**АВТОМАТИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЧАСТИ
ЭЛЕКТРОМЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ****В. К. Тытюк, М. Л. Барановская**

Криворожский национальный университет

ул. Виталия Матусевича, 11, г. Кривой Рог, 50027, Украина. E-mail: dinalt2006@gmail.com

А. П. Черный, Е. В. Бурдильная

Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского

ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 39600, Украина. E-mail: ochornyi@ukr.net, evburdilnaya@gmail.com

Работа посвящена исследованию возможностей автоматизации создания математической модели механической подсистемы электромехатронных устройств, совместимых с полной математической моделью целостной системы. Предложен автоматизированный метод формирования системы дифференциальных уравнений механической части электромехатронной системы на основе уравнений Лагранжа второго рода с использованием методов символьных вычислений в MATLAB. В исследовании поставленных задач использовались общие методы математики, физики, теоретической механики и вычислительной математики. Составление уравнений математической модели механической подсистемы основано на применении апробированных законов механики. Решение полученных уравнений и визуализация полученных результатов выполнена в среде MATLAB/Simulink. Разработана методика автоматизированного формирования системы дифференциальных уравнений сложной многотельной механической системы электромехатронной системы на основе уравнений Лагранжа второго рода с применением символьных вычислений в MATLAB. Показана реализация предложенного метода на примере механизма двухзвенного плоского манипулятора. Приведены сравнительные результаты математического моделирования полученной математической модели и модели того же устройства, построенной с использованием блоков библиотеки Simscape Multibody. Использование предложенного подхода позволит повысить качество проектирования электромехатронных систем, а также реализовать идеи вычислительного мышления при подготовке специалистов-электромехаников.

Ключевые слова: электромехатронная система, уравнения Лагранжа, мультифизичное моделирование, MATLAB.

**АВТОМАТИЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ ЧАСТИНИ
ЕЛЕКТРОМЕХАТРОННИХ СИСТЕМ****В. К. Титюк, М. Л. Барановська**

Криворізький національний університет

вул. Віталія Матусевича, 11, м. Кривий Ріг, 50027, Україна. E-mail: dinalt2006@gmail.com

О. П. Чорний, Є. В. Бурдільна

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського

вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна. E-mail: ochornyi@ukr.net, evburdilnaya@gmail.com

Робота присвячена дослідженню можливостей автоматизації створення математичної моделі механічної підсистеми електромехатронних пристроїв, сумісних з повною математичною моделлю цілісної системи. Запропоновано автоматизований метод формування системи диференціальних рівнянь механічної частини електромехатронної системи на основі рівнянь Лагранжа другого роду з використанням методів символьних обчислень в MATLAB. У дослідженні поставлених завдань використовувалися загальні методи математики, фізики, теоретичної механіки та обчислювальної математики. Складання рівнянь математичної моделі механічної підсистеми засноване на застосуванні апробованих законів механіки. Рішення отриманих рівнянь і візуалізація отриманих результатів виконана в середовищі MATLAB / Simulink. Розроблено методику автоматизованого формування системи диференціальних рівнянь складної багатотільної механічної системи електромехатронної системи на основі рівнянь Лагранжа другого роду з застосуванням символьних обчислень в MATLAB. Показана реалізація запропонованого методу на прикладі механізму двохсегментного плоского манипулятора. Наведено порівняльні результати математичного моделювання отриманої математичної моделі і моделі того ж пристрою, побудованої з використанням блоків бібліотеки Simscape Multibody. Використання запропонованого підходу дозволить підвищити якість проектування електромехатронних систем, а також реалізувати ідеї обчислювального мислення при підготовці фахівців-електромеханіків.

Ключові слова: електромехатронна система, рівняння Лагранжа, мультифізичне моделювання, MATLAB.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. Одним из приоритетных направлений развития электромеханики на современном этапе является создание и внедрение электромехатронных систем автоматического управления на базе достижений в области механики, автоматики, электроники и информатики [1, 2]. Развитие

электромехатроники является определяющим в формировании технологического базиса высокоразвитых стран. Электромехатроника обуславливает состояние и уровень развития оборонных отраслей промышленности, имеет важное значение для обеспечения национальной безопасности, определяет техниче-

ский уровень и технологический прогресс во всех сферах экономики [3].

Согласно [4], основная концепция проектирования электромехатронных устройств состоит в согласованности проектирования физически разнородных всех компонентов системы.

Такой подход выдвигает особые требования как к характеристикам САД-системы, которая должна содержать программные модули формирования и исследования математических моделей динамики, как отдельных функциональных частей, так и системы в целом. С другой стороны, разработка и проектирование электромехатронных систем выдвигает специальные требования к подготовке специалистов в данной области, выдвигая на передний план концепцию развития у обучаемых вычислительного мышления (computational thinking) [5, 6]. Вычислительное мышление использует решение сложной проблемы путем разбиения на ряд небольших, более управляемых проблем (декомпозиция). Каждую из этих небольших проблем можно затем рассмотреть индивидуально, учитывая, как подобные проблемы были решены ранее (использование прототипов), и сосредоточив внимание только на важных деталях, игнорируя при этом несущественную информацию (абстракция). Далее могут быть разработаны простые шаги или правила для решения каждой из более мелких проблем (алгоритмы). Наконец, эти простые шаги или правила используются для программирования компьютера, чтобы помочь решить сложную проблему наилучшим образом [7].

Одним из основных направлений исследований в области электромехатроники и робототехники является исследование кинематики, динамики электромехатронных и робототехнических систем и их моделирование [8], что обуславливается постоянным усложнением механической конструкции электромехатронных систем.

В задачах автоматизации математического моделирования и исследовании электромехатронных систем применяют такие формы представления математических моделей динамики [9]:

- система дифференциальных уравнений;
- связный граф;
- структурно-динамическая схема.

Дифференциальные уравнения динамики являются общепризнанной формой представления математической модели электромехатронной системы или ее отдельных подсистем.

В задачах моделирования динамики мехатронных систем перспективным является подход, состоящий в том, что динамика исполнительного механизма представляется как динамика изображающей точки в римановом пространстве. Метрика риманова пространства в данном случае определяется из условия равенства мгновенных значений кинетической энергии изображающей точки и кинетической энергии многозвенного механизма в каждой точке пространства [10].

Основные известные методы составления диф-

ференциальных уравнений динамики многозвенных исполнительных механизмов таковы:

- метод Лагранжа, основанный на уравнениях Лагранжа II рода;
- модифицированный метод Лагранжа, основанный на рекуррентном описании кинематики механической системы;
- метод Эйлера, основанный на применении второго закона динамики и принципа Даламбера;
- метод Гаусса, основанный на принципе наименьшего принуждения;
- метод связанных графов.

Метод Лагранжа с описанием кинематики матрицами однородных преобразований координат является наиболее часто используемым на практике. Уравнения, полученные этим методом, обеспечивают строгое описание динамики и могут быть использованы для разработки законов управления в пространстве обобщенных координат [11]. Однако вывод уравнений движения голономных механических систем методом Лагранжа по мере усложнения конструкции механической подсистемы, сопряжен со значительными сложностями

Целью работы является автоматизация создания математической модели механической подсистемы электромехатронных устройств, совместимых с полной математической моделью целостной системы.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ.
Уравнения Лагранжа второго рода для механической системы

Рассмотрим механическую систему, имеющую s степеней свободы, на которую наложены стационарные, идеальные, голономные связи.

В этом случае положение системы определяется s обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_s$. Кинетическая энергия такой системы является функцией обобщенных координат $q_1, q_2, \dots, q_s$, обобщенных скоростей, равных производной обобщенных координат по времени.

Для такой системы можно записать s уравнений движения, которые называются уравнениями Лагранжа второго рода или дифференциальными уравнениями движения в обобщенных координатах [12]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, j = 1 \dots s, \quad (1)$$

где Q_j – обобщенная сила. Для того, чтобы составить уравнение (1), необходимо выразить кинетическую энергию системы через обобщенные координаты и обобщенные скорости.

Уравнения Лагранжа второго рода представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат и требуют аналитического вычисления 3-х первых производных кинетической энергии по обобщенным координатам, обобщенным скоростям и времени. При усложнении конструкции механической части электромехатронной системы,

особенно для трехмерного варианта механизмов, эта задача далеко не тривиальна, что затрудняет применение уравнений Лагранжа, ограничивает область их применения.

Существенное упрощение в области математического моделирования динамики сложных механических систем может быть достигнуто за счет применения специализированных CAD-систем, автоматизирующих создание уравнений движения.

В современных CAD-системах, как правило, реализован монодисциплинарный подход: методики мультифизического моделирования слабо используются в существующих CAD-системах.

С точки зрения проектирования электромехатронных систем наиболее предпочтительным вариантом такой CAD-системы является программа MATLAB/Simulink. MATLAB содержит специализированные библиотеки визуального моделирования современных электроприводов и их преобразовательных устройств PowerSystems, библиотеку Simscape Multibody для создания механической части мультифизических моделей и моделирования многомерных сложных механических систем, а также развитые средства для программирования микропроцессорных управляющих устройств, что позволяет выполнять все задачи проектирования и анализа электромехатронных систем в единой программной среде.

Рассмотрим некоторые варианты применения MATLAB/Simulink для автоматизации математического моделирования сложных механических систем.

Simscape Multibody предоставляет визуальную среду моделирования для трехмерных механических систем. С помощью этой библиотеки можно моделировать многотельные системы, используя блоки, представляющие тела заданной геометрической формы, различные типы соединений отдельных тел, источники усилий и датчики. Simscape Multibody автоматически формирует и решает уравнения движения для полной механической системы.

В качестве элементарного примера приведем математическую модель управляемого физического маятника – двухтельной механической системы с одной вращательной степенью свободы (рис. 1).

Simscape Multibody позволяет задавать параметры модели с использованием переменных и выражений MATLAB. Simscape Multibody позволяет интегрировать в модель гидравлические, электрические, пневматические и другие физические системы, используя компоненты, семейства продуктов Simscape.

На рис. 2 приведены временные диаграммы работы управляемого маятника, полученные с помощью данной модели.

Отметим, что задача разработки виртуального мира для сложной механической системы, тем более со сложными по конфигурации деталями, очень трудоемкая и требует специальной подготовки, не связанной с основной целью – исследованием меха-

низма и его проектированием. Однако такая визуализация существенно повышает наглядность процесса. Это стало одной из причин, побудивших компанию MathWorks разработать CAD-транслятор, который обеспечивает построение модели механизма на основе его твердотельной модели, созданной в среде автоматизированного проектирования, например, в SolidWorks. При использовании CAD-транслятора модель механизма может наследовать и графическое представление его деталей.

а)

б)

в)

Рисунок 1 – Реализация математической модели управляемого физического маятника в MATLAB Simscape Multibody:

а) – схема модели; б), в) – диалоговые окна настройки подставки маятника и движущейся части маятника соответственно

а)

б)

Рисунок 2 – Временные диаграммы (а) и фазовый портрет (б) вынужденных колебаний управляемого физического маятника с трением

На рис. 3 представлена математическая модель промышленного робота манипулятора KUKA типа KR 10 R900 sixx. Отдельные детали робота были спроектированы в программе SolidWorks, а затем их массогабаритные характеристики были импортированы в Simscape Multibody.

Такой подход существенно сокращает время разработки моделей механических систем, позволяет сконцентрироваться на задачах управления движением электромехатронных систем.

Другой подход основан на непосредственном использовании уравнений Лагранжа второго рода. При этом составление дифференциальных уравнений движения для заданной конструкции механической подсистемы выполняется с помощью встроенных средств символьной математики. Исследователь должен задать систему обобщенных координат, записать в символьном виде уравнение для полной энергии механической системы, а наиболее трудоемкие операции аналитического дифференцирования могут быть выполнены в автоматическом режиме с применением оператора diff().

Также автоматически генерируется блок подсистемы, реализующей полученные уравнения движения, который может быть непосредственно использован в Simulink-моделях.

а)

б)

Рисунок 3 – Реализация математической модели робота KUKA KR 10 R900 sixx в MATLAB Simscape Multibody: а) – схема модели; б) – визуализация робота-манипулятора, полученная с помощью Mechanics Explorer

Авторами были разработаны MATLAB live script, которые демонстрируют использование предложенного подхода для анализа динамики трех- и двухзвенного плоского маятника (рис. 4).

Рисунок 4 – Обобщенные координаты и расчетная схема двухзвенного маятника

На рис. 5 представлена реализация математической модели двухзвенного плоского маятника со сгенерированной подсистемой, реализующей вычисления по уравнениям Лагранжа.

Также была разработана реализация модели двухзвенного маятника с использованием библиотеки Simscape Multibody, выполнен сравнительный анализ работы этих двух моделей, представленный

на рис. 6.

Расчетные результаты демонстрируют полную идентичность данных, полученных на моделях различного типа.

Рисунок 5 – Структурная схема математической модели двухзвенного маятника

Рисунок 6 – Сравнительный анализ моделей двухзвенного плоского маятника, использующих различные подходы для их создания

ВЫВОДЫ. Обосновано, что успешная разработка и проектирование современных электромехатронных систем тесно связана с внедрением идей вычислительного мышления в процесс обучения современных специалистов-электромехаников.

В настоящей работе обосновывается важность мультидисциплинарного подхода к разработке электромехатронных систем. В качестве CAD-системы для разработки и исследования электромехатронных систем предложено использовать MATLAB/Simulink с необходимыми расширениями.

В работе рассмотрены методы автоматизации создания математической модели сложных механических систем, которые являются важной конструктивной особенностью современных электромехатронных систем. Предложен подход к автоматизации создания системы дифференциальных уравнений сложных механических систем на основе уравнений Лагранжа второго рода с применением символьных вычислений в среде MATLAB. Показано, что работа сформированной таким способом модели двухзвенного плоского маятника совпадает с работой модели, составленной из блоков Simscape Multibody.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kopytenko Yu., Sergushin P., Petrishchev M., Levanenko V., Perechesova A. The device for manufacturing torsion bars with helical anisotropy UISAT-1 // *Key Engineering Materials*. – Vol. 437 (2010). – Trans Tech Publications, Switzerland, 2010. – PP. 625–628.
2. Bishop, Robert H. *Mechatronics: an introduction*. – CRC Press, 2006.
3. Robert Munnig Schmidt, Georg Schitter, Adrian Rankers and Jan van Eijk. *The Design of High Performance Mechatronics* – 2nd revised edition. – IOS Press, 2014.
4. Старостин А.К., Чинаев П.И. *Мехатроника мобильных агрегатов*. – Киев: УкрНИИИТИ Госплана УССР, 1991. – 56 с.
5. Wing Jeanette M. *Computational thinking* // *Communications of the ACM*. – 2006. – Vol. 49. – Iss. 3. – PP. 33–35. – DOI:10.1145/1118178.1118215.
6. Easterbrook Steve. "From Computational Thinking to Systems Thinking: A conceptual toolkit for sustainability computing" // *Proceedings of the 2nd international conference ICT for Sustainability*. – 2014. – DOI:10.2991/ict4s-14.2014.28.
7. Stephen Wolfram. *How to Teach Computational Thinking*. – Режим доступа: <http://blog.stephenwolfram.com/2016/09/how-to-teach-computational-thinking/>
8. Коростелев В.Ф. Первая Всероссийская научно-техническая конференция «Мехатроника, автоматизация, управление»: итоги Первой Всероссийской научно-технической конференции «Мехатроника, автоматизация, управление» [Электронный документ]. – М.: Изд-во «Новые технологии», 2004. – 4 с. – Режим доступа: http://novtex.ru/mech/vlad_sum.htm
9. Rankers, Adrian M. *Machine Dynamics in Mechatronic Systems*. – University Twente, 1997.
10. Подураев Ю.В. *Мехатроника: основы, методы, применение*. – М.: Машиностроение, 2007. – 256 с.
11. Ермолов И.Л. *Синтез движений технологических роботов для операций с движущимися объектами на основе метода компьютерной алгебры: автореф. дис. ... канд. техн. наук: защищена 17.06.1997*. – М.: Изд-во МГТУ «СТАНКИН», 1997. – 19 с.
12. Яблонский А.А., Никифорова В.М. *Курс теоретической механики*. – М.: «Интеграл-Пресс», 2007. – 551 с.

AUTOMATION OF MATHEMATICAL MODELING OF THE MECHANICAL PART OF ELECTROMECHATRONIC SYSTEMS

V. Tytiuk, M. Baranovskaya

Kyryvi Rih National University

ul. Vitalia Matusevicha, 11, 50027, Ukraine. E-mail: dinalt2006@gmail.com

A. Chornyi, E. Burdilnaya

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University

ul. Pervomayskaya, 20, Kremenchug, 39600, Ukraine. E-mail: ochornyi@ukr.net, evburdilnaya@gmail.com

Purpose. The article is devoted to the study of the possibilities of automating the creation of a mathematical model of the mechanical subsystem of electro-mechatronic devices compatible with the full mathematical model of an integral system. **Originality.** An automated method is proposed for forming a system of differential equations of the mechanical part of an electromechatronic system based on the Lagrange equations of the second kind using the methods of symbolic calculations in MATLAB. **Methodology.** In the study of the tasks used, the general methods of mathematics, physics, theoretical mechanics and computational mathematics were used. The compilation of equations of a mathematical model of a mechanical subsystem is based on the application of approved laws of mechanics. The solution of the obtained equations and the visualization of the obtained results were performed in the MATLAB/Simulink environment. **Results.** A technique has been developed for the automated formation of a system of differential equations of a complex multi-body mechanical system of an electro-mechatronic system based on the Lagrange equations of the second kind using symbolic calculations in MATLAB. The implementation of the proposed method is shown on the example of the mechanism of a two-link flat arm. The comparative results of mathematical modeling of the obtained mathematical model and the model of the same device, built using the blocks of the Simscape Multibody library, are given. **Practical value.**

Using the proposed approach will improve the quality of design of electro-mechatronic systems, allows you to implement the ideas of computational thinking during the training of electricians. References 12, figures 6.

Key words: electromechatronic system, Lagrange equations, multiphysical modeling, MATLAB.

REFERENCES

1. Kopytenko, Yu., Sergushin, P., Petrishchev, M., Levanenko, V. and Perechesova, A. (2010), "The device for manufacturing torsion bars with helical anisotropy UISAT-1", Key Engineering Materials, Trans Tech Publications, Switzerland, Vol. 437, pp. 625–628.
2. Bishop, Robert H. (2006), *Mechatronics: an introduction*, CRC Press.
3. Robert Munnig, Schmidt, Georg, Schitter, Adrian, Rankers and Jan van, Eijk (2014), *The Design of High Performance Mechatronics – 2nd revised edition*, IOS Press.
4. Starostin, A.K. and Chinaev, P.I. (1991), *Mekhatronika mobilnykh agregatov [Mechatronics Mobile Units]*, UkrNI-INTI Gosplana USSR, Kiev. (in Russian)
5. Wing, Jeanette M. (2006), "Computational thinking", *Communications of the ACM*, Vol. 49, no. 3, pp. 33–35, DOI:10.1145/1118178.1118215. (in Russian)
6. Easterbrook, Steve (2014), "From Computational Thinking to Systems Thinking: A conceptual toolkit for sustainability computing", *Proceedings of the 2nd international conference ICT for Sustainability*, DOI:10.2991/ict4s-14.2014.28.
7. Stephen, Wolfram (2016), "How to Teach Computational Thinking", available at: <http://blog.stephenwolfram.com/2016/09/how-to-teach-computational-thinking> (accessed October 15, 2018)
8. Korostelev, V.F. (2004), *Pervaya Vserossiyskaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya «Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie» [First All-Russian Scientific and Technical Conference "Mechatronics, Automation, Control"]*, *Novye tekhnologii*, Moscow, available at: http://novtex.ru/mech/vlad_sum.htm (accessed October 12, 2018) (in Russian)
9. Rankers, Adrian M. (1997), *Machine Dynamics in Mechatronic Systems*, University Twente.
10. Poduraev, Yu.V. (2007), *Mekhatronika: osnovy, metody, primeneniye [Mechatronics: Basics, Methods, Application]*, Mashinostroyeniye, Moscow. (in Russian)
11. Ermolov, I.L. (1997), "Synthesis of movements of technological robots for operations with moving objects based on the computer algebra method", *MGТУ «STANKIN»*. (in Russian)
12. Yablonskiy, A.A. and Nikiforova, V.M. (2007), *Kurs teoreticheskoy mekhaniki [The course of theoretical mechanics]*, «Integral-Press», Moscow. (in Russian)

Стаття надійшла 29.10.2018.