realizado, iniciando a Etapa 5, através de uma nova matriz em 3 dimensões de dados, aqui representada por $etapa5(x,y,z)$.

Nesta última etapa, tem-se que x representa os valores do parâmetro $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, y representa a quantidade de imagens segmentadas existentes abaixo de um valor máximo especificado para o índice SIM, aqui denotado como valor de corte ω_{SIM}, e z representa uma classificação pelo valor de corte ω_{SIM}. O valor de corte ω_{SIM} especifica um valor máximo para as Distâncias de Similaridades ali analisadas.

A Figura 142 ilustra um exemplo da Etapa 5, com $\omega_{SIM} \leq 3{,}4$, o qual mostra a quantidade de segmentações cujos valores da Distância de Similaridade são inferiores a $SIM = 3{,}4$, considerando todas as imagens da base de *Berkeley*.

Figura 142 – Quantidades de imagens segmentadas cujas Distâncias de Similaridades estão abaixo do valor de corte $\omega_{SIM} \leq 3{,}4$, considerando todas as 300 imagens da base de *Berkeley*.



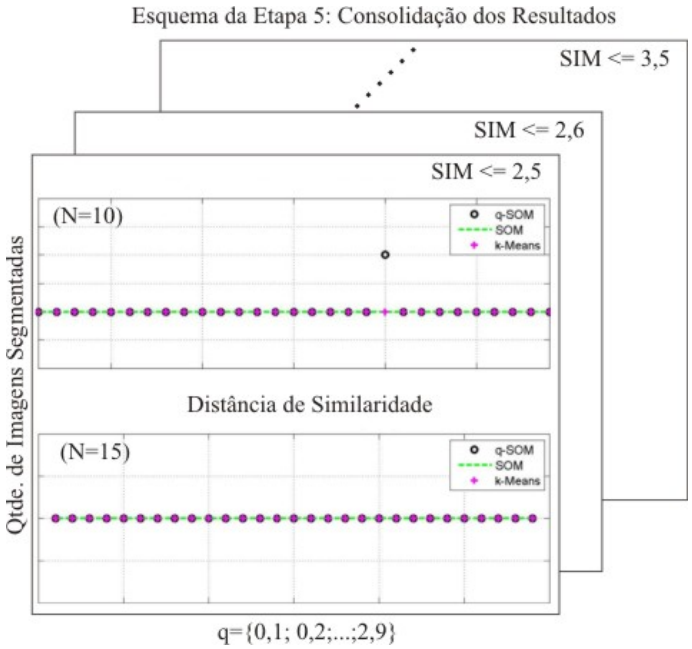
Fonte: Autor.

Na Figura 142, pode-se notar que, ao adotar um valor de corte $\omega_{SIM} \leq 3{,}4$, houve um aumento nas quantidades de imagens produzidas a partir da segmentação pelo modelo q-SOM, observado para os valores de $q = [0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4; 0{,}6; 0{,}8; 1{,}6; 1{,}8]$.

Com estes resultados pode-se afirmar que houve um aumento na qualidade das segmentações produzidas a partir do modelo q-SOM, para estes valores do parâmetro q, considerando um corte $\omega_{SIM} \leq 3{,}4$, em comparação àquelas produzidas pelo modelo SOM tradicional e *k-Means*.

A Figura 143 ilustra um esquema representativo da Etapa 5, encerrando a consolidação dos resultados.

Figura 143 – Consolidação dos Resultados - Etapa 5: matriz $etapa5(x,y,z)$, onde x representa os valores do parâmetro q, y representa a quantidade de imagens segmentadas existentes abaixo do valor de corte ω_{SIM}, e z uma classificação pelo valor de corte ω_{SIM}.



Fonte: Autor.

7 DISCUSSÕES E CONCLUSÕES

Neste capítulo, são apresentadas discussões sobre os resultados obtidos através dos experimentos realizados baseados na aplicação de uma função q-Gaussiana bidimensional, fundamentada na q-Álgebra. Primeiramente, na Seção 7.1, são apresentadas as conclusões sobre a aplicação desta função em filtros espaciais do tipo passa-baixas, para redução de ruídos em imagens digitais, aqui denotados por filtros q-Gaussianos. Finalizando este capítulo, a Seção 7.3 discute e oferece conclusões sobre a aplicação da função q-Gaussiana bidimensional na aplicação de Redes Neurais Artificiais com aprendizagem não-supervisionada, do tipo Mapas Auto-Organizáveis, aqui denotados por modelo q-SOM.

7.1 SOBRE FILTROS q-GAUSSIANOS BIDIMENSIONAIS

Com a aplicação dos ruídos Gaussianos com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$ e média 0, sobre as 300 imagens originais da base de *Berkeley*, foram obtidos três grupos de imagens com ruídos, totalizando 900 imagens com ruídos. Com isto, pode-se realizar experimentos com base em imagens com intensidades de rúidos diferentes, conforme mostrou a Figura 34. Sendo assim, as conclusões descritas nesta seção também são separadas por estes três grupos de imagens com ruídos.

Foram aplicados filtros passa-baixa com função q-Gaussiana bidimensional no *kernel*, conforme proposto na Seção 4.1.2, com o objetivo de extrair ruídos das 900 imagens que receberam ruídos Gaussianos. Para aferir a eficiência dos filtros q-Gaussianos, foram calculados os índices $PSNR$ para aferir nível de sinal-ruído entre as imagens originais $\times$ imagens filtradas, e também o índice de qualidade universal de imagens, o chamado índice Q, que aferiu a qualidade das imagens filtradas em relação às imagens originais.

Na aplicação dos filtros q-Gaussianos, com tamanho de janela 3×3 pixels, foram utilizados 29 diferentes valores do parâmetro q, sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, com a intensão de comparar e analisar os efeitos da variação deste parâmetro em relação às imagens filtradas. Também foi aplicado sobre as 900 imagens com ruídos um filtro Gaussiano tradicional, que possui uma

função Gaussiana em seu *kernel*. Portanto, foram obtidas 27.000 imagens filtradas, separadas em três grupos de 9.000 imagens filtradas, representados pelos valores de $\sigma = [0{,}04; 0{,}2; 0{,}4]$ utilizados na aplicação dos ruídos sobre as respectivas imagens originais.

7.1.1 Sobre Redução de Ruídos através dos Filtros *q*-Gaussianos Bidimensionais

Em todos os experimentos de filtragem realizados com filtro q-Gaussiano, com $q = 1$, os valores de $PSNR$ encontrados são idênticos àqueles computados pelas filtragens realizados com filtro Gaussiano tradicional, monstrando na prática a função q-Gaussiana bidimensional proposta nesta tese como uma generalização da função Gaussiana tradicional, cujos resultados são, rigorosa e necessariamente, os mesmos daqueles obtidos pela função q-Gaussiana, quando $q = 1$.

Assim sendo, não se justificaria a aplicação de filtro q-Gaussiano mantendo-se $q = 1$, para obter-se o mesmo resultado de um filtro Gaussiano tradicional. Entretanto, utilizar o filtro q-Gaussiano pode significar obter melhores resultados de $PSNR$ a partir de determinados valores de q. Considerando-se limiares de corte para os valores de $PSNR$ ($\xi_{(PSNR)}$), pode-se analisar a quantidade de imagens filtradas com valores de $PSNR \geq \xi_{(PSNR)}$, e assim verificar que os filtros q-Gaussianos foram capazes de produzir uma quantidade maior de imagens filtradas, dentro do limiar de corte especificado, a partir de determinados valores do parâmetro q, aplicados aos filtros q-Gaussianos bidimensionais. Neste sentido, as Figuras 144, 145 e 146, mostram as quantidades de imagens filtradas, separadas pelos valores dos limiares de corte analisados, onde pode-se obter informações conclusivas a respeito dos experimentos com filtros q-Gaussianos aplicados neste trabalho.

A Figura 144 exibe a diferença entre as quantidades de imagens filtradas a partir dos filtros q-Gaussianos em relação às quantidades obtidas pelo filtro Gaussiano tradicional, considerando-se as imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}04$.

Figura 144 – Diferença entre as quantidades de imagens filtradas por filtro q-Gaussiano em comparação ao filtro Gaussiano tradicional, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}04$.

| (a) | Valores dos limiares de corte $\xi_{(PSNR)}$ (+dB) | | |

De acordo com os resultados expostos na Figura 144, pode-se sugerir que as funções q-Gaussianas são indicadas como *kernel* em filtros passa-baixa para redução de ruídos, podendo oferecer vantagens sobre os filtros Gaussianos tradicionais, quando utilizados valores do parâmetro q pertencentes ao intervalo $0{,}5 \leq q \leq 0{,}9$ e também para $q > 2{,}6$ (indicados com números em negrito e cor de fundo amarela), pois observa-se que, para estes valores, foram computadas maiores quantidades de imagens dentro dos limiares observados, se comparadas às quantidades obtidas pelo filtro Gaussiano tradicional, sem haver nenhuma ocorrência sequer de maior quantidade obtida com filtro Gaussiano tradicional. Com esta constatação, pode-se afirmar que, ao utilizar estes valores de q nos filtros q-Gaussianos, a partir de imagens com ruídos Gaussianos $\sigma = 0{,}04$, no pior caso, obtém-se o mesmo resultado daquele obtido pelo filtro Gaussiano tradicional e no melhor caso pode obter imagens filtradas com maiores índices de $PSNR$, o que significaria melhores resultados.

Evidentemente não basta observar, na Figura 144, apenas as quantidades de imagens, pois possuir maiores quantidades de imagens com $PSNR < +20db$ pode não corresponder a alguma vantagem na aplicação de filtro passa-baixa, pois mesmo filtradas, tais imagens ainda estariam sob intenso efeito de ruídos. Assim, ao observar as quantidades obtidas a partir do limiar $PSNR \geq +20db$, nota-se que há vantagem dos filtros q-Gaussianos sobre o filtro Gaussiano tradicional, no que diz respeito à quantidade de imagens, para todos os valores discretos de q utilizados nestes experimentos, pertencentes ao intervalos $0{,}5 \leq q \leq 0{,}9$ e $q > 2{,}6$.

Concluindo os experimentos com imagens filtradas a partir das imagens originais, que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$, pode-se obter imagens filtradas com menores quantidades de ruídos, medido por valores do índice $PSNR$, utilizando-se filtros q-Gaussianos com valores de q pertencentes ao intervalo $0{,}5 \leq q \leq 0{,}9$ e também para $q > 2{,}6$.

A seguir, seguem as discussões sobre os resultados obtidos com as imagens filtradas, a partir de imagens originais que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}2$, cujos resultados são exibidos na Figura 145.

Figura 145 – Diferença entre as quantidades de imagens filtradas por filtro q-Gaussiano em comparação ao filtro Gaussiano, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}2$.

(a)	Valores dos limiares de corte $\xi_{(PSNR)}$ (+dB)																																								(b)	(c)
q	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	Qtd.G	Qtd.qG
0,1	-1	-5	-17	-34	-35	-54	-47	-34	-27	-29	-28	-24	-22	-20	-19	-15	-11	-8	-10	-9	-7	-5	-3	-2	-2	-2	-2	-2	-3	-2	-1	-1	-1	-2	-2	-1	-1	0	-54	0
0,2	-2	-9	-22	-41	-48	-70	-59	-44	-36	-39	-36	-35	-25	-22	-22	-17	-12	-11	-10	-9	-7	-6	-4	-2	-3	-4	-3	-3	-3	-2	-1	-1	-1	-2	-2	-1	-1	0	-70	0
0,3	-2	-10	-27	-43	-55	-76	-62	-50	-45	-43	-39	-37	-25	-23	-25	-17	-13	-11	-10	-9	-7	-6	-4	-2	-4	-4	-3	-3	-3	-2	-1	-1	-1	-2	-2	-1	-1	0	-76	0
0,4	1	1	0	2	-2	-5	-2	2	-5	-5	-12	-6	-3	-2	-3	2	1	3	1	-1	-2	-2	-1	0	0	1	1	1	-1	0	1	1	1	0	0	1	1	2	-12	3
0,5	1	0	3	1	1	6	8	15	2	-4	-9	-5	-2	-3	2	5	5	6	4	1	3	4	3	2	1	1	2	1	0	0	2	1	1	0	0	0	0	1	-9	15
0,6	1	2	1	5	9	7	11	11	10	2	-1	0	4	0	5	9	6	8	7	5	3	3	3	3	2	2	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	-1	11
0,7	0	2	2	4	11	5	12	8	9	2	2	0	3	2	3	6	4	7	4	2	2	2	2	2	2	1	0	0	-1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	-1	12
0,8	0	0	1	2	3	3	7	5	4	0	2	0	2	2	2	1	3	4	1	1	2	2	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	7
0,9	0	0	1	1	1	1	5	2	2	0	1	0	2	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	5
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,1	0	0	-1	-1	-3	-1	-1	-1	0	-1	0	0	-1	0	-2	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	0
1,2	0	0	-1	-1	-4	-3	-4	-3	0	-1	0	1	-1	0	-3	0	-2	-1	-2	0	-1	-1	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4	1
1,3	0	0	-1	-3	-5	-3	-4	-4	0	-2	0	1	-1	0	-4	-1	-2	-1	-2	0	-1	-1	-2	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5	1
1,4	1	1	0	-2	-4	-2	-3	-3	1	-1	1	0	0	1	-3	1	-2	0	-1	1	0	-1	-1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-4	1
1,5	1	1	0	-2	-4	-2	-4	-4	1	-1	1	0	1	1	-3	1	-2	0	-1	1	-1	-1	-1	1	0	1	2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-4	2
1,6	1	1	0	-2	-4	-3	-4	-4	1	-1	1	-1	1	1	-4	0	-2	0	-1	1	-1	-1	-1	1	0	1	2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-4	2
1,7	1	1	0	-2	-4	-3	-5	-4	0	-1	1	-1	1	1	-4	0	-2	0	-1	1	-1	-1	-1	1	0	1	2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-5	2
1,8	1	1	0	-2	-4	-3	-5	-4	1	-1	1	-1	1	1	-4	-1	-2	0	-1	1	-1	-1	-1	1	0	1	2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-5	2
1,9	1	1	0	-2	-4	-3	-5	-4	1	-1	1	0	1	1	-4	-1	-2	0	-1	1	-1	-1	-1	1	0	1	2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-5	2
2	1	1	0	-2	-4	-3	-4	-4	1	-1	1	0	1	1	-4	-1	-2	0	-1	1	-1	0	-1	1	0	1	2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-4	2
2,1	1	1	0	-2	-4	-2	-3	-4	1	-1	1	1	1	1	-4	-1	-2	0	-1	1	-1	0	-1	1	0	1	2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-4	2
2,2	1	1	0	-1	-4	-2	-3	-3	1	0	1	2	1	1	-4	0	-1	0	-1	1	-1	0	-1	1	0	1	2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-4	2
2,3	0	0	-1	-1	-5	-3	-3	-3	0	0	0	1	0	0	-4	-1	-2	-1	-2	0	-1	-1	-2	0	-1	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5	1
2,4	0	0	-1	-1	-4	-3	-1	-2	0	0	0	2	0	0	-4	0	-1	-1	-2	0	-1	-1	-2	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4	2
2,5	0	0	1	-1	-2	-1	1	-1	0	0	0	2	0	0	-1	1	0	-1	-1	0	1	-1	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	2
2,6	0	0	1	2	1	1	3	0	0	0	0	2	2	0	-1	1	0	-1	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	3
2,7	0	0	1	2	2	2	6	2	2	1	0	0	2	0	1	2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	6
2,8	0	1	2	3	4	5	9	5	5	1	2	0	3	1	1	2	2	4	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	-1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	-1	9
2,9	1	2	2	6	9	4	10	8	8	3	0	-1	4	0	2	7	4	4	3	3	3	0	1	1	1	0	0	0	-1	0	1	1	0	0	0	1	1	2	-1	10

Fonte: Autor. Agrupadas pelos valores de limiares de corte medidos pelos valores de PSNR (+dB). Os valores em destaque na cor amarela e positivos representam maiores quantidades de imagens filtradas por filtros q-Gaussianos em relação ao filtro Gaussiano tradicional, dentro do limiar especificado, enquanto que os valores em destaque na cor azul e negativo representam as quantidades maiores obtidas pelos filtros Gaussianos tradicionais em relação aos filtros q-Gaussianos.

Na Figura 145 foram exibidas as diferenças entre as quantidades de imagens obtidas com valores de limiares a partir de $PSNR \geq +11dB$ até $PSNR \geq +48dB$, entre as imagens filtradas por filtros q-Gaussianos e o filtro Gaussiano tradicional. Este intervalo de limiares foi escolhido para suportar a imagem filtrada que possui o menor valor de $PSNR = +11{,}1482dB$ e o maior valor como sendo $PSNR = +48{,}8762dB$.

De acordo com os resultados exibidos na Figura 145, nota-se que as funções q-Gaussianas são indicadas como *kernel* em filtros passa-baixa para redução de ruídos, podendo oferecer vantagens sobre os filtros Gaussianos tradicionais, quando utilizados valores do parâmetro $q = [0{,}8; 0{,}9]$ (indicados com números em negrito e cor de fundo amarela), pois observa-se na coluna (c) que, para estes valores, foram computadas maiores quantidades de imagens dentro dos limiares observados, se comparadas às quantidades obtidas pelo filtro Gaussiano tradicional, sem haver nenhuma ocorrência sequer de maior quantidade obtida com filtro Gaussiano

tradicional. Com esta observação, pode-se concluir que, ao utilizar estes valores de q nos filtros q-Gaussianos, a partir de imagens com ruídos Gaussianos $\sigma = 0{,}2$, no pior caso, obtém-se mesmo resultado daquele obtido pelo filtro Gaussiano tradicional, mas podendo-se obter imagens filtradas com menor intensidade de ruídos calculados pelo índice $PSNR$, o que justificaria a utilização de filtro q-Gaussiano.

Observa-se ainda na Figura 145 que os maiores valores de $PSNR$ encontrados nestes experimentos, dados pelo limiar $PSNR \geq +48dB$, foram calculados a partir da aplicação de filtros q-Gaussianos com o valor de $q \in \{0{,}4 \leq q \leq 0{,}9\}$ ou $q \in \{2{,}7 \leq q \leq 2{,}9\}$.

Concluindo os experimentos com imagens filtradas a partir das imagens originais, que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$, é possível obter imagens filtradas com menores quantidades de ruídos, medido por maiores valores do índice $PSNR$ utilizando-se filtros q-Gaussianos com valores de $q = [0{,}8; 0{,}9]$.

A Figura 146 mostra as quantidade de imagens filtradas a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}4$. Observa-se que não houve nenhuma imagem filtrada com valor de $PSNR \leq +5dB$, bem como nenhuma imagem filtrada com $PSNR \geq +41dB$ sendo, portanto, suficiente analisar apenas este intervalo de valores de $PSNR$ neste grupo de imagens. O menor índice $PSNR$ observado foi de $PSNR = +5{,}5644dB$, enquanto que o maior foi $PSNR = +40{,}4252dB$.

Figura 146 – Diferença entre as quantidades de imagens filtradas por filtro q-Gaussiano em comparação ao filtro Gaussiano, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}4$.

(a)	Valores dos limiares de corte $\xi_{(PSNR)}$ (+dB)																																					(b)	(c)
q	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	Qtd.G	Qtd.qG
0,1	0	0	-2	-1	-7	-17	-15	-14	-12	-14	-6	-5	-2	-1	-1	-2	-3	-2	0	-1	-1	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-17	0
0,2	0	-1	-4	-7	-17	-24	-22	-32	-27	-22	-10	-7	-4	-2	-2	-3	-4	-2	-1	-1	-1	0	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-32	0
0,3	0	-1	-6	-8	-23	-31	-27	-41	-30	-25	-9	-11	-5	-4	-2	-4	-5	-3	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-41	0
0,4	0	-1	-7	-12	-31	-39	-35	-38	-30	-27	-7	-11	-5	-3	-2	-2	-3	-1	-1	-1	-1	0	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-39	0
0,5	0	-4	-11	-17	-36	-48	-40	-45	-40	-30	-9	-11	-5	-5	-2	-4	-3	-3	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-48	0
0,6	0	0	-5	-6	-13	-18	-18	-22	-13	-17	-3	-5	-4	-1	-2	-2	-3	-2	0	0	-1	0	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-22	0
0,7	0	0	-3	-4	-7	-13	-11	-11	-6	-8	0	-2	-1	0	0	-1	-2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-13	0
0,8	0	0	-2	-1	-4	-7	-6	-4	-3	-1	-1	-1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-7	0
0,9	0	0	0	0	0	-3	-2	-2	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,1	0	0	0	0	2	0	1	2	0	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
1,2	0	0	0	0	3	0	1	2	0	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
1,3	0	0	0	0	3	1	1	2	0	4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
1,4	0	0	0	0	4	1	1	2	0	4	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
1,5	0	0	0	0	5	1	4	2	0	4	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
1,6	0	0	0	0	5	1	4	2	0	4	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
1,7	0	0	0	0	5	1	4	2	0	4	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
1,8	0	0	0	0	5	1	4	3	0	4	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
1,9	0	0	0	0	5	1	2	2	0	4	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
2	0	0	0	0	5	1	2	2	0	4	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
2,1	0	0	0	0	4	1	2	2	0	4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
2,2	0	0	0	0	2	1	1	2	0	4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
2,3	0	0	0	-1	2	0	1	1	0	3	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	3
2,4	0	0	0	-1	2	0	1	1	0	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	3
2,5	0	0	0	-1	0	-1	1	-1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2
2,6	0	0	0	-1	0	-3	-2	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	0
2,7	0	0	-1	-2	-3	-7	-6	-5	-3	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-7	0
2,8	0	0	-3	-3	-7	-12	-10	-10	-5	-8	-1	-3	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-12	0
2,9	0	0	-3	-6	-14	-20	-19	-20	-13	-16	-4	-5	-3	-1	-2	-2	-3	-1	0	0	-1	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-20	0

Fonte: Autor. Agrupadas pelos valores de limiares de corte medidos pelos valores de $PSNR$ (+dB). Os valores em destaque na cor amarela e positivos representam maiores quantidades de imagens filtradas por filtros q-Gaussianos em relação ao filtro Gaussiano tradicional, dentro do limiar especificado, enquanto que os valores em destaque na cor azul e negativo representam as quantidades maiores obtidas pelos filtros Gaussianos tradicionais em relação aos filtros q-Gaussianos.

Observando-se a coluna (b) da Figura 146, pode-se concluir que, para este grupo de imagens - que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$ - os filtros q-Gaussianos com valores de $q < 1$, não produziram quantidades de imagens filtradas a mais do que o filtro Gaussiano tradicional. Exceção encontrada apenas para uma única imagem filtrada pelo filtro q-Gaussiano com $q = 0{,}9$. Para os valores de $q \geq 2{,}6$ nos filtros q-Gaussianos observa-se que não foram produzidas nenhuma quantidade de imagens a mais do que aquelas produzidas pelo filtro Gaussiano tradicional.

Entretanto, pode-se observar na Figura 146, que os filtros q-Gaussianos produziram quantidades maiores de imagens filtradas com o intervalo de valores de $q \in \{1{,}1 \leq q \leq 2{,}2\}$, se comparadas ao filtro Gaussiano tradicional. Estes valores do parâmetro q aplicados ao filtro q-Gaussiano, além de produzir maiores quantidades, em nenhum caso produziram menores

quantidades em relação ao filtro Gaussiano tradicional. Estas observações permitem afirmar que os filtros q-Gaussianos bidimensionais são indicados para a filtragem de imagens que receberam forte intensidade de ruídos Gaussianos, quando $1{,}1 \leq q \leq 2{,}2$, podendo produzir imagens filtradas com menores intensidades de ruídos, se comparadas àquelas produzidas pelo uso de filtro Gaussiano tradicional.

7.1.2 Sobre Segmentação de Imagens Filtradas por Filtros q-Gaussianos Bidimensionais

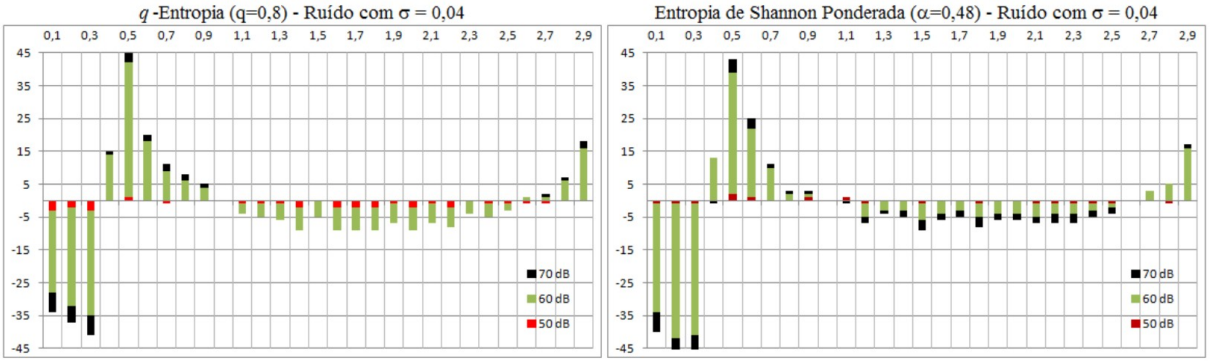
Em todos os experimentos de segmentação pela q-Entropia e entropia de Shannon Ponderada, sobre as imagens filtradas por filtro q-Gaussiano com $q = 1$, os valores de $PSNR$ calculados após as segmentações são idênticos àqueles computados sobre as imagens segmentadas que foram filtradas por filtro Gaussiano tradicional. Com isto, fica demonstrado aqui também na prática que, a função q-Gaussiana bidimensional proposta nesta tese é uma generalização da função Gaussiana tradicional, cujos resultados são, rigorosa e necessariamente, os mesmos daqueles obtidos pela função q-Gaussiana quando $q = 1$.

Para analisar os resultados produzidos pelas técnicas de entropia, estes foram separados em três grupos de imagens, a partir do valor de σ utilizado na aplicação dos ruídos sobre as imagens originais. Sendo assim, as Figuras 147, 148, 149, 150 e 151 referem-se às imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$; as Figuras 153, 154, 155, 156 e 157 exibem os resultados sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$, e finalizando, as Figuras 159, 160, 161, 162 e 163 mostram os resultados referentes às imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$.

A - Segmentação das Imagens que Receberam Ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}04$

Os gráficos mostrados na Figura 147 indicam as diferenças entre as quantidades de imagens segmentadas pela q-Entropia com $q = 0{,}8$ (à esquerda) e pela entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = 0{,}48$ (à direita), a partir das imagens filtradas por filtros q-Gaussianos com valores de $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, agrupadas pelos limiares $\omega_{(PSNR)} = [+50dB; +60dB; +70dB]$, sobre as imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}04$. Como apenas observou-se a ocorrência de uma única imagem com $PSNR < +50dB$, este limiar não foi representado nos gráficos, sendo considerado exceção.

Figura 147 – Diferença entre as quantidades de imagens segmentadas pela q-Entropia (com $q = 0{,}8$) e pela entropia de Shannon Ponderada (com $\alpha = 0{,}48$), filtradas por filtro q-Gaussiano, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}04$.



Fonte: Autor. Agrupadas pelos limiares $\omega_{(PSNR)}$.

Os gráficos da Figura 147 exibem as diferenças entre as imagens que foram filtradas por filtros q-Gaussianos. O eixo x representa cada um dos 29 valores do parâmetro q aplicados aos filtros q-Gaussianos, sendo a coluna onde $x = 1$ a representação do filtro q-Gaussiano com $q = 1$, isto é, representa o filtro Gaussiano tradicional. O eixo y representa a diferença entre filtro q-Gaussiano e o filtro Gaussiano tradicional, medida pelas quantidades de imagens segmentadas, sendo que a linha onde $y = 0$ indica que esta diferença é igual a zero, isto é, filtros q-Gaussianos e Gaussiano tradicional produziram as mesmas quantidades de imagens segmentadas pertencentes ao limiar ω analisado. Assim, as quantidades onde $x = 1$ e $y = 0$ são sempre iguais a zero.

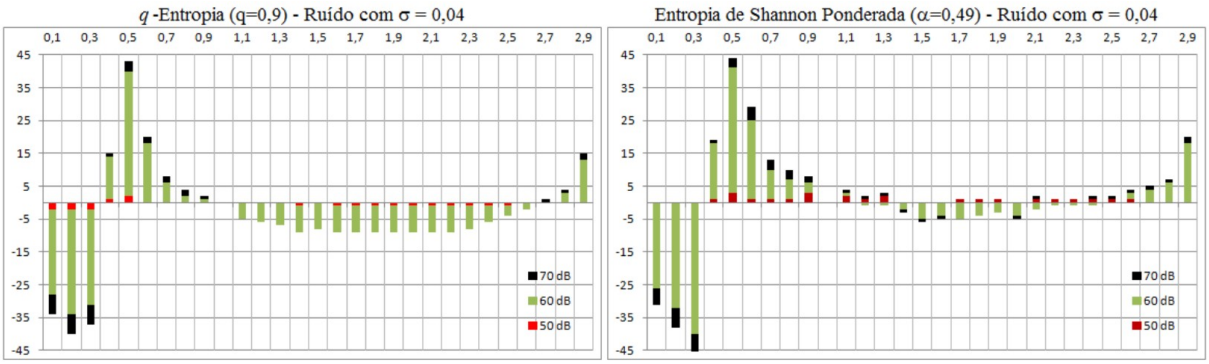
Os valores onde $y > 0$ representam as quantidades de segmentações onde os filtros q-Gaussianos levaram vantagem, isto é, produziram maiores quantidades de imagens no limiar

$\omega_{(PSNR)}$ analisado, em comparação ao filtro Gaussiano tradicional; portanto, para os valores onde $y < 0$, são indicadas as quantidades de segmentações onde o filtro Gaussiano tradicional levou vantagem. Os marcadores na cor vermelha indicam as quantidades onde o $PSNR \geq +50dB$, em verde $PSNR$ a partir de $+60dB$, e em preto as segmentações com $PSNR \geq +70dB$.

Ao analisar a figura 147 percebe-se que o comportamento geral das duas metodologias de segmentação de imagens produziram resultados bem semelhantes, reduzindo-se as diferenças a poucas imagens segmentadas. Por exemplo, para ambas as técnicas de segmentação, os filtros q-Gaussianos que mais produziram imagens em cada um dos limiares $\omega_{(PSNR)}$ foram os aqueles com $q = 0{,}5$. De modo geral, a performance dos filtros Gaussianos tradicionais supera a dos filtros q-Gaussianos quando $q \in \{1 < q < 2{,}6\}$ ou $q < 0{,}4$. Entretanto, os filtros q-Gaussianos superam os filtros Gaussianos tradicionais quando $q \in \{0{,}5 \leq q \leq 0{,}9$ ou $q \geq 2{,}6$, para este grupo de imagens.

A Figura 148 a seguir, mostra os mesmos agrupamentos adotados na exibição da Figura 147, entretanto, as segmentações foram feitas com valor de $q = 0{,}9$ para a q-Entropia e $\alpha = 0{,}49$ para entropia de Shannon Ponderada.

Figura 148 – Diferença entre as quantidades de imagens segmentadas pela q-Entropia (com $q = 0{,}9$) e pela entropia de Shannon Ponderada (com $\alpha = 0{,}49$), filtradas por filtro q-Gaussiano, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}04$.



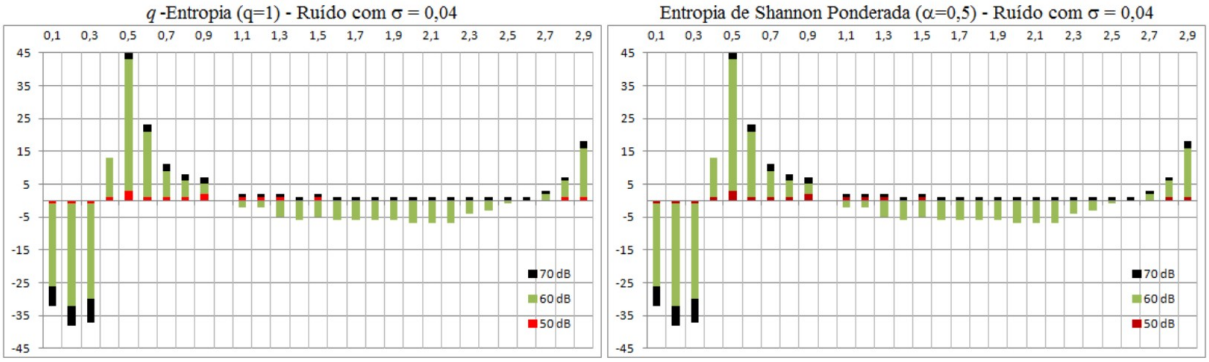
Fonte: Autor. Agrupadas pelos limiares $\omega_{(PSNR)}$.

A Figura 148, mostra um comportamento bastante semelhante àquele observado na Figura 147. Os melhores valores de q para os filtros q-Gaussianos - que geraram maiores quantidades de imagens dentro dos limiares analisados, indicados no eixo $y > 0$ - estão compreendidos

onde $q \in \{0{,}4 \leq q \leq 0{,}9\}$ ou $q \geq 2{,}7$. Para as imagens segmentadas pela entropia de Shannon Podenrada, observou-se que foram produziadas maiores quantidades de imagens filtradas por filtro q-Gaussiano também onde $q = [2{,}5; 2{,}6]$, diferentemente dos resultados obtidos a partir da segmentação pela q-Entropia. Uma comparação com foco nas técnicas de entropia utilizadas neste trabalho é apresentada na Figura 165, a diante.

Seguindo os mesmos agrupamentos adotados para a geração dos gráficos da Figura 147; a Figura 149 a seguir, mostra as segmentações feitas para a q-Entropia e para entropia de Shannon Ponderada com $q = 1$ e $\alpha = 0{,}5$, isto é, ambas as técnicas de segmentação de imagens foram reduzidas à entropia BGS.

Figura 149 – Diferença entre as quantidades de imagens segmentadas pela q-Entropia (com $q = 1$) e pela entropia de Shannon Ponderada (com $\alpha = 0{,}5$), filtradas por filtro q-Gaussiano, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}04$.

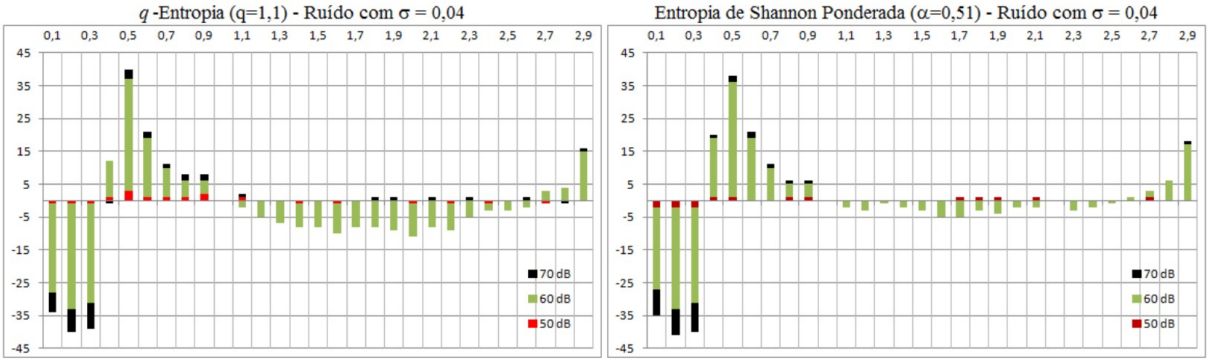


Fonte: Autor. Agrupadas pelos limiares $\omega_{(PSNR)}$.

A Figura 149 também mostra um comportamento semelhante àqueles observados nas Figuras 147 e 148, os quais indicam os melhores valores de q no filtro q-Gaussiano - indicados no eixo $y > 0$ - onde $q \in \{0{,}4 \leq q \leq 0{,}9\}$ ou $q \geq 2{,}6$. Tanto a q-Entropia com $q = 1$, quanto a entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = 0{,}5$, representam a generalização da entropia extensiva de Boltzmann-Gibbs-Shannon (BGS), motivo necessário e suficiente para que ambos os gráficos da Figura 149 possuam valores idênticos.

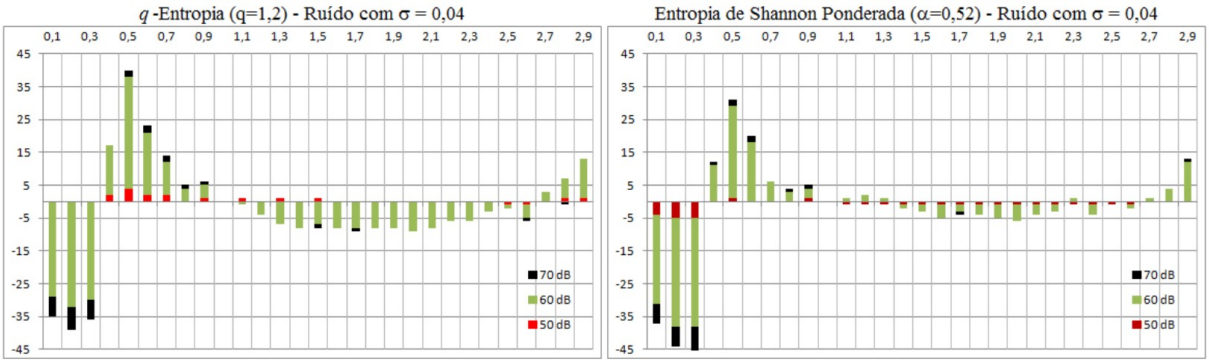
As Figuras 150 e 151 a seguir, mostram os resultados obtidos com as segmentações feitas com os valores de $q = [1{,}1; 1{,}2]$ para a q-Entropia e de $\alpha = [0{,}51; 0{,}52]$ para entropia de Shannon Ponderada.

Figura 150 – Diferença entre as quantidades de imagens segmentadas pela q-Entropia (com $q = 1{,}1$) e pela entropia de Shannon Ponderada (com $\alpha = 0{,}51$), filtradas por filtro q-Gaussiano, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}04$.



Fonte: Autor. Agrupadas pelos limiares $\omega_{(PSNR)}$.

Figura 151 – Diferença entre as quantidades de imagens segmentadas pela q-Entropia (com $q = 1{,}2$) e pela entropia de Shannon Ponderada (com $\alpha = 0{,}52$), filtradas por filtro q-Gaussiano, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}04$.



Fonte: Autor. Agrupadas pelos limiares $\omega_{(PSNR)}$.

Observando-se os resultados exibibidos nas Figuras 150 e 151 notam-se as mesmas semelhanças encontradas nos comportamentos observados nas Figuras 147, 148 e 149, os quais indicam que os melhores valores de q para os filtros q-Gaussianos - indicados no eixo $y > 0$ - estão compreendidos onde $q \in \{0{,}4 \leq q \leq 0{,}9\}$ ou $q \geq 2{,}7$.

Na Seção 6.2.3.4, foram feitas análises sobre o cálculo do Índice $Kappa$ sobre as imagens segmentada, com a finalidade de observar a semelhança entre a segmentação da imagem original em relação às segmentações obtidas após a aplicação de ruídos e do filtro q-Gaussiano.

Observando-se a Figura 94 apresentada na Seção 6.2.3.4, pode-se estabelecer uma relação direta entre os melhores valores de q, dos filtros q-Gaussianos, em relação ao índice $PSNR$ e os melhores valores de q, dos filtros q-Gaussianos, em relação ao índice $Kappa$.

A Figura 152 mostra uma consolidação dos resultados observados a partir da segmentação das imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$, relacionando os resultados a partir dos índices $PSNR$ e $Kappa$.

Figura 152 – Indicação das ocorrências de maiores quantidades de imagens segmentadas, para os valores de q nos filtros q-Gaussianos, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}04$, em relação aos índices $PSNR$ e $Kappa$.

q-Entropia (Ruídos com σ = 0,04)

	filtros q-Gaussianos	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
q-Entropia	q=0,8				K	K	K	K	K	K		K	K								K			K	K	K	K	K	K	K
	q=0,9				K	K	K	K	K	K															K	K	K	K	K	K
	q=1				K	K	K	K	K	K		K				K	K				K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
	q=1,1				K	K	K	K	K	K		K				K	K			K		K			K	K	K	K	K	K
	q=1,2				K	K	K	K	K	K										K		K			K		K	K	K	K
	(a)				**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**																		**2,7**	**2,8**	**2,9**

Entropia de Shannon Ponderada (Ruídos com σ = 0,04)

	filtros q-Gaussianos	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
Shannon P.	α=0,48				K	K	K	K	K	K																	K	K	K	K
	α=0,49				K	K	K	K	K	K						K							K	K	K	K	K	K	K	K
	α=0,5				K	K	K	K	K	K		K				K	K				K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
	α=0,51				K	K	K	K	K	K																	K	K	K	K
	α=0,52				K	K	K	K	K	K																		K	K	K
	(b)				**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**																		**2,7**	**2,8**	**2,9**

Fonte: Autor. Agrupadas pelos parâmetros q (q-Entropia) e α (entropia de Shannon Ponderada).

Observando-se os quadros com resultados consolidados exibidos na Figura 152, pode-se verificar através dos quadros preenchidos com a cor azul, quais valores de q, dos filtros q-Gaussianos, produziram maiores quantidades de segmentações em relação ao filtro Gaussiano tradicional, dentro dos limiares $\omega_{(PSNR)}$ analisados, excluíndo-se as exceções toleradas de no máximo 1 imagem em cada comparação.

Também pode-se observar nesta figura, através da indicação da letra *K*, quais os valores de q, dos filtros q-Gaussianos, produziram maiores quantidades de segmentações em relação ao filtro Gaussiano tradicional, com índice $Kappa \geq 0{,}99$, excluíndo-se as exceções toleradas de no máximo 1 imagem em cada comparação.

A linha (a) indica os valores de q, dos filtros q-Gaussianos, que apresentaram melhores resultados considerando-se todos os valores analisados do parâmetro q da q-Entropia; enquanto

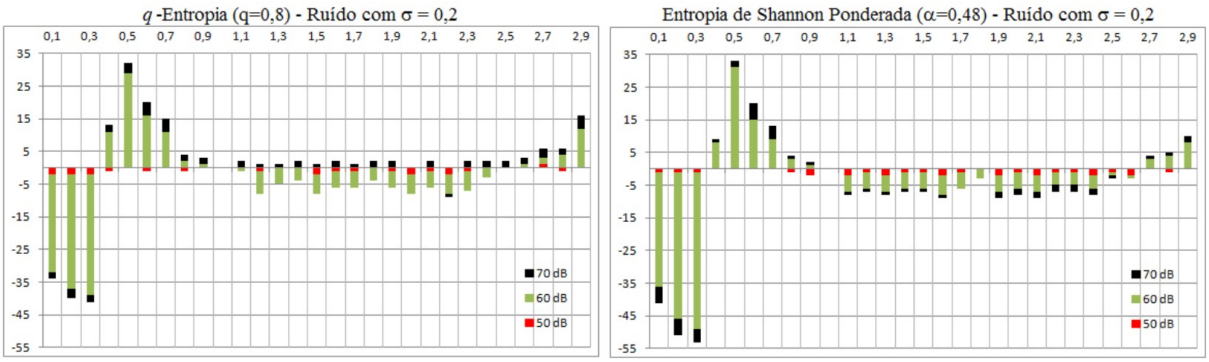
que, a linha (b), indica os valores de q, dos filtros q-Gaussianos, que apresentaram melhores resultados considerando-se todos os valores analisados do parâmetro α da entropia de Shannon Ponderada. Tanto a linha (a), quanto a linha (b), consideram os melhores resultados como sendo aqueles que ocorreram em todas as variações dos parâmetros das entropias, a partir dos índices $PSNR$ e $Kappa$ simultaneamente.

A partir das observações consolidadas na Figura 152, conclui-se que, tanto na segmentação pela q-Entropia, quanto pela entropia de Shannon Ponderada, os filtros q-Gaussianos que produziram resultados dentro do limiar $\omega_{(PSNR)}$, em quantidades superiores àquelas produzidas pelo filtro Gaussiano, foram aqueles que utilizaram o parâmetro $q \in \{0{,}1 \leq q \leq 0{,}9\}$, ou onde $q \geq 2{,}7$.

B - Segmentação das Imagens que Receberam Ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}2$

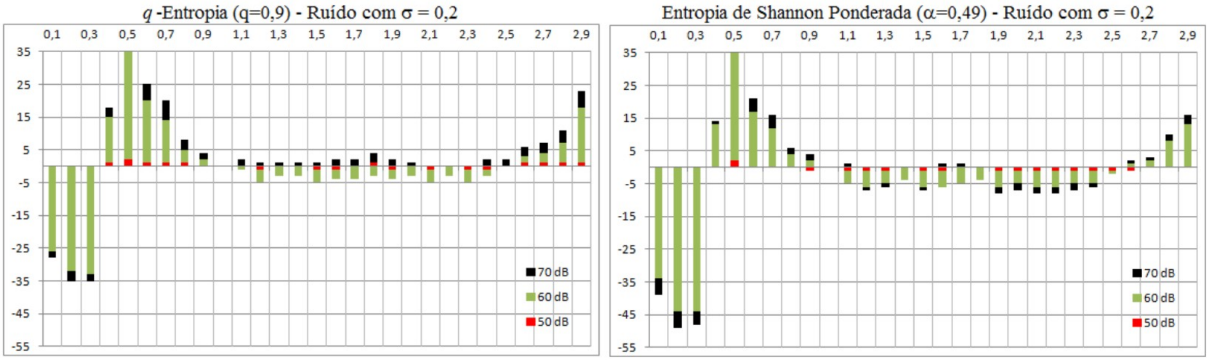
As próximas 5 figuras, quais sejam as Figuras 153, 154, 155, 156 e 157, exibem os resultados sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$. Os gráficos apresentados nestas figuras seguem os mesmos agrupamentos observados nos resultados mostrados anteriormente, referentes às imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$. Assim sendo, as 5 figuras foram exibidas em sequência e os comentários e conclusões obtidos a partir destes resultados foram feitos em seguida.

Figura 153 – Diferença entre as quantidades de imagens segmentadas pela q-Entropia (com $q = 0{,}8$) e pela entropia de Shannon Ponderada (com $\alpha = 0{,}48$), filtradas por filtro q-Gaussiano, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}2$.



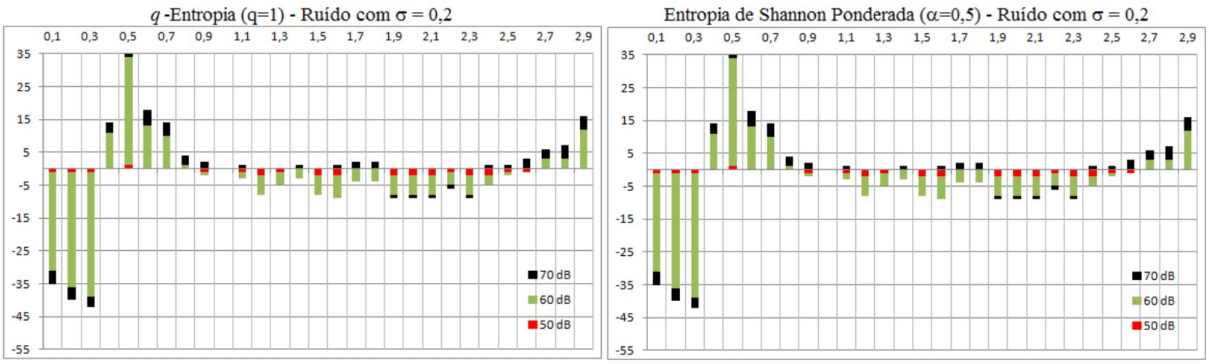
Fonte: Autor. Agrupadas pelos limiares $\omega_{(PSNR)}$.

Figura 154 – Diferença entre as quantidades de imagens segmentadas pela q-Entropia (com $q = 0{,}9$) e pela entropia de Shannon Ponderada (com $\alpha = 0{,}49$), filtradas por filtro q-Gaussiano, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}2$.



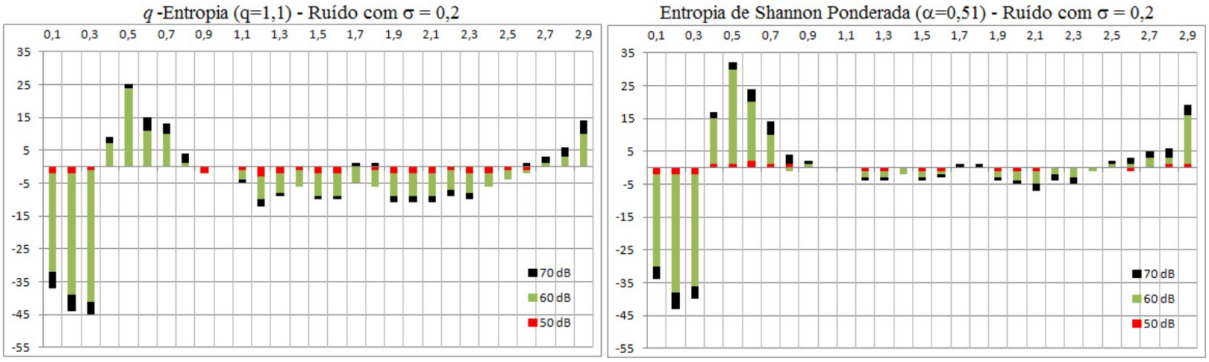
Fonte: Autor. Agrupadas pelos limiares $\omega_{(PSNR)}$.

Figura 155 – Diferença entre as quantidades de imagens segmentadas pela q-Entropia (com $q = 1$) e pela entropia de Shannon Ponderada (com $\alpha = 0{,}5$), filtradas por filtro q-Gaussiano, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}2$.



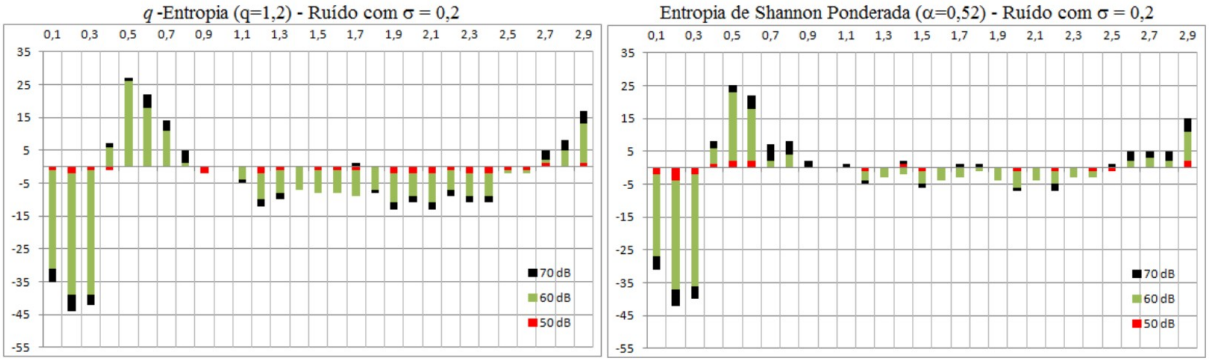
Fonte: Autor. Agrupadas pelos limiares $\omega_{(PSNR)}$.

Figura 156 – Diferença entre as quantidades de imagens segmentadas pela q-Entropia (com $q = 1{,}1$) e pela entropia de Shannon Ponderada (com $\alpha = 0{,}51$), filtradas por filtro q-Gaussiano, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}2$.



Fonte: Autor. Agrupadas pelos limiares $\omega_{(PSNR)}$.

Figura 157 – Diferença entre as quantidades de imagens segmentadas pela q-Entropia (com $q = 1{,}2$) e pela entropia de Shannon Ponderada (com $\alpha = 0{,}52$), filtradas por filtro q-Gaussiano, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}2$.



Fonte: Autor. Agrupadas pelos limiares $\omega_{(PSNR)}$.

Observando-se os resultados apresentados pelas Figuras 153, 154, 155, 156 e 157, notam-se semelhanças no comportamento geral dos resultados, indicando faixas específicas de valores de q, dos filtros q-Gaussianos, com melhores performances, indicados por valores do eixo $y > 0$, se comparados aos filtros Gaussianos tradicionais indicados por valores do eixo $y < 0$.

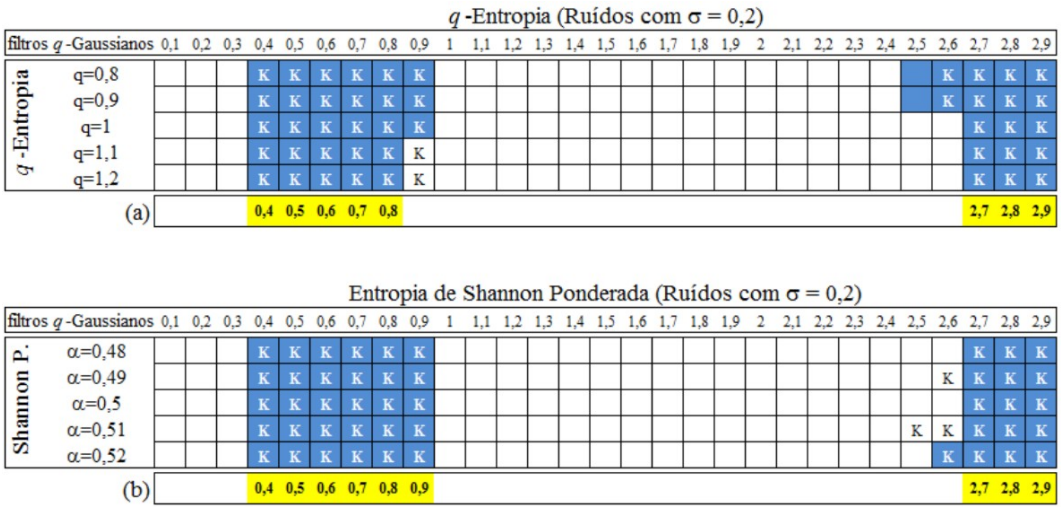
Na Figura 155 são exibidos os resultados obtidos com a segmentação pela q-Entropia com $q = 1$ e também pela entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = 0{,}5$, isto é, ambas as

segmentações foram reduzidas à entropia extensiva BGS, indicando os mesmos resultados nos dois gráficos.

Observando-se a Figura 93 apresentada na Seção 6.2.3.4, pode-se estabelecer uma relação direta entre os melhores valores de q, dos filtros q-Gaussianos, em relação ao índice $PSNR$ e os melhores valores de q, dos filtros q-Gaussianos, em relação ao índice $Kappa$, também para as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$.

A Figura 158 mostra uma consolidação dos resultados observados a partir da segmentação das imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}2$, relacionando os resultados a partir dos índices $PSNR$ e $Kappa$.

Figura 158 – Indicação das ocorrências de maiores quantidades de imagens segmentadas para os valores de q nos filtros q-Gaussianos, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}2$, em relação aos índices $PSNR$ e $Kappa$.



Fonte: Autor. Agrupadas pelos parâmetros q (q-Entropia) e α (entropia de Shannon Ponderada).

Analisando-se os quadros com resultados consolidados exibidos pela Figura 158, pode-se verificar os valores de q, dos filtros q-Gaussianos, que produziram quantidades superiores de segmentações em relação ao filtro Gaussiano tradicional, excluíndo-se as exceções toleradas de no máximo 1 imagem em cada comparação.

Também observa-se na Figura 158, através da indicação da letra *K*, quais os valores de q, dos filtros q-Gaussianos, produziram maiores quantidades de segmentações em relação ao filtro Gaussiano tradicional, com índice $Kappa \geq 0{,}99$, excluíndo-se as exceções toleradas de no máximo 1 imagem em cada comparação.

A exemplo da análise ilustrada pela Figura 152, também aqui na Figura 158 a linha (a) indica os valores de q, dos filtros q-Gaussianos, que apresentaram melhores resultados de acordo com a q-Entropia, enquanto que a linha (b) indica os valores de q, dos filtros q-Gaussianos, que apresentaram melhores resultados a partir da entropia de Shannon Ponderada, segundo os índices $PSNR$ e $Kappa$ considerados simultaneamente.

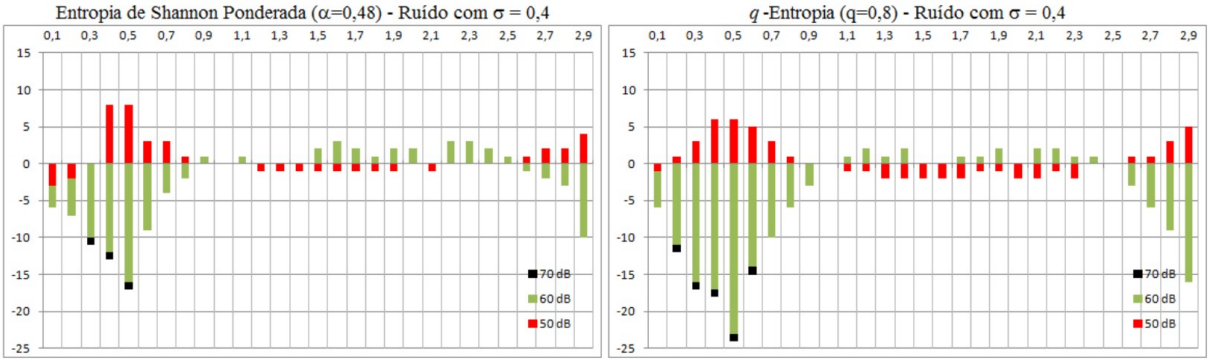
A partir destas análises realizadas sobre os resultados apresentados na Figura 158, pode-se concluir que, tanto na segmentação pela q-Entropia, quanto pela entropia de Shannon Ponderada, os filtros q-Gaussianos que produziram resultados dentro do limiar $\omega_{(PSNR)}$, em quantidades superiores àquelas produzidas pelo filtro Gaussiano, e também apresentaram as maiores quantidades de segmentações com índice $Kappa > 0{,}99$, foram aqueles que utilizaram o parâmetro $q \in \{0{,}1 \leq q \leq 0{,}8\}$, ou onde $q \geq 2{,}7$, admitindo-se também $q = 0{,}9$ quando segmentada pela entropia de Shannon Ponderada.

Assim, fica demonstrado pelos experimentos com imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2]$, que a aplicação de filtros q-Gaussianos, com valores específicos de q, podem melhorar a segmentação destas imagens, independente da técnica de segmentação de imagem aplicada neste trabalho.

C - Segmentação das Imagens que Receberam Ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}4$

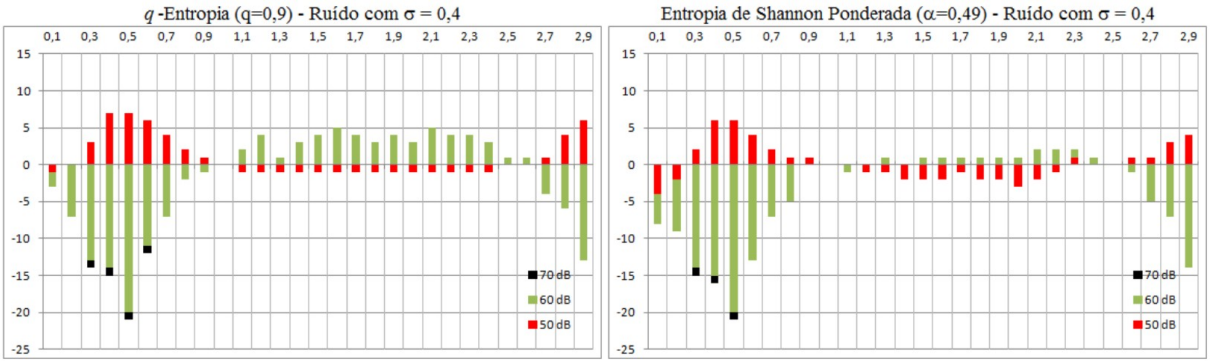
As Figuras 159, 160, 161, 162 e 163, exibidas sequencialmente a seguir, exibem os resultados sobre as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$. Os gráficos apresentados nestas figuras seguem os mesmos agrupamentos observados nos resultados mostrados anteriormente, referentes às imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2]$. As discussões e conclusões são descritas após a exibição destas 5 figuras.

Figura 159 – Diferença entre as quantidades de imagens segmentadas pela q-Entropia (com $q = 0{,}8$) e pela entropia de Shannon Ponderada (com $\alpha = 0{,}48$), filtradas por filtro q-Gaussiano, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}4$.



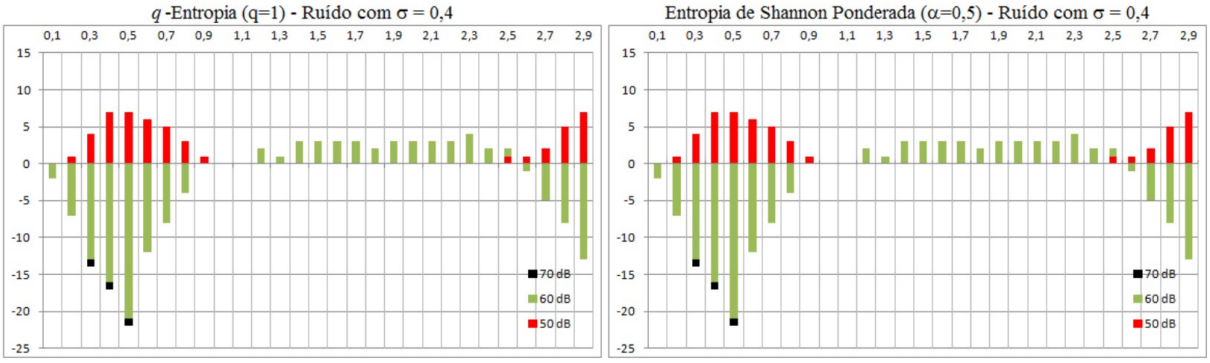
Fonte: Autor. Agrupadas pelos limiares $\omega_{(PSNR)}$.

Figura 160 – Diferença entre as quantidades de imagens segmentadas pela q-Entropia (com $q = 0{,}9$) e pela entropia de Shannon Ponderada (com $\alpha = 0{,}49$), filtradas por filtro q-Gaussiano, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}4$.



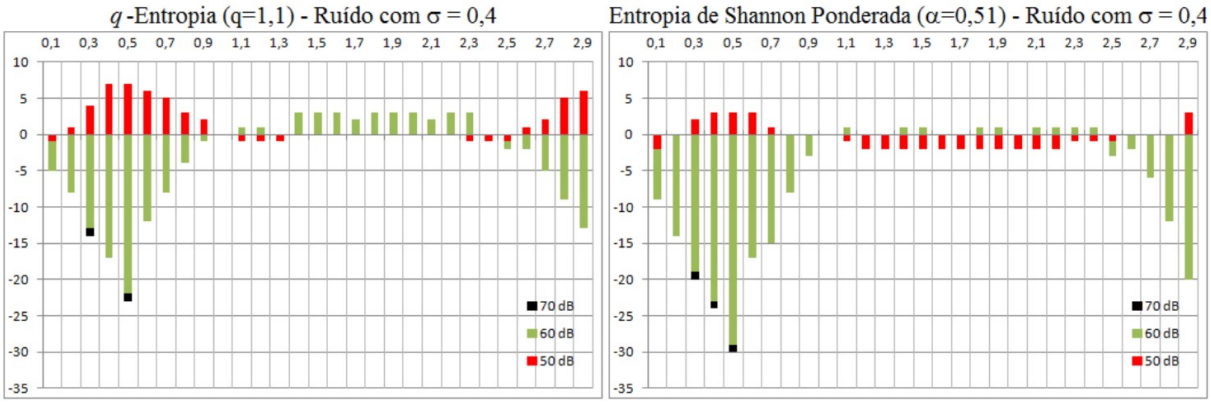
Fonte: Autor. Agrupadas pelos limiares $\omega_{(PSNR)}$.

Figura 161 – Diferença entre as quantidades de imagens segmentadas pela q-Entropia (com $q = 1$) e pela entropia de Shannon Ponderada (com $\alpha = 0{,}5$), filtradas por filtro q-Gaussiano, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}4$.



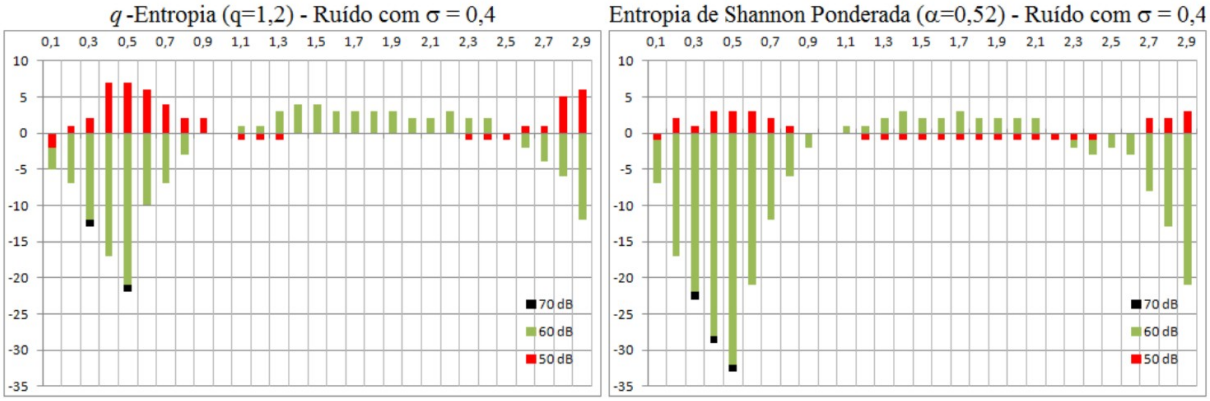
Fonte: Autor. Agrupadas pelos limiares $\omega_{(PSNR)}$.

Figura 162 – Diferença entre as quantidades de imagens segmentadas pela q-Entropia (com $q = 1{,}1$) e pela entropia de Shannon Ponderada (com $\alpha = 0{,}51$), filtradas por filtro q-Gaussiano, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}4$.



Fonte: Autor. Agrupadas pelos limiares $\omega_{(PSNR)}$.

Figura 163 – Diferença entre as quantidades de imagens segmentadas pela q-Entropia (com $q = 1{,}2$) e pela entropia de Shannon Ponderada (com $\alpha = 0{,}52$), filtradas por filtro q-Gaussiano, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}4$.



Fonte: Autor. Agrupadas pelos limiares $\omega_{(PSNR)}$.

Observando-se os resultados apresentados pelas Figuras 159, 160, 161, 162 e 163, nota-se uma mudança no comportamento geral dos resultados, se comparados aos resultados obtidos com as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = [0{,}04; 0{,}2]$.

Nenhum valor de q, dos filtros q-Gaussianos, produziram mais imagens segmentadas com $PSNR \geq +70dB$ em comparação com o filtro Gaussiano tradicional. Ao contrário disso, somente filtros Gaussianos produziram imagens segmentadas com $PSNR \geq +70dB$.

Não foi possível estabelecer uma relação direta entre os índices $PSNR$ e $Kappa$, para as imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$. Conforme exibido na Figura 34 da Seção 6.2.1.1, estas imagens computaram valores muito baixos do índice $PSNR$, tendo a média de $PSNR$ entre as 300 imagens da base de *Berkeley* sendo $\sigma_{(0{,}4)} = +15{,}73dB$. Mesmo após a aplicação dos filtros q-Gaussianos, estas imagens ainda apresentaram baixos valores de $PSNR$, e produziram poucas imagens filtradas a mais do que os filtros Gaussianos, dentro dos limiares $\omega_{(PSNR)}$ analisados, como mostrado na Figura 146 da Seção 7.1.1. Após a filtragem, o maior valor de $PSNR$ observado nestas imagens foi computado em $PSNR = +40{,}4252dB$, que ainda é baixo

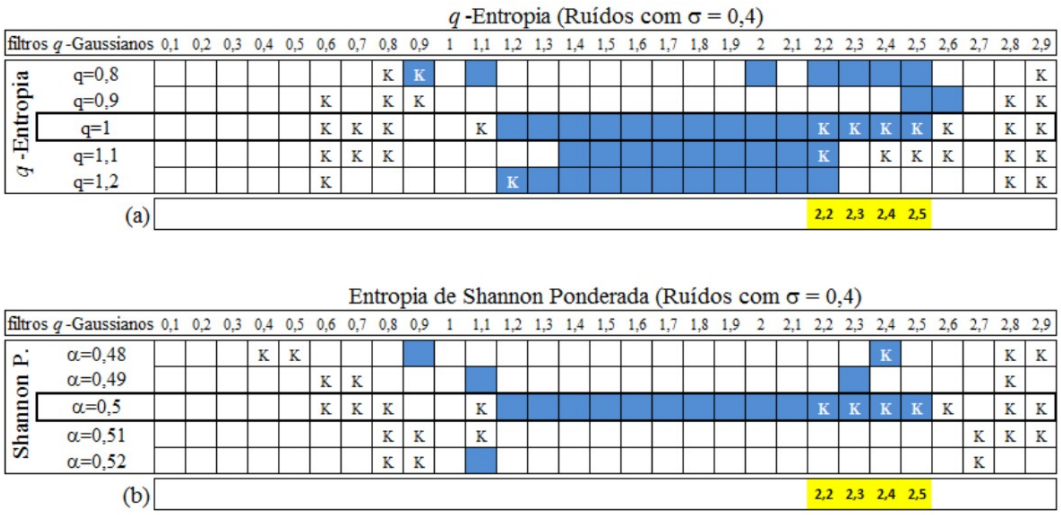
Como reflexo das imagens com baixos valores do índice $PSNR$ mesmo após filtradas, observaram-se imagens segmentadas que também produziram baixos valores de $PSNR$, tanto pela q-Entropia, quanto pela entropia de Shannon Ponderada. Este comportamento ficou evidenciado nos gráficos apresentados nas Figuras 159, 160, 161, 162 e 163, dado pelos pequenos

valores positivos indicados no eixo y - que representam as melhores performances dos filtros q-Gaussianos - em contraste com os altos valores negativos indicados no eixo y - que representam as quantidades a mais, obtidas pelos filtros Gaussianos tradicionais.

Ao observar a Figura 161, onde são exibidos os resultados obtidos com a segmentação pela q-Entropia com $q = 1$ e pela entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = 0{,}5$, nota-se ali a melhor performance obtida pelos filtros q-Gaussianos, justamente quando as imagens foram segmentadas como se a técnica de segmentação fosse a entropia extensiva BGS. Este comportamento pode sugerir que as imagens que receberam grande intensidade de ruído Gaussiano possam ser melhor segmentadas se consideradas como sendo sistema extensivos. Nestes casos, observou-se que os filtros q-Gaussianos que obtiveram as melhores performances foram aqueles que utilizaram o parâmetro $q \in \{1{,}2 \leq q \leq 2{,}5\}$, como indicam os gráficos da Figura 161.

Observando-se a Figura 95 apresentada na Seção 6.2.3.4, houve grande dificuldade para estabelecer-se uma relação direta entre os melhores valores de q, dos filtros q-Gaussianos, em relação ao índice $PSNR$ e os melhores valores de q, dos filtros q-Gaussianos, em relação ao índice $Kappa$, nas imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$. A Figura 164 mostra a consolidação dos resultados observados a partir da segmentação das imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}4$, que busca relacionar os resultados a partir dos índices $PSNR$ e $Kappa$.

Figura 164 – Indicação das ocorrências de maiores quantidades de imagens segmentadas para os valores de q nos filtros q-Gaussianos, a partir de imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}4$, em relação aos índices $PSNR$ e $Kappa$.



Fonte: Autor. Agrupadas pelos parâmetros q (q-Entropia) e α (entropia de Shannon Ponderada).

Analisando-se os quadros com resultados consolidados exibidos pela Figura 164, pode-se verificar que não há nenhum valor de q, dos filtros q-Gaussianos, que produziu quantidades superiores de segmentações em relação ao filtro Gaussiano tradicional, com ocorrências em todas as configurações aplicas às entropias. Como dito anteriormente, observa-se que as melhores performances dos filtros q-Gaussianos ocorreram quando $q = 1$ na q-Entropia e $\alpha = 0{,}5$ na entropia de Shannon Ponderada, isto é, pela entropia BGS.

Também observa-se na Figura 164, através da indicação da letra *K*, quais os valores de q, dos filtros q-Gaussianos, produziram maiores quantidades de segmentações em relação ao filtro Gaussiano tradicional, com índice $Kappa \geq 0{,}99$. A maior incidência da letra *K* nos gráficos desta figura concentra-se quando $q = 1$ na q-Entropia e $\alpha = 0{,}5$ na entropia de Shannon Ponderada, isto é, pela entropia BGS.

Considerando pois, analisar este grupo de imagens segmentadas como sistemas extensivos, na Figura 164 a linha (a) indica os valores de q, dos filtros q-Gaussianos, que apresentaram melhores resultados de acordo com a q-Entropia com $q = 1$ (entropia BGS), e a linha (b) indica os valores de q, dos filtros q-Gaussianos, que apresentaram melhores resultados a partir da entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = 0{,}5$ (também entropia BGS), segundo os índices $PSNR$ e $Kappa$ considerados simultaneamente.

Assim, tem-se que os melhores resultados obtidos com a segmentação das imagens que receberam ruídos Gaussianos com $\sigma = 0{,}4$, foram obtidos quando o parâmetro q, dos filtros q-Gaussianos utilizaram valores de $q \in \{1{,}2 \leq q \leq 2{,}5\}$, fazendo-se a segmentação pela entropia extensiva de Boltzmann-Gibbs-Shannon.

A Figura 165 a seguir, mostra um comparativo entre os resultados obtidos pela q-Entropia, pela entropia de Shannon Ponderada e, por consequência, pela entropia BGS, a partir das imagens filtradas por filtro q-Gaussiano com $q = 0{,}5$.

Figura 165 – Quantidades de imagens segmentadas pela q-Entropia e pela entropia de Shannon Ponderada, filtradas por filtro q-Gaussiano com $q = 0{,}5$.

		q -Entropia					Shannon Ponderada				
Ruidos	$\xi_{(PSNR)}$	q=0,8	q=0,9	q=1	q=1,1	q=1,2	α=0,48	α=0,49	α=0,5	α=0,51	α=0,52
σ = 0,04	PSNR ≥ +50 dB	293	293	294	295	295	295	294	294	293	294
	PSNR ≥ +60 dB	252	248	251	248	247	251	250	251	248	247
	PSNR ≥ +70 dB	17	17	17	18	17	18	16	17	19	19
σ = 0,2	PSNR ≥ +50 dB	292	292	293	293	292	294	294	293	293	294
	PSNR ≥ +60 dB	237	236	238	232	233	240	240	238	238	234
	PSNR ≥ +70 dB	11	12	12	11	11	12	12	12	12	12
σ = 0,4	PSNR ≥ +50 dB	299	299	299	299	299	300	299	299	299	299
	PSNR ≥ +60 dB	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4
	PSNR ≥ +70 dB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fonte: Autor. Agrupadas pelos limiares medidos pelos valores de $PSNR$ (+dB).

Sabe-se que há uma relação direta entre a q-Entropia com $q = 1$ e a entropia de Shannon Ponderada com $\alpha = 0{,}5$, pois ambas são reduzidas à entropia extensiva de BGS. Entretanto, até a apresentação desta tese, não foram estabelecidas relações diretas entre os demais valores dos parâmetros q e α. Sendo assim, a comparação entre $q = 0{,}8 \times \alpha = 0{,}48$ e também $q = 0{,}9 \times \alpha = 0{,}49$ não possui qualquer relação direta, a não ser pelo fato de representarem sistemas considerados como sub-extensivos, fazendo com que sua comparação seja meramente quantitativa. Da mesma forma, a comparação entre $q = 1{,}1 \times \alpha = 0{,}51$ e também $q = 1{,}2 \times \alpha = 0{,}52$, apenas se relacionam pelo fato de poderem representar sistemas tidos como super-extensivos.

Na Figura 165, foram destacadas - com preenchimento na cor amarela - as maiores quantidades de imagens segmentadas, pertencentes ao limiar $\omega_{(PSNR)}$ na comparação $q \times \alpha$. Por exemplo, na comparação $q = 0{,}8 \times \alpha = 0{,}48$ para imagens que receberam ruído com $\sigma 0{,}04$ e pertencem ao limiar $\omega_{(PSNR)} \geq +50dB$, há 295 imagens segmentadas pela entropia de Shannon Ponderada contra 293 pela q-Entropia. A partir deste tipo de comparação, pode-se concluir que tanto a q-Entropia quanto a entropia de Shannon Ponderada foram capazes de produzir maiores quantidades de imagens segmentadas a partir de algum valor específico de seus respectivos parâmetros q e α, sugerindo que ambas podem ser aplicadas na segmentação de imagens filtradas por filtros q-Gaussianos, havendo, portanto, a necessidade de pesquisas

mais aprofundadas para estabelecer qual dos modelos entrópicos aqui aplicados seria o mais indicado para esta tarefa.

Ainda analisando a Figura 165, foram indicadas - com números na cor vermelha e negrito - as maiores quantidades obtidas, a partir da comparação entre $q = 1$ e os demais valores de q da q-Entropia e também a partir da comparação entre $\alpha = 1$ e os demais valores de α da entropia de Shannon Ponderada. Por exemplo, a partir das imagens que receberam ruído Gaussiano com $\sigma = 0{,}04$, pertencentes ao limiar $\omega_{(PSNR)} \geq +60dB$, observam-se 252 imagens segmentadas pela q-Entropia com $q = 0{,}8$ contra 251 pela entropia BGS (onde $q = 1$). A partir de comparações como esta, pode-se concluir que tanto a q-Entropia quanto a entropia de Shannon Ponderada apresentaram algum valor de seus respectivos parâmetros q e α com melhor performance do que aquele obtido pela entropia BGS, onde $q = 1$ ou $\alpha = 0{,}5$, sugerindo que o grupo de imagens que recebeu ruídos Gaussianos, pode ser melhor representado se considerado como sistema não-extensivo, entretanto, há também a necessidade de maiores investigações que busquem definir os melhores valores dos parâmetros q e α, que se aplicariam nesta tarefa.

7.2 SOBRE O MODELO q-SOM

Nos experimentos realizados com o modelo q-SOM sobre as 300 imagens da base de *Berkeley*, foram realizados treinamentos com 29 valores diferentes do parâmetro q, sendo $q = \{0{,}1; 0{,}2; ...; 2{,}9\}$, e assim obtidos 8.700 Mapas Auto-Organizáveis pelo modelo q-SOM. Também foram treinadas RNA do tipo SOM tradicional sobre as imagens de *Berkeley*, sendo produzidos outros 300 Mapas Auto-Organizáveis pelo algortimo SOM. Entretanto, estes experimentos foram realizados com dois tamanhos diferentes de grades neuronais, sendo $N = [10; 15]$. Desta forma, no total, foram produzidos 18.000 Mapas Auto-Organizáveis. Encerrando a fase de treinamento, cada um dos Mapas Auto-Organizáveis foram clusterizados em 2 classes pelo algoritmo k-Means. As conclusões são apresentadas na Seção 7.2.1.

Após a clusterização dos Mapas Auto-Organizáveis, foram realizados experimentos de segmentação das 300 imagens da base de *Berkeley* a partir do modelo q-SOM e do algoritmo SOM tradicional. Desta forma, foram produzidas 17.400 segmentações pelo modelo q-SOM e outras 600 pelo SOM tradicional. Além destas, foi também produzida uma segmentação pelo algoritmo *k-Means* sobre cada uma das 300 imagens da base de *Berkeley*. Ao todo, são 18.300

segmentações que foram submetidas a um filtro Sobel para a extração automática dos respectivos mapas de bordas. Cada uma dessas bordas foram comparadas com as bordas extraídas manualmente da base de *Berkeley* e analisadas. As conclusões sobre estes experimentos são apresentadas na Seção 7.2.2.

7.2.1 Sobre Treinamento do Modelo *q*-SOM

Com os treinamentos do modelo *q*-SOM para a segmentação de imagens, foi possível verificar que a quantidade de iterações necessárias para o treinamento do modelo *q*-SOM é menor para valores de $q \leq 0{,}9$ em relação aos valores de $q \geq 1$, como mostrado no gráfico da Figura 100 da Seção 6.3. As variações observadas nas quantidades de iterações sugerem que o treinamento com o modelo *q*-SOM é sensível também à variação do tamanho da grade neuronal, entretanto, a quantidade de iterações necessárias para o treinamento pelo modelo *q*-SOM não é definida pelo tamanho de N, mas sim pelo valor do parâmetro q, como evidenciado pela Figura 114, nos experimentos com a imagem de exemplo *Lena*.

Verificou-se também que houve variações nos resultados dos Mapas Auto-Organizáveis em função da sensibilidade dos valores de q aplicados no modelo *q*-SOM. Também foi verificado esta sensibilidade em função do valor do parâmetro β, aplicado à função *q*-Gaussiana bidimensional em função da variação no tamanho da grade neuronal N. É plausível sugerir que o tamanho da grade neuronal pode influenciar nos resultados obtidos pelos Mapas Auto-Organizáveis e, por consequência, na clusterização desses mapas.

Com isto, pode-se concluir que a aplicação da função *q*-Gaussiana bidimensional como função de atualização dos pesos da vizinhança do neurônio vencedor, é indicada para a produção de Mapas Auto-Organizáveis a partir da rede de *Kohonen*. Para a definição dos melhoes valores do parâmetro q que seriam os mais indicados para a produção de Mapas Auto-Organizáveis que reflitam com fidelidade as características de uma imagem digital, são necessárias maiores investigações, buscando associar determinadas características físicas das imagens com os resultados obtidos através da variação dos valores do parâmetro q, por exemplo.

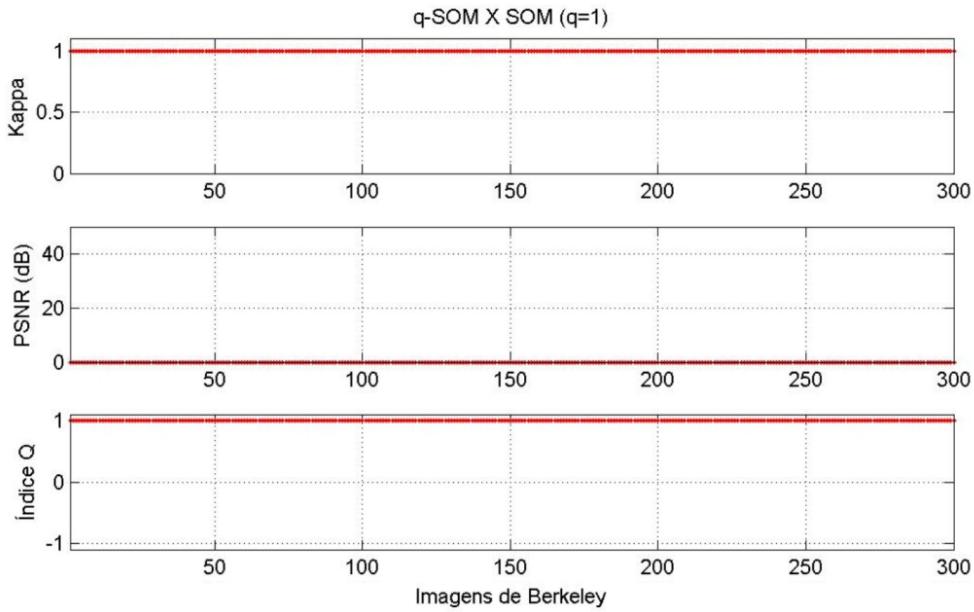
Não se pode afirmar sobre a qualidade dos resultados dos treinamentos apenas pela linearidade, ou não-linearidade, da separação entre as classes obtidas após a clusterização dos Mapas Auto-Organizáveis. Entretanto, após a segmentação das imagens da base de *Berkeley*,

feita a partir do modelo q-SOM, mostrou-se que a maioria dos resultados mais promissores foram obtidos pelos Mapas Auto-Organizáveis que apresentaram uma separação quase linear entre as classes, conforme mostrado na seção seguinte.

7.2.2 Sobre Segmentação de Imagens pelo Modelo *q*-SOM

Em todos os experimentos com segmentação de imagens comprovou-se que o modelo q-SOM com $q = 1$ produz imagens segmentadas idênticas à segmentação pelo algoritmo SOM tradicional, comprovando que a função q-Gaussiana bidimensional reduz-se a função Gaussiana tradicional quando $q = 1$. Nas comparações entre as segmentações pelo algortimo SOM tradicional $\times$ q-SOM com $q = 1$, sempre obteve-se índice $Kappa = 1$, índice $PSNR = +\infty$ e índice $Q = 1$, conforme mostra a Figura 166.

Figura 166 – Resultados dos índices $Kappa$, $PSNR$ e Q, para o modelo q-SOM com $q = 1$, considerando as 300 imagens da base de *Berkeley*.



Fonte: Autor.

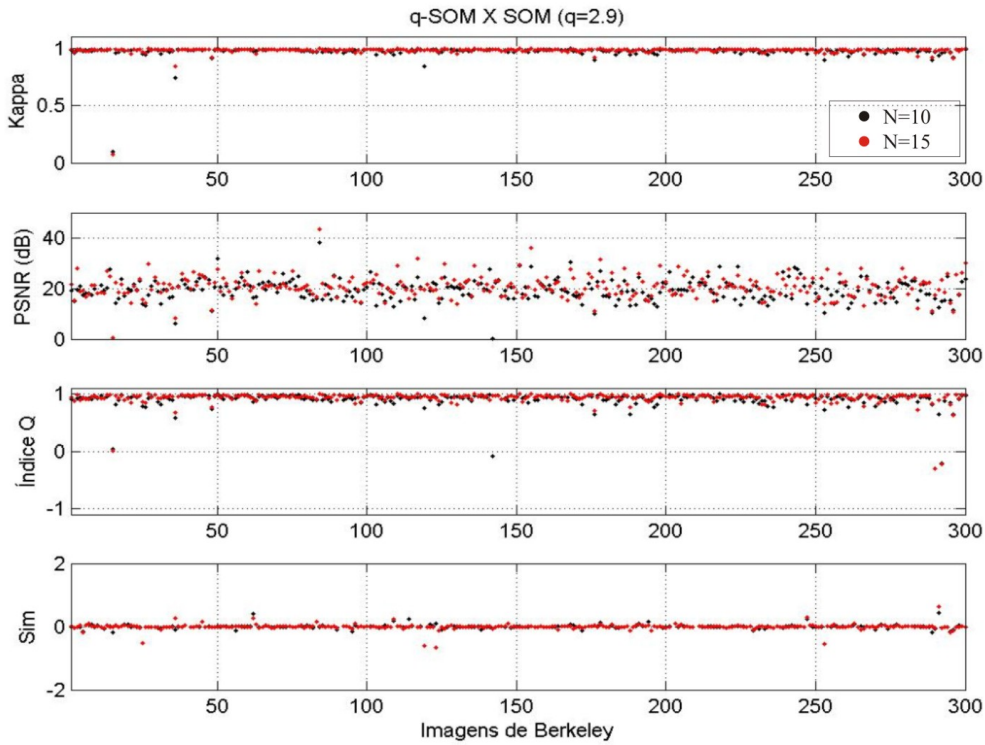
Para os demais valores de q no modelo q-SOM, feitas as comparações entre as segmentações produzidas, foram computados diferentes valores dos índices $Kappa$, $PSNR$ e Q, se comparados com as segmentações pelos algoritmos SOM tradicional e *k-Means*, salvo raras ex-

ceções. Este comportamento comprova a sensibilidade do parâmetro q do modelo q-SOM, tanto para a grade neuronal de tamanho $N = 10$ quanto de tamanho $N = 15$, permitindo produzir diferentes segmentações apenas com a variação do valor de q do modelo q-SOM.

Para identificar os melhores valores do parâmetro q para serem utilizados na segmentação de imagens pelo modelo q-SOM, foram extraídas bordas das imagens segmentadas, automaticamente, pelo filtro Sobel, e comparadas com as bordas extraídas manualmente, da base de *Berkeley*. Para computar a similaridades entre as bordas, foi aplicada a Distância de Similaridade (SIM), e algumas conclusões puderam ser verificadas.

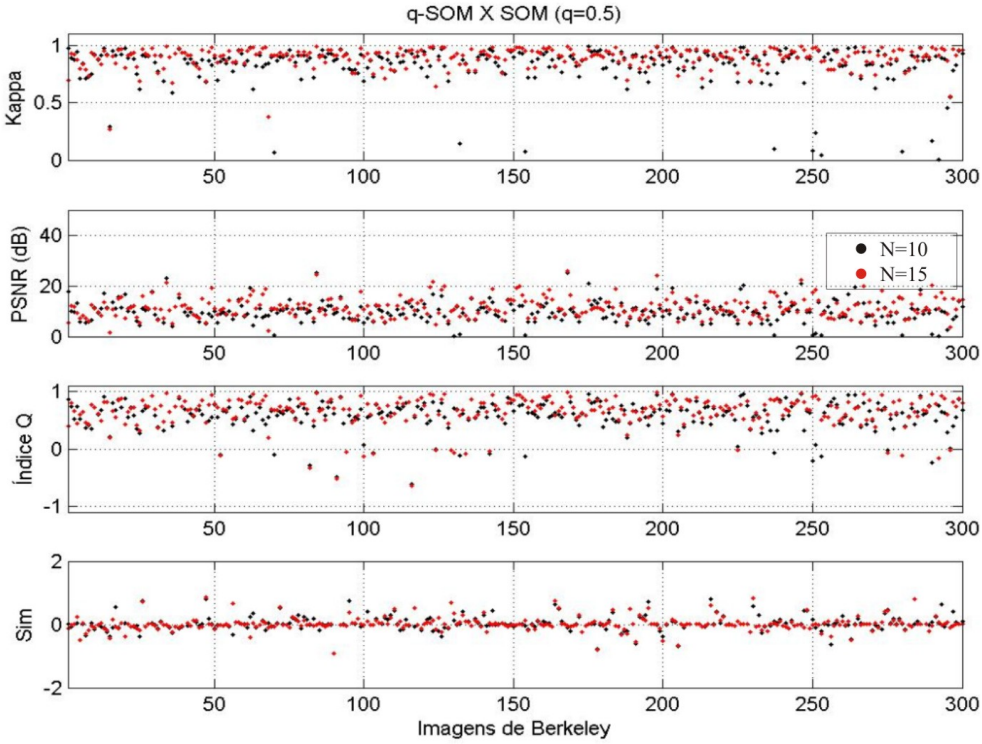
Para exemplificar as diferenças observadas pela variação do parâmetro q do modelo q-SOM, as Figuras 167 e 168 mostram, através de gráficos de dispersão, os valores obtidos pelos índices $Kappa$, $PSNR$, Q e SIM, na comparação entre as as segmentações pelo algortimo SOM $\times$ q-SOM com $= 2{,}9$ (Figura 167) e $q = 0{,}5$ (Figura 168).

Figura 167 – Valores dos índices $Kappa$, $PSNR$, Q e SIM, considerando as 300 imagens da base de *Berkeley*, segmentadas pelo modelo q-SOM com $q = 2{,}9 \times$ SOM tradicional.



Fonte: Autor.

Figura 168 – Valores dos índices $Kappa$, $PSNR$, Q e SIM, considerando as 300 imagens da base de *Berkeley*, segmentadas pelo modelo *q*-SOM com $q = 0{,}5 \times$ SOM tradicional.

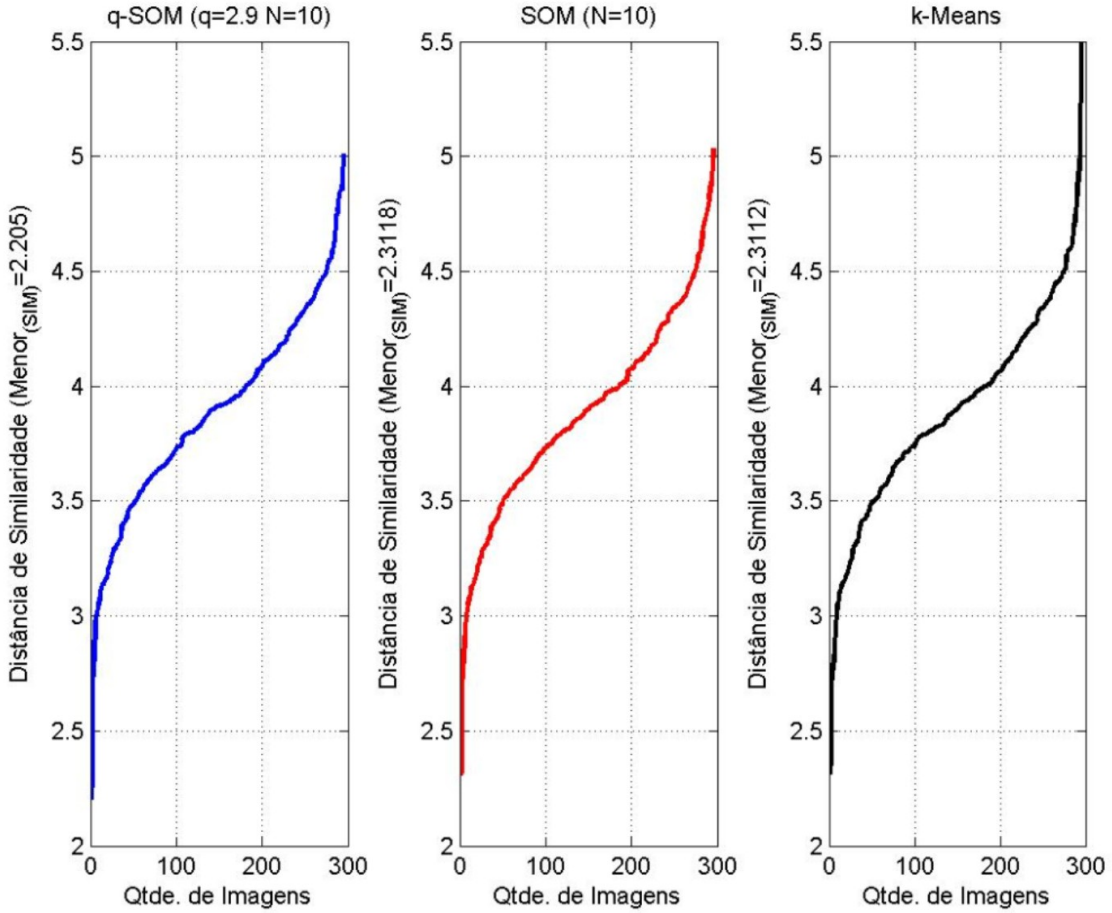


Fonte: Autor.

Os menores valores do índice SIM são considerados os melhores resultados, pois quanto mais próximo de $SIM = 0$ mais similares são as bordas analisadas. Portanto, as Figuras 167 e 168 deixam evidente que o parâmetro $q = 2{,}9$, no geral, produziu melhores resultados se comparados com $q = 0{,}5$.

Após o cálculo do índice SIM pode-se verificar qual o melhor resultado obtido, constatado pelo seu menor valor. Assim, considerando-se o modelo *q*-SOM com $N = 10$, foram encontrados 20 diferentes valores do parâmetro q que produziram valores do índice SIM menores do que o algoritmo SOM e também pelo *k-Means*, sendo $q \in \{1{,}3 \leq q \leq 2{,}9\}$ ou $q = [0{,}7; 0{,}9; 1{,}1]$. O menor índice SIM encontrado neste grupo foi para $q = 2{,}9$ com $SIM = 2{,}205$, contra $2{,}318$ do SOM tradicional e $2{,}3112$ do *k-Means*, conforme mostra a Figura 169 com os resultados obtidos pelo índice SIM classificados em ordem crescente de valores, considerando-se as 300 imagens da base de *Berkeley*.

Figura 169 – Resultados do índice SIM classificados em ordem crescente de valores, considerando as 300 imagens da base de *Berkeley*, segmentadas pelo modelo q-SOM com $q = 2{,}9$ e $N = 10$, SOM tradicional com $N - 10$ e *k-Means*.



Fonte: Autor.

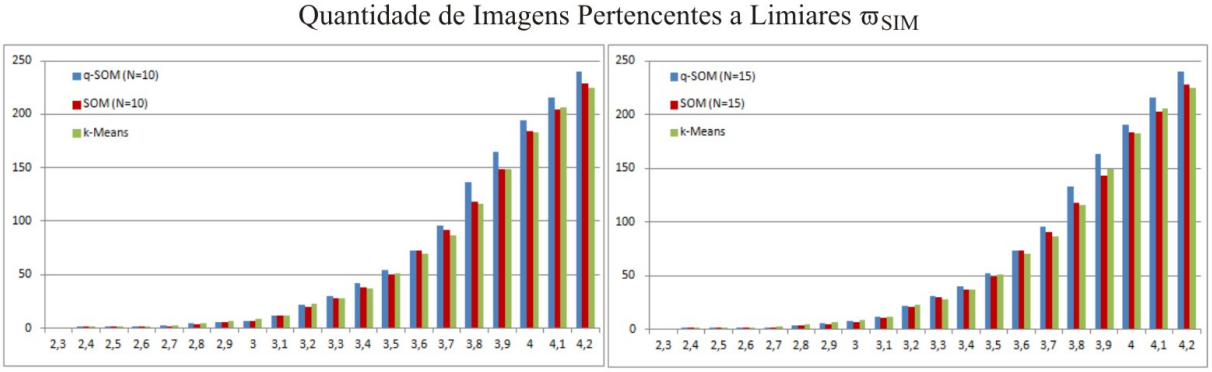
Ainda analisando os menores índices SIM computados, ao considerar o modelo q-SOM com $N = 15$, os menores valores do índice SIM foram encontrados em apenas 5 diferentes valores do parâmetro q na comparação com SOM tradicional, sendo $q = [0{,}1; 0{,}9; 1{,}1; 1{,}6; 2{,}4]$, observando que menor índice SIM encontrado foi para $q = 0{,}9$ com $SIM = 2{,}1991$, contra $2{,}2281$ do SOM. Entretanto, na comparação do modelo q-SOM com o *k-Means*, foram encontrados menores índices SIM em 23 diferentes valores de q, sendo $q \in \{0{,}8 \leq q \leq 2{,}9\}$ ou $q = 0{,}1$. Como já dito anteriormente, o menor índice SIM encontrado foi para $q = 0{,}9$ com $SIM = 2{,}1991$, contra $2{,}3112$ do *k-Means*.

Esses menores valores de índice SIM referem-se a apenas uma única imagem em cada grupo de comparação, mas é um indicativo de que a variação no parâmetro q do modelo q-SOM é capaz de produzir melhores resultados em relação às outras técnicas aqui abordadas.

Graças aos agrupamentos dos resultados, descritos na Seção 6.3.3.10 e ilustrado na Figura 143, pode-se fazer comparações entre as técnicas de segmentação pelo modelo q-SOM, SOM tradicional e *k-Means*, a partir de limiares de corte (ω_{SIM}) calculados a partir da comparação entre as bordas das imagens segmentadas, e assim computar as quantidades de imagens que pertencem a determinados limiares.

A Figura 170 mostra dois gráficos com comparativos entre as quantidades de imagens segmentadas pelo modelo q-SOM, SOM tradicional e *k-Means*, onde o eixo x indica 20 diferentes limiares ω_{SIM} e o eixo y indica as quantidades de imagens em cada limiar. O gráfico à esquerda mostra o modelo q-SOM e SOM com $N = 10$, e o gráfico à direita mostra o modelo q-SOM e SOM com $N = 15$. Em ambos os gráficos as quantidades pelo algoritmo *k-Means* são as mesmas.

Figura 170 – Quantidade de imagens pertencente a 20 limiares ω_{SIM}, considerando as 300 imagens da base de *Berkeley*, segmentadas pelo modelo q-SOM, SOM tradicional e *k-Means*.



Fonte: Autor.

A Figura 170 mostra que, na maioria dos limiares analisados, o modelo q-SOM apresentou maiores quantidades de melhores segmentações, se comparadas às quantidades das outras duas técnicas de segmentação, tanto para $N = 10$ quanto para $N = 15$. Entretanto, para analisar com precisão, a Figura 171 mostra os valores que geraram os gráficos da Figura 170.

A Figura 171 mostra as quantidades computadas em 20 diferentes limiares ω_{SIM}, que deram origem à Figura 170, e indica - com preenchimento na cor amarela - a maior quantidade

observada em cada limiar. Para o caso do modelo q-SOM, o valor indicado é o maior obervado considerando-se qualquer um dos parâmetros q, isto é, bastou haver um valor de q que produziu a maior quantidade, esta quantidade está indicada na Figura 171.

Figura 171 – Quantidade de imagens pertencentes aos limiares, considerando as 300 imagens da base de *Berkeley*, segmentadas pelo modelo q-SOM, SOM tradicional e *k-Means*.

Quantidades de Imagens em cada Limiar ω_{SIM}

limiares ω_{SIM}	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4	4,1	4,2
q-SOM (N=10)	1	2	2	2	3	5	6	7	12	22	30	42	54	73	96	136	165	194	216	240
SOM (N=10)	0	2	2	2	2	4	6	7	12	20	28	38	50	73	92	118	149	184	204	229
q-SOM (N=15)	1	2	2	2	2	4	6	8	12	22	31	40	52	73	96	133	163	191	216	240
SOM (N=15)	1	2	2	2	2	4	5	7	11	21	30	37	49	73	91	118	143	184	203	228
k-Means	0	2	2	2	3	5	7	9	12	23	28	37	51	70	87	116	149	183	206	225

Fonte: Autor.

Dentre os 20 limiares observados na Figura 171 observa-se que em alguns limiares o modelo q-SOM com $N = 10$ superou as quantidades do modelo q-SOM com $N = 15$, sugerindo que uma grade neuronal com mais neurônios não é condição suficiente para produzir melhores segmentações, como observa-se, por exemplo, nos limiares $\omega_{SIM} = [2{,}7; 2{,}8]$. Por tratar-se de diferença de apenas uma imagem poderia considerar-se como exceção, entretanto, há mais ocorrências a favor do modelo q-SOM com $N = 10$ superando as quantidades de $N = 15$, observadas nos limiares $\omega_{SIM} = [3{,}4; 3{,}5; 3{,}8; 3{,}9; 4]$.

Em nenhum dos 20 limiares apresentados na Figura 171, o modelo SOM tradicional produziu maiores quantidades, se comparado ao modelo q-SOM. Na comparação com a segmentação pelo algortimo *k-Means*, este apenas produziu maiores quantidades de imagens segmentadas do que o modelo q-SOM em 3 dos limiares analisados, e com uma diferença máxima de apenas 2 imagens a seu favor. A partir destas constatações, é plausível afirmar que o modelo q-SOM é aplicável como procedimento para segmentação de imagens, podendo produzir melhores segmentações do que o modelo SOM tradicional e do que o algoritmo *k-Means*, sendo dependente do valor do parâmetro q escolhido.

7.3 COMENTÁRIOS FINAIS

Parece plausível afirmar que a função q-Gaussiana bidimensional proposta nesta tese pode ser aplicada como *kernel* em filtros espaciais do tipo passa-baixas, para atenuação de ruídos indesejáveis em imagens digitais. Observar os resultados da aplicação de filtros q-Gaussianos sobre imagens que receberam ruídos Gaussianos com diferentes valores de σ, permitiu analisar os efeitos das filtragens sobre diferentes grupos de imagens, no que diz respeito à quantidade de ruídos incorporados. Os resultados obtidos mostraram que sempre houveram valores do parâmetro q aplicados aos filtros q-Gaussianos mais eficientes na redução de ruídos, se comparados àqueles obtidos a partir de filtros Gaussianos tradicionais. Ao propor a aplicação da função q-Gaussiana bidimensional, esta tese buscou apresentar tal modelo como ponto de partida para novas aplicações, mostrando-se promissora na redução de ruídos em imagens digitais, com vantagens sobre a aplicação de filtros Gaussianos tradicionais.

Quanto às imagens filtradas pelos filtros q-Gaussianos, que foram segmentadas pela q-Entropia e pela entropia de Shannon Ponderada, também mostram melhorias na qualidade da segmentação, tanto sob a óptica do índice sinal-ruído ($PSNR$), quanto pela qualidade da imagem segmentada indicada pelo índice $Kappa$. Nos resultados obtidos pelos índices $PSNR$ e $Kappa$, pode-se detectar melhores performances dos filtros q-Gaussianos a partir de valores específicos do parâmetro q, sendo este um forte indicativo de que é possível buscar a melhoria da qualidade das segmentações a partir da aplicação de filtros q-Gaussianos. Neste trabalho, foi possível verificar faixas de valores de q, dos filtros q-Gaussianos, onde estes apresentaram melhores desempenhos em relação ao filtro Gaussiano tradicional.

Também é plausível afirmar que a função q-Gaussiana bidimensional aqui proposta é indicada como *kernel* em redes neurais artificiais basedas nos Mapas Auto-Organizáveis de Kohonen, para segmentação de imagens digitais. A comparação feita entre as imagens segmentadas pelo modelo q-SOM $\times$ SOM tradicional e modelo q-SOM $\times$ *k-Means*, mostraram que a variação do parâmetro q possibilita a produção de melhores segmentações, indicadas pelas análises produzidas pelos índices $Kappa$, $PSNR$ e Q. A extração automática do mapa de bordas das imagens segmentadas, através de um filtro Sobel, possibilitou a comparação destas segmentações com as bordas extraídas manualmente, próprias da base de imagens de *Berkeley*. Estas comparações, calculadas pela distância de similaridade (SIM), possibilitaram afirmar

que o modelo q-SOM é indicado para a tarefa de segmentação de imagens digitais, sendo capaz de produzir melhores resultados em relação à segmentação feita a partir dos algoritmos SOM tradicional e *k-Means*.

7.4 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Considerando-se os modelos experimentais propostos nesta tese, há diversos pontos que podem ser objeto de estudos mais amplos, no sentido de encontrar valores do parâmetro q, combinados com outras configurações de filtros espaciais ou de redes neurais artificiais baseadas em Mapas Auto-Organizáveis, que possam oferecer melhorias nos resultados obtidos.

Foram aplicados ruídos Gaussianos sobre as imagens originais da base de *Berkeley* para a aplicações dos experimentos com filtros q-Gaussianos. Entretanto, deve-se analisar o comportamento dos filtros q-Gaussianos quando aplicados sobre imagens que receberam outros padrões de ruídos controlados, como o ruído de *Poisson* ou sal e pimenta, por exemplo.

A variação no tamanho da janela aplicada aos filtros q-Gaussianos não foi objeto de estudos desta tese, que manteve sob análise a possibilidade da aplicação destes filtros na área de PDI, que se confirmou, assim como a sensibilidade do parâmetro q na aplicação desses filtros, que também se confirmou. Entretanto, uma nova hipótese pode surgir: o tamanho da janela poderia influenciar na qualidade da redução de ruídos através dos filtros q-Gaussianos bidimensionais?

Ainda como sugestão, podem ser feitas novas segmentações de imagens filtradas pelo filtros q-Gaussianos bidimensionais, através da q-Entropia com valor de q calculado automaticamente, como apresentado em Sobiecki et al. (2011). Também pode-se analisar a performance da entropia de Shannon Ponderada utilizando-se outros valores de $\alpha \in \{0{,}49 \leq \alpha \leq 0{,}51\}$, considerando-se que este parâmetro mostra-se bastante sensível nos valores próximos de $\alpha = 0{,}5$. Há ainda, a necessidade de pesquisas mais aprofundadas para estabelecer qual dos modelos entrópicos aqui aplicados seria o mais indicado para a segmentação de imagens filtradas pelo filtros q-Gaussianos bidimensionais, associando-se características físicas das imagens com os parâmetros utilizados nos modelos entrópicos, bem como definir quais os melhores valores dos parâmetros q e α se aplicariam a esta tarefa.

Quanto a aplicação do modelo q-SOM para segmentação de imagens, foram testados apenas dois tamanhos de grade neuronal sobre as imagens da base de *Berkeley*, sendo $N = [10; 15]$. Também foi utilizado apenas o tamanho de 10×10 pixels como padrão de entrada da imagem de amostra para o treinamento no modelo q-SOM. É plausível supor que possam haver diferenças nos resultados dos treinamentos dos Mapas Auto-Organizáveis, se aumentado o tamanho da grade neuronal ou o tamanho da imagem de amostra utilizada na fase de treinamento. Também podem ser testadas outras configurações na fase de treinamento do modelo q-SOM, típicas das redes neurais artificiais com aprendizagem não-supervisionada, como, por exemplo, avaliar outras formas de definir a quantidade de iterações; variações na taxa inicial de aprendizagem η_0 que decresce à cada iteração de acordo com uma função exponencial e variações na constante de tempo τ que define a taxa fixa de decaimento de σ.

Tais sugestões podem compor um arcabouço de configurações possíveis na aplicação de filtros q-Gaussianos bidimensionais e do modelo q-SOM, contribuindo com a q-Álgebra, proporcionando maior conhecimento a respeito da função q-Gaussiana bidimensional.

REFERÊNCIAS

ABDEL-DAYEM, A.; EL-SAKKA, M. R.; FENSTER, A. **Watershed Segmentation for Carotid Artery Ultrasound Images**. In: **THE 3rd ACS/IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SYSTEM AND APPLICATIONS**. [S.l.: s.n.], 2005. ISBN 0-7803-8735-X.

ABUTALEB, A. S. **A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram**. **Comput. Graphics Image Process**, v. 47, p. 22–32, 1989.

ALBERT, W. W.; CHUNG, A. C. S.; YU, S. H. **Trilateral Filtering For Biomedical Images**. In: **In Proceedings of the International Symposium on Biomedical Imaging. IEEE**. [S.l.: s.n.], 2004. p. 820–823.

ALBUQUERQUE, M. P. et al. **Image Thresholding Using Tsallis Entropy**. **PATTERN RECOGNITION LETTERS**, Elsevier B.V., n. 25, p. 1059–1065, 2004.

ALEKSIC, M.; SMIRNOV, M.; GOMA, S. **Novel bilateral filter approach: Image noise reduction with sharpening**. 2006. 60690F-60690F-7 p.

ASSIRATI, L. et al. **Performing edge detection by difference of Gaussians using q-Gaussian kernels**. **Journal of Physics: Conference Series**, Bristol, Reino Unido, v. 490, p. 012020–1 – 012020–4, 2014. ISSN 1047-3203.

AURICH, V.; WEULE, J. **Non-Linear Gaussian Filters Performing Edge Preserving Diffusion**. In: SAGERER, G.; POSCH, S.; KUMMERT, F. (Ed.). **Mustererkennung 1995**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1995, (Informatik aktuell). p. 538–545. ISBN 978-3-540-60293-4.

BAE, S.; PARIS, S.; DURAND, F. **Two-scale Tone Management for Photographic Look**. **ACM Trans. Graph.**, ACM, New York, NY, USA, v. 25, n. 3, p. 637–645, jul. 2006. ISSN 0730-0301.

BENNETT, E. P.; MASON, J. L.; MCMILLAN, L. **Multispectral Bilateral Video Fusion**. **Trans. Img. Proc.**, IEEE Press, Piscataway, NJ, USA, v. 16, n. 5, p. 1185–1194, maio 2007. ISSN 1057-7149.

BENNETT, E. P.; MCMILLAN, L. **Video Enhancement Using Per-pixel Virtual Exposures**. **ACM Trans. Graph.**, ACM, New York, NY, USA, v. 24, n. 3, p. 845–852, jul. 2005. ISSN 0730-0301.

BORGES, E. P. **Irreversibilidade, Desordem e Incerteza: Três Visões da Generalização do**

Conceito de Entropia. **REVISTA BRASILEIRA DE ENSINO DE FÍSICA**, Brasil, v. 21, n. 4, p. 453, Dez 1999.

____. **A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatistics**. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 340, n. 1, p. 95–101, 2004.

____. **Manifestações Dinâmicas e Termodinâmicas de Sistemas Não-Extensivos**. **Tese de Doutorado**, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2012.

BUADES, A.; COLL, B. **A non-local algorithm for image denoising**. In: **In CVPR**. [S.l.: s.n.], 2005. p. 60–65.

CARNOT, S. **Réflexions Sur a Puissance Motrice du Feu et Sur les Machines Propres à Développer Cette Puissance**. **BACHELIER LIBRAIRE**, Paris, France, p. 1–38, 1824.

CASTLEMAN, K. R. **Digital Image Processing**. [S.l.]: Prentice-Hall Inc., 1996. ISBN 0-13-211467-4.

CHANG, C.-I. et al. **Survey and Comparative Analysis of Entropy and Relative Entropy Thresholding Techniques**. **THE INSTITUITION OF ENGINEERING AND TECHNOLOGY**, IEE Proceedings online no. 20050032, v. 153, Jun 2006.

CLAUSIUS, R. **The Mechanical Theory of Heat - with its Applications to the Steam Engine and to Physical Properties of Bodies**. London, England: John van Voorst, 1 Paternoster Row, 1867.

COPIN, B. **Artificial Intelligence Illuminated**. 1. ed. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos Ltda. - Trad. Jorge Duarte Pires Valério, 2012.

DAHMEN, S. R. **A obra de Boltzmann em Física**. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 28, n. 3, p. 281–295, 2006.

DASH, R.; SA, P. K.; MAJHI, B. **Restoration of Images Corrupted with Blur and Impulse Noise**. In: **Proceedings of the 2011 International Conference on Communication, Computing & Security**. New York, NY, USA: ACM, 2011. (ICCCS '11), p. 377–382. ISBN 978-1-4503-0464-1.

DELSANTO, S. et al. **CULEX-Completely User-independent Layers EXtraction: Ultrasonic Carotid Artery Images Segmentation**. In: **IEEE ENGINEERING IN MEDICINE AND BIOLOGY 27th ANNUAL CONFERENCE**. Shangai, China: [s.n.], 2005. p. 6468–6471. ISBN 0-7803-8740-6.

____. **User-independent Plaque Characterization and Accurate IMT Measurement of**

Carotid Artery Wall using Ultrasound. In: **IEEE ENGINEERING IN MEDICINE AND BIOLOGY 28th ANNUAL CONFERENCE**. New York, USA: [s.n.], 2006. p. 2404–2407. ISBN 1-4244-0033-3.

DESTREMPES, F. et al. **Segmentation of Plaques in Sequences of Ultrasonic B-Mode Images of Carotid Arteries Based on Motion Estimation and Nakagami Distributions**. In: **IEEE INTERNATIONAL ULTRASONICS SYMPOSIUM PROCEEDINGS**. [S.l.: s.n.], 2009. p. 2480–2483. ISBN 978-1-4244-4390-1.

DURAND, F.; DORSEY, J. **Fast Bilateral Filtering for the Display of High-dynamic-range Images**. **ACM Trans. Graph.**, ACM, New York, NY, USA, v. 21, n. 3, p. 257–266, jul. 2002. ISSN 0730-0301.

EISEMANN, E.; DURAND, F. **Flash Photography Enhancement via Intrinsic Relighting**. **ACM Trans. Graph.**, ACM, New York, NY, USA, v. 23, n. 3, p. 673–678, ago. 2004. ISSN 0730-0301.

ELAD, M. **On the Origin of the Bilateral Filter and Ways to Improve It**. **Trans. Img. Proc.**, IEEE Press, Piscataway, NJ, USA, v. 11, n. 10, p. 1141–1151, out. 2002. ISSN 1057-7149.

ERDMANN, H. et al. **A Study of a Firefly Meta-Heuristics for Multithreshold Image Segmentation**. In: . [S.l.: s.n.], 2015.

ESQUEF, I. A. **Técnicas de Entropia em Processamento de Imagens**. 2002. Dissertação (Mestrado) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, Brasil.

EULER, L. **Introductio in Analysin Infinitorum**. Lausanne: [s.n.], 1748. 259 p.

FISCHER, H. **A History of the Central Limit Theorem: From Classical to Modern Probability Theory Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences**. [S.l.]: Springer, 2010. ISBN 0387878572.

FRISCHHOLZ, R. W.; DIECKMANN, U. **BioID: A Multimodal Biometric Identification System**. **Computer**, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, USA, v. 33, n. 2, p. 64–68, fev. 2000. ISSN 0018-9162.

GALLãO, C. D. **Algoritmos de Segmentação de Imagens de Tomografia Computadorizada da Artéria Carótida**. 2012. Dissertação (Mestrado) — Centro Universitário da FEI, São Bernardo do Campo, SP, Brasil.

GALLãO, C. D.; RODRIGUES, P. S. **A q-Gaussian Spatial Filtering**. In: **XI WORKSHOP DE VISÃO COMPUTACIONAL**. São Carlos, SP, Brasil: Universidade de São Paulo, 2015. p. 230–235. ISBN 978-85-8023-032-1.

GERSHO, A.; GRAY, R. M. **Vector Quantization and Signal Compression**. Norwell, MA, USA: Kluwer Academic Publishers, 1991. ISBN 0-7923-9181-0.

GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. C. **Processamento Digital de Imagens**. 3ª. ed. São Paulo, Brasil: Pearson Prentice Hall, 2010. ISBN 978-85-7605-401-6.

HAMOU, A. K.; EL-SAKKA, M. R. **A Novel Segmentation Technique for Carotid Ultrasound Images**. In: **IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACOUSTICS, SPEECH, AND SIGNAL PROCESSING**. Montreal, Quebec, Canada: [s.n.], 2004. v. 3, p. 521–524. ISBN 0-7803-8484-9.

HAYES, M. H. **Processamento de Sinais**. Porto Alegre, Brasil: Bookman, 2006. (Coleção Schaum). ISBN 85-60031-06-5.

HAYKIN, S. **Redes Neurais Princípios e Práticas**. 2. ed. Hamilton, Ontário, Vanadá: McMaster University - trad. Paulo Martins Rangel, 2001. 341-438 p. Reimpressão 2007. ISBN 978-85-7307-718-6.

HEBB, D. O. **The organization of behavior: A neuropsychological theory**. **The Journal of Comparative Neurology**, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, New York, NY, USA, 1949. ISSN 1096-9861.

HUTTENLOCHER, D. P.; KLANDERMAN, G. A.; RUCKLIDGE, W. A. **Comparing Images Using the Hausdorff Distance**. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, v. 15, n. 9, p. 850–863, sep 1993. ISSN 0162-8828.

ILEA, D. E. et al. **An Automatic 2D CAD Algorithm for the Segmentation of the IMT in Ultrasound Carotid Artery Images**. In: **31st ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE OF THE IEEE ENGINEERING IN MEDICINE AND BIOLOGY SOCIETY**. Minneapolis, Minnesota, USA: [s.n.], 2009. p. 515–519. ISBN 978-1-4244-3296-7.

INOUE, N.; SHINODA, K. **q-Gaussian mixture models for image and video semantic indexing**. **Journal of Visual Communication and Image Representation**, v. 24, n. 8, p. 1450 – 1457, 2013. ISSN 1047-3203.

JAIN, A.; MAO, J.; MOHIUDDIN, K. M. **Artificial neural networks: a tutorial**. **Computer**, v. 29, n. 3, p. 31–44, Mar 1996. ISSN 0018-9162.

KAPUR, J. N.; SAHOO, P. K.; WONG, A. K. C. **A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram**. **Computer Graphics Image Process**, v. 29, p. 273–285, 1985.

KIMMEL, R. et al. Space-dependent color gamut mapping: a variational approach. **IEEE Transactions on Image Processing**, v. 14, n. 6, p. 796–803, 2005.

KOHONEN, T. **Self-Organized Formation of Topologically Correct Feature Maps**. **Biological Cybernetics**, Springer-Verlag, v. 43, n. 1, p. 59–69, 1982. ISSN 0340-1200.

____. **The self-organizing map**. **Proceedings of the IEEE**, v. 78, n. 9, p. 1464–1480, Sep 1990. ISSN 0018-9219.

KOVáCS, Z. L. **Redes Neurais Artificiais Fundamentos e Aplicações**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2002. ISBN 85-88325-14-4.

KUBICA, S. **Metodologia para Melhoramento de Conteúdos Impressos de Imagens de Documentos Complexos**. 2004. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil.

KULLBACK, S.; LEIBLER, R. **On Information and Sufficiency**. **THE ANNALS OF MATHEMATICAL STATISTICS**, Washington, D.C., USA, v. 22(1), p. 79–86, 1951.

KUO, F. F.; KAISER, J. F. **System Analysis by Digital Computer**. [S.l.]: New York, Wiley, 1966.

LAGUS, K. et al. **Self-Organizing Maps of Document Collections: A New Approach to Interactive Exploration**. In: . [S.l.]: AAAI Press, 1996. p. 238–243.

LAND, E. H.; MCCANN, J. J. **Lightness and Retinex Theory**. **Journal of the Optical Society of America**, OSA, v. 61, n. 1, p. 1–11, Jan 1971.

LANDIS, J.; KOCH, G. **The measurement of observer agreement for categorical data**. **Biometrics**, v. 33, p. 159–174, 1977.

LI, C. H.; LEE, C. K. **Minimum cross entropy thresholding**. **Pattern Recognition**, v. 26, p. 617–625, 1993.

LIU, C. et al. Noise estimation from a single image. In: ON, I. C. S. C. (Ed.). **Computer Vision and Pattern Recognition**. [S.l.: s.n.], 2006. v. 1, p. 901–908. ISSN 1063-6919.

MACQUEEN, J. B. **Some Methods for Classification and Analysis of MultiVariate Observations**. In: **FIFTH BERKELEY SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL STATISTICS AND PROBABILITY**. [S.l.]: University of California Press, 1967. v. 1, p. 281–297.

MAO, F. et al. **Segmentation of Carotid Artery in Ultrasound Images**. In: **22nd ANNUAL**

ENGINEERING IN MEDICINE AND BIOLOGY SOCIETY INTERNATIONAL CONFERENCE. Chicago, IL, USA: [s.n.], 2000. p. 1734–1737. ISBN 0-7803-6465-1.

MARTIN, D. et al. **A Database of Human Segmented Natural Images and its Application to Evaluating Segmentation Algorithms and Measuring Ecological Statistics**. In: **Proc. 8th Int'l Conf. Computer Vision**. [S.l.: s.n.], 2001. v. 2, p. 416–423.

MARTINS, D. P. et al. **Aplicação do Algoritmo K-means em Dados da Prevalência de Asma e Rinite em Escolares**. In: **XI CONGRESSO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA EM SAÚDE - CBIS**. Crisciuma SC, Brasil: [s.n.], 2008.

MCCULLOCH, N.; PITTS, W. **A Logical Calculus of Ideas Immanent in Nervous Activity**. **Bulletin of Matematical Bio-Physics**, v. 5, p. 115–133, 1943.

MUNAKATA, T. **Fundamentals of the New Artificial Intelligence**. [S.l.]: Springer, 2008. ISBN 978-1-84628-838-8.

NALON, J. A. **Introdução ao Processamento Digital de Sinais**. 1ª. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2009. ISBN 978-85-216-1646-7.

NICODEMIS, L. C. J. **Classificação de Imagens de Ultrassom de Câncer de Mama Baseada em Informações Híbridas Utilizando Teoria da Informação**. Março 2006. Dissertação (Master Thesis) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, Brazil.

NIVANEN, L.; MéHAUTé, A. L.; WANG, Q. A. **Generalized algebra within a nonextensive statistics**. **Rep. Math. Phys**, p. 437–444, 2004.

OH, B. M. et al. **Image-Based Modeling and Photo Editing**. In: ACM. **The 28th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH '01)**. New York, NY, USA: ACM, 2001. p. 433–442. ISBN 1-58113-374-X. ISSN 433.

PAL, N. R. **On minimum cross entropy thresholding**. **Pattern Recognition**, v. 26, p. 575–580, 1996.

PARIS, S. et al. **A Gentle Introduction to Bilateral Filtering and Its Applications**. In: **ACM SIGGRAPH 2008 Classes**. New York, NY, USA: ACM, 2008. (SIGGRAPH '08), p. 1:1–1:50.

PETSCHNIGG, G. et al. **Digital Photography with Flash and No-flash Image Pairs**. **ACM Trans. Graph.**, ACM, New York, NY, USA, v. 23, n. 3, p. 664–672, ago. 2004. ISSN 0730-0301.

PUN, T. **Entropic Thresholding: A New Approach**. **COMPUTER GRAPHICS AND IMAGE PROCESSING**, v. 16, n. 3, p. 210–239, Jul 1981. ISSN 0146-664X.

RAMANATH, R.; SNYDER, W. E. **Adaptive Demosaicking**. **to appear in Journal of Electronic Imaging**, v. 12, n. 4, 2003.

RITTER, H. Self-Organizing Feature Maps: Kohonen Maps. In: ____. **The handbook of brain theory and neural networks. Brain theory and neural networks**. [S.l.]: MIT-Press, 1995.

RODRIGUES, P. S.; CHANG, R.-F.; SURI, J. **Non-Extensive Entropy for CAD Systems of Breast Cancer Images**. In: **PROCEEDINGS OF THE 2006 BRAZILIAN SYMPOSIUM ON COMPUTER GRAPHICS AND IMAGE PROCESSING**. Manaus, AM, Brasil: IEEE Computer Society, 2006. p. 121–128. ISBN 0-7695-2686-1. ISSN 1530-1834.

RODRIGUES, P. S.; GIRALDI, G. **Improving the Non-extensive Medical Image Segmentation Based on Tsallis Entropy**. **Pattern Analysis and Applications**, Springer London, v. 14, n. 4, p. 369–379, 2011. ISSN 1433-7541.

RODRIGUES, P. S.; GIRALDI, G. A. **Computing the q-index for Tsallis Nonextensive Image Segmentation**. In: **PROCEEDINGS OF THE 2009 XXII BRAZILIAN SYMPOSIUM ON COMPUTER GRAPHICS AND IMAGE PROCESSING**. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2009. (SIBGRAPI '09), p. 232–237. ISBN 978-0-7695-3813-6. ISSN 1530-1834.

RODRIGUES, P. S. et al. **Computer Aided Diagnosis for Breast Lesions in Ultrasound Images Under Non-Extensive Tsallis Entropy**. 2011.

ROSENBLATT, F. **The perceptron - a perceiving and recognizing automaton**. Buffalo, NY, 1957. 00344.

SAHOO, P. et al. **A survay of thresholding techniques**. **Computer Vision Graphics Image Processing**, v. 41, n. 1, p. 233–260, 1988.

SCHMITT, O. et al. **Parallelized Segmentation of a Serially Sectioned whole Human Brain**. **IMAGE AND VISION COMPUTING**, Butterworth-Heinemann, Newton, MA, USA, v. 26, p. 289–301, Feb 2008. ISSN 0262-8856.

SEZGIN, M.; SANKUR, B. **Survey Over Image Thresholding Techniques and Quantitative Performance Evaluation**. **JOURNAL OF ELECTRONIC IMAGING**, v. 13, n. 1, p. 146–168, Jan 2004.

____. **Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation**. **Journal of Electronic Imaging**, v. 13, n. 1, p. 146–168, 2004.

SHANNON, C. **A Mathematical Theory of Communication**. **THE BELL SYSTEM**

TECHNICAL JOURNAL, v. 27, p. 379–423, 623–656, Oct 1948.

SIMõES, A. d. S. **Segmentação de imagens por classificação de cores: uma abordagem neural**. 2000. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

SMITH, S. M.; BRADY, J. M. **SUSAN - A New Approach to Low Level Image Processing**. **International Journal of Computer Vision**, Kluwer Academic Publishers, Hingham, MA, USA, v. 23, n. 1, p. 45–78, may 1997. ISSN 0920-5691.

SMITH, S. W. **The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing**. [S.l.]: California Technical Publishing, 1997. ISBN 0-9660176-3-3.

SOARES, I. J. A.; MURTA, L. O. **Noise reduction using nonadditive Q-Gaussian filters in magnetic resonance images**. **SPIE Journal Medical Imaging**, v. 8669, p. 86692J–1 – 86692J–6, 2013.

SOBIECKI, A. et al. **The Power of Kullback-Leibler Divergence Extendable for Tsallis Entropy in Comparing Cone-Beam and Multi-Slice Tomography Images**. In: **VII WORKSHOP DE VISÃO COMPUTACIONAL**. Curitiba, Paraná, Brasil: Universidade Federal do Paraná, 2011. p. 296–301.

SPECHT, D. F. **Probabilistic neural networks**. **Neural Networks**, v. 3, n. 1, p. 109 – 118, 1990. ISSN 0893-6080.

STEHMAN, S. V. **Estimating the kappa coefficient and its variance under stratified random sampling**. **Photogrammetric engineering and remote sensing**, American Society for Photogrammetry and Remote Sensing, v. 62, p. 401–407, 1996.

TAVARES, A. H. M. d. P. **Aspectos Matemáticos da Entropia**. 2003. Dissertação (Mestrado), Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

TOMASI, C.; MANDUCHI, R. **Bilateral Filtering for Gray and Color Images**. In: **Proceedings of the Sixth International Conference on Computer Vision**. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 1998. (ICCV 98), p. 839. ISBN 81-7319-221-9.

TSALLIS, C. **Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics**. **JOURNAL OF STATISTICAL PHYSICS**, Springer Netherlands, v. 52, p. 479–487, 1988. ISSN 0022-4715. 10.1007/BF01016429.

____. **Nonextensive Statistics: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections**. **BRAZILIAN JOURNAL OF PHYSICS**, Scielo, v. 29, p. 1–35, Mar 1999. ISSN 0103-9733.

TSALLIS, C. et al. **Statistical-Mechanical Foundation of the Ubiquity of Lévy Distributions in Nature**. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 75, p. 3589–3593, Nov 1995.

UMAROV, S.; TSALLIS, C. **On multivariate generalizations of the q-central limit theorem consistent with nonextensive statistical mechanics**. In: ABE, S. et al. (Ed.). **Complexity, Metastability, and Nonextensivity**. [S.l.: s.n.], 2007. (American Institute of Physics Conference Series, v. 965), p. 34–42.

VALE, G. M. d.; POZ, A. P. d. **Processo de Detecção de Bordas de Canny**. **BOLETIM DE CIÊNCIAS GEODÉSICAS**, Curitiba, PR, Brasil, v. 8, p. 67–78, 2002.

VESANTO, J.; ALHONIEMI, E. **Clustering of the self-organizing map**. **Neural Networks, IEEE Transactions on**, v. 11, n. 3, p. 586–600, May 2000. ISSN 1045-9227.

VIEIRA, A. L. A.; CASTRO, E. **Aplicação de Metodologias Estatísticas à Análise de Disparidades Regionais**. **Universidade do Minho. Campus de Azurém - 4810, Guimarães**, Guimarães, Portugal, 2005. ISSN 1645-9369.

WANG, Z.; BOVIK, A. ***a universal image quality index***. **Signal Processing Letters, IEEE**, v. 9, n. 3, p. 81–84, March 2002. ISSN 1070-9908.

WANG, Z. et al. **Image quality assessment: from error visibility to structural similarity**. **Image Processing, IEEE Transactions on**, v. 13, n. 4, p. 600–612, April 2004. ISSN 1057-7149.

YAROSLAVSKY, L. P. **Digital Picture Processing - An Introduction**. **Berlin-Heidelberg-New York**, Springer-Verlag, Springer Series in Information Sciences, v. 9, 1985. XII 276 S 87 Abb DM 112.

YONEIAMA, T.; NASCIMENTO, C. L. **Redes Neurais Artificiais Fundamentos e Aplicações**. [S.l.]: Editora Edgard Blücher Ltda., 2000. ISBN 978-85-212-0310-0.