ISSN: 2149-0848

INESJOURNAL

ULUSLARARASI EĞİTİM BİLİMLERİ DERGİSİ
THE JOURNAL OF INTERNATIONAL EDUCATION SCIENCE

Melike TOPÇU¹, Nejla GÜREFE²

7. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN KESİR ŞEMALARININ BELİRLENMESİ³

Kabul Tarihi: 08.02.2020 **Yayın Tarihi:** 31.03.2020

Künye (APA): Topçu, M. & Güreffe, N. (2020). 7. sınıf öğrencilerinin kesir şemalarının belirlenmesi. *The Journal of International Education Science*, 22 (7), 97-118. DOI:

ÖZ

Bu çalışmada öğrencilerin kesirlerdeki şemalarının nasıl olduğunun belirlenmesi amaçlanmıştır. Çalışma, Türkiye'nin batısındaki devlet ortaokullarından birisinde öğrenim gören 12 tane 7. sınıf öğrencisi üzerinde uygulanmıştır. Çalışma durum çalışması niteliğinde olup, çalışma verileri birebir görüşmeler yoluyla toplanmış ve toplanan veriler betimsel analiz kullanılarak analiz edilmiştir. Çalışmada öğrencilere uzunluk, alan ve küme modelleri ile çeşitli kesirler verilmiş ve öğrencilerin bu kesirleri ifade ederken aynı anda parçalama, eş parçalama, basit parçalı kesir, çarpımsal bileşim ve bileşik kesir zihinsel düzeneklerini nasıl kullandıkları ortaya çıkarılmıştır. Veriler analiz edildiğinde öğrencilerin en fazla küme modeline ilişkin sorularda zorlandıkları ve özellikle de çarpımsal bileşim zihinsel düzeneğine ilişkin zihinsel şemalarının problemli olduğu belirlenmiştir. Bulgular ışığında; yapılan öğretim uygulamalarında kesrin özellikle küme modeli gibi farklı modellerinden de yararlanılması, kural ezberletmek yerine kavramların anlamına ağırlık verilmesi tavsiye edilebilir.

Anahtar Kelimeler: Kesir, kesir şemaları, ortaokul öğrencileri.

¹ Yüksek Lisans Öğrencisi, Uşak Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, melike.mtopcu@gmail.com

² Dr. Öğr. Üyesi, Uşak Üniversitesi, Matematik Eğitimi ABD, nejla.gureffe@usak.edu.tr

³ Bu çalışma ikinci yazarın danışmanlığında ilk yazar tarafından yürütülen yüksek lisans tez çalışmasının bir parçası niteliğindedir.

DETERMINATION OF FRACTION SCHEMAS OF 7th GRADE STUDENTS

ABSTRACT

In this study, it was aimed to determine how students' schemes were in fractions. The research was performed on 12 students studying in one of Turkey's western state secondary school 7th grade students. The study is a case study. The data were collected through one-on-one interviews and the collected data were analyzed using descriptive analysis. In the study, students were given various fractions with length, area, and cluster models, and it was revealed how students used mental mechanisms of shredding, peer breaking, simple fractional fractions, multiplicative composition and compound fraction at the same time. When the data were analyzed, it was determined that the students had difficulties in the questions related to the cluster model and especially the mental schemes related to the mental composition of the multiplicative composition were problematic. In the light of the findings, it may be recommended to use different models of the fraction, especially the cluster model, and to focus on the meaning of concepts instead of memorizing rules in teaching practices.

Keywords: Fraction, Fraction Schemes, Middle School Students

GİRİŞ

Kesir kavramı öğrencilerin karşılaştığı ilk matematiksel kavramlardan biridir. Diğer konulara da temel teşkil eden kesirler, matematiğin ilk soyut konularındandır (Haser ve Ubuz, 2002). Aynı zamanda matematik programının en karışık konularından olan kesirlerin (Alacaci, 2014), öğrenilmesinde çeşitli zorluklar yaşanmaktadır. Kesirlerle ilgili yapılan bazı araştırmalar, öğrencilerin; kesri tanımlama, tanımlanmış kesri yazma (Ubuz ve Haser, 2001), eş parçalara ayırma, birim belirleme (Alacaci, 2014) gibi konularda güçlük yaşadığını ortaya koymuştur. Aksu (1997), kesir kavramının anlaşılmasında güçlük yaşanmasının kaynağını kesirlerin yapısından ve kavramsal bilgiden çok işlemsel bilginin ön planda tutulmasına bağlamıştır.

Kesirlerin kavranabilmesi, kendi içinde ve diğer konularla ilişkilendirilebilmesi için farklı anlamlarının bilinmesi gerekir (Ertuna, 2013). Çeşitli kaynaklarda (Altun, 2005; Van de Walle, 2013; Bingölbali ve Özmantar 2014) kesirlerin; parça-bütün, ölçme, bölme, işlemci, oran gibi anlamlarına değinilmiştir. En sık kullanılan parça-bütün anlamı (Akbaba Dağ, 2014) bir bütünün eşit parçalara ayrılarak bu parçalardan istenilen kadarının alınmasıdır. Ölçme anlamı, bir uzunluğu belirlenen başka bir uzunluğa göre ölçmede (Van de Walle, 2013), bölme anlamı genellikle paylaşma durumlarında ortaya çıkar. Kesirlerin işlemci anlamı bir doğal sayının kesrini bulmak için kullanılabilir (Van de Walle, 2013). Oran anlamında ise bir bütünün iki parçasının oranı söz konusudur (Alacaci, 2014). Temur'a (2011) göre kesir kavramının gelişebilmesi için gerekli anlamların öğrenilmesi ve kavramlar arasındaki soyut ilişkilerin modeller aracılığıyla somutlaştırılması gerekmektedir. Model kullanımı kesirlerle işlemleri kolaylaştırmanın yanı sıra işlemlerin matematiksel anlamlarını anlaşılmasına da imkan sağlar (Baki 2018). Kesirlerin öğretiminde farklı öğrenme fırsatları sunan modellere örnek olarak uzunluk, alan ve küme modelleri verilebilir (Van de Walle, 2013). Uzunluk modelleri sayı doğrusu, çubukları ve şeritleri kapsarken (Van de Walle, 2013) alan modeli geometrik bir şeklin bir bölümünün alanının taranmasını kapsar (Şiap ve Duru, 2004). Küme modelinde ise bir grup nesne bütünü temsil ederken bu nesnelerin bir kısmı kesri temsil etmektedir (Bingölbali ve Özmantar 2014).

Çağdaş yaklaşımlar yeni kavramların önceden var olan bilgilerle ilişkilendirilerek öğrenilmesini tavsiye eder (Skemp, 1971). Steffe'ye göre öğrencilerin önceki deneyimleri sonucu oluşturduğu tanıma kalıpları vardır ve bu tanıma kalıplarından yola çıkarak yeni bilgiler

oluştururlar. Steffe ve Olive (2010) ise sayı sayma düzeneklerinin öğrenciler tarafından yeniden biçimlendirilerek kesir bilgisini oluşturacağına dair bir düşünce geliştirmişlerdir. Steffe ve Olive (2010) hipotezine göre kesirli bilgi için kritik işlemler parçalama yani bir kesri eş parçalara bölme, tekrarlama yani istenilen miktar kadar bir parçayı tekrar etme ve kıyaslamadır.

Kesirler ile ilgili yapılan araştırmalar incelendiğinde; Örmeci'nin (2012) 7.sınıf öğrencilerin kesirleri kavramsal ve işlemsel anlayışlarını araştırdığı, Kara'nın (2017) 6. Sınıf öğrencilerin kesirlerde toplama ve çıkarma konusunda farklı temsilleri kullanma becerilerini değerlendirdiği, Çelebioğlu (2014) öğrencilerin kesir oluşturma süreçlerini RBC+C teorik çerçevesinden, Öksüz'ün (2018) ise kesirleri APOS teorik çerçevesinden ele aldığı görülmüştür. Fakat ülkemizde öğrencileri kesir anlayışlarını bu teorik çerçeveden inceleyen bir çalışmaya rastlanmamıştır. Öğrencilerin kesir kavramın doğal sayılarla ilgili bilgilerinden yola çıkarak oluşturdukları göz önünde bulundurulduğunda (Van de Walle, 2013) öğrencilerin kesir bilgilerini bu açıdan incelemeye ihtiyaç duyulmuştur.

YÖNTEM

Araştırma Modeli

Bu araştırmada durum çalışması kullanılmıştır. Araştırma kapsamında Steffe ve Olive (2010) Kesir Şemaları Teorisi referans alınarak hazırlanan sorulara ilişkin öğrenci cevapları durum olarak değerlendirilmiştir.

Çalışma Grubu

Bu araştırmanın katılımcılarını 2018- 2019 eğitim-öğretim yılı Denizli ilinde bulunan bir devlet okulunda farklı sınıflarda öğrenim gören 7. sınıf öğrencilerinden 12 öğrenci oluşturmuştur. Öğrenciler başarı düzeyleri iyi, orta, kötü olacak şekilde seçilmiştir. Başarı notları, öğretmen görüşleri ve gönüllülük esas alınarak seçilen öğrencilerden Ö1, Ö2, Ö3, Ö4 kodlu öğrenciler iyi, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8 kodlu öğrenciler orta, Ö9, Ö10, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrencilerde kötü düzey olarak belirlenmiştir.

Veri Toplama Aracı ve Süreci

Veriler birebir görüşmeler ve doküman analizi yoluyla toplanmıştır. Araştırmada incelenen dokümanlar, görüşmeler yapılırken öğrencilerin soruları cevaplandırma sürecinde kağıt üzerine çizdikleri şekiller ve işlemler gibi kağıt üzerindeki her türlü işaretlerinden oluşmuştur. Bazı şekil ve işlemler fotoğrafları çekilerek verilmiştir.

Çalışmada öğrencilerin kesir şemalarını belirlemeye yönelik soruların hazırlanabilmesi için alan yazın taraması yapılmış ve uzunluk, alan ve küme modellerini içeren bir soru havuzu oluşturulmuştur. Soru havuzunda aynı anda parçalama, eş parçalama, basit parçalı kesir, çarpımsal bileşim ve bileşik kesir zihinsel düzeneklerini içerecek şekilde her bir düzenekle ilgili uzunluk, alan ve küme modelleri ile ilgili üçer soru yer almıştır. Sorulardan uzunluk modeli ile ilgili olanlar çubuk şeklinde, alan modeli ile ilgili olanlar kareli kağıtta daire ve kare şekillerinde verilirken küme modeli ile ilgili olan sorularda nesneler çubuk, daire ve dikdörtgen şekilleri temsil edilerek verilmiştir. Hazırlanan soruların kapsam geçerliliği için matematik eğitimi alanında uzman iki öğretim elemanının görüşleri alınmış, görüşler doğrultusunda bazı sorularda değişikliğe gidilerek sorulara son hali verilmiş ve çalışmada toplamında 20 soru kullanılmıştır. Çalışmanın soruları Ek 1'de sunulmuştur. Testin güvenilirliğini belirlemek için ise uygulamadan önce üç öğrenci ile pilot çalışması yapılmıştır. Hazırlanan görüşme formu öğrencilere birebir

görüşmeler yoluyla uygulanmış ve yapılan görüşmeler video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Her bir öğrenci ile yapılan görüşme yaklaşık olarak 60 dakika sürmüştür.

Veri Analizi

Veri analizi için öncelikle öğrencilerle yapılan görüşmelerin video kayıtları transkript edilmiştir. Sonrasında transkriptler ve öğrencilerin anket formundaki sorulara verdikleri cevaplar birlikte değerlendirilip betimsel analiz ile analiz edilmiştir. Analiz için uygun kategoriler Steffe ve Olive'in (2010) Kesir Şemaları Teorisine göre belirlenmiştir. Bu kategoriler şu şekildedir:

Aynı anda parçalama ve parça bütün zihinsel düzeneği; Bu kategoride öğrenci bir bütünü göz kararı parçalar ve parça ve bütünü kıyaslamaz. Bir bütünün 3 te 1'ini sorulan öğrencilerin; bütünü göz kararı parçalayarak kesri elde ettiği durumlar ve parçanın bütün ile olan ilişkisini göz ardı ettiği durumlar bu kategoride değerlendirilmiştir.

Eş parçalama zihinsel düzenekleri ve parçalı birim kesirler; Öğrencinin elde ettiği parçayı bütünlüyle kıyasladığı düzeneğidir. Ayrıca bu düzeneğe öğrenci 'Bir parça orijinal bütünü ne kadarıdır?' sorusuna cevap verebilir. Öğrenciler tersini gerektiren durumlarda da başarılı olur. Verilen şeklin verilmeyen şeklin katı olduğu bir durumda verilmeyeni bulabilir.

Basit parçalı zihinsel düzeneği; Parçalı birim kesir düzeneğinin uyarlanmasıyla elde edilir. Bir bütünün $\frac{2}{3}$ 'ü istenildiğinde önce $\frac{1}{3}$ 'ünün bulunarak bunun 2 kere tekrar edilmesiyle $\frac{2}{3}$ 'ün elde edildiği düzeneğidir.

Çarpımsal bileşim zihinsel düzeneği; ' $\frac{1}{3}$ 'ün $\frac{3}{4}$ 'ü nedir?' sorusunun çözümünde kesirlerin çarpımından bahsedildiği için bu düzeneğe yer alır. Her bölümün tekrar bölünmesi nedeniyle dağıtılmalı bölme zihinsel operasyonundan da bahsedilir. 2 pizzanın 3 eş parçaya bölünmesin de bu düzeneğe kapsamındadır.

Bileşik kesir düzeneği; Bu düzeneğe bileşik kesir bilgisinin oluşumuyla ilgili ilgilidir. Bu düzeneği oluşturan çocuklar çarpımsal olarak düşünebilir ve kesirlerin birim kesrin tekrarlanmasıyla diğer kesirlerin oluştuğunu anlayabilirler.

Araştırmacı ve alan uzmanları tarafından incelenerek değerlendirilen soruların kodlama güvenilirliği %90 olarak belirlenmiştir. Araştırmanın tüm sorularına ilişkin cevaplarda "görüş birliği" ve "görüş ayrılığı" olan konular tartışılmış ve gerekli düzenlemelerle görüş birliğine varılarak güvenilirlik sağlanmıştır.

BULGULAR

Çalışmada öğrencilerin kesir şemaları ortaya çıkarılmış ve elde edilen bulgular aynı anda parçalama-parça-bütün zihinsel düzeneği ve eş parçalama-parçalı birim kesir zihinsel düzeneği ile sunulmuştur.

Aynı Anda Parçalama- Parça Bütün Zihinsel Düzeneği ve Eş Parçalama-Parçalı Birim Kesir Zihinsel Düzeneğine İlişkin Bulgular

Öğrencilere bu kategoriyle ilişkili olarak uzunluk, alan ve küme modellerinden oluşan 7 adet soru sorulmuştur. Verilen bir bütünü parçalamaya ilişkin sorulan ilk üç soru aynı anda parçalama- parça bütün zihinsel düzeneği ve eş parçalama-parçalı birim kesir zihinsel düzeneği açısından ele alınırken; verilen bir parçadan bütüne ulaşmaya ilişkin sorulan dört soru ise sadece '*eş parçalama ve parçalı birim kesir düzeneği*' açısından ele alınmıştır. Bu kategorilere ait bulgular aşağıda yer almıştır

Aynı Anda Parçalama ve Parça Bütün Zihinsel Düzenine İlişkin Bulgular;

Bu kategori ile ilgili olarak öğrencilerin ilk üç soruya verdiği cevaplar incelenmiştir. Sorular sırasıyla uzunluk, alan ve küme modelleriyle verilen bir bütünün sorulan kesir değerinde parçalanması ile ilgilidir. Bu açıdan öğrencilerin verilen parçayı elde etmek için izlediği adımlar değerlendirilmiştir.

Buna göre uzunluk modelinde; öğrencilerin çoğunluğunun göz kararı parçalama yaparken, Ö5, Ö11 kodlu öğrencilerin kendince bir ölçme aleti oluşturarak bütünü parçalamaya çalıştıkları belirlenmiştir. Göz kararı parçalama yapan Ö1, Ö3, Ö4, Ö8, Ö9, Ö10, Ö12 kodlu öğrenciler eş parçalar oluşturmaları gerektiğini ifade ederken Ö2, Ö6, Ö7 kodlu öğrenciler ise sadece 3 parçaya bölüp 1 tanesinin taramalarının yeterli olacağını söylemişlerdir. Ö2, Ö3, Ö5 kodlu öğrenciler ile geçen diyaloglar ise şu şekildedir.

Sorunun çözümünde farklı şekilde yollar izleyen Ö2 kodlu öğrenci “*Payda parçayı böldüğü kısmı gösterir, pay ise aldığımız kısmı. Bende 3’e bölüp 1 parçasını almışım.*” şeklinde açıklama yaparak parçaların eşliğine dikkat etmediğini göstermiştir. Buna rağmen Ö3 kodlu öğrenci ise “*Eş parçalar haline bölmeye çalıştım...3te 1 dediği için hepsinin eş parçalar halinde olması lazım. Eş parça olmasaydı 3te 1 demezdi zaten.*” açıklamalarıyla eş parçalamanın önemine vurgu yapmıştır. Ö5 kodlu öğrenci de eş parçalamayı önemseydiğini söylemiş ve materyal kullanarak eş parçalar elde ettiğini göstermiştir:

Ö5: Çünkü 3 parça da eşit olmak zorunda.

A: Neden eşit olmak zorunda?

Ö5: Çünkü burada 3 te 1 demiş. O zaman eşitlik aklıma geliyor.

A: Peki bu 3 parçanın eşit olduğuna emin misin?

Ö5: Tam emin değilim ama uçla yaptım.

A: Uçla nasıl yaptın?

Ö5: Önce ucu açtım sonra bir parça kadar onu kırdım ona göre de bunu(ek parça) çizdim.

A: Neden uç kullandın?

Ö5: Hepsinin eşit olması için.

Bir bütünün parçaları eşit olursa kesir ifade edebileceğini düşünen Ö5 kodlu öğrencinin bir ucu parçalayarak her bir parçanın aynı olmasını hedeflediği gözlemlenmiştir.

Alan modeline ilişkin cevaplar incelendiğinde ise burada da uzunluk modelinde olduğu gibi genellikle göz kararı parçalamaların yapıldığı tespit edilmiştir. Bunun dışında Ö3, Ö6 ve Ö7 kodlu öğrenciler şeklin yerleştirildiği karelerden yola çıkarak bütünü parçalarken Ö3 ve Ö4 kodlu öğrenciler verilen kesri genişleterek bütünü parçalama işlemi yapmışlardır. Öğrencilere izledikleri yöntemlerin nedeni sorulduğunda öğrencilerin çoğunluğu eş parçalar elde etmek istediğini ancak 5’e bölmek zor olduğu için şekilde verilen 4 parçaya bölünmüş dairenin her bir parçasını 5 eş parçaya bölerek ya da verilen daireyi 10 eş parçaya bölerek farklı parçalama yöntemleri denedikleri görülmüştür. Kesri genişleterek parçalama yapma yoluna giden Ö3 kodlu öğrenciyle geçen diyalog aşağıda verilmiştir.

Ö3: Bu daire ve arkasında karesel alanlar var. Onlar olduğu zaman çift veya 3'e bölünmesi gerekiyor.

A: Arkada karesel bölge olmasa bölebilir miydin?

Ö3: Bölemezdim yine ben bunu daire şeklinde düşünsem sadece bölemezdim olmazdı yine.

A: Peki bu bölünemez bir şey mi yoksa sen mi böleminyorsun?

Ö3: Ben böleminyorum büyük ihtimalle. Benim yanımda cetvel gibi bir şey olsaydı ben de bölebilirdim büyük ihtimalle. Ben göz kararı yapıyorum olmuyor öyle de.

A: Peki sen kaç parçaya böldün?

Ö3: 10 parça.

A: Neden 10 parça nasıl yaptın?

Ö3: 5'e 1'i 2 ile genişlettim. Eğer tam bölebilseydim ben bunun iki parçasını alacaktım. 5'e tam iyi bölünmüyor 10'a tam iyi bölünür diye düşündüm bir an. Ama o da tam olmadı.

Problem şeklinde verilen soruda öğrencilerden verilen elmaların 7 de 1'i bulmaları istenmiştir. Öğrencilerin bir kısmı bu modelde 'nın' ekinin yer almasından dolayı ilk olarak çarpma işlemi yapmaları gerektiğini düşündüler. Ö6 ve Ö11 kodlu öğrenciler uzunluk modeline çevirerek parçalama yaparken Ö4, Ö5, Ö7, Ö9, Ö10 kodlu öğrenciler de 7'ye bölüp 1 parçayı aldı. Uzunluk modeli gibi çözen öğrenciler verdikleri cevaptan emin olmak için bu yöntemle çözmeyi tercih ettiklerini belirttiler. 7'ye bölüp 1 parçasını alan öğrenciler ise bütünün 7 eş parçadan oluştuğunu bu nedenle 1 parçasının 7 de 1'i olacağını ifade ettiler. Uzunluk modeline çevirerek çözen Ö6 kodlu öğrenci ile geçen diyalog ve yaptığı çizim aşağıdaki sunulmuştur.

Şekil 1. Ö6 Kodlu Öğrencinin Çizdiği Şekil

Ö6: Şöyle yapabiliriz ama 7 parça varmış (7 parçalık bir kesir çizdi) bunun 1/7'si 1 olur hepsi 1 olur.

A: Bu şekli neden çizdin?

Ö6: Çarpma konusunda emin olamadım onun yerine şekil çizdim ama çarpmada doğru oluyormuş.

A: Peki neden 7 parça?

Ö6: Doğa'nın tabağında 7 parça varmış o yüzden. 7'yi 7'ye bölünce de 1 parça Poyraz'ın tabağında oluyor.

Ö6 kodlu öğrencinin yaptığı işlem ve geçen diyalog incelendiğinde; öğrencinin yaptığı işlemi kontrol etmek için öğrencilerin daha fazla karşılaştıkları model olan uzunluk modelinden faydalandığı görülmüştür.

Eş Parçalama ve Parçalı Birim Kesirler Düzenine İlişkin Bulgular;

Bu kategoride ise yedi soruya verilen cevapların hepsi değerlendirilmiştir. Öğrencilerin bir bütünü parçalamaya ilişkin sorulara verdikleri cevaplar değerlendirildiğinde; çoğunluğun bir bütünü eş parçalara ayırmaya çalıştığı fakat hiçbir öğrencinin eş parçalama zihinsel düzeneğinden beklenen parçayı ayırma ve bu parçayı tekrar ederek ilk bütünüle kıyaslama adımlarını gerçekleştirmediği tespit edilmiştir. Sonrasında görüşme sırasında araştırmacı tarafından öğrencilere; *taradıkları parçaları tekrarlayarak aynı bütünü tekrar elde edip edemeyecekleri* sorulmuştur. Bu soruya Ö7, Ö10 kodlu öğrenciler elde edemeyeceklerini düşünürken, diğerleri elde edebileceklerini ifade etmişlerdir. Ö10 kodlu öğrenci aynı bütünü elde edemeyeceğini *'Parçalar eşit olmadığı için bu parça da hepsini dolduramaz tamamen'* şeklinde ifade ederek, parçaların eşit olması gerektiğini eşit olmadığı için de aynı bütün olamayacağını vurgulamıştır.

Parça birim kesir düzeneği altında görüşmelerde sorulan *'Bir parça bütünü ne kadarıdır?'* sorusuna öğrencilerin kolaylıkla verdikleri gözlemlenmiştir. Soruya *'3 te 1'i 3'e bölünmüş 1 parçası alınmış', 1/3'ü.'* şeklinde verilen bazı cevaplar; öğrencilerin taradıkları kısmın kesir olarak ne ifade ettiğinin farkında olduklarını göstermiştir.

Verilen bir parçadan bütünü elde etmeyi kapsayan sorular incelendiğinde;

4. ve 7. Sorular uzunluk modeli ile ilgili olup öğrencilerden parçadan hareketle bütüne ulaşmaları beklenmiştir. 4.soruda öğrencilerden verilen parçanın 4 katı büyüklüğünde yeni bir şekil çizmeleri istenmiştir. Ö1, Ö3, Ö6, Ö7, Ö9, Ö12 kodlu öğrenciler verilen parçayı kopyalayarak, bu parçanın tekrar edilmesiyle bütünü oluşturmuş, Ö6 kodlu öğrenci ise verilen şeklin sadece dikdörtgen olmasına dikkat ettiğini ifade etmiştir. Diğer öğrenciler ise var olan parçayı dahil ederek 4 kat uzunlukta yeni bir şekil oluşturmuşlardır. Öğrenciler diğer parçaları oluştururken bazıları ilk parçanın aynısını çizebilmek için kendince yöntemler geliştirmiş, bazıları da göz kararı çizmeyi tercih etmiştir. Örneğin Ö5 kodlu öğrenci uçtan faydalanarak, Ö11 kodlu öğrenci şeklin altına yarım çemberler çizerek ilk şeklin uzunluğunu belirlemiştir. Ö1 kodlu öğrencinin *'Sadece eş 4 tane dikdörtgen olmasını istedim ama yine göz kararı çizdim. Metre filan olsaydı bunu (verilen) ölçüp çizerdim.'* şeklindeki cümlesinden öğrencinin bir ölçme aleti olmadan eş parçalar çizemeyeceği ve bu nedenle de verilen şeklin tam 4 katını oluşturamayacağı belirlenmiştir. Kendince ölçme yöntemi geliştiren Ö11 kodlu öğrencinin çizdiği şekil ve geçen diyalog ise aşağıdaki gibidir.

Şekil 2. Ö11 kodlu öğrencinin çizdiği şekil

A: Nasıl yaptın? Kendince bir yöntem belirledin sanki.

Ö: Yuvarlaklarla, hepsini eşit boyda çizmeye çalıştım. 6 tane yuvarlak. Her birini 6 tane yuvarlak çizmeye çalıştım zaten alt taban ile üst tabanda aynı olmuş oluyor.

A: Peki neden yuvarlak çizme ihtiyacında bulundun?

Ö: Tam 4 katı demiş. Mesela 4 katı olsun ama şu kadar da eksik olsun diyebilirdi ama dememiş tam 4 katı olarak vermiş. Sadece 4 katı dediği için, elimde 2 lira olsun bunun 4 katı 8 lira yapar. Burada da mesela bir tanesi 2 cm ise hepsini 2 cm hesaplayıp çizmiş oluyorum. Yani verilene eş olarak çiziyorum.

Buna göre bu öğrencinin ‘4 kat’ ifadesinden verilen parçanın aynısının tekrarlanmasıyla oluşacağı düşünüldüğü ve parçaların uzunluklarının aynı olabilmesi için de kendince bir yöntem geliştirdiği belirlenmiştir.

7.soruda bir bütün ve buna ait bir parça verilerek bu bütünün kaçta kaçı olduğu bulmaları istenmiştir. Ö12 kodlu öğrenci dışında tüm öğrenciler parçanın büyüklüğünü belirleyerek bütün de bu parçadan ne kadar olduğunu belirlemeye çalıştı. Bunu yaparken Ö5, Ö8, Ö10 kodlu öğrenciler kalem, kalem ucu gibi materyaller kullanarak parçanın uzunluğunu belirlerken, Ö7, kodlu öğrenci ritim tutturarak bulabileceğini ifade etti. Ö11 kodlu öğrenci yarım çemberler çizerek ve diğer öğrenciler de göz kararı ile sonuca ulaştılar. Ö8 kodlu öğrenci ile geçen aşağıdaki diyaloga göre öğrencinin parmağını referans alarak aynı parçadan 4 kere tekrarlayarak bütünü elde ettiği belirlenmiştir.

Ö: Bunu böleceğim aynı. Bir parmak ise bu da bir parmak olabilir şöyle. 4 de 1 'dir.

A: 4te 1 nasıl oldu?

Ö: Bunun aynısını buraya çizdim bu 1 oldu. Aynısından bir tane daha çizmeye çalıştım bu da iki bir tane daha 3 ve 4.

A: Parmağını kullandın sanırım onu neden kullandın?

Ö: Ölçmek için?

A: Neyi ölçtün?

Ö: Şu alttakini, dilimin boyutunu.

A: Neden ölçtün peki?

Ö: Hepsini eşit bölmek için

Bir pastanın 1/8'lik dilimi verilerek tamamının şeklinin çizilmesinin istenildiği alan modeli ile ilgili soruda ise öğrencilerin bütünü farklı yöntemlerle oluşturdukları belirlenmiştir. Ö2, Ö3, Ö5, Ö7, Ö8, Ö9, Ö12 kodlu öğrenciler verilen dilimin aynısından 7 tane daha çizerek 8 parçalık bütünü oluşturmaya çalışırken, Ö1, Ö4, Ö6, Ö10 kodlu öğrencilerin ilk olarak bütünü çizip onu 8'e böldükleri tespit edilmiştir. Ö2, Ö4, Ö7, Ö9, Ö10 ve Ö11 kodlu öğrenciler şeklin altındaki birim karelerden yola çıkarak bütünü oluşturdukları gözlemlenmiştir. Öğrencilerin tamamı 8 de 8 elde etmek istediklerini bunun içinde bu da verilen parçadan 8 tane olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Ö1 kodlu öğrencinin ‘Bu 8 de 1 'i tamamı 8 de 8 yani 8'e bölmek demek 8 eş parçaya ayırmak demektir buradan anlayabiliriz.’ cümlesinden direk 8 de 8'lik bir bütün oluşturduğu, Ö9 kodlu öğrencinin ise ‘Bu 8'de 1miş. Bu parçadan 7 tane daha çizerek tamamını oluşturabiliriz. Bu parçadan bakarak diğerlerini çizdim’ ifade ettiği gibi aynı parçayı 7 kere tekrar ederek bütünü oluşturduğu belirlenmiştir.

Küme modeli ile ilgili soruda öğrencilerden, 1/5'i 2 tane olan topların tamamını çizmeleri istenmiştir. Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5 kodlu öğrencilerin 2 ile 5'i çarparak 10 topu çizdikleri gözlemlenmiştir, Ö7, Ö8, Ö10, Ö12 kodlu öğrenciler 2 topun 5te 1'e eşit olmasından dolayı 2'şer 2şer tekrarlayarak 10 top çizceklerini ifade etmişlerdir. Öğrenciler amaçlarının 5te 5'i elde etmek olduğu belirttiler. Ö9, Ö11 kodlu öğrenciler ise 5te 1'i genişleterek 10 da 2 elde ettikten sonra 10 topu çizirken, Ö6 kodlu öğrenci de uzunluk modeline çevirerek şeklin tamamını oluşturdu. Ö2

kodlu öğrencinin '5 parça var ve bir parça 2 bilye. Bu çizdiğim 10 bilye de Ali'nin bilyelerinin tamamı oluyor.' şeklindeki ifadesinden bir bütünü 5 parça düşündüğü ve parça sayısı ile bir parçaya denk olan top sayısını çarparak bütünü elde ettiği belirlenmiştir. Ö8 kodlu öğrenci ile;

Ö8: Bu 5 te 1 ise bu 5 te 2'dir bu 5 te 3 bu 5 te 4 bu da 5 te 5. (İkili ikili çizimler yaptı)

A: Ne yaptın?

Ö8: 5 te 1'i 2 tane ise 5 te 5'i de 10 tanedir. 5 te 1'i verilmiş ben buna 4 tane daha bundan ekledim.

Şeklinde geçen diyalogdan ise öğrencinin bir parçayı 5 kere tekrar ederek bütünü elde ettiği belirlenmiştir.

Basit Parçalı Kesir Düzenegine İlişkin Bulgular

Bu kategoride 3 tanesi basit parçalı kesir düzenegine 4 tanesi de tersine basit parçalı kesir düzenegine ait olmak üzere 7 soru sorulmuştur.

Basit parçalı kesir düzenegine ilişkin sorularda uzunluk modelinde öğrencilerin ilk olarak eş parçalar oluşturmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Bunun nedenini kesrin her bir parçasının aynı olması gerektiği şeklinde açıklamışlardır. Eş her bir parçayı da 3 tel'e denk olduğunu ifade etmişlerdir. Fakat hiçbir öğrenci bu 3 te 1'lik parçayı ayırıp tekrar ederek 3 te 2'yi oluşturmamıştır. Tüm öğrenciler verilen şekil üzerinden göstermişlerdir. Ö2 kodlu öğrenci ile geçen diyalog aşağıda verilmiştir.

Ö2: Kesrin açıklaması şöyle 3 parçaya böl ikisini al. Bende 3 eşit parçaya böldüm 2 sini aldım.

A: Eşit parçaya bölmek önemli mi?

Ö2: Evet paydadaki kaç eş parçaya böleceğimizi gösteriyor, pay kadar da o parçalardan alıyoruz.

Bu diyaloga göre öğrencinin paydayı bir bütünün parça sayısı olarak düşündüğü payı ise taranması gereken parça sayısı olarak düşündüğü bu nedenle bir parçayı belirleyip tekrar etmek yerine pay kadar kısmını taradığı gözlemlenmiştir.

Benzer şekilde alan modelinde de öğrenciler verilen şekli 8 eş parçaya bölerek 3 tanesini taramayı tercih etmişlerdir. Yaptıkları işlemi de 3 tane 8 de 1'lik parça taramak olarak ifade etmişlerdir. Bunu yaparken uzunluk modelinde olduğu gibi parçaların eşliğine dikkat etmişlerdir. Eş parçalar oluşturabilmek için Ö2, Ö3, Ö7, Ö11 kodlu öğrenciler şeklin altında yer alan karelerden faydalanırken Ö1, Ö5, Ö6, Ö8, Ö10, kodlu öğrenciler de karenin özelliklerinden faydalanmıştır. Ö6 kodlu öğrencinin '8 arkadaş eşit şekilde dediği için. Her biri 8 de 1 oluyor. 3 arkadaş içinde 3 tane 8 de 1'lik parçayı toplayınca 3/8 oluyor' şeklinde ki ifadesinden ve Ö12 kodlu öğrencinin 'Toplam 8 arkadaş varmış 3'ünün yediğini sormuş o 3 arkadaş bu 8 kişinin içindedir. Burada da 8 parça olduğuna göre 3 kişiye düşen toplam kek sayısı sorulmuş. Bir kişiye 8 de 1 düştüğüne göre 3 kişiye 8 de 1, 8 de 1, 8 de 1 8 de 3 olur.' ifadesinden öğrencilerin 3 tane 8 de 1'lik parçayı toplayarak 8 te 3 elde ettikleri belirlenmiştir.

Küme modelinde öğrencilerden 10 tane kalemin 2/5'si bulmaları istenmiştir. Ö4 ve ö5 kodlu öğrenciler 10 ile 2/5'i çarparak, Ö3 ve Ö9 kodlu öğrenciler ise kesri genişleterek, Ö6 kodlu

öğrenci de uzunluk modeli kullanarak istenileni buldular. Diğer öğrenciler ise verilen kalemleri ‘gruplara ayırarak’ bulabileceklerini ifade ettiler. Bu öğrenciler 5 te 2’yi bulabilmek için 5 te 1’i bilmeleri gerektiğini bu nedenle de verilen kalemleri gruplara ayırdıklarını belirtirler. Ö7 kodlu öğrenci ile geçen diyalog ise aşağıdaki gibidir.

Ö7: Önce 5’e böldüm. 5’te 1’ini bulmam lazım.

A: Neden 5’te 1’i bulman lazım.

Ö7: 5’te 2 sini soruyor. Eğer 5 te 1 bulamazsam bunu bulamam. 10 kalem var. Zaten 5 te 2 10 da 4 eder, böylelikle 4 kalem olur.

A: Peki 5’e böldüğünde 1 parça ne oldu?

Ö7: İki. Sonra iki iki ekledim 5 te 2 oldu.

Ö7 kodlu öğrencinin ve benzer işlemler yapan diğer öğrencilerin 5’e bölüp 2’li gruplar oluşturduğu ve bunu pay kadar tekrar ederek istenen kesri buldukları gözlemlenmiştir.

Tersine Basit Kesir Düzenine İlişkin Bulgular;

Bu kategori uzunluk modelinde 2 alan modelinde 1 küme modelinde 1 olmak üzere toplam 4 soru sorulmuştur. Sorularda öğrencilerden verilen şekli parçalayarak bütünü elde etmeleri beklenmiştir. Uzunluk modeli ile ilgili ilk soruda tüm öğrencilerin verilen şekli parçalamak yerine iki şekli eşitleyerek kalan parçadan yola çıkarak bütünü elde ettikleri gözlemlenmiştir. Kalan parçayı kullanmalarının nedenini de ‘*kalanın bütünün bir parçası olması*’ olarak açıklamışlardır. Bu soruya ilişkin öğrenci diyalogları aşağıdaki gibidir. Örnek olarak Ö4, Ö8 kodlu öğrencilerle geçen diyaloglar sunulmuştur.

Ö8: eşitledim çünkü bu buradan kesilmiş bunun kaçta kaç olacağını bulacağım. Bunun (kalan) aynısından çizeceğim şimdi.

A: Neden onun aynısı?

Ö8: Bu kesir de buradan çıkıyor çünkü yani bunun aynısı.

A: Nasıl yani tam anlayamadım.

Ö8: Bu buradan kesilmiş bu kalanda buranın bir parçasıdır.

Ö8 kodlu öğrencinin de ifade ettiği gibi öğrenciler şekildeki fazlalığın bütünün bir parçası olduğunu düşünerek öncelikle kalanı bulup sonrasında bunun bütünün içinde ne kadar olduğunu belirledikleri gözlenmiştir.

İkinci soruda ise Ö8 ve Ö12 kodlu öğrencilerin dışındaki tüm öğrencilerin 7 parçalık bir bütün oluşturdukları, Ö3, Ö6, Ö7 ve Ö9 kodlu öğrencilerin ayrı bir bütün oluştururken diğer öğrencilerin verilen şekli devam ettirerek yeni bütünü elde ettikleri tespit edilmiştir. Öğrencilere bütünü nasıl elde ettikleri sorulduğunda Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö9, Ö10, Ö11 kodlu öğrenciler verilenin bir bütünün 5 parçasını ifade ettiğini bize 7 parçayı sorduğu için 5 eş parçadan birinden 2 tane daha ekleyerek 7 parçayı yani bütünü elde edebileceklerini söylediler. Ö4 kodlu öğrenci ile geçen diyalog aşağıdaki gibidir.

Ö: 7 de 5’miş bu 5 o 5. 7 kişi düşünürsek burası 5 kişinin alacağı pay. Bundan birkaç tane daha çizersek olur.

A: Kaç tane daha çizeceksin?

Ö:2

A: Neden?

Ö: Bu 5 tamamı da 7.

A: 2 parçayı nasıl çizdin?

Ö: Yine aklımda tutarak, bu parçalara göre

Bu kategoriye ilişkin sorulan alan modeline ait soruda öğrencilere bir bütünün $\frac{2}{6}$ sı verilerek tamamını elde etmeleri istenmiştir. Öğrencilerin tümü bütünü oluşturabilmiş fakat Ö1, Ö2, Ö7, Ö11 kodlu öğrenciler $\frac{2}{6}$ yı 3 kere tekrar ederek, diğer öğrenciler ise $\frac{2}{6}$ 'yı önce 2'ye bölüp daha sonra $\frac{1}{6}$ 'lık dilimleri 6 kere tekrar ederek $\frac{6}{6}$ 'yı elde etmişlerdir. Ö1 kodlu öğrenci 'Şöyle söyleyeyim 2 arkadaşın yediği bu ise 6 taneyi sorduğu için 2 tane daha bu şeklin aynısını çizerek bir çember oluşturmam gerekti' ifadesiyle $\frac{2}{6}$ 'lık 3 parçanın $\frac{6}{6}$ edeceğini düşünürken Ö3 kodlu öğrenci ise 6 tane $\frac{1}{6}$ 'lık parça ile $\frac{6}{6}$ 'yı elde edeceğini düşünmüştür. Ö3 kodlu öğrenci ile geçen diyalog aşağıdaki gibidir.

Ö3: Bu iki arkadaşla yarıya böldüm eşit şekilde, bir arkadaşın parçasını buldum. Bir arkadaşın parçasının aynısını karşıya çizdim. Ve o arkadaşın parçasından 6 parça olacak şekilde çizdim.

A: Karşıya eşit çizdim dediğin parçaların eşit olduğuna nasıl karar verdin?

Ö3: Öyle hayal ettim diyelim. Karelere göre çapraz çizgileri (dilimlerin kenarları) oluşturdum yine çok düzgün olmadı ama cetvel var gibi hayal ederek tamamını oluşturdum.

A: Neden 6 parça oluşturdun?

Ö3: 6 arkadaş tarafından eşit şekilde demiş burada 2 tane olduğu için 4 tane daha çizmem gerekiyordu. Bir arkadaş bulup 4 tane daha çizdim.

Küme modeli ile ilgili sorunun bu kategoride en zorlanılan soru olduğu gözlemlenmiştir. Ö8, Ö9, Ö10 kodlu öğrencilerin verilen kesir değerini elde etmeye çalıştığı tespit edilmiştir. Sorunun problem şeklinde verilmesinden kaynaklanan bir yanlış anlama olabilme ihtimalinden dolayı öğrencilere aynı soru matematiksel olarak tekrar sorulmuş fakat yine aynı işlemleri yaptıkları belirlenmiştir. Ö2, Ö3, Ö5, Ö7 kodlu öğrenciler çarpma işlemi yaparken Ö11 kodlu öğrenci kalana odaklanmış ve Ö6 kodlu öğrenci de uzunluk modeline çevirerek yapmıştır. Ö4 kodlu öğrenci 1 parça bulunduğunda bütünün bulunabileceğini ifade etmiştir. Bu öğrenci ile geçen diyalog aşağıdaki gibidir.

Ö:4 'e böldüm 6 da 1'ini bulmak için 3.

A: Neden 4'e böldün?

Ö: 6 da 1, bir parçası bize burada 4 parçasını vermiş onun için.

A: Parça ne demek peki?

Ö: O şeklin, cismin bir tanesi.

A: Bir tanesi ne demek tam olarak?

Ö: Eşit sayılara böldüğümüzde kaç tane var ise o bir tanesi bir parça oluyor.

A: Peki 3'ü neden 6 ile çarpıyoruz?

Ö: Çünkü tamamı 6 parça.

Çarpımsal Bileşim Zihinsel Düzenegine İlişkin Bulgular

Bu kategoride de öğrencilere uzunluk, alan ve küme modeline ait 3 soru sorulmuştur. Bu kategoride aynı zamanda öğrencilerin 'dağıtılmalı bölme zihinsel düzenegine' dair matematiksel düşünme yolları da irdelenmiştir. Uzunluk ve küme modeline ait sorular iki kesir çarpımını içerirken, alan modeli ile ilgili verilen soru ise iki bütünün eş bölünmesini içermektedir. Uzunluk modeli ile verilen bahçenin $\frac{1}{3}$ 'nin $\frac{3}{4}$ 'ünü göstermeleri istenmiştir. Bu soruda Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö7, Ö10, Ö11, Ö12 kodlu öğrencilerin bütünü önce 3 parçaya sonra her parçayı 4'e bölerek toplamda 3 parça taradıkları, Ö6 ve Ö9 kodlu öğrencilerin ise yine 12 parça oluşturdukları fakat 9 parçayı taradıkları gözlemlenmiştir. Ö5 kodlu öğrenci ise bahçeyi önce 3'e sonra bir parçayı 4'e bölerek buradaki 3 parçayı tarayıp bu 3 parçanın bütünün ne kadarı olduğunu uç yardımıyla bulmaya çalışmıştır. Örnek olarak Ö2 öğrenciyle geçen diyalog aşağıdaki gibi sunulmuştur.

Ö2: Yani bu durumda 12 de 3 olur.

A: Neden hepsini 4'e böldün?

Ö2: Eşitleyebilmek adına, şimdi birini 2'ye birini 3'e bölssem o zaman birbirlerinin aynı olmaz o zaman işlem yapamayız o yüzden hepsini 4'e bölmem lazım

Bu durumda öğrenci her bir parçanın son durumda aynı büyüklükte olabilmesi için ilk elde ettiği parçaları eşit şekilde parçalamak istemiştir.

Alan modelinde ise öğrencilerden, daire şeklinde verilen 2 pizzayı 3 arkadaşla eşit olarak paylaştırılarak bir kişiye düşen pizza miktarını bulmaları istenmiştir. Ö8 ve Ö12 kodlu öğrenciler paylaşılamayacağını düşünürken, Ö1, Ö4, Ö5, kodlu öğrenciler ise bir öğrenciye $\frac{2}{3}$ 'lük parça düşeceğini ifade etmişlerdir. Diğer öğrenciler ise bir kişiye düşen pizzanın $\frac{1}{3}$ 'e denk olacağını belirtmişlerdir. Bunlardan Ö3 ve Ö7 kodlu öğrenciler iki şekli birleştirerek bir bütün gibi ele alırken Ö2, Ö6, Ö9 ve Ö10 kodlu öğrenciler ise her iki pizzayı da 3' bölüp bir kişinin 6 parçadan 2'sini alacağını düşündüler. Ö2 ile geçen aşağıdaki diyalogdan;

“Ö: Şöyle yapabilirim bunları teker teker 3'e bölebilirim. Deneyelim 3'e böldüm 3'e böldüm. O zaman burada ki 2 dilimi a kişisi alsın buradaki 2 dilimi de b kişisi alsın bu 2'yi de c kişisi alır.

A: Neden 3' böldün her birini?

Ö: 3 kişi var hepsini yani 2 pizzanın toplamını 3'e bölemeyeceğime göre teker teker 3'e böldüm. Bu durumda herkes 2 dilim alarak eşit şekilde paylaşmış oluyor.

A: O zaman bir arkadaşla düşen pizzanın kesir olarak ifade edilişi nedir?”

Ö: $\frac{1}{3}$

Öğrencinin iki pizzayı ayrı ayrı parçalara ayırmasına rağmen bir bütünmüş gibi düşündüğü ve buna göre bir değeri belirlediği belirlenmiştir.

Küme modelinde ise; Ö1, Ö7, Ö8, Ö9 kodlu öğrencilerin genişletme yaparak ilerledikleri, Ö3, Ö4, Ö5, Ö12 kodlu öğrencilerin ise çarpma işlemi yaparak ilerledikleri gözlemlenmiştir. Ö6

kodlu öğrenci ise yine uzunluk modeline çevirerek işlem yapmıştır. Genişletme yapan öğrenciler böyle yaptıklarında sonucun direk çıktığını ifade etmişlerdir. Çarpma yapanlar ise ‘nın, nin ekinden dolayı çarpacaklarını belirtmişlerdir. Ö3 kodlu öğrenciyle aşağıda geçen diyalogdan da anlaşılabilir gibi öğrencilerin neden bu işlemi yaptıklarının farkında olmadığı bir kural olarak gördükleri belirlenmiştir.

Ö: Çarptım 3/5 ile 1/3’ü çarptım. 1/5 oldu 10’nun 1/5’i de 2 oldu.

A: Neden çarptın peki?

Ö: Yine nın nin dediği için.”

Bileşik Kesir Düzenegine İlişkin Bulgular

Bu kategoriye ilişkin de uzunluk, alan ve küme modeline ait olmak üzere toplam 3 soru sorulmuştur. Burada da en zorlanılan model küme modeli olmuştur. Uzunluk modelinde Ö2, Ö4, Ö8, Ö9, Ö10, Ö11 ve Ö12 kodlu öğrenciler 2. Bir şekil çizerken Ö1, Ö3, Ö5, Ö6 ve Ö7 kodlu öğrenciler var olan şekle bir parça eklemeyi tercih etmişlerdir. 2.bütünü çizen öğrenciler verilen kesrin 1 bütün ve 3 te 1’lik parçadan oluştuğu için böyle yaptıklarını ifade ederken diğer öğrenciler var olana 3 te 1’lik parçanın eklenmesinin yeterli olacağını belirtmişlerdir. Bir parça ekleyen öğrencilerden Ö4’ün ‘*Çünkü tamı 3 te 3 bize 4 te 3’ünü çizmemizi söylemiş. 4 te 3’ten 3 te 3 çıkarınca 3 te 1 kalıyor.*’ şeklindeki ifadesiyle bütünden çıkarma işlemi yaparak kalana odaklandığı, yani kesri bir tam ve bir parça olarak algıladığı belirlenmiştir.

Alan modelinde ise öğrencilerin tümü verilen ilk şekli ikiye bölerek bir parça daha eklemeyi tercih etmişlerdir. Örnek olarak Ö8 ve Ö12 kodlu öğrencilerle geçen diyaloglar aşağıda sunulmuştur.

Ö: 2 de 3, 1 tam 2 de 1 oluyor. Bu sadece 1 tam bir tane daha çizmem gerekiyor. Çünkü diğer yarısı 2’ye bölüp 1’i.

A: Neden 2’ye böldün?

Ö: Çünkü iki eşit parçası burada (paydayı işaret ederek) bunu söylüyor.

A: Bu taradığın kısım ne?

Ö: Şurası 2 de 1, şurası da 2 de 2 yani 1 tam var.

Ö12;

Ö: Şeyda’nın ödevi için bunun 2 de 3’ünü yani 1 tam 2 de 1’ini istiyor. Bunun 1 tamı böyle kalır bundan 1 tane daha çizeriz. 2 de 1’ini istediği için şurasını alırsınız.

A: Bunun 2 de 1’ini istediğini nasıl anladık?

Ö: 2 de 2 1 tam oluyor. Önceki soru gibi. Burada 2 de 1 kalıyor onu da buraya çiziyoruz.

Küme modelinde öğrencilerden verilen 4 silginin 5/2’ si bulmaları istenmiştir. Bu soruda Ö1, Ö2, Ö3, Ö5, kodlu öğrenciler 2’ye bölerek 2’li grup veya parça elde edeceklerini, toplamda da 5 parça olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Ö4, Ö6, kodlu öğrencilerin de verilen kesir değeri ile 4’ü çarparak isteneni elde ettikleri gözlenmiştir. Ö4 kodlu öğrenci çarpma işlemi ile 2 ile 5 tanesinin aynı şey olduğu için çarpma yapabileceğini söylemiştir. Ö7 ve Ö9 kodlu öğrenciler de

önce 2 de 1'i bulup bundan 5 tane alarak bütünü elde edebileceklerini belirttiler. Ö7 kodlu öğrenci ile aşağıda geçen diyalogdan;

Ö: Bunun 2 de 1'ini bulup 5 ile çarpardım.

A: Neden 2 de 1.

Ö: Çünkü bunun bir parçası 2 de 1 olur.

A: Nedir peki 2 de 1'i

Ö: 2'dir. Sonrada 5 ile çarpıp 10'u yine bulurdum şekil çiz dediği için şekli de çizerdim."

Öğrencinin 5 te 2'yi 5 tane ½'lik parçadan elde edebileceğini bu nedenle de önce 1/2'lik parçanın karşılığını bulduğu gözlemlenmiştir.

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada uzunluk, alan ve küme modelleri ile verilmiş kesir modellerini öğrencilerin nasıl ifade ettikleri ve bu ifade etme sürecinde aynı anda parçalama, eş parçalama, basit parçalı kesir, çarpımsal bileşim ve bileşik kesir zihinsel düzeneklerinin nasıl olduğu ortaya çıkarılmıştır.

Aynı anda parçalama ve eş parçalama kategorisine ait sorularda öğrenciler, bir bütünü parçaladıktan sonra parçaları tekrarlayarak karşılaştırma adımını araştırmacının yönlendirmesiyle gerçekleştirmiş olsalar dahi öğrencilerinin bütünü parçalamada ilk dikkat ettikleri noktanın aynı parçalar elde etmek olduğu belirlenmiştir. Bu kategoride öğrencilerin uzunluk modeline ait soruları rahatlıkla parçaladıkları, fakat alan modelinde parçalama yaparken ise özellikle daire şeklinde verilen sorularda zorlandıkları tespit edilmiştir. Benzer bulguya Pesen'in (2007) çalışmasında da rastlanmış, orada da öğrenciler daire şeklinde verilen bütünlere eş parçalara ayırırken zorlanmışlardır. Bu durumun daire şekli ile verilen modelde, öğrencilerden 1/5'lik parça istenilmesinden kaynaklı olabileceği düşünülmektedir. Formdaki tüm daire soruları incelendiğinde, öğrencilerin çift sayıda parçalama gerektiren soruları tek sayıda parçalama gerektiren sorulara göre daha rahat çözdükleri tespit edilmiştir. Benzer şekilde Eroğlu, Camci ve Tanişli (2019) yaptıkları çalışmada öğrencilerin daireyi nasıl parçalayacaklarının ve çift sayıda parçaya ayırma ile tek sayıda parçaya ayırmada farklı yöntemler izlemeleri gerektiğinin tam farkında olmadıkları sonucuna ulaşmışlardır.

Basit parçalı kesir düzeneği kategorisinde öğrencilerin aynı anda parçalama kategorisine göre daha çok diğer kategorilere ise daha az zorlandıkları sonucuna varılmıştır. Benzer şekilde Eliustaoğlu (2016) öğrencilerin parça bütün zihinsel düzeneğinde, basit parçalı zihinsel düzeneğine göre daha başarılı oldukları sonucuna varmıştır. Bu durum aynı anda parçalama kategorisinde öğrencilerin bütünü parçalarken eşliği dikkate almadan rastgele parçalamalar yapması ile ilişkilendirilebilir. Kesirlerin özellikleri üzerinde daha fazla durularak bu sorun giderilebilir.

Çarpımsal bileşim zihinsel düzeneğinde öğrencilerin ezberledikleri kurallarla çarpma işlemini yaptıkları yani iki kesrin paylarını çarparak paya, paydalarını çarparak ise paydaya yazdıkları, bunları modellerle açıklayamadıkları tespit edilmiştir. Bunun nedenini Ö3 kodlu öğrenci 'Burada nın nin eki var, öyle deyince çarpma işlemi yapmam gerektiğini anlıyorum' gibi ifadelerle açıklarken bazı öğrenciler ise kural böyle şeklinde açıklamışlardır. Öğrencilerin burada uzunluk, alan ve küme modelinin her birinde zorlandıkları belirlenmiştir. Benzer şekilde Dağ

(2014) çalışmasında öğretmenlere, kesirlerde çarpma işleminin bir kesrin başka kesir kadarının bulunmasından yola çıkarak çarpma işlemi ile ilgili bir soru yöneltmiş, sonucunda ise öğretmenlerin bu konuyla ilgili model kullanma, problem kurma gibi alanlarda sınırlı olduklarını tespit etmiştir. Öğretmenlerin bu konulardaki yetersizliğinin öğrencilerin de bu konuyu sadece kural olarak öğrenmelerine neden olabileceği düşünülmektedir.

Uzunluk modeline ilişkin sorularda çubuk modeli kullanıldı ve öğrencilerin soruları genel olarak rahatlıkla cevaplandığı gözlemlendi. Bu model ile ilgili sorularda yaşanan sıkıntıların model ile ilgili değil, kesir bilgisi ile ilgili eksiklerden kaynaklandığı düşünülmektedir. Örneğin bileşik kesir düzenegi modelinde öğrencilerin ikinci bir bütün çizme ya da tek parça ekleme konusunda kararsız kaldıkları, bu durumda bileşik kesir konusundaki eksikliklerle ilgili olduğu tespit edilmiştir. Alan modelinde ise sorularda daire ve dikdörtgen modelleri kullanılmıştır. Bu modelde öğrencilerin hiçbirisi verilen şekillerin alanından yola çıkarak çözüm yapmamıştır. Ayrıca daire modellerinde dikdörtgen modeline göre daha fazla zorlanılmıştır. Küme modelinde ise sorularda daire, çubuk ve dikdörtgenler kullanıldı. Bu model de öğrenciler en çok tersine işlemlerde zorlandı.

Kategorilerin genelinde öğrencilerin uzunluk modelinde daha rahat çözüm yaptıkları küme modelinde zorlandıkları belirlenmiştir. Bunun nedeninin sınıf içi uygulamalarda küme modeline diğer modellere göre daha az yer verilmesi olabileceği düşünülmektedir. Çelik'in (2015) öğretmenlerle kesirlerin modellenmesiyle ilgili yaptığı çalışmasında, öğretmenlerin küme modelini çok az kullandığını bu nedenle öğretmenlerin modellerle ilgili bilgilerinin sınırlı olabileceği tespiti de bu durumu destekler niteliktedir. Bu durumla ilgili olarak öncelikle öğretmenlerin bu konuda kendilerini geliştirmeleri ve ders kitaplarında bu konulara daha fazla yer verilmesi ve sınıf içinde konunun özüne yönelik etkinliklerin artırılması önerilir.

Öğrencilerden başarı durumu yüksek olan Ö1, Ö2, Ö3, Ö4 kodlu öğrenciler, başarı durumu orta düzeyde olan Ö5, Ö6, Ö7, Ö8 kodlu öğrenciler ve başarı durumu kötü olan Ö9, Ö10, Ö11, Ö12 kodlu öğrencilerin cevapları karşılaştırıldığında öğrencilerin başarı durumları ve kesir şemaları ile ilişkili genel bir sonuca ulaşılamamıştır. Örneğin şekillerin eş parçalanması ile ilgili olarak Ö2 kodlu ve Ö5 kodlu öğrenciler eş parçalamadan söz etmezken Ö12 kodlu öğrenci eş parçalamayı vurgulamaktadır. Bu durumun iyi öğrencilerin bunu vurgulaması gerektiğinin farkında olmamalarından kaynaklanabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

- Aksu, M. (1997). Student performance in dealing with fractions. *The Journal of Educational Research*, 90 (6), 375-380.
- Altun, M. (2005). *Matematik öğretimi*. Bursa: Alfa Aktüel Yayın Dağıtım.
- Akbaba Dağ, S. (2014). Mikroöğretim ders imecesi modeli ile sınıf öğretmeni adaylarının kesir öğretim bilgilerinin geliştirilmesine yönelik bir uygulama. (Doktora Tezi)
- Alacaci, C. (2014). Öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanılgıları. E. Bingölbalı ve M. F. Özmentar (Ed.), *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri* (s. 63-95). Ankara: Pegem Akademi Yayınları.
- Bingölbalı, E., Arslan, S. ve Zembat, İ. Ö. (2016). *Matematik Eğitiminde Teoriler*. Ankara: Pegem Akademi.

- Çelebioğlu, B. (2014). Kesir kavramına ilişkin bilgi oluşturma sürecinin incelenmesi (Doktora Tezi)
- Çelik, B. (2015). Beşinci sınıf kesirler konusunun öğretim sürecinin matematiksel modeller açısından incelenmesi, (Yüksek Lisans Tezi)
- Eliustaoğlu E. (2016). Investigation of fraction schemes and models as a means to understand how sixth grade students make sense of fractions. (Yüksek Lisans Tezi)
- Eroğlu D. Camci F. Tanışlı D. (2019). Altıncı sınıf öğrencilerinin kesirler ve kesirlerdeki toplama-çıkarma konusundaki bilgilerinin yapılandırılmasına ilişkin tahmini öğrenme yol haritası. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (PAU Journal of Education)* 45:116-143
- Ertuna L. (2013). İlköğretim 4-7. sınıf öğrencilerinin denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin incelenmesi. (Yüksek Lisans Tezi)
- Haser Ç. ve Ubuz B. (2002). Kesirlerde Kavramsal ve İşlemsel Performans, *Eğitim ve Bilim*, 27 (126), 53-61.
- Haser Ç.ve Ubuz B. (2001). İlköğretim 5. sınıf Öğrencilerinin Kesirler Konusunda Kavramsal Anlama ve İşlem Yapma Performansı, IV. Fen Bilimleri Eğitimi Kongresi, s: 609-612, MEB Yay.,Ankara.
- Kara, F. (2017), Altıncı sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama ve çıkarma işlemlerinde farklı temsilleri kullanma becerilerinin incelenmesi. (Yüksek Lisans Tezi)
- Milli Eğitim Bakanlığı (2018). Matematik Dersi Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ve 8. Sınıflar). <http://mufredat.meb.gov.tr> adresinden erişilmiştir.
- Öksüz (2018), 5. sınıf öğrencilerinin kesir kavramını oluşturma süreçlerinin apos teorik çerçevesinde incelenmesi. (Yüksek Lisans Tezi)
- Pesen C. (2007). Öğrencilerin Kesirlerle İlgili Kavram Yanılgıları. *Eğitim ve Bilim* 32(143).
- Siap, İ. ve Duru, A. (2004). Kesirlerde Geometrik Modeleri Kullanabilme Becerisi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 12(1), 89-96
- Steffe, L. P., & Olive, J. (Eds.). (2010). *Children's fractional knowledge*. New York, NY: Springer
- Temur, Ö. (2015) Dördüncü ve beşinci sınıf öğretmenlerinin kesir öğretimine ilişkin görüşleri: fenomenografik araştırma. *Dumlupınar Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*. (29)
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2014). İlkokul ve ortaokul matematiği, gelişimsel yaklaşımla öğretim (S. Durmuş, Çev.). Ankara: Nobel

EKLER**GÖRÜŞME (ANKET) FORMU**

1. Aşağıdaki şeklin $\frac{1}{3}$ ini çiziniz. Sizce oluşturulan her bir parça bütünün ne kadarıdır?

2. Aşağıda verilen bir pizza, 5 arkadaş arasında her kişinin $\frac{1}{5}$ 'lik dilim alacağı şekilde paylaşılacaktır. Bir kişinin yiyeceği pizza ne kadardır? Şekil üzerinde gösteriniz.

3. Aşağıdaki şekil Doğa'nın tabağında yer alan elmaların sayısını göstermektedir. Poyrazın tabağında ise Doğa'ninkinin $\frac{1}{7}$ 'i kadar elma olduğuna göre Poyraz'ın elmalarının sayısını temsil eden şekli çiziniz.

4. Aşağıdaki şekil bir çikolatanın belli bir parçasını göstermektedir. Bu parçanın 4 katı uzunluğuna sahip olan çikolatayı çiziniz.

5. Aşağıda daire şeklinde bir kartondan kesilen $\frac{1}{8}$ lik bir parçanın şekli verilmiştir. Kartonunun tamamını temsil eden şekli çiziniz.

6. Aşağıda Ali'nin bilyelerinin sayısının $\frac{1}{5}$ 'i verilmiştir. Ali'nin bilyelerinin tamamını temsil eden şekli çiziniz.

7. Aşağıda bir bütün pasta ve pasta dilimi gösterilmektedir. Buna göre dilimin pastanın kaçta kaçı olduğunu bulunuz.

8. Aşağıdaki şeklin $\frac{2}{3}$ sini çiziniz

9. Aşağıda verilen büyüklükteki bir keki 8 arkadaş eşit şekilde paylaşacaktır. 3 kişiye düşen toplam kek miktarı ne kadardır? Şekille gösteriniz ve açıklayınız

10. Aşağıdaki şekil Gökçe'nin kalemlerinin sayısını temsil etmektedir. Emre'nin kalem sayısı Gökçe'nin kalemlerinin $\frac{3}{5}$ si olduğuna göre Emre'nin kalemlerini temsil eden şekli çiziniz.

11. Aşağıda büyük dikdörtgen bir bütün pastayı, küçük dikdörtgen ise büyük dikdörtgenden kesilen pasta dilimini temsil etmektedir. Buradan yola çıkarak dilimin pastanın kaçta kaçı olduğunu yazınız.

12. Aşağıdaki hediye paketi başka bir hediye paketinin $\frac{5}{7}$ sini göstermektedir. Buna göre diğer hediye paketinin büyüklüğü ne olur? Şekli çizer misiniz? Bu şekli nasıl çizdin? Çizdiğin şeklin birimini temsil eden kısmı neresidir?

13. Bir pizza 6 arkadaş tarafından eşit şekilde paylaşılmıştır. Aşağıda iki arkadaşın yediği pizza diliminin şekli verilmiştir. Sizce pizzanın tamamı ne kadardır? Şekille gösteriniz ve açıklayınız.

14. Aşağıdaki şekil Berfin'in kalemlerinin sayısını temsil etmektedir. Berfin'in kalem sayısı Elif'in kalemlerinin $\frac{4}{5}$ si olduğuna göre Elif'in kalemlerini temsil eden şekli çiziniz

15. Ayşe Hanım'ın bahçesinin büyüklüğü Ahmet Bey'in bahçesinin büyüklüğünün $\frac{1}{3}$ 'idir. Ayşe Hanım, bahçesinin $\frac{3}{4}$ üne çiçek dikerken $\frac{1}{4}$ ' ini boş bırakacaktır. Ahmet Bey'in bahçesinin büyüklüğü aşağıdaki gibi ise Ayşe Hanım'ın çiçek dikeceği yer ne kadardır? Şekil çizerek gösteriniz.

16. Aşağıda verilen 2 pizza 3 arkadaş tarafından eşit şekilde paylaşılacaktır. Bir kişiye düşen pizza miktarının şeklini çizin

17. Bir kitaplıkta yer alan kitapların $\frac{3}{5}$ 'i ders kitabıdır. Ders kitaplarının $\frac{1}{3}$ 'ü de matematik kitabıdır. Aşağıdaki şekil tüm kitapları temsil ettiğine göre, matematik kitaplarını temsil eden şekli çiziniz.

18. Aşağıdaki şeklin $\frac{4}{3}$ 'ünü çiziniz

19. Şeyda ödevi için Şeyma'nın kullandığı kartonun $\frac{3}{2}$ 'si büyüklükte bir karton kullanmıştır. Aşağıda Şeyma'nın kullandığı karton verildiğine göre Şeyda'nın ödev için kullandığı kartonu da siz çizin.

20. Melis'in renkli kalemleri silgilerinin $\frac{5}{2}$ 'si kadardır. Aşağıdaki şekil silgileri temsil ettiğine göre kalemleri temsil eden şekli çiziniz.

Extended Abstract

Introduction

The concept of fraction is one of the first mathematical concepts that students encounter. Fractions, which form the basis of other subjects, are among the first abstract subjects of mathematics. At the same time, there are various difficulties in learning the fractions, which are one of the most complex subjects of the mathematics program. Some researches about fractions, students were revealed that they had difficulties in defining fractions, writing defined fractions, breaking into peers, and determining units. In order to be able to grasp fractions and relate them to other issues, their different meanings must be known. Contemporary approaches recommend learning new concepts by associating them with pre-existing information. According to Steffe, there are recognition patterns that students create as a result of their previous experiences and they create new information based on these recognition patterns. Steffe and Olive, on the other hand, have developed an idea that number counting mechanisms will be reformed by students and form fraction information. According to the Steffe and Olive hypothesis, critical operations for fractional information are splitting, that is, dividing a fraction into identical parts, repeating, that is, repeating and comparing a piece as much as the desired amount. In our country, no study examining students' understanding of fractions from this theoretical framework has been encountered. Considering that students create fractions based on their knowledge of natural numbers, they are needed.

Method

Case study was used in this research. Within the scope of the research, student responses to the questions prepared by taking Steffe and Olive (2010) Fraction Charts Theory as reference were evaluated as the situation. The participants of this research consisted of 12 students from 7th grade students studying in different classes in a public school in Denizli, in the 2018-2019 academic year. Students were chosen to have good, medium and bad levels of success. The data were collected through one-on-one interviews and document analysis. The documents examined in the research consisted of all kinds of marks on the paper, such as the shapes and processes that the students draw on the paper during the process of answering the questions. The question pool included three questions about length, area, and cluster models for each mechanism, including simultaneous fragmentation, peer fragmentation, simple fragmented unit fraction, and multiplicative composition mental mechanisms. The interview form prepared was applied to students through one-to-one interviews and interviews were recorded with a video camera. The interview with each student took approximately 60 minutes. Afterwards, the transcripts and the answers given by the students to the questions in the questionnaire were evaluated together and analyzed by descriptive analysis. The categories suitable for analysis were determined according to Fraction Charts Theory of Steffe and Olive (2010). These categories are as follows: Simultaneous disintegration and whole mental setup, peer fragmentation mental mechanisms and segmented unit fractions, simple fragmented mental mechanism, multiplication composition mental mechanism, compound fraction assembly. The coding reliability of the questions examined and evaluated by the researchers and field experts was determined as 90%. In the answers to all the questions of the research, the issues with “consensus” and “disagreement” were discussed and reliability was provided by reaching consensus with the necessary regulations.

Results and Discussion

In this study, it is revealed how students express fraction models given by length, area and cluster models, and how mental mechanisms of fragmentation, peer fragmentation, simple segment unit fraction, multiplicative composition are simultaneously in this expression process. At the same time, in the questions of the shredding and peer shredding categories, even though the students performed the comparison step by repeating the parts after shredding a whole, it was determined that the first point that their students pay attention to the same was to obtain the same parts. In this category, it has been determined that students can easily break the questions of the length model, but they have difficulties especially in the questions given in the form of a circle while shredding in the field model. When all the circle questions in the form were examined, it was determined that the students solved the questions requiring an even number of shreds more easily than the questions requiring an odd number of shreds. It was concluded that in the simple fractional unit fraction mechanism category, students had more difficulty in other categories than at the same time. In the mental arrangement of the multiplicative composition, it is determined that the students perform the multiplication process with the rules they have memorized, that is, they write the fraction of the two fractions by the numerator, and the denominator by multiplying them, and cannot explain them with the models. While the reason for this is the student with the code of S3, "I have the suffix of here, I understand that I have to multiply when I say that," while some students explained the rule as such. It was determined that the students had difficulty in each of the length, area and cluster models. It is thought that the inadequacy of teachers in these subjects may cause students to learn this subject only as a rule. In the questions about the length model, the stick model was used and it was observed that the students answered the questions easily. It is thought that the problems experienced in the questions about this model are not related to the model but from the deficiencies related to the fraction information. In the field model, circle and rectangle models are used in the questions. In this model, none of the students made a solution based on the area of the given shapes. In addition, the circle models have more difficulty than the rectangle model. In the cluster model, circles, rods and rectangles were used in the questions. In this model, students mostly had difficulties in reverse transactions.

It was determined that students across the categories had difficulty in the cluster model, where they made more comfortable solutions in the length model. Regarding this situation, it is recommended that teachers develop themselves on this issue and that these subjects are included more in the textbooks and that activities in the classroom are increased.