www.turkishstudies.net/education

Turkish Studies - Educational Sciences

eISSN: 2667-5609

Research Article / Araştırma Makalesi

INTERNATIONAL
BALKAN
UNIVERSITY
Sponsored by IBU

Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Cebirsel İfadelerle İşlem Sürecine İlişkin Alan Bilgilerinin Sınıf İçi Gözlem ve Görüşme Yoluyla İncelenmesi

Investigation of Middle School Mathematics Teachers' Content Knowledge Related to Operation with Algebraic Expression Process Through Classroom Observation and Interview

Pınar Yıldız*

Abstract: The aim of this study is investigation of middle school mathematics teachers' content knowledge related to operation with algebraic expression process. Case study design, one of the qualitative research designs, was used in the study. Three middle school mathematics teachers in Çanakkale in the fall semester of 2019-2020 academic year participated in the study. Teachers work at the same school. Participants were selected with criterion sampling method. Multiple case studies were used in this study and each teacher was examined as a separate case. Research data were collected through classroom observations and semi-structured interviews with teachers. In the semi-structured interview, teachers were asked questions about the situations in the lesson process. Observation notes were created during the observation. Lessons were recorded with video camera and interviews were recorded with voice recorder. Four hours of lessons were observed on the subject of operations with algebraic expressions of teachers. Then, each teachers conducted semi-structured interviews. The research data were analyzed through descriptive analysis. For the reliability of the study, the data were coded by two researchers. Analyses of coders were compared and 92% code compliance was achieved. The findings of the study showed that teachers' content knowledge about algebraic expressions was not sufficient. The teachers explained the operation with algebraic expression process using the 'fruit-salad' approach. Two teachers used 'similar terms' and 'non-similar terms'. Teachers used this approach as rule-oriented. Teachers did not use alternative approaches to the mathematical meaning of algebraic expression.

Structured Abstract: Teachers are the most important factor affecting the process of learning and teaching mathematics. A mathematics teacher should first have a deep knowledge of the field (Ball, 1990; Fennema, Sowder and Carpenter, 1999; Shulman, 1986, 1987). In order for students to learn a mathematics subject correctly, the teachers' content knowledge should be sufficient. It is not possible to expect a teacher with a lack of knowledge on the subject to teach a successful teaching (Ball, 1990; Ball, Thames ve Phelps, 2008).

* Dr. Öğr. Üyesi, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü
Assist. Prof., Çanakkale Onsekiz Mart University, Faculty of Education, Department of Mathematics and Science Education.

ORCID 0000-0002-6729-7721

akdalpınar@gmail.com

Cite as/ Atıf: Yıldız, P. (2020). Ortaokul matematik öğretmenlerinin cebirsel ifadelerle işlem sürecine ilişkin alan bilgilerinin sınıf içi gözlem ve görüşme yoluyla incelenmesi, *Turkish Studies - Education*, 15(1), 431-442. <https://dx.doi.org/10.29228/TurkishStudies.39652>

Received/Geliş: 07 November/Kasım 2019

Accepted/Kabul: 25 February/Şubat 2020

Copyright © INTAC LTD, Turkey

Checked by plagiarism software

Published/Yayın: 29 February/Şubat 2020

CC BY-NC 4.0

Algebraic expressions form the basis of algebra. In the transition from arithmetic to algebra, students need to understand the mathematical meaning of algebraic expression correctly in order to make sense of the abstract structure of algebra. Students should know what letter symbols and operations in algebraic expression mean (Booth, 1988; Kieran, 1981). The approaches that teachers will use in the teaching process will determine how the students will construct these concepts. In this respect, it is important to determine the approaches used by teachers in explaining the process with algebraic expressions.

The aim of this study is investigation of middle school mathematics teachers' content knowledge related to operation with algebraic expression process. Case study design, one of the qualitative research designs, was used in the study. Three middle school mathematics teachers in Çanakkale in the fall semester of 2019-2020 academic year participated in the study. Teachers work at the same school. Participants were selected with criterion sampling method. Multiple case studies were used in this study and each teacher was examined as a separate case. Research data were collected through classroom observations and semi-structured interviews with teachers. In the semi-structured interview, teachers were asked questions about the situations in the course process. Observation notes were created during the observation. Lessons were recorded with video camera and interviews were recorded with voice recorder. Four hours of lessons were observed on the subject of operations with algebraic expressions of teachers. Then, each teachers conducted semi-structured interviews. The research data were analyzed through descriptive analysis. For the reliability of the study, the data were coded by two researchers. Analyses of coders were compared and 92% code compliance was achieved.

Findings from classroom observations showed that teachers used different approaches to explain the process of the process with algebraic expressions. The teachers explained the operation with algebraic expression process using the 'fruit-salad' approach. All three teachers used the 'fruit-salad' approach at different stages of the lesson. Selin structured the whole phase of the lesson with this approach. This approach has been criticized by the researchers (Pimm, 1987; Tirosh, Even and Robinson, 1998) and is not considered appropriate because it refers to variables in an algebraic expression as an object, not a numerical value. In this respect, it is seen that teachers follow a wrong approach. Teachers misunderstood the meaning of algebraic expression with this approach and explained the process of algebraic expressions incorrectly. This approach prevents students from gaining the understanding that the variable represents a numerical value.

Ufuk and Tuna used 'similar terms' and 'non-similar terms' approach in different ways in the introduction phase of the lesson. Teachers used this approach as rule-oriented. Teachers did not use alternative approaches to the mathematical meaning of algebraic expression. When the students made mistakes, the teachers made only the explanation of the rules and did not use alternative approaches to the mathematical meaning of algebraic expression. When students combine the terms in the algebraic expression (eg. $2a + 3b = 5ab$), they remind the rule. The main reason for this error is the lack of knowledge of students about the meaning of the variable concept (Booth, 1988; MacGregor and Stacey, 1997; Rosnick, 1981; Usiskin, 1999; Yıldız, Çiftçi, Şengil-Akar and Sezer, 2015). On the other hand, all three teachers used the fruit-salad approach to correct students' mistakes in this direction. In the interview, it was seen that teachers think that this approach facilitates students' learning.

As a result, the findings of the study showed that teachers' content knowledge about algebraic expressions was not sufficient. The results of both this study and other studies indicate that pre-service and in-service practices are necessary for teachers to have sufficient field knowledge about the concept of algebraic expression. Therefore, in the courses in the elementary mathematics teaching program, prospective teachers should be provided with opportunities to deeply question the meaning of basic algebra concepts such as variable and algebraic expression. In this context, it is important that the relevant course contents in the program are arranged in such a way that prospective teachers can make sense of the mathematical meaning of the concepts rather than defining them only in the textbooks. Teachers should also be supported to gain this knowledge.

Keywords: Mathematics Education, Middle School Mathematics Teachers, Content Knowledge, Teaching Algebra, Algebraic Expression

Öz: Bu araştırmanın amacı, ortaokul matematik öğretmenlerinin cebirsel ifadelerle işlem sürecine ilişkin alan bilgilerini incelemektir. Araştırmada nitel araştırma desenlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır.

Araştırmaya 2019-2020 eğitim öğretim yılının güz döneminde Çanakkale ilinde görev yapan üç ortaokul matematik öğretmeni katılmıştır. Öğretmenler aynı okulda görev yapmaktadır. Katılımcılar amaçlı örneklem yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir. Durum çalışması desenlerinden çoklu durum çalışmasının kullanıldığı bu çalışmada öğretmenlerin her biri ayrı bir durum olarak ele alınmıştır. Araştırma verileri sınıf içi gözlemler ve yarı yapılandırılmış görüşmeler aracılığıyla toplanmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmede öğretmenlere ders sürecindeki durumlara yönelik sorular yöneltilmiştir. Gözlem sırasında gözlem notları oluşturulmuştur. Dersler video kamera ve görüşmeler ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmıştır. Öğretmenlerin cebirsel ifadelerle işlemler konusunu işledikleri dersleri 4 ders saati gözlenmiştir. Sonrasında her bir öğretmenle yarı-yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Araştırma verileri betimsel analiz yoluyla analiz edilmiştir. Araştırmanın güvenilirliği için veriler iki araştırmacı tarafından kodlanmıştır. Kodlayıcıların analizleri karşılaştırılmış ve %92 kod uyumuna ulaşılmıştır. Araştırmadan elde edilen bulgular, öğretmenlerin cebirsel ifadelerle işlem sürecine ilişkin alan bilgilerinin yeterli düzeyde olmadığını göstermiştir. Öğretmenler cebirsel ifadelerle işlem sürecini ‘meyve-salata’ yaklaşımını kullanarak açıklamışlardır. İki öğretmen ‘benzer terimler’ ve ‘benzer olmayan terimler’ yaklaşımını kullanmış, ancak bu yaklaşımı kural odaklı ele almışlardır. Öğretmenler cebirsel ifadenin matematiksel anlamına yönelik alternatif yaklaşımlar kullanmamışlardır.

Anahtar Kelimeler: Matematik Eğitimi, Ortaokul Matematik Öğretmenleri, Alan Bilgisi, Cebir Öğretimi, Cebirsel İfade

Giriş

Matematik öğrenme ve öğretim sürecini etkileyen en önemli faktörlerden biri öğretmenlerdir. Bir matematik öğretmeni ise öncelikli olarak derin bir alan bilgisine sahip olmalıdır (Ball, 1990; Fennema, Sowder ve Carpenter, 1999; Shulman, 1986, 1987). Öğrencilerin bir matematik konusunu doğru olarak öğrenebilmesi için öğretmenlerin bu konuya ilişkin alan bilgileri yeterli düzeyde olmalıdır. Öğreteceği konuda bilgi eksikliği bulunan bir öğretmenin başarılı bir öğretim gerçekleştirmesini beklemek mümkün değildir (Ball, 1990; Ball, Thames ve Phelps, 2008).

Alan bilgisi, öğretmenin öğreteceği konunun içerdiği tanımlar, kavramlar, kavramlar arası ilişkiler ve matematiksel gösterimler hakkındaki bilgisidir (Ball, Tames ve Phelps, 2008). Öğretmenler konunun içerdiği işlemsel yapı bilgisinin yanısıra; bu işlemlerin yapısal özelliğine ilişkin anlamları bilmelidir (Ball, 1990). Yapılan araştırmalar, öğretmenlerin kavramların matematiksel anlamını açıklamada zorlandıklarını göstermektedir (An, Kulm ve Wu, 2004; Charalambous, Hill, Chin ve McGinn, 2018; Dooren, Verschaffel ve Onghena, 2002; Huang ve Kulm, 2012; Rizwi ve Lawson, 2007; Vermeluen ve Meyer, 2017). Öğretmenler bir matematiksel kavrama ilişkin çoğunlukla kural ve işlem odaklı açıklama yapmaktadırlar. Bir matematiksel işlemi kolaylıkla çözebilirken; işlemin içerdiği matematiksel anlamı açıklamada zorlanmaktadırlar.

Öğretmenlerin alan ve alan öğretimi bilgisi üzerine yapılan araştırma sonuçları, öğretmenlerin kural ve işlem odaklı bilgilerinin öğretim uygulamalarını olumsuz etkilediğini göstermektedir. Bu durum öğrencilerin zorlandıkları bir öğrenme alanı olarak cebir konularının öğretiminde de önemli bir engel oluşturmaktadır (McCorry, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase ve Senk, 2012; Wasserman, 2016). Özellikle temel cebir kavramlarının öğretiminde kural ve işlem odaklı bir yaklaşım, öğrencilerin ileri cebir konularını öğrenme sürecinde birçok kavram yanılgısı oluşturmalarına neden olmaktadır. Bu durum dikkate alındığında, öğretmenlerin eşitlik, değişken, cebirsel ifade, denklem gibi temel cebir kavramlarına ilişkin derin bir alan bilgisine sahip olmaları oldukça önemlidir.

Cebirin temelini cebirsel ifadeler ve cebirsel ifadelerle işlem süreci oluşturmaktadır. Aritmetikten cebire geçişte öğrencilerin cebirin soyut yapısını anlamlandırmaları için cebirsel ifadenin matematiksel anlamının doğru olarak anlaşılması gerekmektedir. Öğrenciler cebirsel ifadedeki harf sembollerinin ve işlemlerin ne anlama geldiğini bilmelidirler. Cebirsel ifadenin anlamının doğru olarak anlaşılmasında öğrencilerde farklı kavram yanılgıları oluşturmaktadır. Öğrenciler cebirsel ifadelerde, süreç-sonuç ikilemi (bir cebirsel ifadeyi hem süreç hem de sonuç

olarak kabul etme) (Tirosch, Even ve Robinson, 1998), cebirsel ifadelerdeki terimleri birleştirme veya sonlandırma eğilimi (Booth, 1988; Tirosch, Even ve Robinson, 1998), cebirsel ifadeden oluşan bir gösterimi değişkenin değeri bilinmediği için cevap olarak kabul etmeme (Booth, 1988; Kieran, 1981), cebirsel ifadeden sonra eşit işareti işareti ile bir sayı geleceğini düşünme (Kieran, 1981) gibi farklı zorluklar yaşamaktadırlar. Bu sebeple öğretim sürecinde cebirsel ifadenin işlemsel yapısına yönelik uygulamaların yanısıra matematiksel anlamını açıklayan yapısal özelliğine ilişkin durumlara yer verilmelidir (Chalouh ve Herscovics, 1988; Herscovics ve Linchevski, 1994; Pomerantsev ve Korostevela, 2003).

Cebirsel ifadelerin öğretiminde cebirsel ifadelerle işlem sürecini açıklamak için alan yazında farklı yaklaşımlar mevcuttur. Booth'un (1988), çalışmasında bir öğretim uygulamasını gerçekleştirdiği ve öğretmenlerin de cebirsel ifadeleri ve cebirsel ifadelerle işlem sürecini açıklarken en çok kullandıkları yaklaşımlardan biri meyve-salata yaklaşımıdır (Kuchemann 1978; Rosnick, 1981). Bu yaklaşımda, benzer ve benzer olmayan terimlerden bahsedilmiş, benzer ve benzer olmayan terimler için meyve ve salata benzetmesi yapılmıştır. Bu yaklaşım, meyveler kendi arasında salatalar kendi arasında toplanır ve çıkarılır şeklindedir. Bu durum dikkate alındığında meyve-salata yaklaşımı öğrencilerin cebirsel ifadedeki değişkenlerin sayısal bir değer olarak değil, bir nesnenin kısaltması olarak düşünmelerine sebep olabileceğinden bazı araştırmacılar (Pimm, 1987; Tirosch, Even ve Robinson, 1998) tarafından eleştirilmiştir. Örneğin, $2k$ cebirsel ifadesini açıklamak için 2 kitap şeklinde nesne benzetmesi yapılması ve $2k + 3k$ şeklindeki bir cebirsel ifadeyi 2 kalem ile 3 kalemin toplamı şeklinde gösterilmesi bu duruma bir örnektir (Yıldız, 2016). Ayrıca cebirsel ifadelerde değişkenleri belirtmek için kullanılan nesne benzetmesi öğrencilerdeki en yaygın kavram yanılgılarından biridir (Booth, 1988; Kuchemann, 1978).

Tirosch, Even ve Robinson (1998) yaptıkları çalışmada ortaokul matematik öğretmenlerinin cebirsel ifadelerle işlemler sürecinde kullandıkları yaklaşımları incelemişlerdir. Çalışma göreve yeni başlayan iki öğretmen (mesleki deneyimi 1 ve 2 yıl) ve tecrübeli iki öğretmen (mesleki deneyimi 15 yıldan fazla) ile gerçekleştirilmiştir. Öğretmenlerin yedinci sınıf düzeyinde dersleri gözlemlenmiş ve sonrasında bireysel görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Araştırma sonucunda elde edilen bulgular öğretmenlerin cebirsel ifadelerle işlemlere yönelik çoğunlukla işlemsel süreçle ilişkin açıklamalar yaptıklarını göstermiştir. Benzer terimler yaklaşımını farklı şekilde kullanan üç öğretmenden biri yaklaşımı doğru olarak kullanmıştır. Örneğin Benny öğretmen, cebirsel ifadelerle işlem sürecini sayıların ayrı ve harflerin ayrı toplanması şeklinde bir kural ile açıklamıştır. Bu kural ile $3m + 2 + 2m$ cebirsel ifadesini $5m + 2$ olarak ifade etmiştir. Bir öğrencinin $5m + 2$ cebirsel ifadesinin $7m$ 'ye eşit olduğunu söylemesine yönelik ise kuralı hatırlatmış, farklı bir açıklama yapmamıştır. Araştırmacılar, bu kurala göre $5m + 2$ cebirsel ifadesinin $7 + m$ veya $7m$ ifadesine eşit olabileceği için uygun bir yaklaşım olmadığını belirtmişlerdir. Drora öğretmen, $3t + 2$ cebirsel ifadesinde $3t$ ile 2 terimlerinin toplanamayacağını " $3t$ ile sadece aynı şeyleri toplayabiliriz. 3 armutum ve 2 elmam var ise 5 armutum var diyebilir miyim?" şeklinde meyve-salata yaklaşımını kullanarak açıklamıştır. Sadece Gilah öğretmen dersinde benzer terimler yaklaşımını doğru bir şekilde kullanmıştır. Batia öğretmen ise geriye gitme, işlem sırası ve yerine koyma yaklaşımlarını kullanmıştır. Araştırmacılar, işlem sırası ve yerine koyma yaklaşımlarının cebirsel ifadenin anlamına ilişkin anlayışı desteklemediğini, sadece işlemsel süreci doğruladığını vurgulamışlardır. Diğer yandan işlem sırası yaklaşımında öğretmenin açıklamasının hatalı olduğunu belirtmişlerdir. Batia öğretmen $3 + 4x$ cebirsel ifadesinin $7x$ 'e eşit olmadığını, öncelikle çarpma işleminin yapılması ve bunun için de x 'in değerinin bilinmesi gerektiğinden, 3 ve $4x$ 'in toplanamayacağı şeklinde açıklamıştır. Ancak bu açıklamaya göre, $3x+4x$ cebirsel ifadesinin toplanmayağı sonucu çıkmaktadır. Ayrıca araştırmacılar, bu yaklaşımın öğrencilerin bir cebirsel ifadeyi, örneğin $x + 3$ cebirsel ifadesini, x 'in değeri bilinmediği için işlemi tamamlanmamış olarak düşünme yönündeki eğilimlerini güçlendirebileceğini belirtmişlerdir.

Yapılan araştırma sonuçları dikkate alındığında, öğretmenlerin cebir öğretiminde ve bu kapsamda cebirsel ifadelerle işlem sürecini açıklamada kullandıkları yaklaşımların öğrenci

öğrenmesi için belirleyici olduğu söylenebilir. Öğretim yaklaşımı, öğrencilerin kavramları nasıl yapılandıracaklarını belirleyecektir. Bu yönüyle öğretmenlerin cebirsel ifadelerin öğretiminde, cebirsel ifadeler ile işlem sürecini açıklamada kullandıkları yaklaşımların belirlenmesi önemlidir. Bu bağlamda bu çalışmada, ortaokul matematik öğretmenlerinin cebirsel ifadelerle işlem sürecine ilişkin alan bilgilerinin incelenmesi amaçlanmıştır.

Yöntem

Araştırmanın bu bölümünde; araştırma deseni, katılımcılar, verilerin toplanması ve veri analizi başlıklarına yer verilmiştir.

Araştırma Deseni

Araştırma nitel araştırma kapsamında yapılandırılmıştır. Araştırmada öğretmenlerin cebirsel ifadelerle işlem sürecine ilişkin alan bilgilerini derinlemesine incelemek ve bütüncül bir şekilde yorumlamak amacıyla nitel araştırma yöntemi desenlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Durum çalışması, bir durumun gerçek bağlamında farklı yönleri ile derinlemesine incelenerek, bütüncül olarak yorumlanmasına fırsat tanır (Creswell, 2007; Merriam, 2009; Punch, 2005). Çalışmada üç ortaokul matematik öğretmenin her biri ayrı bir durum olarak ele alınmıştır. Bu kapsamda çalışmada, her bir durumun kendi içinde bütüncül olarak incelendiği çoklu durum çalışması deseni (Merriam, 2009; Yin, 2009) kullanılmıştır. Veri toplama sürecinin her bir durum için aynı olduğu çoklu durum çalışmasında, her bir durum kendi bağlamında incelenir (Creswell, 2007). Araştırma kapsamında, her bir öğretmenin alan bilgisi öğretim süreci esas alınarak, gerçek bağlamında bütüncül olarak incelenmiştir.

Katılımcılar

Araştırmanın katılımcıları nitel araştırma kapsamında amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir. Ölçüt örnekleme yönteminde belirlenmiş ölçütleri karşılayan durumlar seçilir (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Araştırma kapsamında öncelikle 7. sınıf düzeyinde matematik dersini yürüten öğretmenler belirlenmiştir. Bu öğretmenler arasından araştırmaya katılmaya gönüllülüğü ve sınıf ortamında fikirlerini rahatça paylaşabilen üç öğretmen araştırmaya dâhil edilmiştir. Bu kapsamda araştırma, 2019-2020 eğitim öğretim yılının güz döneminde Çanakkale ilinde görev yapan üç ortaokul matematik öğretmeni ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın katılımcılarından Selin Öğretmen 5, Ufuk öğretmen 7 ve Tuna Öğretmen 10 yıllık mesleki deneyime sahiptir. Üç öğretmen de ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programından mezundur. Öğretmenler aynı okulda görev yapmaktadırlar.

Verilerin Toplanması ve Analizi

Araştırma verileri yarı yapılandırılmış görüşmeler ve gözlem yoluyla toplanmıştır. Bu kapsamda veri toplama süreci üç aşamada gerçekleştirilmiştir. İlk olarak öğretmenleri tanımak ve araştırmacı ile öğretmenler arasında bir güven ortamı oluşturmak amacıyla kısa bir ön görüşme gerçekleştirilmiştir. Ön görüşmeler sonrasında, öğretmenlerin 7. sınıf düzeyinde cebirsel ifadelerle işlemler konusunu işledikleri dersleri 4 ders saatinde gözlenmiştir. Araştırmacı tarafından ders sürecine bir müdahale olmadığı için öğretmenler arasında araştırma sürecini etkileyici bir bilgi aktarımı olmamıştır. Öğretmenler derslerini doğal rutinde gerçekleştirmişlerdir. Gözlem sırasında gözlem notları oluşturulmuş ve dersler video kayıt cihazı ile kayıt altına alınmıştır. Sonrasında gözlem verilerini detaylandırmak için öğretmenlerle yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Öğretmenlerin alan bilgilerine ilişkin daha detaylı bilgi elde etmek amacıyla öğretmenlere ders sürecinde geçen durumlara ilişkin sorular yöneltilmiştir. Öğretmenlerden ek bilgi vermeleri istenmiştir. Bu sorular sadece ders sürecini anlamaya yönelik olduğu için öğretmenler için yönlendirici olmamıştır. Bu nedenle öğretmenlerin aynı okulda olmasından dolayı gerçekleşebilecek olası etkileşimleri araştırma sürecini etkilememiştir. Görüşmeler 30-35 dakika sürmüştür. Görüşmeler ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Veri analiz sürecinde öncelikle görüşmelerden ve ders gözlemlerinden elde edilen video ve ses kayıtları çözümlenmiştir. Veriler

betimsel analiz yoluyla analiz edilmiştir. Bu süreçte kodlanan veriler belirli temalar altında sınıflandırılmış ve betimlenerek yorumlanmıştır. Verileri desteklemek ve anlamlı olmasını sağlamak amacıyla doğrudan alıntılara yer verilmiştir (Creswell, 2007; Patton, 2002). Güvenirliği sağlamak için tüm gözlem ve görüşme verileri iki araştırmacı tarafından ayrı ayrı kodlanarak analiz edilmiştir. Sonrasında kodlayıcıların analizleri karşılaştırılmış ve %92 kod uyumuna ulaşılmıştır.

Bulgular

Bu bölümde öğretmenlerin cebirsel ifadelerle işlem sürecine ilişkin alan bilgilerini açıklamak amacıyla ders gözlemlerinden ve yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen bulgular sunulmuştur. Durum çalışması kapsamında öğretmenlerin her biri ayrı bir durum olarak incelenmiştir. Bu doğrultuda her bir öğretmene ait bulgular ayrı olarak sunulmuştur.

Selin Öğretmen

Selin Öğretmen cebirsel ifadelerle işlem sürecini ‘meyve-salata yaklaşımı’ ile açıklamıştır. Öğretim sürecinde bu yaklaşım için sıklıkla ‘Elmaları kendi arasında armutları kendi arasında topluyoruz’ şeklinde kural hatırlatması yapmıştır. Tek değişken içeren bir cebirsel ifadede değişken içeren terimleri ‘elma’, sabit sayıları ise ‘armut’ olarak nitelendirmiştir. Selin Öğretmenin $3b + 5 + 2b + 2$ cebirsel ifadesi için yaptığı açıklamalar bu durumu yansıtmaktadır.

“ $3b + 5 + 2b + 2$ cebirsel ifadesinde elmaları ve armutları ayrı ayrı düşünmemiz gerekiyor. $3b$ ve $2b$ ’yi elma olarak düşünelim. 5 ve 2 ’yi armut olarak düşünelim. Yani bilinmeyenler elma, bilinenler armut olsun. O zaman elmaları kendi arasında armutları kendi arasında toplayabiliriz. 3 elma, 2 elma daha 5 elma olur. Armutları da kendi arasında toplarsak 5 ile 2’yi toplarsak 7 olur ($5b + 7$). Daha kolay yapmak isterseniz şöyle de düşünebilirsiniz. Mesela b ’yi bilye olarak düşünün. 5 bilyem var, 2 bilyem daha olursa 7 bilyem olmuş olur. Sayıları da kendi arasında toplarsak $5b + 7$ elde ederiz.” (Selin Öğretmen, Ders Gözlemi-1)

Selin Öğretmen $3b + 5 + 2b + 2$ cebirsel ifadesindeki b değişkenini nesne benzetmesi yaparak ‘bilye’ olarak ifade etmiştir. Bu yaklaşım cebirsel ifadedeki değişkeni sayısal bir değer olarak değil, bir nesnenin kısaltması olarak belirtmektedir. Birden fazla değişken içeren cebirsel ifadelerde işlem sürecini açıklamak için de aynı yaklaşımı kullanmıştır. $4s + k + k + s$ cebirsel ifadesindeki s değişkenini ‘silgi’, k değişkenini ‘kalem’ olarak ifade etmiştir (Selin Öğretmen, Ders Gözlemi-2). Öğretim esnasında diğer örneklerde de benzer şekilde ‘ $3a$ ’ terimi için ‘3 anahtar’, ‘ $7k$ ’ terimi için ‘7 kitap’ ifadelerini kullanmıştır.

Ders sırasında bazı öğrenciler $5b + 7$ cebirsel ifadesini $12b$ olarak sadeleştirmiştir. Selin Öğretmen bu durumun nedenini sorduğunda, öğrencilerin $5b + 7$ ifadesini tamamlanmamış olarak düşündükleri görülmüştür. Selin Öğretmen $5b$ ile 7 terimlerinin toplanamayacağını belirterek, ‘ $5b$ harf içeriyor, 7 de ise harf yok. Ne demiştik? Biri elma, biri armut. Elma ile armutları toplayamayız.’ açıklamasını yapmıştır (Selin Öğretmen, Ders Gözlemi-3)

Yapılan görüşmede, Selin Öğretmen bu yaklaşımı her sınıf düzeyinde kullandığını ve bu yaklaşım ile öğrencilerin daha az hata yaptıklarını belirtmiştir.

“Bilinmeyenleri bir nesne olarak düşündüklerinde, örneğin elma, armut farketmez. İşlemi daha rahat yapıyorlar. Çünkü bilinmeyi harf ile ifade ettiğimizde çok soyut oluyor. Örneğin, $4x$ ifadesinde x ’i elma gibi, armut gibi düşünün diyorum. O zaman daha kolay anlıyorlar, daha az hata yapıyorlar. Bütün sınıflarımda kullanıyorum.”

Ufuk Öğretmen

Ufuk Öğretmen cebirsel ifadelerle işlem sürecini açıklarken ‘bilinen terim’ ve ‘bilinmeyenli terim’ ifadelerini kullanmıştır. Bir cebirsel ifadedeki değişken içeren terimleri bilinmeyenli terim, sabit sayıları ise bilinen terim olarak nitelendirmiştir. İşlem sürecini ise, ‘Bilinen terimler kendi arasında, bilinmeyen terimler kendi arasında toplanır’ şeklinde ifade

etmiştir. Örneğin, $3x + 3 + 2x + 6$ cebirsel ifadesinde $3x$ ve $2x$ 'i bilinmeyenli terim, 3 ve 6'yı bilinen terim olarak belirtmiştir. Ufuk öğretmen ile öğrenciler arasında gerçekleşen diyalog bu durumu yansıtmaktadır.

“Ufuk Öğretmen: $3x + 3 + 2x + 6$ ifadesinde bilinmeyenli terimler nelerdir?”

Öğrenciler: $3x$ ve $2x$.

Ufuk Öğretmen: Neden? Çünkü içinde ne var?”

Öğrenciler: Harf.

Ufuk Öğretmen: Yani? Nedir bu harf?”

Öğrenciler: x .

Ufuk Öğretmen: Evet, güzel. Harf, x olduğu için bu terim bilinmeyenli terim. Bilinen terimler hangisi o zaman?”

Öğrenciler: 3 ve 6.

Ufuk Öğretmen: O zaman bilinen terimleri kendi arasında bilinmeyen terimleri kendi arasında toplamamız gerekiyor.” (Ufuk Öğretmen, Ders Gözlemi-2)

Ufuk Öğretmen farklı değişkenler içeren cebirsel ifadelerle işlem sürecini ise ‘aynı bilinmeyen içeren terimler kendi arasında toplanır’ şeklinde açıklamıştır. Bu doğrultuda $5x + 3y + y$ cebirsel ifadesini $5x + 4y$ olarak sadeleştirmiştir (Ufuk Öğretmen, Ders Gözlemi-3). Ders sürecinde bazı öğrenciler $5x + 4y$ cebirsel ifadesindeki terimleri $9xy$ şeklinde birleştirmişlerdir. Ufuk Öğretmen bu durum için ‘ x ve y burada farklı farklı harfler, yani farklı bilinmeyenler. İkisi de bilinmeyen ama farklı bilinmeyenler olduğu için toplayamayız. Bu $(5x + 4y)$ şekilde bırakırız.’ açıklamasını yapmıştır. Öğrencilerin bu hatalarını düzeltmek için nesne benzetmesinin yapıldığı meyve-salata yaklaşımını kullanmıştır. Ufuk Öğretmenin aşağıdaki açıklamaları bu duruma örnek olarak gösterilebilir.

“ $5x$ ile $4y$ 'yi toplayamayız. Bu şekilde bırakırız. Çünkü biri farklı, diğeri farklı bir bilinmeyen. Birini elma, birini armut olarak düşünebilirsiniz. İkisi de elma olsa ya da ikisi de armut olsa toplayabilirim. Bu şekilde daha iyi aklınızda tutabilirsiniz. Aynı şeyleri birbiri ile toplayabilirim.” (Ufuk Öğretmen, Ders Gözlemi-3)

Ufuk Öğretmenin cebirsel ifadelerle işlem sürecini açıklamak için kullandığı nesne benzetmesinin öğrencilerin öğrenmesini kolaylaştırdığını düşündüğü görülmektedir. Ders sürecine yönelik yapılan görüşmede yaptığı açıklamalar da bu yöndeki düşüncesini açık bir şekilde yansıtmaktadır. Bu yaklaşımın konuyu somutlaştırarak öğrencilerin anlamasını kolaylaştırdığını belirtmiştir.

“Bu şekilde daha iyi akıllarında tutuyorlar. Evet, bununla bu farklı şeyler, bunlarla işlem yapamam diye düşünebiliyor. Diğer türlü harfler olunca kafası karışıyor. Daha somut olduğu için daha rahat kavriyorlar. Bilinmeyen yerine elma, armut gibi bir şey düşünün diyorum.”

Ufuk Öğretmen yapılan görüşmede, öğrencilerin cebirsel ifadelerle işlem sürecinde en çok yaptıkları hatanın farklı harf sembollerine dikkat etmeden terimleri toplamak olduğunu belirtmiştir. Öğrencilerin bu hatalarını önlemek için de değişkenleri elma, armut, kitap, defter şeklinde ifade ettiğini belirtmiştir.

Tuna Öğretmen

Tuna Öğretmen cebirsel ifadelerle işlem sürecini ‘benzer ve benzer olmayan terimler yaklaşımı’ ile açıklamıştır. Diğer yandan öğrenci hatalarını düzeltmek için ise ‘meyve-salata yaklaşımını’ sıklıkla kullanmıştır. Tuna Öğretmen bir cebirsel ifadede aynı harf sembolünü içeren terimleri benzer terimler olarak tanımlamış, benzer terimler arasında toplama ve çıkarma

işlemlerinin yapılabileceğini belirtmiştir. Aşağıda Tuna Öğretmenin $9x + 3y - 2x + 8 - y$ cebirsel ifadesine ilişkin bu yöndeki açıklamalarına yer verilmiştir.

“Tuna Öğretmen: Ne demiştik? Aynı harfi içeren terimler benzer terimlerdir. O zaman bakın bakalım. Hangi terimler benzer? Hangileri x içeriyor?”

Öğrenciler: $9x$ ve $-2x$.

Tuna Öğretmen: Hangileri y içeriyor?

Öğrenciler: $3y$ ve $-y$.

Tuna Öğretmen: Evet, aynı harf olduğu için benzer terimler. Peki, 8 ? 8 , ne x 'i içeriyor ne de y 'yi. Yanında bir harf yok. Sadece sayı. Benzer terimleri kendi arasında sayıları da kendi arasında toplayıp çıkarıyoruz.” (Tuna Öğretmen, Ders Gözlemi-2)

Ders sürecinde öğrenciler bir cebirsel ifadedeki benzer terimleri belirleyebilmişler, ancak bazı öğrenciler işlem sonrasında terimleri birleştirmişlerdir. Bir öğrenci, $a + 2b + a + b$ cebirsel ifadesini $2a + 3b$ şeklinde sadeleştirdikten sonra terimleri birleştirerek sonucun $5ab$ olduğunu belirtmiştir. Bu süreçte öğretmen ile öğrenci arasında gerçekleşen diyalog şu şekildedir.

“Tuna Öğretmen: Neden $2a + 3b$ 'yi $5ab$ olarak yazdın?”

Öğrenci: Ama öğretmenim toplama işlemi var, sonuç eksik kaldı, bitmedi ki...

Tuna Öğretmen: Ama ne demiştik benzer terimleri toplayabilirim. a ve b benzer mi? Benzer olmadığı için bu şekilde bırakmamız gerekiyor.” (Tuna Öğretmen, Ders Gözlemi-3)

Tuna Öğretmen $2a + 3b$ cebirsel ifadesindeki a ve b 'nin benzer olmayan terimler olduğu için toplanamayacağını belirtmiştir. Ancak dersin ilerleyen bölümlerinde benzer öğrenci hataları devam etmiştir. Bu durum üzerine öğretmen $5x + 2y + 2$ cebirsel ifadesini örnek olarak vermiş ve öğrencilere bu terimlerin toplanıp toplanamayacağını sormuştur (Tuna Öğretmen, Ders Gözlemi-4) Bazı öğrenciler sonucun $9xy$ olduğunu söylemiştir. Tuna Öğretmen ‘Bakın terimlerdeki harfler birbirinden farklı. Birinde x diğerinde y var. 2 de ise harf yok. Yani hiç biri benzer değil. Ne demiştik? Benzer terimler olmadığında işlem yapamayız.” Sonrasında ise ‘Şu şekilde de düşünebilirsiniz. Birini elma, birini armut olarak düşünün. x elma, y armut olsun. Biri elma biri armut, o zaman bunları toplayamam.’ açıklamasını yapmıştır. Görüşme sırasında Tuna Öğretmene bu ifadeleri sorulduğunda aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

“Öğrenciler benzer ve benzer olmayan terimleri bulabiliyorlar. İşlemi de yapıyorlar. Ancak bazı öğrenciler bir sonuç bulmaya çalışıyorlar. O zaman farklı hatalar yapıyorlar. Sanırım benzer terim ifadesi biraz soyut geliyor. Bu yüzden elma, armut gibi düşüncelerini istiyorum. Böyle olunca somutlaştırıyorlar sanki. Elmayla armutu toplayamam diye düşününce işlemi orada bırakıyor öğrenci.”

Tuna öğretmenin bu açıklamaları, meyve-salata yaklaşımını cebirsel ifadedeki değişken kavramını somutlaştırma amaçlı kullandığını göstermektedir. Dersin farklı bölümlerinde de ‘ $3m$ ’ için 3 muz ve ‘ $4t$ ’ için ‘ 4 tren’ gibi ifadeleri kullanmıştır. Tuna Öğretmenin de araştırmaya katılan diğer öğretmenler gibi çoğunlukla öğrenciler hata yaptıkları zaman bu yaklaşımı kullandığı gözlenmiştir.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Cebirsel ifadenin matematiksel anlamının öğrenciler tarafından doğru olarak anlaşılması, öğrencilerin cebirsel ifadelerle işlemler ve denklem gibi daha ileri cebir konularını öğrenme sürecinde oldukça önemlidir (Kieran, 1981; Kuchemann, 1978; MacGregor ve Stacey, 1997; Usiskin, 1999). Bu yeterliklerin edinilmesinde en önemli rol öğretmenlerindir. Öğretmenin alan bilgisi öğrencilerin bu yeterlikleri kazanması için ön koşuldur. Öğretmenin alan bilgisi ne kadar derin ise öğretimi sürecini de paralel olarak etkili bir şekilde yapılandırabilir (Ball, 1990; Ball,

Thames ve Phelps, 2008; Huang ve Kulm, 2012; Wasserman, 2016). Bu kapsamda bu çalışmada, ortaokul matematik öğretmenlerinin cebirsel ifadelerle işlem sürecine ilişkin alan bilgileri sınıf içi gözlem ve görüşmeler yoluyla incelenmiştir.

Sınıf içi gözlemlerden elde edilen bulgular, öğretmenlerin cebirsel ifadelerle işlem sürecini açıklamak için farklı yaklaşımlar kullandıklarını göstermiştir. Çalışmaya katılan üç öğretmen de ‘meyve-salata’ yaklaşımını dersin farklı aşamalarında kullanmıştır. Selin Öğretmen dersin tüm aşamasını bu yaklaşım ile yapılandırmıştır. Ufuk ve Tuna öğretmen ise dersin giriş aşamasında ‘benzer terim’ ve ‘benzer olmayan terim’ yaklaşımını farklı şekillerde kullanmışlardır. Cebirsel ifadelerle işlem sürecini açıklamak için üç öğretmen tarafından da kullanılan meyve-salata yaklaşımı, öğretmenlerin cebirsel ifadeler konusunun öğretiminde çok sık kullandıkları bir yaklaşımdır. Diğer yandan, bu yaklaşım, bir cebirsel ifadedeki değişkenleri sayısal bir değer değil, bir nesne olarak belirttiği için araştırmacılar (Pimm, 1987; Tirosh, Even ve Robinson, 1998) tarafından eleştirilmekte ve uygun görülmemektedir. Bu açıdan ele alındığında, öğretmenlerin değişken kavramını somutlaştırmak amacıyla hatalı bir yaklaşım izledikleri görülmektedir. Öğretmenler bu yaklaşım ile cebirsel ifadenin anlamını yanlış bir anlayış üzerinden ele aldıkları için cebirsel ifadeler ile işlem sürecini hatalı bir şekilde açıklamışlardır. Bu hatalı yaklaşım, öğrencilerin değişkenin sayısal bir değeri temsil ettiği anlayışını kazanmalarını olumsuz etkilemektedir. Ayrıca değişkenlerin bir nesne olarak düşünülmesi öğrencilerde en çok karşılaşılan kavram yanlışlarından biri olarak gösterilmektedir (Booth, 1988; Christo, Vosniadou ve Vamvakoussi, 2007; Kuchemann, 1978; Russell, O’Dwyer ve Miranda, 2009). Dolayısıyla, meyve-salata yaklaşımı öğrencilerin öğrenmelerine faydalı olmamakla birlikte olumsuz etkilemektedir (Tirosh, Even ve Robinson, 1998).

Ufuk Öğretmen ve Tuna Öğretmen cebirsel ifadelerle işlemler sürecini açıklarken benzer ve benzer olmayan terim yaklaşımını farklı açılardan kullanmışlardır. Ufuk Öğretmen bir cebirsel ifadedeki değişkenleri bilinmeyenli terim olarak belirtmiş ve aynı bilinmeyenler ile işlem yapılabileceğini ifade etmiştir. Tuna öğretmen ise değişkenleri benzer terim ve benzer olmayan terim olarak belirtmiştir. Ufuk ve Tuna Öğretmenin kullandıkları yaklaşım cebirsel ifadenin matematiksel anlamına yönelik doğru bir yaklaşım olmakla birlikte, bu yaklaşımı sadece kural odaklı kullandıkları söylenebilir. Öğretmenler öğrenciler hata yaptıkları zaman sadece kural açıklaması yapmışlar, cebirsel ifadenin anlamını kavramalarına yönelik ek açıklamalarda bulunmamışlardır. Öğrenciler cebirsel ifadedeki terimleri birleştirdiklerinde (örn. $2a + 3b = 5ab$) kural hatırlatması yapmışlardır. Bu hatanın temel nedeninin öğrencilerin değişken kavramının anlamına ilişkin bilgi eksiklikleri olduğu söylenebilir (Booth, 1988; MacGregor ve Stacey, 1997; Rosnick, 1981; Usiskin, 1999; Yıldız, Çiftçi, Şengil-Akar ve Sezer, 2015). Bu sebeple cebirsel ifadelerle işlem sürecinde ‘2a’ gibi bir cebirsel ifadenin matematiksel anlamının vurgulanması önemlidir. Diğer yandan, üç öğretmen de öğrencilerin bu yöndeki hatalarını düzeltmek için meyve-salata yaklaşımını kullanmışlardır. Yapılan görüşmede öğretmenlerin, bu yaklaşımın kavramı somutlaştırarak öğrencilerin öğrenmesini kolaylaştırdığını düşündükleri görülmüştür.

Sonuç olarak bu çalışmada elde edilen bu bulgular, araştırmaya katılan öğretmenlerin cebirsel ifadelerle işlem sürecine ilişkin alan bilgilerinin yeterli düzeyde olmadığını ve önemli eksiklikler olduğunu göstermektedir. Öğretmenler cebirsel ifadelerle işlem sürecini kural odaklı ele almışlardır. Cebirsel ifadenin matematiksel anlamına yönelik alternatif yaklaşımlar kullanmamışlardır. Temel cebir kavramlarından biri olarak cebirsel ifade kavramının kural ve işlem odaklı öğretimi, öğrencilerin ileri cebir konularını öğrenme sürecinde birçok kavram yanlışlığı oluşturmalarına neden olmaktadır. Bu sebeple öğretmenler cebirsel ifadenin matematiksel anlamını içeren yapısal özelliğine ilişkin durumlara yönelik derin bir alan bilgisine sahip olmalıdırlar. Öğretmenlerin alan bilgilerindeki eksiklik öğretim bilgilerini ve dolayısıyla öğretim uygulamalarını olumsuz olarak etkilemektedir (Charalambous vd., 2018; Copur-Gencturk, 2015; Kelcey, Hill & Chin, 2019; McCrocy vd., 2012; Welder ve Simonsen, 2011). Bu sebeple, öğretmenler öncelikle öğretecekleri konuya ilişkin yeterli alan bilgisine sahip olmalıdır.

Gerek bu araştırmada gerekse diğer araştırmalarda elde edilen sonuçlar, öğretmenlerin cebirsel ifade kavramına ilişkin yeterli düzeyde alan bilgisine sahip olmaları için hizmet öncesi ve hizmet içi uygulamaların gerekliliğine işaret etmektedir. Buradan hareketle, ilköğretim matematik öğretmenliği programında yer alan derslerde, öğretmen adaylarının değişken, cebirsel ifade gibi temel cebir kavramlarının anlamlarını derinlemesine sorgulama yapmalarını sağlayacak fırsatlar sağlanmalıdır. Bu kapsamda programdaki ilgili ders içeriklerinin, öğretmen adaylarının bu kavramları sadece ders kitaplarındaki şekilde tanımlamadan ziyade kavramların matematiksel anlamını anlamlandırmalarını sağlayacak şekilde düzenlenmesi önemlidir. Ayrıca öğretmenlerin de bu bilgileri kazanmaları açısından desteklenmeleri gerekmektedir.

Kaynakça

- An, S., Kulm, G., ve Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the US. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7(2), 145-172. DOI: <https://doi.org/10.1023/b:jmt.0000021943.35739.1c>.
- Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*, 90(4), 449-446. DOI: <https://doi.org/10.1086/461626>.
- Ball, D. B., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. DOI: <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>.
- Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston: VA.
- Chalouh, L., & Herscovics, N. (1988). Teaching algebraic expressions in a meaningful way. In a.f. Coxford Shulte (Eds.). *The ideas of Algebra K-12*. Reston: Virginia: NCTM.
- Charalambous, C. Y., Hill, H. C., Chin, M. J., & McGinn, D. (2018). Mathematical content knowledge and knowledge for teaching: exploring their distinguishability and contribution to student learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-35. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10857-019-09443-2>.
- Christou, K. P., Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2007). Students' interpretations of literal symbols in algebra. Students' interpretations of literal symbols in algebra. In S. Vosniadou, A. Baltas & X. Vamvakoussi (Eds.), *Re-framing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 283-297). Oxford: Elsevier Press.
- Copur-Gencturk, Y. (2015). The effects of changes in mathematical knowledge on teaching: A longitudinal study of teachers' knowledge and instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(3), 280-330.
- Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (2nd ed.). London: Sage.
- Dooren, V. D., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Research in Mathematics Education*, 33(5), 319-351. DOI: <https://doi.org/10.2307/4149957>.
- Fennema, E., Sowder, J., & Carpenter, T. P. (1999). Creating classrooms that promote understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.). *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 185-199). NJ: Lawrence Erlbaum Associates. DOI: <https://doi.org/10.4324/9781410602619>.

- Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). *A cognitive gap between arithmetic and algebra. Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78. DOI: <https://doi.org/10.1007/bf01284528>.
- Huang, R., & Kulm, G. (2012). Prospective middle grade mathematics teachers' knowledge of algebra teaching. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 417-430. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.06.001>.
- Kelcey, B., Hill, H. C., & Chin, M. J. (2019). Teacher mathematical knowledge, instructional quality, and student outcomes: a multilevel quantile mediation analysis. *School Effectiveness and School Improvement*, 30(4), 398-431. DOI: <https://doi.org/10.1080/09243453.2019.1570944>.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326. DOI: <https://doi.org/10.1007/bf00311062>.
- Kuchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, 7(4), 23-26.
- MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-16. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 1-19. DOI: <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.43.5.0584>.
- McCorry, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D., & Senk, L. (2012). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(5), 584-615.
- Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Pimm, D. (1987). 'Pupils' written mathematical records'. In D. Pimm (Eds.). *Speaking mathematically*. Routledge & Kegan Paul, London & New York.
- Pomerantsev, L., & Korosteleva, O. (2003). Do prospective elementary and middle school teachers understand the structure of algebraic expressions? *Long Beach: California State University*.
- Punch, K. F. (2005). *Sosyal araştırmalara giriş: Nicel ve nitel yaklaşımlar*. (Çev. Bayrak, D., Arslan, H. B., & Akyüz, Z.). Ankara: Siyasal Kitabevi.
- Rizvi, N. F., & Lawson, M. J. (2007). Prospective Teachers' Knowledge: Concept of Division. *International Education Journal*, 8(2), 377-392.
- Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. Are you careful about defining your variables?. *Mathematics Teacher*, 74(6), 418-420.
- Russell, M., O'Dwyer, L. M., & Miranda, H. (2009). Diagnosing students' misconceptions in algebra: Results from an experimental pilot study. *Behavior Research Methods*, 41(2), 414-424. DOI: <https://doi.org/10.3758/brm.41.2.414>.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. DOI: <https://doi.org/10.3102/0013189x015002004>.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-21.
- Tirosh, D., Even, R., & Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions: Teacher awareness and teaching approaches. *Educational Studies in Mathematics*, 35(1), 51-64.

- Usiskin, Z. (1999). Conceptions of school algebra and uses variables. In edited by B. Moses (Eds.). *Allgebraic Thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications* (pp. 7-13). Reston, Va: Natinoal Council of Teachers Mathematics.
- Vermeulen, C., & Meyer, B. (2017). The equal sign: teachers' knowledge and students' misconceptions. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 21(2), 136-147. DOI: <https://doi.org/10.1080/18117295.2017.1321343>.
- Wasserman, N. H. (2016). Abstract algebra for algebra teaching: Influencing school mathematics instruction. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 16(1), 28-47. DOI: <https://doi.org/10.1080/14926156.2015.1093200>.
- Welder, R. M., & Simonsen, L. M. (2011). Elementary teachers' mathematical knowledge for teaching prerequisite algebra concepts. *IUMPST:(Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers): The Journal. Vol 1 (Content Knowledge)*, 1, 1-16.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldız, P. (2016). Ortaokul matematik öğretmenlerinin cebir öğretimine ilişkin bilgileri: Çoklu durum çalışması. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Yıldız, P., Çiftçi, Ş. K., Şengil-Akar, Ş., & Sezer, E. (2015). Ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeleri ve değişkenleri yorumlama sürecinde yaptıkları hatalar. *Hacettepe Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 1(1), 18-31.
- Yin, R. K. (2009). *Case study reseacrh: Design and methods*. Los Angeles, Calif: Sage Publications.