ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ПРОЦЕСИ В СИСТЕМІ З ПЛОСКИМ КРУГОВИМ СОЛЕНОЇДОМ МІЖ МАСИВНИМИ БІФІЛЯРНИМИ КОТУШКАМИ

Ю. В. Батигін, Т. В. Гаврилова, Є. О. Чаплигін, С. О. Шиндерук, Ю. В. Щербініна

Харківський національний автомобільно-дорожній університет

вул. Ярослава Мудрого, 25, м. Харків, 61002, Україна. E-mail: gavriloVA.tatyana@i.ua

Розглянуто в строгій постановці задачу визначення електромагнітних полів в системі, що складається з кругового соленоїда-індуктора кінцевої товщини, розміщеного між масивними багатовитковими котушками біфіляра з односпрямованими струмами. На підставі точного математичного рішення задачі з використанням перетворень Лапласа проведено аналіз електромагнітних процесів у металі, знайдена аналітична просторово-часова функція для густини індукованого струму при збудженні системи гармонічними струмами в масивних обмотках біфіляра. Одержаний вираз для густини індукованого струму дозволив здійснити граничні переходи і отримати відповідні залежності для важливих, з практичної точки зору, випадків. Розглянуто низькочастотний і високочастотний режими збудження індукованих полів. Показано, що в першому випадку поперечний розподіл струму в металі внутрішнього індуктора є лінійним, симетричним щодо центральної вісі індуктора. У високочастотному режимі розглянутих полів вид часових залежностей та радіальний розподіл збудженого струму збігаються з відповідними залежностями для струму, що збуджує. Представлені графіки наочно ілюструють перехід від режиму інтенсивного проникнення збуджених електромагнітних полів (низькочастотний режим) до режиму різкого скін-ефекту (високочастотний режим). З'ясовано умови мінімального впливу полів зовнішнього біфіляра на електромагнітні процеси у внутрішньому індукторі. Реальні пристрої на основі індукторних систем, для яких можна застосувати запропонований конкретний алгоритм постановки, рішення та подальшого аналізу отриманих результатів електродинамічної задачі для розрахункової моделі, можуть використовуватися, зокрема, в складі схем обладнання для магнітно-імпульсної обробки металів.

Ключові слова: масивна біфілярна котушка, індукторна система, електромагнітні процеси, односпрямовані струми, скін-ефект, низькочастотний режим.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМЕ С ПЛОСКИМ КРУГОВЫМ СОЛЕНОИДОМ МЕЖДУ МАССИВНЫМИ БИФИЛЯРНЫМИ КОТУШКАМИ

Ю. В. Батыгин, Т. В. Гаврилова, Е.А. Чаплыгин, С. А. Шиндерук, Ю. В. Щербинина

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

ул. Ярослава Мудрого, 25, г. Харьков, 61002, Украина. E-mail: gavriloVA.tatyana@i.ua

Рассмотрена в строгой постановке задача определения электромагнитных полей в системе, состоящей из кругового соленоида-индуктора конечной толщины, размещённого между массивными многовитковыми катушками бифиляра с однонаправленными токами. На основании точного математического решения задачи с использованием преобразований Лапласа проведен анализ электромагнитных процессов в металле, найдена аналитическая пространственно-временная функция для плотности индуцированного тока при возбуждении системы гармоническими токами в массивных обмотках бифиляра. Данное выражение позволило осуществить предельные переходы и получить соответствующие зависимости для важных с практической точки зрения случаев. Рассмотрены низкочастотный и высокочастотный режимы возбуждения индуцированных полей. Показано, что в первом случае поперечное распределение тока в металле внутреннего индуктора является линейным, симметричным относительно центральной оси индуктора. В высокочастотном режиме рассматриваемых полей вид временных зависимостей и радиальное распределение возбуждаемого тока совпадают с соответствующими зависимостями для возбуждающего тока. Представленные графики наглядно иллюстрируют переход от режима интенсивного проникновения возбуждаемых электромагнитных полей (низкочастотный режим) к режиму резкого скин-эффекта (высокочастотный режим). Выявлены условия минимального влияния полей внешнего бифиляра на электромагнитные процессы во внутреннем индукторе. Реальные устройства на основе индукторных систем, для которых применим предложенный конкретный алгоритм постановки, решения и последующего анализа полученных результатов электродинамической задачи для расчетной модели, могут использоваться, в частности, в составе схем оборудования для магнитно-импульсной обработки металлов.

Ключевые слова: массивная бифилярная катушка, индукторная система, электромагнитные процессы, однонаправленные токи, скин-эффект, низкочастотный режим.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Як відомо, біфілярна котушка – це котушка індуктивності, що призначена для накопичення енергії магнітного поля, обмотка якої виконана з двох паралельних ізованих провідників. У загальному сенсі до біфіляру можна

віднести також будь-яку електротехнічну конструкцію, що складається з двох окремих одношарових соленоїдів. Геометрично це можуть бути коаксіальні циліндричні пристрої або плоскі паралельні намотування, електричне з'єднання яких

може бути паралельним або послідовним в залежності від призначення біфіляра. Історичний пріоритет у створенні перших зразків біфілярних котушок належить Н.Тесла, який досить успішно використовував їх для зменшення реактивних параметрів елементів електричних ланцюгів [1].

Перелік сучасних областей їх використання із розгляданням ефективних аналітичних і чисельних методів вирішування відповідних задач знаходимо у роботах [2–8].

Практичні виклики в галузях металообробки, автомобілебудування та обслуговування різних видів транспорту потребують розробки нових методів, які дозволяють економити матеріали та енергетичні затрати. Такі методи вперше представлені, наприклад, авторами робіт [9–15], де описані схеми обладнання для магнітно-імпульсної обробки металів. Автори наводять дослідження схем із застосуванням індукторних систем, в яких біфілярні котушки розміщуються або всередині, або поверх багатовиткових циліндричних індукторів. Подальший розвиток таких досліджень автори робіт бачать у дослідженні процесів, пов'язаних із урахуванням реальних умов, а саме урахування впливу метала індуктора при збудженні індукційних струмів в розглянутих системах.

Мета роботи – узагальнення результатів строгої постановки задачі для індукційної моделі, що складається з багатовиткової біфілярної котушки і плоского кругового соленоїда, розташованого в її середині.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ.

Розрахункова модель досліджуваної системи представлена на рис. 1.

Рисунок 1 – Модель індукторної системи,

1 – внутрішній багатовитковий соленоїд-індуктор;
2 – гілки біфіляра – плоскі багатовиткові соленоїди

Вирішення задачі будемо проводити при наступних умовах [12]:

- у прийнятій циліндричній системі координат об'єкт дослідження має аксіальну симетрію;
- робочі поверхні витків біфілярної котушки з боку індуктора-соленоїда можна вважати суцільною

поверхнею з ідеального провідника при умові, що вони досить масивні ($D \gg R_{1,2}$), щільно прилягають один до одного, а також виконані з металу, який має високу електропровідність;

- по робочих поверхнях обмоток біфіляра протікає гармонійний струм з однорідною по радіусу лінійною густиною:

$$j_{\varphi}(t, r, z = \pm h) = j_m \sin(\omega t) (\eta(r - R_1) - \eta(r - R_2)),$$

де $j_m = \frac{I_m}{(R_2 - R_1)}$ – амплітуда густини струму,

I_m – амплітуда струму, ω – циклічна частота, $\eta(r - R_{1,2})$ – ступінчасті функції Хевісайда;

- витки соленоїда-індуктора виконані з металу товщини d з кінцевою питомою електропровідністю γ і щільно прилягають один до одного, так, що їх поверхні можна вважати суцільними;

- часові параметри збуджуючого струму задовольняють квазістаціонарному наближенню

Ландау ($\frac{\omega}{c} \cdot l \ll 1$, де c – швидкість світла у вакуумі,

l – максимальний розмір в системі) [16].

При нехтуванні струмами зміщення рівняння Максвелла для збуджених компонент вектора електромагнітного поля, перетворених за Лапласом з урахуванням нульових початкових умов, приймають вигляд [8–9]:

$$\frac{\partial H_r(p, r, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(p, r, z)}{\partial r} = \varepsilon_0 p E_{\varphi}(p, r, z); \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r E_{\varphi}(p, r, z)) = -\mu_0 p H_{\varphi}(p, r, z); \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_{\varphi}(p, r, z)}{\partial z} = \mu_0 p H_r(p, r, z), \quad (3)$$

де p – параметр перетворення Лапласа;

ε_0 і μ_0 – електрична і магнітна стала відповідно;

$$E_{\varphi}(p, r, z) = L\{E_{\varphi}(t, r, z)\};$$

$$H_{r, z}(p, r, z) = L\{H_{r, z}(t, r, z)\}.$$

У моделі, що прийнята до розгляду, слід виділити області з однорідними електрофізичними характеристиками. Відповідно до рис. 1 можна вважати, що такими є:

1 – область між поверхнями індуктора і верхньою обмоткою біфіляра, $z \in \left[\frac{d}{2}, h\right]$;

2 – область металу індуктора, $z \in \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right]$;

3 – область між поверхнями індуктора і нижньою обмоткою біфіляра, $z \in \left[-h, -\frac{d}{2}\right]$.

Умові обмеженості радіального розподілу векторів електромагнітного поля при $r = 0$ і $r = \infty$ задовольняє інтегральне перетворення Фур'є-Бесселя [17]. Так, компоненту напруженості

електричного поля $E_\varphi(p, r, z)$ можна представити у вигляді

$$E_\varphi(p, r, z) = \int_0^\infty E_\varphi(p, \lambda, z) \cdot J_1(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (4)$$

де $E_\varphi(p, \lambda, z)$ – напруженість електричного поля в просторі Фур'є-Бесселя;

λ – параметр перетворення;

$J_1(\lambda r)$ – функція Бесселя першого роду першого порядку [17].

З рівнянь (1)–(3) з урахуванням інтеграла (4) отримаємо рівняння для Лапласова і Фур'є-Бесселевих зображень азимутальної компоненти напруженості електричного поля і радіальної складової напруженості магнітного поля у виділених областях.

Область 1, $z \in \left[\frac{d}{2}, h\right]$:

$$\begin{cases} E_\varphi^{(1)}(p, \lambda, z) = \frac{p\mu_0}{\lambda} (A(p, \lambda) \operatorname{ch}(\lambda z) + \\ + B(p, \lambda) \operatorname{sh}(\lambda z)); \\ H_r^{(1)}(p, \lambda, z) = A(p, \lambda) \operatorname{sh}(\lambda z) + B(p, \lambda) \operatorname{ch}(\lambda z); \end{cases} \quad (5)$$

де $A(p, \lambda), B(p, \lambda)$ – невідомі довільні постійні інтегрування.

Область 2, $z \in \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right]$:

$$\begin{cases} E_\varphi^{(2)}(p, \lambda, z) = \frac{p\mu_0}{q(p, \lambda)} (C(p, \lambda) \operatorname{ch}(q(p, \lambda)z) + \\ + D(p, \lambda) \operatorname{sh}(q(p, \lambda)z)); \\ H_r^{(2)}(p, \lambda, z) = C(p, \lambda) \operatorname{sh}(q(p, \lambda)z) + \\ + D(p, \lambda) \operatorname{ch}(q(p, \lambda)z); \end{cases} \quad (6)$$

де $q(p, \lambda) = \sqrt{\lambda^2 + p\mu_0\gamma}$, $C(p, \lambda), D(p, \lambda)$ – невідомі довільні постійні інтегрування.

Область 3, $z \in \left[-h, -\frac{d}{2}\right]$:

$$\begin{cases} E_\varphi^{(3)}(p, \lambda, z) = \frac{p\mu_0}{\lambda} (F(p, \lambda) \operatorname{ch}(\lambda z) + \\ + G(p, \lambda) \operatorname{sh}(\lambda z)); \\ H_r^{(3)}(p, \lambda, z) = F(p, \lambda) \operatorname{sh}(\lambda z) + G(p, \lambda) \operatorname{ch}(\lambda z); \end{cases} \quad (7)$$

де $F(p, \lambda), G(p, \lambda)$ – невідомі довільні постійні інтегрування.

Невідомі довільні постійні інтегрування в виразах (5) і (7) знайдемо з відомих граничних умов, а саме:

– рівність нулю напруженостей збуджуваних електричних полів на ідеально провідних робочих поверхнях обмоток біфіляра;

– рівність модулів напруженостей збуджуваних магнітних полів лінійній густині

струму на ідеально провідних робочих поверхнях обмоток біфіляра.

Після виконання необхідних тотожних перетворень знаходимо такі залежності в порожнинах між поверхнями обмоток біфіляра і індуктора-соленоїда.

Область 1, $z \in \left[\frac{d}{2}, h\right]$:

$$\begin{cases} E_\varphi^{(1)}(p, \lambda, z) = -j_m j(p) f(\lambda) \frac{p\mu_0}{\lambda} \operatorname{sh}(\lambda(h-z)); \\ H_r^{(1)}(p, \lambda, z) = j_m j(p) f(\lambda) \operatorname{ch}(\lambda(h-z)), \end{cases} \quad (8)$$

де $j(p)$ – зображення Лапласа часової залежності збудженого струму,

$$f(\lambda) = \int_0^\infty f(r) \cdot J_1(\lambda r) r dr - \text{за визначенням}$$

образ його радіального розподілу в просторі Фур'є-Бесселя.

Область 3, $z \in \left[-h, -\frac{d}{2}\right]$:

$$\begin{cases} E_\varphi^{(3)}(p, \lambda, z) = -j_m j(p) f(\lambda) \frac{p\mu_0}{\lambda} \operatorname{sh}(\lambda(h+z)); \\ H_r^{(3)}(p, \lambda, z) = j_m j(p) f(\lambda) \operatorname{ch}(\lambda(h+z)). \end{cases} \quad (9)$$

З умов безперервності тангенціальних компонент напруженості електричного поля на межах поділу виділених областей знайдемо взаємозв'язок між їх геометричними та електродинамічними характеристиками з параметрами інтегральних перетворень у вигляді:

$$\frac{\operatorname{th}\left(q(p, \lambda) \cdot \frac{d}{2}\right)}{q(p, \lambda)} = -\frac{\operatorname{th}\left(\lambda\left(h - \frac{d}{2}\right)\right)}{\lambda}, \quad (10)$$

а також невідомі довільні постійні інтегрування у виразі (6):

$$\begin{cases} C(p, \lambda) = 0; \\ D(p, \lambda) = -\frac{q(p, \lambda)}{\lambda} j_m j(p) f(\lambda) \frac{\operatorname{sh}\left(\lambda\left(h - \frac{d}{2}\right)\right)}{\operatorname{sh}\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right)}. \end{cases} \quad (11)$$

Одержимо приблизний вираз для постійної інтегрування $D(p, \lambda)$ у припущенні, що

$\left(h - \frac{d}{2}\right) \rightarrow 0$. Відзначимо, що таке спрощення

цілком узгоджується з вимогою мінімально можливих ізоляційних проміжків в реальних індукторних системах [8, 9]. З урахуванням наближеної рівності гіперболічних тангенса і синуса для досить малих значень аргументів в співвідношенні (10) і підстановки його в вираз для $D(p, \lambda)$ знаходимо:

$$D(p, \lambda) = j_m j(p) f(\lambda) \frac{1}{\operatorname{ch}\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right)}. \quad (12)$$

Отримані довільні постійні $C(p, \lambda)$ і $D(p, \lambda)$ підставимо у вираз (6) для напруженості електричного поля в металі внутрішнього індуктора. Після тотожних перетворень і ведення нової просторової змінної одержимо зображення густини збудженого струму:

$$j_i(p, \lambda, z) = j_m \mu_0 \gamma(p j(p)) f(\lambda) \times \frac{\operatorname{sh}\left(\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right) \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)}\right)}{q(p, \lambda) \operatorname{ch}\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right)}, \quad (13)$$

де $f(\lambda) = \int_{R_1}^{R_2} r \cdot J_1(\lambda r) dr$ – Фур'є-Бесселя зображення

заданого радіального розподілу збудженого струму на робочих поверхнях обмоток біфілара;

$\zeta \in \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right]$ – поперечна координата в металі індуктора.

Далі, виконаємо в (13) зворотне перетворення Фур'є-Бесселя і отримаємо:

$$j_i(p, r, z) = j_m \mu_0 \gamma(p j(p)) \times \int_0^\infty f(\lambda) \frac{\operatorname{sh}\left(\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right) \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)}\right)}{q(p, \lambda) \operatorname{ch}\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right)} J_1(\lambda r) \lambda d\lambda. \quad (14)$$

Зворотне перетворення Лапласа у виразі (14) з урахуванням гармонійної залежності струму, що збуджує, зводиться до визначення оригіналу наступного виразу:

$$(p j(p)) \frac{\operatorname{sh}\left(q(p, \lambda) \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)}\right)}{q(p, \lambda) \operatorname{ch}\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right)} \Leftrightarrow \Leftrightarrow j_m \omega \cos(\omega t) * F(t), \quad (15)$$

де

$$F(t) \Leftrightarrow F(p), F(p) = \frac{\operatorname{sh}\left(\left(q(p, \lambda) \cdot \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)}\right)}{q(p, \lambda) \cdot \operatorname{ch}\left(q(p, \lambda) \cdot \frac{d}{2}\right)}.$$

Відповідно до алгоритму зворотного перетворення Лапласа дробів з простими полюсами знаходимо:

$$F(t) = \frac{d}{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sin\left((2k+1) \frac{\pi}{2} \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)}\right) e^{p_k t}, \quad (16)$$

$$\text{де } p_k = -\frac{1}{\tau} \left(\left((2k+1) \frac{\pi}{2} \right)^2 + \left(\lambda \frac{d}{2} \right)^2 \right);$$

$$\tau = \mu_0 \gamma \left(\frac{d}{2} \right)^2 - \text{характерний час дифузії}$$

магнітного поля в провідний шар товщиною $\frac{d}{2}$;

γ – питома електропровідність.

Згортка функцій в правій частині виразу (15) з урахуванням залежності (16) визначається інтегралом вигляду:

$$j_m \omega \cos(\omega t) * F(t) = j_m \left(\frac{d\omega}{\tau} \right) \times \times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2} \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)}\right) \int_0^t e^{p_k \cdot (t-x)} \cos(\omega x) dx. \quad (17)$$

Обчислюючи інтеграл в (17) для стаціонарного часового режиму, знаходимо, що

$$j_m \omega \cos(\omega t) * F(t) = \left[2 j_m \frac{\omega \cdot \mu_0 \gamma \left(\frac{d}{2} \right)^2}{\left(\frac{d}{2} \right)} \right] \times \quad (18)$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sin\left((2k+1) \frac{\pi}{2} \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)}\right) \frac{\sin(\omega t - \psi_k)}{\sqrt{(\omega \tau)^2 + (p_k \tau)^2}},$$

де $\psi_k = \arctg\left(\frac{p_k}{\omega}\right)$ – фазовий зсув просторових гармонік.

Вираз (18) підставимо в (17), виконаємо необхідні тотожні перетворення і в кінцевому підсумку отримаємо аналітичну просторово-часову залежність густини струму, індукованого в металі індуктора:

$$j_i(t, r, z) = 2 j_m \frac{(\omega \tau)}{\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^\infty f(\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{(2k+1) \pi}{2} \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)}\right) \times \times \frac{(-1)^k \sin(\omega t - \psi_k) J_1(\lambda r) \lambda}{\sqrt{(\omega \tau)^2 + \left(\left((2k+1) \frac{\pi}{2} \right)^2 + \left(\lambda \frac{d}{2} \right)^2 \right)^2}} d\lambda. \quad (19)$$

Результат (19) є загальним аналітичним рішенням поставленої задачі, яке дозволяє проаналізувати електромагнітні процеси в

реальному металі плоского кругового індуктора, розміщеного між масивними обмотками біфілярної котушки.

Розглянемо деякі практичні випадки, що дозволяють одержати більш спрощені для обчислювання представлення виразу (19). Будемо вважати товщину металу внутрішнього індуктора

досить малою, тобто $\left(\lambda \frac{d}{2}\right)^2 \ll \left((2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)^2$.

1. Низькочастотний режим $\omega\tau \ll 1$. Відповідний граничний перехід у залежності (19) приводить до наступного виразу для густини індукваного струму [14]:

$$j_i(t, r, z) \approx j_m \left(\frac{\omega\tau}{d} \right) \cos(\omega t) \times \\ \times \left[\eta(r - R_1) - \eta(r - R_2) \right] \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2} \right)}. \quad (20)$$

2. Високочастотний режим $\omega\tau \gg 1$. Після граничного переходу в (19) отримуємо залежність для густини індукваного струму у вигляді [14]:

$$j_i(t, r, z) \approx \frac{4j_m}{d} \sin(\omega t) \left[\eta(r - R_1) - \eta(r - R_2) \right] \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin \left((2k+1) \frac{\pi}{2} \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2} \right)} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\left((2k+1) \frac{\pi}{2} \right)^2}{(\omega\tau)^2} \right)}}. \quad (21)$$

Проведемо порівняльний аналіз отриманих теоретичних результатів для цих режимів на базі виразів (20) і (21).

– і в першому і в другому випадку часова і просторові функції являються незалежними;

– також в обох випадках часова залежність і функція радіального розподілу співпадають з відповідними залежностями для збуджуючого струму;

– амплітуда сигналу, який збуджується прямо пропорційна параметру $\omega\tau$ для низько частотного сигналу, тоді як така залежність відсутня для високочастотного, таким чином, маємо збільшення амплітуди високочастотного сигналу майже у $4/\omega\tau$ разів;

– в обох випадках амплітуда сигналу обернено пропорційна товщині металу індуктора;

– у низькочастотному випадку поперечний розподіл індукваного струму являє собою лінійну залежність, що проходить через центральну вісь індуктора у високочастотному – визначається

сумою ряду з досить швидкою збіжністю при $\left((2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \right)^2 / (\omega\tau) > 1$ [16].

Відзначимо, що одержані результати корелюють із результатами досліджень низькочастотних електромагнітних процесів в тонкостінних металах, і високочастотних, які супроводжуються появою різкого поверхневого ефекту [8].

На рис. 2 представлені залежності відносної густини амплітуди струму, індукваного в металі індуктора товщиною d , від поперечної координати.

Відносна поперечна координата $\zeta / \frac{d}{2}$

Рисунок 2 – Поперечні розподіли відносних величин густини індукваних струмів (нормування на максимуми),

1 – низькочастотний режим, $\omega\tau = 0,1$;
2 – високочастотний режим, $\omega\tau = 10$.

Графічні ілюстрації поперечних розподілів наочно представляють відмінність в розглянутих частотних режимах. Низькочастотний режим (лінійна залежність, крива 1, $\tau = 0,1$) відповідає режиму інтенсивного проникнення в метал індуктора порушуваних електромагнітних полів внаслідок просторової суперпозиції різноспрямованих струмів, що збуджуються кожним із джерел. Крива 2 (високочастотний режим, $\omega\tau = 10$) ілюструє режим різкого скін-ефекту, коли індуквані струми витісняються на граничні поверхні металу внутрішнього індуктора.

Представлені на рис. 2 графіки підтверджують також теоретичний висновок о рівності нулю повного індукваного струму у всіх частотних режимах. З фізичної точки зору, цей результат обумовлений для низьких частот геометричним накладанням індукваних струмів у середині металу, а для високих частот – накладанням однакових, але протилежно спрямованих струмів, індукваних на поверхнях металу індуктора.

ВИСНОВКИ. Сформульована гранична задача отримання виду електромагнітного поля в плоскій індукторній системі, яка містить круговий соленоїд, розташований між гілками зовнішньої біфілярної котушки.

На підставі точного математичного рішення даної задачі з використанням перетворень Лапласа знайдена аналітична просторово-часова функція для густини індукваного струму, що виникає в плоскому соленоїді при збудженні системи гармонійними односпрямованими струмами в масивних обмотках біфіляра.

Розглянуті окремі випадки, що мають практичний інтерес. Одержані аналітичні вирази для низькочастотного і високочастотного режимів діючих полів дозволили провести порівняльний аналіз, який був проілюстрований графічними залежностями.

З'ясовано, що, з практичної точки зору, інтерес представляє низькочастотний режим, при якому існує мінімальний вплив полів зовнішнього біфіляра на процеси у внутрішньому індукторі. У цьому випадку просторова суперпозиція різноспрямованих індукваних струмів дає в сумі нульову величину електрорушійної сили індукції, що збуджується.

Отримані результати дозволяють проводити теоретичний аналіз і конкретні обчислення, спрямовані на пошук умов успішної технічної реалізації запропонованої індукторної системи, а в подальшій перспективі – дати поштовх експериментальним дослідженням.

ЛІТЕРАТУРА

1. Тесла Н. Лекции и статьи. Москва : Tesla Print, 2003. 386 с.
2. Атабеков Г. И. Основы теории цепей. СПб. : Энергия, 2006. 220 с.
3. Padamanabhan K., Swaminathan P. Electronic Components. New Deli : Laxmi Publications, 2016. 204 p.
4. Мир электроники. Датчики : справочное пособие; под ред. В. М. Шарипова и Е. С. Полищука. Москва : Техносфера, 2012. 624 с.
5. Yalçın O. Ferromagnetic resonance – Theory and Applications. Intech Open Publ, 2013. 239 p.
6. Никищенко А. Н., Богач Н. В. Разработка модели излучения плоской катушки. РТ-2010. Севастополь, 2010. С. 362–366.
7. Ziegler S., Woodward R.C., H.H.C., Borle L.J. Current Sensing Techniques: A Review. *IEEE Sensors Journal*. 2009. Vol. 9. No. 4. P. 354–376.
8. Shneerson G. A., Dolotenko M. I., Krivosheev S. I. Strong and Superstrong Pulsed Magnetic Field Generation. Berlin : Walter de Gruyter, 2014. 424 p.
9. Batygin Yu., Barbashova M., Sabokar O. Electromagnetic Metal Forming for Advanced Processing Technologies. Cham. Switzerland : Springer International Publishing AG, 2018. 95 p.
10. Батигін Ю. В., Шиндерук С. О., Гаврилова Т. В., Балбекін І. А. Розрахункові співвідношення пласкої індукторної системи з масивними котушками біфіляра. *Вісник ХНАДУ*. 2019. № 87. С. 85–90. DOI: 10.30977/BUL.2219-5548.2019.87.0.85.
11. Батыгин Ю. В., Гаврилова Т. В., Шиндерук С. А., Чаплыгин Е. А., Саенко В. А. Плоская индукторная система с массивными катушками бифиляра. Анализ электромагнитных процессов. *Технічна інженерія*. 2019. № 2 (84). С. 115–119.
12. Батыгин Ю. В., Шиндерук С. А., Чаплыгин Е. А., Еремина Е. Ф., Безродная А. В. Плоский круговой соленоид между массивными бифилярными катушками. Расчётные соотношения. *Вісник НТУ "ХПІ". Математичне моделювання в техніці та технологіях*. 2019. № 22 (1347). С. 9–15.
13. Батыгин Ю. В., Шиндерук С. А., Чаплыгин Е. А., Еремина Е. Ф., Борисенко Б. В. Цилиндрическая индукторная система с внешним бифилярным соленоидом. Анализ электро-магнитных процессов. *Вісник Хмельницького національного університету*. 2019. № 6 (279). С. 44–48.
14. Батыгин Ю. В., Єрьоміна О. Ф., Шиндерук С. А., Чаплигін Є. О., Бенсбаа Б. Е. Плоский круговой соленоид між масивними біфілярними котушками. Аналіз електромагнітних процесів. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. Харків : НТУ «ХПІ». 2021. № 1 (7). С. 3–8. DOI: 10.20998/2413- 4295.2021.01.01.
15. Батигін Ю. В., Гаврилова Т. В., Шиндерук С. О., Щербініна Ю. В. Електромагнітні поля в циліндричній індукторній системі із зовнішнім коаксіальним біфілярним соленоїдом. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. 2021. Вип. 1 (53). С. 28–34.
16. Landau L. D., Lifshitz E. M., Pitaevsky L. P. Electrodynamics of Continuous Media. Reprinted 2004 (twice). Elsevier Butterworth-Heinemann Linacre House. 620 p.
17. Korn Granino A. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers : Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. 2nd ed. New York : Dover Publ. Inc., 2000. 1152 p.

ELECTROMAGNETIC PROCESSES IN A SYSTEM WITH A PLANE CIRCULAR SOLENOID BETWEEN MASSIVE BIFILARY COILS

Yu. Batygin, T. Gavrilova, Ev. Chaplygin, S. Shinderuk, Yu. Shcherbinina

Kharkiv National Automobile and Highway University

vul. Yaroslava Mudrogo, 25, Kharkiv, 61002, Ukraine. E-mail: gavrilova.tatyana@i.ua

Purpose. Currently, in order to save materials and energy costs, devices have been developed using inductor systems with bifilar coils used in equipment for magnetic-pulse processing of metals. The purpose of this work is to obtain design relations based on a rigorous solution of the edge electrodynamics for the analysis of electromagnetic processes in a real metal of a circular solenoid of finite thickness placed between massive multi-turn coils of a bifilar with unidirectional currents in a flat inductor system. **Methodology.** To solve this problem, Maxwell's equations with appropriate boundary conditions and Laplace transforms were used. **Results.** Based on the exact solution of the

boundary value problem, the space-time function of the density of the induced current, which arises in a flat solenoid when the system is excited by harmonic unidirectional currents in massive bifilar windings, is obtained. On the basis of numerical calculations, it was found that in the low-frequency mode, the transverse distribution of the induced current is linear, symmetric about the central axis of the inductor. In the high-frequency mode, the transverse distribution of the induced current is characteristic of the case of a sharp surface effect. The conditions for the minimum influence of the fields of the external bifilar on the processes in the internal inductor are revealed. **Originality.** The novelty of this work lies in proposing the idea of the design of the inductor system, as well as in the exact solution of the electrodynamics problem and obtaining the calculated expressions for the analysis of electromagnetic processes. **Practical value.** On the basis of the obtained formulas and the performed calculations, the efficiency of the proposed calculation model has been proved, which makes it possible to use it as a basic model for similar inductor systems in determining the real conditions of their maximum efficiency. Figures 2, references 17.

Key words: massive bifilar coil, inductor system, electromagnetic processes, unidirectional currents, skin effect, low frequency mode.

REFERENCES

1. Tesla, N. (2003). *Lekcii i stat'i [Lectures and articles]*. Moscow: Tesla Print. [in Russian].
2. Atabekov, G. I. (2006). *Osnovy teorii tsepey [Fundamentals of the theory of chains]*. SPb.: Energiya. [in Russian]
3. Padamanabhan, K., & Swaminathan, P. (2016). *Electronic Components*. Laxmi Publications.
4. *Mir elektroniki. Datchiki: spravochnoye posobiye [The world of electronics. Sensors: a reference manual]* (2012). Moscow: Tekhnosfera. [in Russian]
5. Yalçın, O. (2013). *Ferromagnetic resonance – Theory and Applications*. Intech Open Publ.
6. Nikishenko, A. N., & Bogach, N. V. (2010). *Razrabotka modeli izlucheniya ploskoy katushki. [Development of a model of radiation of a flat coil]*. Sevastopol. [in Russian]
7. Ziegler, S., Woodward, R. C., H. H. C., & Borle, L. J. (2009). Current Sensing Techniques: A Review. *IEEE Sensors Journal*, 9 (4), 354–376.
8. Shneerson, G. A., Dolotenko, M. I., & Krivosheev, S. I. (2014). *Strong and Superstrong Pulsed Magnetic Field Generation*. Berlin: Walter de Gruyter.
9. Batygin, Yu., Barbashova, M., & Sabokar, O. (2018). *Electromagnetic Metal Forming for Advanced Processing Technologies*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG.
10. Batygin, Yu. V., Shynderuk, S. O., Gavrylova, T. V., & Balbekin I. A. (2019). Rozrakhunkovi spivvidnoshennya plaskoi induktornoї sistemi z masivnimi kotushkami bifilyara [Calculated relations of flat inductor system with massive bifilar coils]. *Bulletin of KhNADU*, 87, 85–90. DOI: 10.30977/BUL.2219-5548.2019.87.0.85 [in Ukrainian]
11. Batygin, Yu. V., Gavrilova, T. V., Shinderuk, S. A., Chaplygin Ye. A., & Sayenko, V. A. (2019). Ploskaya induktornaya sistema s massivnymi katushkami bifilyara. Analiz elektromagnitnykh protsessov [Flat inductor system with massive bifilar coils. Analysis of electromagnetic processes]. *Technical engineering*, 2 (84), 115–119. [in Russian]
12. Batygin, Yu. V., Shinderuk, S. A., Chaplygin, Ye. A., Yeryomina, Ye. F., & Bezrodnaya, A. V. (2019). Ploskiy krugovoy solenoid mezhdru massivnymi bifilyarnymi katushkami. Raschetnye sootnosheniya [Flat circular solenoid between massive bifilar coils. Design ratios]. *Bulletin of NTU "KhPI". Mathematical modeling in engineering and technology*, 22 (1347), 9–15. [in Russian]
13. Batygin, Yu. V., Shinderuk, S. A., Chaplygin, E. A., Yeryomina, E. F., & Borisenko, B. V. (2019). Tsilindricheskaya induktornaya sistema s vneshnim bifilyarnym solenoidom. Analiz elektromagnitnykh protsessov [Cylindrical inductor system with external bifilar solenoid. Analysis of Electromagnetic Processes]. *Visnyk Hmelnyc'kogo nacional'nogo universytetu*, 6 (279), 44–48. [in Russian]
14. Batygin Yu., Yeryomina O., Shinderuk S., Chaplygin E., & Bensbaa B. E. (2021). Ploskiy krugoviy solenoïd mizh masivnimi bifilyarnimi kotushkami. Analiz elektromagnitnykh protsessiv [Flat circular solenoid between massive bifilar coils. Analysis of electromagnetic processes]. *Bulletin of the National Technical University "KhPI"*. Kharkiv: NTU "KhPI", 1 (7), 3–8, DOI: 10.20998/2413-4295.2021.01.01. [in Russian]
15. Batygin, Yu. V., Gavrilova, T. V., Shinderuk, S. O., & Shcherbinina, Yu. V. (2021). Elektromagnitni polya v tsilindrichniy induktorni systemi iz zovnishnim koaksialnim bifilyarnim solenoidom [Electromagnetic fields in a cylindrical inductor system with an external coaxial bifilar solenoid]. *Electromechanical and energy saving systems*, 1 (53), 28–34. [in Ukrainian]
16. Landau, L. D., Lifshitz E. M., & Pitaevsky, L. P. (2004). *Electrodynamics of Continuous Media*. Elsevier Butterworth-Heinemann Linacre House.
17. Korn, G. A. & Korn, T. M. (2000). *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. 2nd ed. New York. Dover Publ. Inc.

Стаття надійшла 19.07.2021.