ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННОГО ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ К АНАЛИЗУ СТАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ**В. К. Тытюк, М. Л. Барановская, Ж. Г. Рожненко**

Криворожский национальный университет

ул. Виталия Матусевича, 11, г. Кривой Рог, 50027, Украина.

E-mail: tytiuk@knu.edu.ua, baranovska@knu.edu.ua, rozhnenko@knu.edu.ua

А. П. Черный, Е. В. Бурдильная

Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского

ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 39600, Украина. E-mail: aleksei.chornyi@gmail.com, evburdilnaya@gmail.com

Б. Б. Кобылянский

Учебно-научный профессионально-педагогический институт Украинской инженерно-педагогической академии

ул. Мира, 5, г. Бахмут, 84511, Украина. E-mail: b.b.kobiliansky@gmail.com

Работа посвящена разработке методики расчета статических характеристик асинхронного электропривода при использовании методов теории обобщенного электромеханического преобразователя. Упрощение модели асинхронного двигателя на основе теории обобщенного электромеханического преобразователя достигнуто путем снижения порядка системы дифференциальных уравнений за счет использования первого закона Кирхгофа. Получено аналитическое решение упрощенной системы уравнений асинхронного двигателя для установившегося режима работы. При решении поставленных задачи использовались общие методы физики, теоретической электротехники, математического анализа и вычислительной математики. Численное решение уравнений математической модели и визуализация полученных результатов выполнено в среде MATLAB®/Simulink. Рассмотрена обобщенная математическая модель асинхронного двигателя с произвольным числом обмоток статора и ротора в фазных координатах, для упрощения системы уравнений асинхронного двигателя предложено уменьшить ее порядок при использовании первого закона Кирхгофа. Для упрощенной системы уравнений асинхронного двигателя в фазных координатах получено аналитическое решение в установившемся режиме. Приведены результаты расчетов статических характеристик асинхронного двигателя, выполнен сравнительный расчет созданной методики расчета статических характеристик с существующими методиками, который подтверждает ее работоспособность. Упрощение системы уравнений асинхронного двигателя с использованием первого закона Кирхгофа позволяет получить аналитическое решение уравнений асинхронного двигателя в установившемся режиме и расширить сферу использования уравнений асинхронного двигателя в фазных координатах.

Ключевые слова: асинхронный двигатель, упрощение системы уравнений, аналитическое решение, статические характеристики.

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ УЗАГАЛЬНЕНОГО ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОГО ПЕРЕТВОРЮВАЧА ДО АНАЛІЗУ СТАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК АСИНХРОННОГО ДВИГУНА**В. К. Тытюк, М. Л. Барановська, Ж. Г. Рожненко**

Криворізький національний університет

вул. Віталія Матусевича, 11, м. Кривий Ріг, 50027, Україна.

E-mail: tytiuk@knu.edu.ua, baranovska@knu.edu.ua, rozhnenko@knu.edu.ua

О. П. Чорний, Є. В. Бурдільна

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського

вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна. E-mail: aleksei.chornyi@gmail.com, evburdilnaya@gmail.com

Б. Б. Кобылянский

Навчально-науковий професійно-педагогічний інститут Української інженерно-педагогічної академії

вул. Миру, 5, м. Бахмут, 84511, Україна. E-mail: b.b.kobiliansky@gmail.com

Робота присвячена розробці методики розрахунку статичних характеристик асинхронного електроприводу з використанням методів теорії узагальненого електромеханічного перетворювача. Спрощення моделі асинхронного двигуна на основі теорії узагальненого електромеханічного перетворювача досягнуто шляхом зменшення порядку системи диференціальних рівнянь за рахунок використання першого закону Кірхгофа. Отримано аналітичне рішення спрощеної системи рівнянь асинхронного двигуна для усталеного режиму роботи. У дослідженні поставлених завдань використовувалися загальні методи фізики, теоретичної електротехніки, математичного аналізу та обчислювальної математики. Чисельне рішення алгебраїчних рівнянь математичної моделі і візуалізація отриманих результатів виконана в середовищі MATLAB®/Simulink. Розглянуто узагальнену математичну модель асинхронного двигуна з довільним числом обмоток статора та ротора у фазних координатах, для спрощення системи рівнянь асинхронного двигуна запропоновано зменшити її порядок при використанні першого закону Кірхгофа. Для спрощеної системи рівнянь асинхронного двигуна у фазних координатах отримано аналітичне рішення в усталеному режимі. Наведено результати розрахунків статичних характеристик асинхронного двигуна, виконано порівняльний розрахунок створеної методики

розрахунку статичних характеристик з існуючими методиками, який підтверджує її працездатність. Спрощення системи рівнянь асинхронного двигуна з використанням першого закону Кірхгофа дозволяє отримати аналітичне рішення рівнянь асинхронного двигуна в усталеному режимі та розширити сферу використання рівнянь асинхронного двигуна у фазних координатах.

Ключові слова: асинхронний двигун, спрощення системи рівнянь, аналітичне рішення, статичні характеристики.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. Основные успехи в развитии электромеханических систем на всех ее этапах истории тесно связаны с развитием математических моделей. Первый этап развития теории электромеханического преобразования энергии был связан с уравнениями установившихся режимов. Наиболее значительные достижения в совершенствовании электромеханических систем, которым следует отнести разработку и реализацию принципов векторного управления в электроприводах переменного тока, были достигнуты при создании математических моделей электромеханического преобразования энергии в динамических режимах для синхронных [1–4] и асинхронных [5] двигателей.

В [6–8] получила развитие теория обобщенного электромеханического преобразователя, формализующая разработку математических моделей электромеханических преобразователей с произвольным числом обмоток и их пространственным расположением.

Однако, практическое применение таких уравнений даже в простых случаях затруднено высоким порядком систем уравнений, наличием периодических коэффициентов, зависящих от углового положения ротора и т.п. В настоящее время наиболее распространенным подходом, обеспечивающим существенное упрощение систем уравнений электродвигателей переменного тока, является использование различных эквивалентных ортогональных систем координат, что позволяет снизить порядок системы дифференциальных уравнений, добиться отсутствия в уравнениях периодических коэффициентов.

Именно такой подход используется при синтезе векторных систем частотного управления асинхронными и синхронными электродвигателями [9, 10]. Наиболее важным и непреодолимым недостатком анализа электродвигателей в ортогональных системах координат является принципиальная невозможность учесть параметрическую несимметрию электродвигателя.

Поэтому развитие аналитических методов анализа работы электродвигателей в трехфазной неподвижной системе координат имеет важное значение, так как потенциально позволит расширить возможности систем векторного управления.

Целью работы является развитие аналитических методов исследования режимов работы асинхронных электродвигателей на основе системы дифференциальных уравнений в трехфазной неподвижной системе координат, полученной на основе теории обобщенного электромеханического

преобразователя.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ.

При составлении уравнений используем следующие предположения, связанные с понятием идеализированного двигателя:

- сталь двигателя ненасыщенная;
- фазные обмотки статора симметричные и равномерно сдвинутые в пространстве;
- магнитодвижущая сила (МДС) обмоток и магнитных полей распространяются синусоидально вдоль окружности воздушного зазора;
- ротор электрически и магнитно симметричный;
- реально распределенные обмотки заменяют сосредоточенными, а МДС принимается равной МДС реальной обмотки.

Многофазный АД представляют как систему магнитно связанных контуров, расположенных на статоре и роторе (рис. 1).

Рисунок 1 – Схема взаимного расположения обмоток статора и ротора многофазного АД

Уравнение электрического равновесия для статорных обмоток многофазного АД будет иметь вид:

$$\begin{cases} U_{S1} = i_{S1}R_S + \frac{d\psi_{S1}}{dt}; \\ U_{S2} = i_{S2}R_S + \frac{d\psi_{S2}}{dt}; \\ \dots \\ U_{SM} = i_{SM}R_S + \frac{d\psi_{SM}}{dt}. \end{cases} \quad (1)$$

Уравнение электрического равновесия для роторных обмоток многофазного АД будет иметь вид:

$$\begin{cases} U_{R1} = i_{R1}R_R + \frac{d\psi_{R1}}{dt}; \\ U_{S2} = i_{R2}R_R + \frac{d\psi_{R2}}{dt}; \\ \dots \\ U_{RN} = i_{RN}R_R + \frac{d\psi_{RN}}{dt}. \end{cases} \quad (2)$$

В приведенных выше уравнениях приняты следующие обозначения: U_k , I_k , R_k , $\frac{d\psi_k}{dt}$ – напряжение, ток, сопротивление и производная потокосцепления соответствующего контура.

Уравнение потокосцепления для каждой из фаз статора:

$$\Psi_k = I_k L_k + \sum_{j=1}^{j=N, j \neq k} I_j M_{kj}. \quad (3)$$

Уравнение потокосцепления для каждой из фаз ротора:

$$\Psi_k = I_k L_k + \sum_{j=1}^{j=M, j \neq k} I_j M_{kj}, \quad (4)$$

где Ψ_k , I_k , L_k – потокосцепление, ток и индуктивность k -го контура;

I_j , M_{kj} ток j -го контура и взаимная индуктивность k -го та j -го контуров.

Наибольшие осложнения при составлении математической модели вносит то, что взаимное пространственное размещение обмоток ротора и статора меняется, вследствие чего изменяется и величина взаимной индуктивности между этими обмотками. Как известно, максимальное значение взаимной индукции соответствует случаю, когда оси двух фаз совпадают.

Исходя из геометрических соображений, рис. 1, формулу для взаимной индуктивности между обмоткой ротора с номером n и обмоткой статора с номером m можно записать следующим образом:

$$M_{SmRn} = M_0 \cos \left(\gamma - \frac{2\pi(m-1)}{M} + \frac{2\pi(n-1)}{N} \right). \quad (5)$$

В общем случае уравнение потокосцепления обмотки статора с номером m можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_{Sm} &= (L_S - M_S) I_{Sm} + \\ &+ M_0 \sum_{j=1}^N \left(\cos \left(\gamma - \frac{2\pi(m-1)}{M} + \frac{2\pi(j-1)}{N} \right) I_{Rj} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение потокосцепления обмотки ротора с номером n можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_{Rn} &= (L_R - M_R) I_{Rn} + \\ &+ M_0 \sum_{j=1}^M \left(\cos \left(\gamma - \frac{2\pi(j-1)}{M} + \frac{2\pi(n-1)}{N} \right) I_{Sj} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Для случая стандартного трехфазного асинхронного двигателя уравнения (1)–(7) преобразуются к известному виду [15]:

$$\begin{cases} \psi_A = L_1 I_A + M i_a \cos(\gamma) + \\ + M i_b \cos \left(\gamma + \frac{2\pi}{3} \right) + M i_c \cos \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right); \\ \psi_B = L_1 I_B + M i_a \cos \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) + \\ + M i_b \cos(\gamma) + M i_c \cos \left(\gamma + \frac{2\pi}{3} \right); \\ \psi_C = L_1 I_C + M i_a \cos \left(\gamma + \frac{2\pi}{3} \right) + \\ + M i_b \cos \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) + M i_c \cos(\gamma). \end{cases} \quad (8)$$

Уравнения потокосцепления ротора:

$$\begin{cases} \psi_a = L_2 i_a + M I_A \cos(\gamma) + \\ + M I_B \cos \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) + M I_C \cos \left(\gamma + \frac{2\pi}{3} \right); \\ \psi_b = L_2 i_b + M I_A \cos \left(\gamma + \frac{2\pi}{3} \right) + \\ + M I_B \cos[\gamma] + M I_C \cos \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right); \\ \psi_c = L_2 i_c + M I_A \cos \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) + \\ + M I_B \cos \left(\gamma + \frac{2\pi}{3} \right) + M I_C \cos[\gamma]. \end{cases} \quad (9)$$

Приведенная система уравнений обладает явной избыточностью для случая работы АД без нулевого провода, для которой в любой момент времени сумма фазных токов равняется нулю в соответствии с первым законом Кирхгофа:

$$I_A + I_B + I_C = 0, \dots i_a + i_b + i_c = 0.$$

Приведенные соотношения выполняются в трехфазных системах без нулевого провода согласно первому закону Кирхгофа даже при наличии любой асимметрии обмоток.

Перепишем уравнения потокосцеплений (8) и (9), исключая из них ток фазы C статора и фазы C ротора соответственно. В результате мы получим упрощенные, редуцированные уравнения для фазных потокосцеплений АД в фазной системе координат, а общий порядок системы уравнений АД уменьшится на два.

Перепишем уравнение потокосцепления фазы A статора, исключая из них ток фазы C , используя первый закон Кирхгофа, получим следующее:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_A = L_1 I_A + M \left(i_a \cos(\gamma) + i_b \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) + \right. \\ \left. + (-i_a - i_b) \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right) \\ \psi_A = L_1 I_A + M \left(i_a \left(\cos(\gamma) - \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right) + \right. \\ \left. + i_b \left(\cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right) \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \quad (10)$$

Упрощая тригонометрические выражения в скобках в (10) окончательно получим:

$$\psi_A = L_1 I_A - M \sqrt{3} i_a \sin\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) - M \sqrt{3} i_b \sin \gamma. \quad (11)$$

Аналогично для фазы **B** статора:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_B = L_1 I_A + M \left(i_a \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + \right. \\ \left. + i_b \cos(\gamma) + (-i_a - i_b) \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \\ \psi_B = L_1 I_A + M \left(i_a \left(\cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \right) + \right. \\ \left. + i_b \left(\cos(\gamma) - \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \right) \\ \psi_B = L_1 I_A - M \sqrt{3} i_a \sin(\gamma) - M \sqrt{3} i_b \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right). \end{array} \right\} \Rightarrow \quad (12)$$

Аналогично для фазы **a** ротора:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_a = L_2 i_a + M \left(I_A \cos(\gamma) + I_B \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + \right. \\ \left. + (-I_A - I_B) \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \\ \psi_a = L_2 i_a + M \left(I_A \left(\cos(\gamma) - \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \right) + \right. \\ \left. + I_B \left(\cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \right) \\ \psi_a = L_2 i_a + M \sqrt{3} I_A \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) + M \sqrt{3} I_B \sin(\gamma). \end{array} \right\} \Rightarrow \quad (13)$$

Аналогично для фазы **b** ротора:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_b = L_2 i_b + M \left(I_A \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) + I_B \cos(\gamma) + \right. \\ \left. + (-I_A - I_B) \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right) \\ \psi_b = L_2 i_b + M \left(I_A \left(\cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right) + \right. \\ \left. + I_B \left(\cos(\gamma) - \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right) \right) \\ \psi_b = L_2 i_b + M \sqrt{3} I_A \sin(\gamma) - M \sqrt{3} I_B \sin\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right). \end{array} \right\} \Rightarrow \quad (14)$$

Для ясности изложения приведем редуцированные уравнения для потокосцеплений отдельных обмоток АД:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_A = L_1 I_A - M \sqrt{3} i_a \sin\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) - M \sqrt{3} i_b \sin(\gamma); \\ \psi_B = L_1 I_B + M \sqrt{3} i_a \sin(\gamma) + M \sqrt{3} i_b \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right); \\ \psi_a = L_2 i_a + M \sqrt{3} I_A \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) + M \sqrt{3} I_B \sin(\gamma); \\ \psi_b = L_2 i_b - M \sqrt{3} I_A \sin(\gamma) - M \sqrt{3} I_B \sin\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right). \end{array} \right\} \quad (15)$$

Полагая известной и постоянной угловую скорость ротора и считая токи статора и ротора синусоидальными для установившегося режима, можно получить выражения для амплитуд и фаз токов статора и ротора, а также величины электромагнитного момента АД.

Запишем выражения для фазных токов статора и ротора в установившемся режиме работы:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_A = i_1 \sin(w_1 t - \varphi_1); \\ I_B = i_1 \sin\left(w_1 t - \varphi_1 - \frac{2\pi}{3}\right); \\ i_a = i_2 \sin(w_2 t - \varphi_2); \\ i_b = i_2 \sin\left(w_2 t - \varphi_2 - \frac{2\pi}{3}\right), \end{array} \right\} \quad (16)$$

где i_1, i_2 – амплитуда тока статора и ротора соответственно; w_1, w_2 – круговая частота тока статора и ротора соответственно; φ_1, φ_2 – фазовый угол тока статора и ротора соответственно.

Обозначим угловую скорость ротора символом ω_2 .

Из теории электрических машин известно, что в установившемся режиме работы выполняется следующее соотношение:

$$w_1 = w_2 + \omega_2. \quad (17)$$

Также необходимо учитывать, что угол поворота ротора при равномерном движении в установившемся режиме можно вычислить как:

$$\gamma = \omega_2 t. \quad (18)$$

Подставляя уравнения (16) в уравнения (15) несложно получить уравнения потокосцеплений отдельных обмоток АД в установившемся режиме работы.

Так, для фазы **A** получим следующее:

$$\psi_A = L_1 I_A + \sqrt{3} i_2 M \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \omega_2 t\right) \sin[w_2 t - \varphi_2] - \right. \\ \left. - \sin[\omega_2 t] \sin\left(w_2 t - \varphi_2 - \frac{2\pi}{3}\right) \right).$$

Упростим произведения тригонометрических функций, используя известные тригонометрические тождества. После несложных преобразований и приведения подобных получим:

$$\psi_A = L_1 I_A + \frac{3}{2} M i_2 \sin(w_2 t - \varphi_2).$$

Применяя аналогичную технику к уравнениям оставшихся обмоток АД, в итоге получим следующие уравнения для потокоцеплений отдельных обмоток АД в установившемся режиме работы:

$$\begin{cases} \psi_A = L_1 I_A + \frac{3}{2} M i_2 \sin(w_1 t - \varphi_2); \\ \psi_B = L_1 I_B + \frac{3}{2} M i_2 \sin\left(w_1 t - \varphi_2 - \frac{2\pi}{3}\right); \\ \psi_a = L_2 i_a + \frac{3}{2} M i_1 \sin(w_2 t - \varphi_1); \\ \psi_b = L_2 i_b + \frac{3}{2} M i_1 \sin\left(w_2 t - \varphi_1 - \frac{2\pi}{3}\right). \end{cases} \quad (19)$$

Как видно из полученных уравнений между потокоцеплениями сохраняются сдвиги в 120 градусов, что говорит о симметрии потокоцеплений друг относительно друга.

Используя уравнения (1), (16) и (19) запишем редуцированную систему уравнений электрического равновесия в установившемся режиме. Выражения для питающих напряжений отдельных обмоток статора:

$$\begin{cases} U_A = U_0 \sin(w_1 t); \\ U_B = U_0 \sin\left(w_1 t - \frac{2\pi}{3}\right). \end{cases} \quad (20)$$

Целью дальнейших действий является определение неизвестных амплитуд токов статора и ротора i_1 , i_2 и их фазовых углов φ_1 , φ_2 при заданных параметрах питающего напряжения и угловой скорости ротора ω_2 .

После дифференцирования (19) и подстановки полученных результатов в (1) редуцированная система уравнений электрического равновесия в установившемся режиме примет вид (21).

Полученная система уравнений имеет четвертый порядок и четыре искоемых неизвестных, то есть является определенной системой.

$$\begin{cases} U_A = I_A R_s + \frac{3}{2} M w_1 i_2 \cos(w_1 t - \varphi_2) + \\ + L_1 w_1 i_1 \cos(w_1 t - \varphi_1); \\ U_B = I_B R_s + \frac{3}{2} M w_1 i_2 \cos\left(w_1 t - \varphi_2 - \frac{2\pi}{3}\right) + \\ + L_1 w_1 i_1 \cos\left(w_1 t - \varphi_1 - \frac{2\pi}{3}\right); \\ 0 = i_a R_r + \frac{3}{2} M w_2 i_1 \cos(w_2 t - \varphi_1) + \\ + L_2 w_2 i_2 \cos(w_2 t - \varphi_2); \\ 0 = i_b R_r + \frac{3}{2} M w_2 i_1 \cos\left(w_2 t - \varphi_1 - \frac{2\pi}{3}\right) + \\ + L_2 w_2 i_2 \cos\left(w_2 t - \varphi_2 - \frac{2\pi}{3}\right). \end{cases} \quad (21)$$

Запишем систему уравнений (21) для момента времени $t = 2\pi n$, $n = 0 \dots \infty$. Для определенности

примем $t = 0$, что не является критичным допущением с учетом периодичности синусоидальных токов и напряжений. В момент времени $t = 0$ мгновенные значения питающих напряжений и токов отдельных обмоток будут равны:

$$\begin{cases} U_{A0} = 0; \\ U_{B0} = -U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right); \\ I_{A0} = -i_1 \sin(\varphi_1); \\ I_{B0} = -i_1 \sin\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right); \\ i_{a0} = -i_2 \sin(\varphi_2); \\ i_{b0} = -i_2 \sin\left(\varphi_2 + \frac{2\pi}{3}\right). \end{cases} \quad (22)$$

Тогда система (21) с учетом (22) для момента времени $t = 0$ может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} 0 = -i_1 \sin(\varphi_1) R_s + \frac{3}{2} M w_1 i_2 \cos(\varphi_2) + \\ + L_1 w_1 i_1 \cos(\varphi_1); \\ -U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -i_1 \sin\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right) R_s + \\ + \frac{3}{2} M w_1 i_2 \cos\left(\varphi_2 + \frac{2\pi}{3}\right) + L_1 w_1 i_1 \cos\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right); \\ 0 = -i_2 \sin(\varphi_2) R_r + \frac{3}{2} M w_2 i_1 \cos(\varphi_1) + \\ + L_2 w_2 i_2 \cos(\varphi_2); \\ 0 = -i_2 \sin\left(\varphi_2 + \frac{2\pi}{3}\right) R_r + \frac{3}{2} M w_2 i_1 \cos\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right) + \\ + L_2 w_2 i_2 \cos\left(\varphi_2 + \frac{2\pi}{3}\right). \end{cases} \quad (23)$$

Для отыскания токов и фазовых углов необходимо решить полученную систему нелинейных уравнений. Для упрощения системы уравнений и сведения ее к системе линейных алгебраических уравнений введём следующую замену переменных:

$$\begin{cases} i_1 \sin(\varphi_1) = X_1; \\ i_1 \cos(\varphi_1) = X_2; \\ i_2 \sin(\varphi_2) = Y_1; \\ i_2 \cos(\varphi_2) = Y_2. \end{cases} \quad (24)$$

Исходное уравнение для фазы статора А

$$0 = -i_1 \sin(\varphi_1) R_s + \frac{3}{2} M \cos(\varphi_2) w_1 i_2 + \cos(\varphi_1) L_1 w_1 i_1. \quad (25)$$

Применяя указанную выше замену переменных приведём это уравнение к такому виду:

$$0 = -X_1 R_A + X_2 L_1 w_1 + \frac{3}{2} M Y_2 w_1. \quad (26)$$

Исходное уравнение для фазы статора **B**:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}U_0 = -i_1 R_s \sin\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{3}{2}Mw_1 i_2 \cos\left(\varphi_2 + \frac{2\pi}{3}\right) + L_1 w_1 i_1 \cos\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right). \quad (27)$$

Учитывая следующие тригонометрические тождества

$$\begin{aligned} \sin\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\varphi_1) - \frac{1}{2}\sin(\varphi_1); \\ \cos\left(\varphi_2 + \frac{2\pi}{3}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\varphi_2) - \frac{1}{2}\cos(\varphi_2) \end{aligned} \quad (28)$$

получаем уравнение для фазы статора **B** в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}U_0 &= -i_1 R_s \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\varphi_1) - \frac{1}{2}\sin(\varphi_1) \right) - \\ &- \frac{3}{2}Mw_1 i_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\varphi_2) + \frac{1}{2}\cos(\varphi_2) \right) - \\ &- L_1 w_1 i_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\varphi_1) + \frac{1}{2}\cos(\varphi_1) \right) = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}R_s X_2 + \frac{1}{2}R_s X_1 - L_1 w_1 \frac{\sqrt{3}}{2}X_1 - \\ &- \frac{1}{2}L_1 w_1 X_2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}Mw_1 Y_1 - \frac{3}{4}Mw_1 Y_2. \end{aligned} \quad (29)$$

После приведения подобных членов получим:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}U_0 &= X_1 \left(\frac{1}{2}R_s - L_1 w_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \\ &+ X_2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}R_s - \frac{1}{2}L_1 w_1 \right) - \\ &- \frac{3\sqrt{3}}{4}Mw_1 Y_1 - \frac{3}{4}Mw_1 Y_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Исходное уравнение для фазы ротора **a**:

$$0 = -i_2 R_r \sin(\varphi_2) + \frac{3}{2}Mw_2 i_1 \cos(\varphi_1) + L_2 w_2 i_2 \cos(\varphi_2). \quad (31)$$

Применяя замену переменных (24) получаем

$$0 = \frac{3}{2}Mw_2 X_2 - R_a Y_1 + L_2 w_2 Y_2. \quad (32)$$

Исходное уравнение для фазы ротора **b**:

$$0 = -i_2 R_r \sin\left(\varphi_2 + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{3}{2}Mw_2 i_1 \cos\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right) + L_2 w_2 i_2 \cos\left(\varphi_2 + \frac{2\pi}{3}\right). \quad (33)$$

Учитывая тригонометрические тождества (28) получим:

$$\begin{aligned} 0 &= -i_2 R_r \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\varphi_2) - \frac{1}{2}\sin(\varphi_2) \right) - \\ &- \frac{3}{2}Mw_2 i_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\varphi_1) + \frac{1}{2}\cos(\varphi_1) \right) - \\ &- L_2 w_2 i_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\varphi_2) + \frac{1}{2}\cos(\varphi_2) \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Применяя замену переменных (24) получаем:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}R_r Y_2 + \frac{1}{2}R_r Y_1 - \frac{3\sqrt{3}}{4}Mw_2 X_1 - \\ &- \frac{3}{4}Mw_2 X_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}L_2 w_2 Y_1 - \frac{1}{2}L_2 w_2 Y_2. \end{aligned} \quad (35)$$

После приведения подобных членов получим:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{3\sqrt{3}}{4}Mw_2 X_1 - \frac{3}{4}Mw_2 X_2 + \\ &+ Y_1 \left(\frac{1}{2}R_r - \frac{\sqrt{3}}{2}L_2 w_2 \right) + Y_2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}R_r - \frac{1}{2}L_2 w_2 \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Запишем получившиеся уравнения в виде системы:

$$\begin{cases} 0 = -X_1 R_s + X_2 L_1 w_1 + \frac{3}{2}Mw_1 Y_2; \\ \frac{\sqrt{3}}{2}U_0 = X_1 \left(\frac{1}{2}R_s - \frac{\sqrt{3}}{2}L_1 w_1 \right) + \\ + X_2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}R_s - \frac{1}{2}L_1 w_1 \right) - \\ - \frac{3\sqrt{3}}{4}Mw_1 Y_1 - \frac{3}{4}Mw_1 Y_2; \\ 0 = \frac{3}{2}Mw_2 X_2 - R_a Y_1 + L_2 w_2 Y_2; \\ 0 = -\frac{3\sqrt{3}}{4}Mw_2 X_1 - \frac{3}{4}Mw_2 X_2 + \\ + Y_1 \left(\frac{1}{2}R_r - \frac{\sqrt{3}}{2}L_2 w_2 \right) + Y_2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}R_r - \frac{1}{2}L_2 w_2 \right). \end{cases} \quad (37)$$

Полученная система уравнений представляет собой систему линейных алгебраических уравнений четвертого порядка.

Вектор-столбец свободных членов:

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}U_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Вектор-столбец решений:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Матрица коэффициентов:

$$A = \begin{bmatrix} -R_s & L_1 \cdot w_1 & 0 & \frac{3}{2} M \cdot w_1 \\ \frac{1}{2} R_s - \frac{\sqrt{3}}{2} L_1 \cdot w_1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} R_s - \frac{1}{2} L_1 \cdot w_1 & -\frac{3\sqrt{3}}{4} M \cdot w_1 & -\frac{3}{4} M \cdot w_1 \\ 0 & \frac{3}{2} M \cdot w_2 & -R_r & L_2 \cdot w_2 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} M \cdot w_2 & -\frac{3}{4} M \cdot w_2 & \frac{1}{2} R_r - \frac{\sqrt{3}}{2} L_2 \cdot w_2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} R_r - \frac{1}{2} L_2 \cdot w_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Согласно [7], электромагнитный момент асинхронного двигателя может быть вычислен по формуле:

$$T_E = I_A I_a + I_B I_b + I_C I_c + I_A I_b + I_B I_c + I_C I_a + I_A I_c + I_B I_a + I_C I_b. \quad (41)$$

Учитывая (16), мы можем получить уравнение для электромагнитного момента АД.

После выполнения значительного объема тригонометрических и алгебраических преобразований, окончательно получим следующее выражение:

$$T_E = -\frac{9}{4} M \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2) I_1 I_2. \quad (42)$$

Проверим эту формулу по теории размерностей.

Единица измерения электромагнитного момента T_e – [Н·м]. Как известно, [Н]=[кг·м·с⁻²]. Единица измерения индуктивности, генри, через другие единицы измерения СИ выражается следующим образом: [Гн]=[В·с·А⁻¹]=[кг·м²·с⁻²·А⁻²].

Тогда размерность правой части уравнения электромагнитного момента будет равна [Гн·А²]=[кг·м²·с⁻²·А⁻²·А²]=[кг·м²·с⁻²]=[кг·м·с⁻²·м]=[Н·м]. Таким образом, полученная формула удовлетворяет требованиям теории размерностей.

Для расчетов был использован асинхронный двигатель со следующими параметрами: номинальная мощность 110 кВт; номинальное напряжение 380 В; номинальный ток статора 210 А; номинальная частота вращения 3000 об/мин; номинальный к.п.д. 90 %; номинальный коэффициент мощности 0,89; перегрузочная способность 2,3.

Реализующий алгоритм текст программы на m-языке программирования Matlab приведен ниже.

Листинг 1.

```
U0 = 220*sqrt(2); % Амплитуда фазного напряжения
w1 = 100*pi; % Круговая частота напряжения сети
RA = 0.462; % Активные сопротивления статора
ra = 0.312; % Активные сопротивления ротора
I1s = 0.002645; I2s = 0.004017;
M = -0.0546;
L1 = I1s-M*1.5;
L2 = I2s-M*1.5;
cc = sqrt(3)/2; ss=3*sqrt(3)/4;
sq2 = sqrt(2);
k = 51;
Is = zeros(1, k); Ir = zeros(1, k); % Амплитуды токов
статора и ротора
```

As = zeros(1, k); Ar = zeros(1, k); % Фазовые углы токов статора и ротора

Te1 = zeros(1, k); % Электромагнитный момент

Wrot = zeros(1, k); % Угловая скорость ротора в цикле for m = 1:k

h = w1*(m-1)/(k-1); Wrot(m) = h;

wr = h; % Угловая скорость ротора, 1/с

w2 = w1-wr; % Круговая частота напряжения ротора

A = zeros(4,4); % Создаем пустую матрицу коэффициентов

A(1,1)=-RA; A(1,2)=L1*w1;

A(1,3)=0; A(1,4)=1.5*M*w1;

A(2,1)=0.5*RB-cc*L1*w1; A(2,2)=-cc*RB-0.5*L1*w1;

A(2,3)=-ss*M*w1; A(2,4)=-0.75*M*w1;

A(3,1)=0; A(3,2)=1.5*M*w2;

A(3,3)=-ra; A(3,4)=L2*w2;

A(4,1)=-ss*M*w2; A(4,2)=-0.75*M*w2;

A(4,3)=0.5*rb-cc*L2*w2; A(4,4)=-cc*rb-0.5*L2*w2;

B = [0; cc*U0; 0; 0];

X=A\B;

I1 = sqrt(X(1)*X(1)+X(2)*X(2));

I2 = sqrt(X(3)*X(3)+X(4)*X(4));

fi1 = atan(X(1)/X(2)); fi2 = atan(X(3)/X(4));

Te=-9*M*sin(fi1-fi2)*I1*I2/4;

if (isnan(Te) == 1)

Te = 0;

end

Is(m) = I1/sq2; Ir(m) = I2/sq2;

As(m) = fi1; Ar(m) = fi2;

Te1(m) = Te;

end

% Строим графики

figure;

grid on; hold on; % Эта команда позволяет добавить

график к уже существующему

plot(Is, Wrot, '-k'); plot(Ir, Wrot, '-k');

title('Скоростные характеристики w = f(I1),

w = f(I2)');

xlabel('I1, I2, о.е.');

ylabel('w, 1/c');

figure;

grid on; hold on; % Эта команда позволяет добавить

график к уже существующему

plot(As, Wrot, '-k'); plot(Ar, Wrot, '-k');

title('Фазовые углы w = f(I1), w = f(I2)');

xlabel('Фазовые углы fi1, fi2, рад');

ylabel('w, 1/c');

figure;

grid on; hold on; % Эта команда позволяет добавить

график к уже существующему

plot(Te1, Wrot, '-k');

title('Механические характеристики w = f(Te)');

xlabel('Te, Н*м');

ylabel('w, 1/c');

Результаты выполненных расчетов приведены на рис. 2.

Рисунок 2 – Результаты расчета статических характеристик асинхронного двигателя в MATLAB:
а – электромеханические характеристики АД по току статора и току ротора; б – зависимость фазовых углов токов статора и ротора; в – механическая характеристика АД; г – сравнительный расчет механических характеристик АД, выполненных различными методами

ВЫВОДЫ. Упрощение системы дифференциальных уравнений асинхронного двигателя в трехфазной неподвижной системе координат путем исключения одного из токов на основе первого закона Кирхгофа позволило снизить порядок системы уравнений асинхронного двигателя и получить аналитическое решение этих уравнений для установившегося режима работы. Полученное решение позволило разработать методику расчета статических характеристик асинхронного двигателя. Выполненные расчеты показали совпадение результатов с известными апробированными методами расчета статических характеристик.

ЛІТЕРАТУРА

1. Concordia C. Synchronous Machines. Theory and Performance. John Wiley and Sons, New York, 1951.
2. Kron G. Equivalent Circuits of Electric Machinery. John Wiley and Sons, New York, 1951.

3. Горев А. А. Переходные процессы синхронной машины, Госэнергоиздат, 1950.

4. Park R. H. Two-Reaction Theory of Synchronous Machines – Generalized Method of Analysis – Part I. *Trans. IEEE*. 1929. Vol. 48. P. 716–727.

5. Clarke E. Circuit Analysis of AC Power Systems, Vol. 1 – Symmetrical and Related Components, John Wiley and Sons, 1943.

6. Важнов А. И. Основы теории переходных процессов синхронной машины. Москва-Ленинград : Государственное Энергетическое Издательство, 1960. 312 с.

7. Копылов И. П. Математическое моделирование электрических машин. Москва : Высш. Школа, 2001. 327 с.

8. Чорний О. П., Толочко О. І., Титюк В. К., Родькін Д. Й., Чекавський Г.С. Математичні моделі та особливості чисельних розрахунків динаміки

электроприводів з асинхронними двигунами: монографія. Кременчук : ПП Щербатих О. В, 2016. 302 с.

9. Nguyen Phung Quang, Jörg-Andreas Dittrich, Vector Control of Three-Phase AC Machines: System

Development in the Practice. Springer, 2015. P. 364

10. Boldea I., Nasar S. A., Vector Control of AC Drives, CRC Press, 1992. P. 256.

APPLICATION OF THE GENERALIZED ELECTROMECHANICAL CONVERTER THEORY TO ANALYSIS OF THE STATIC CHARACTERISTICS OF AN INDUCTION MOTOR

V. Tytiuk, M. Baranovska, Zh. Rozhnenko

Kyryvi Rih National University

vul. Vitalia Matusevicha, 11, 50027, Ukraine.

E-mail: tytiuk@knu.edu.ua, baranovska@knu.edu.ua, rozhnenko@knu.edu.ua

O. Chornyi, E. Burdilna

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University

vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, 39600, Ukraine. E-mail: alekseii.chornyi@gmail.com, evburdilnaya@gmail.com

B. Kobylanskyi

Educational-scientific Professionally-pedagogical Institute Ukrainian Engineering Pedagogics Academy

vul. Myru, 5, Bahmut, 84511, Ukraine. E-mail: b.b.kobylanskyi@gmail.com

Purpose. The paper is devoted to the development of a methodology for calculating the static characteristics of an asynchronous electric drive using the methods of the theory of a generalized electromechanical converter. **Originality.** Simplification of the model of an induction motor based on the theory of a generalized electromechanical converter is achieved by reducing the order of the system of differential equations by using the first Kirchhoff's law. An analytical solution is obtained for a simplified system of equations for an induction motor for a steady state operation. **Methodology.** When solving the set tasks, the general methods of physics, theoretical electrical engineering, mathematical analysis and computational mathematics were used. The numerical solution of the equations of the mathematical model and visualization of the results obtained are performed in the MATLAB®/Simulink environment. **Results.** A generalized mathematical model of an induction motor with an arbitrary number of stator and rotor windings in phase coordinates is considered; to simplify the system of equations for an induction motor, it is proposed to reduce its order using the first Kirchhoff's law. For a simplified system of equations for an induction motor in phase coordinates, an analytical solution is obtained in a steady state. The results of calculating the static characteristics of an asynchronous motor are presented, a comparative calculation of the created method for calculating the static characteristics with the existing methods is performed, which confirms its performance. **Practical value.** Simplification of the system of equations of an induction motor using the first Kirchhoff's law allows you to obtain an analytical solution to the equations of an induction motor in a steady state and expand the scope of using the equations of an induction motor in phase coordinates. References 7, figures 10.

Key words: induction motor, simplify the equations, analytical solution, static characteristics.

REFERENCES

1. Concordia, C. (1951). *Synchronous Machines. Theory and Performance*. John Wiley and Sons, New York.

2. Kron, G. (1951). *Equivalent Circuits of Electric Machinery*, John Wiley and Sons, New York.

3. Gorev, A. A. (1950). *Perekhodnye processy sinhronnoj mashiny [Synchronous machine transients]*. Gosenergoizdat. [in Russian]

4. Park, R. H. (1929). Two-Reaction Theory of Synchronous Machines – Generalized Method of Analysis – Part I. *Trans. IEEE*, 48, 716–727.

5. Clarke, E. (1943). *Circuit Analysis of AC Power Systems, v.1 – Symmetrical and Related Components*, John Wiley and Sons.

6. Vazhnov, A. I. (1960). *Osnovy teorii perekhodnyh processov sinhronnoi mashiny [Fundamentals of the theory of transient processes of a synchronous machine]*. Moscow-Leningrad: Gosudarstvennoe Energeticheskoe Izdatelstvo. [in Russian]

7. Kopylov, I. P. (2001). *Matematicheskoe modelirovanie elektricheskikh mashin [Mathematical modeling of electrical machines]*. Moscow: Vyssh. Shkola. [in Russian]

8. Chornyi, O., Tolochko, O., Tytyuk, V., Rodkin, D., & Chekavskiy, G. (2016). *Matematichni modeli ta osoblivosti chiselnikh rozrakhunkiv dinamiki elektroprivodiv z asinkhronnimi dvigunami [Mathematical models and specifics of numerical calculations of dynamic characteristics of electric drives with induction motors]*. Kremenchuk: PE Shcherbatykh O.V. [in Ukrainian]

9. Nguyen, Phung Quang, & Jörg-Andreas, Dittrich (2015). *Vector Control of Three-Phase AC Machines: System Development in the Practice*.

10. Boldea, I., & Nasar, S. A. (1992). *Vector Control of AC Drives*. CRC Press.

Стаття надійшла 18.05.2020.