СЕРКОВ Леонид Александрович

Кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник

Институт экономики Уральского отделения РАН

620014, РФ, г. Екатеринбург, ул. Московская, 29

Контактный телефон: (343) 371-04-11

e-mail: dsge2012@mail.ru

ЕЛИЗАРОВ Дмитрий Борисович

Кандидат технических наук, доцент кафедры бизнес-информатики

Уральский государственный экономический университет

620144, РФ, г. Екатеринбург, ул. 8 Марта/Народной Воли, 62/45

Контактный телефон: (343) 376-45-13

e-mail: elizarovdb@yandex.ru

Моделирование ожиданий в системах с гетерогенными агентами при наличии теневого сектора экономики

Оценивается влияние теневого сектора экономики на динамику стохастической модели общего равновесия (DSGE-модели) с гетерогенными агентами при использовании алгоритма формирования ожиданий, ассоциируемого с обучением агентов методом проб и ошибок. Исследуется неоклассическая DSGE-модель с двумя секторами экономики (легальным и теневым), подверженными влиянию агрегированных шоков производительности. Модель описывает экономику с неполными рынками, агрегированной неопределенностью и с бесконечным числом экономических гетерогенных агентов (домашних хозяйств и фирм). Источником гетерогенности являются идиосинкратические шоки доходов агентов. Параметры модели оцениваются методом калибровки на статистических данных российской экономики. Исследуемая модель сравнивается с подобной моделью с репрезентативными агентами. Показано, что качество полученной модели превосходит качество модели с репрезентативными агентами. Проанализировано влияние факторов теневого сектора на волатильность переменных модели.

JEL classification: E17, E52, E61

Ключевые слова: теневой сектор экономики; гетерогенные агенты; ожидания; обучение методом проб и ошибок.

Введение

В последнее время важное место в анализе макроэкономических процессов занимают динамические стохастические модели общего равновесия (DSGE-модели). Данный тип моделей стал результатом нового неоклассического синтеза и комбинирует лучшие идеи двух современных школ экономической мысли: неоклассиков и неокейнсианцев. Помимо теоретической ценности такие модели приносят большую практическую пользу, подтверждением чего является повсеместное использование данного инструментария центральными банками многих стран мира: Канады [12], Великобритании [9], США [7], Швеции [3] и др.

Практически все результаты, полученные с помощью DSGE-моделей, относятся к формированию рациональных ожиданий репрезентативными агентами [1], т. е.

субъектами рынка, поведение которых отражает в среднем поведение индивидуальных агентов, выполняющих на рынке одинаковую функцию. Данный принцип является одним из недостатков динамических стохастических моделей общего равновесия, в которых он используется, так как представляет собой, по сути, методологический редукционизм. В экономике подход репрезентативного агента уравнивает макро- и микросферы во всех отношениях. В связи с этим рассмотрение процесса формирования ожиданий на примере моделей с гетерогенными агентами представляет научный интерес.

Исследование DSGE-моделей с гетерогенными агентами вызывает затруднения в связи с тем, что кроме идиосинкратических шоков (несистемные шоки, связанные, например, с различием в индивидуальных доходах экономических агентов) агенты испытывают системные агрегированные шоки (например, технологические шоки). Наличие этих шоков приводит к зависящей от времени функции распределения доходов индивидуальных агентов, т. е. к переменным состояниям бесконечной размерности. Для анализа подобных моделей необходима соответствующая аппроксимация функции распределения, приводящая к принятию решений экономическими агентами в условиях ограниченной информации [2; 8]. В работе [2] показано, что формирование (самоорганизация) ожиданий в подобных моделях может ассоциироваться с обучением индивидуальных агентов методом проб и ошибок.

Кроме того, практически все результаты, полученные анализом DSGE-моделей, не учитывают наличия теневого сектора экономики. Исследованиям экономики при наличии теневого сектора с помощью этих моделей посвящено небольшое число работ [5; 13]. Все результаты в этих публикациях основаны на формировании рациональных ожиданий репрезентативными агентами. В частности, в работе [5] проведен сравнительный анализ моделей с наличием теневого сектора экономики и моделей без учета в них этого сектора. Сделан вывод о том, что качество моделей, учитывающих наличие сектора нелегальной экономики, лучше.

Целью предлагаемой публикации является исследование влияния теневого сектора экономики на поведение гетерогенных агентов, формирующих ожидания методом проб и ошибок, в DSGE-моделях и сравнение качества этих моделей с подобными моделями репрезентативных агентов. Параметры модели оцениваются методом калибровки на статистических данных российской экономики.

Модель и оценка параметров

В предлагаемой публикации исследуется неоклассическая динамическая стохастическая модель общего равновесия с двумя секторами экономики – легальным (рыночным) и теневым, подверженными влиянию агрегированных шоков производительности. Она описывает экономику с гибкими ценами (заработными платами), неполными рынками, агрегированной неопределенностью и с бесконечным числом экономических гетерогенных агентов – домашних хозяйств. Источником гетерогенности являются идиосинкратические частично не страхуемые шоки доходов агентов – домашних хозяйств. Эти агенты могут частично страховать сами себя против рисков уменьшения доходов, создавая определенные запасы капитала. При этом домашние хозяйства имеют одинаковые потребительские предпочтения, т. е. они являются *ex post* гетерогенными и *ex ante* идентичными.

Экономические операции, не наблюдаемые прямыми статистическими методами, подразделяются Росстатом на следующие группы: теневые; в неформальном секторе; незаконные; осуществляемые домашними хозяйствами для их собственного конечного использования¹. В описываемой модели учитывается первая группа операций, т. е.

¹ Национальные счета России в 2007–2014 годах: стат. сб. / Росстат. М., 2015; Национальные счета России в 2000–2007 годах: стат. сб. / Росстат. М., 2008.

теневое (скрытое) производство. Этот вид деятельности является формально законным, но намеренно скрывается от органов государственной власти в целях уклонения от уплаты налогов или следования законодательным нормам.

В модели рассматриваются три вида агентов – домашние хозяйства, фирмы и государственный сектор (неявно). Индивидуальные агенты – фирмы и домашние хозяйства – являются составной частью континуального множества единичной массы (агенту присваивается индекс $i \in [0,1]$). Фирмы действуют в интересах собственников – домашних хозяйств на конкурентных рынках, производят гомогенный продукт, т. е. являются репрезентативными. Технология фирм легального сектора описывается производственной функцией Кобба – Дугласа $Y_{t,r} = z_{1,t} K_t^\alpha h_{t,r}^{1-\alpha}$, где $z_{1,t}$ – агрегированный технологический шок, влияющий на производительность в легальном секторе экономики; α и $1 - \alpha$ – доли факторов производства в общем объеме выпуска; K_t – агрегированное значение капитала (на одного агента); $h_{t,r}$ – затраты времени на труд в легальном секторе экономики. Технология фирм теневого сектора экономики описывается производственной функцией $Y_{t,u} = z_{2,t} h_{t,u}$, где $z_{2,t}$ – агрегированный технологический шок, влияющий на производительность в теневом секторе экономики¹; $h_{t,u}$ – затраты времени на труд в теневом секторе экономики.

Доход фирм легального сектора экономики при нормализованной к единице цене гомогенного продукта составляет $R_{t,r} = (1 - \tau_F) Y_{t,r}$, где τ_F – постоянная ставка налога с прибыли, $\tau_F \in (0,1)$. Для нахождения дохода фирм теневого сектора введем вероятность $p(p \in (0,1))$ обнаружения налоговыми органами теневых операций фирм. При этом фирма должна будет выплатить сумму $s\tau_F$, где дополнительный множитель $s > 1$ отражает штраф за нелегальную деятельность фирм. Таким образом, суммарный доход фирм составляет $R_t = pR_{D,t} + (1 - p)R_{ND,t}$, где $R_{D,t}$ – суммарный доход фирм при обнаружении ими нарушений; $R_{ND,t}$ – суммарный доход фирм при отсутствии обнаружения ими нарушений. При этом

$$R_{D,t} = (1 - \tau_F) Y_{t,r} + (1 - s\tau_F) Y_{t,u}; \quad (1)$$

$$R_{ND,t} = (1 - \tau_F) Y_{t,r} + Y_{t,u}; \quad (2)$$

$$R_t = (1 - \tau_F) Y_{t,r} + (1 - ps\tau_F) Y_{t,u}. \quad (3)$$

Максимизируя прибыль $\max_{(h_{t,r}, h_{t,u}, K_t)} \Pi_t = R_t - w_{t,r} H_{t,r} - w_{t,u} h_{t,u} - r_t K_t$ с учетом формулы (5) и выражений для производственных функций $Y_{t,r}$, $Y_{t,u}$, получим уравнения

$$z_{1,t} (1 - \tau_F) (1 - \alpha) K_t^\alpha h_{t,r}^{-\alpha} = w_{t,r}; \quad (4)$$

$$z_{2,t} (1 - ps\tau_F) = w_{t,u}; \quad (5)$$

$$z_{1,t} (1 - \tau_F) \alpha K_t^{\alpha-1} h_{t,r}^{1-\alpha} = r_t, \quad (6)$$

где $w_{t,r} = w_{t,r}(K_t, h_{t,r}, z_{1,t})$ – заработная плата агентов в легальном секторе экономики; $w_{t,u}(z_{2,t})$ – заработная плата агентов в теневом секторе экономики; $r_t = r(K_t, h_{t,r}, z_{1,t})$ – норма прибыли от капиталовложений. Эти переменные являются функциями от агрегированных значений капитала K_t (на одного агента), затрат времени на труд $h_{t,r}$ и агрегированных технологических шоков $z_{1,t}$, $z_{2,t}$, влияющих на производительность в рыночном и теневом секторах экономики.

¹ Данный вид производственной функции объясняется тем, что в теневом секторе используется практически тот же капитал, что и в легальном секторе экономики.

Гетерогенные индивидуальные агенты – домашние хозяйства в каждом периоде времени t решают задачу максимизации ожидаемой дисконтированной суммы значений функции полезности $U(c_{it}, h_{it,r}, h_{it,u})$:

$$\max_{\{c_{it}, k_{i,t+1}, h_{it,r}, h_{it,u}\}} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_{it}, h_{it,r}, h_{it,u}). \quad (7)$$

Бюджетное ограничение этой задачи для индивидуальных домашних хозяйств записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} c_{it} + k_{i,t+1} = & (1 - \tau_Y) \left(r(K_t, h_{t,r}, z_{1,t}) k_{it} + w_{t,r} (K_t, h_{t,r}, z_{1,t}) (1 + e_{3,i,t}) h_{it,r} \right) + \\ & + w_{t,u} (1 + e_{4,i,t}) h_{it,u} + (1 - \delta) k_{it}, \\ k_{i,t+1} \geq & 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В выражениях (7) и (8) E_t – оператор ожиданий; c_{it} – индивидуальный уровень потребления агента; k_{it} – запас капитала индивидуального агента на начало периода; $h_{it,r}$ и $h_{it,u}$ – количество часов, затраченное на труд индивидуальным агентом в легальном и теневом секторе экономики соответственно. Для упрощения будем считать в дальнейшем время, затраченное на труд, одинаковым для всех агентов ($h_{it,r} = h_{i,r}$, $h_{it,u} = h_{i,u}$). Различие в трудовых доходах агентов легального и теневого секторов экономики обеспечивается наличием идиосинкратических шоков $e_{3,i,t} \sim N(0, \sigma_3^2)$ и $e_{4,i,t} \sim N(0, \sigma_4^2)$, где σ_3^2 , σ_4^2 – дисперсии. Параметр δ в бюджетном ограничении (8) – норма обесценения капитала, а τ_Y – ставка налога на доход физических лиц, $\tau_Y \in (0, 1)$.

Агрегированные технологические шоки $z_{1,t}$ и $z_{2,t}$ являются серийно коррелированными и изменяются в соответствии с уравнениями

$$z_{1,t} = (1 - \rho_1) + \rho_1 z_{1,t-1} + e_{1,t}; \quad (9)$$

$$z_{2,t} = (1 - \rho_2) + \rho_2 z_{2,t-1} + e_{2,t}, \quad (10)$$

где $e_{1,t} \sim N(0, \sigma_1^2)$, $e_{2,t} \sim N(0, \sigma_2^2)$, σ_1^2 , σ_2^2 – соответствующие дисперсии.

Как уже отмечалось выше, для решения задачи оптимизации (7)–(10) с учетом выражений (4)–(6) необходима соответствующая аппроксимация функции распределения доходов (запасов капитала) индивидуальных агентов. В предлагаемой публикации используется подход П. Краселла и А. Смита (P. Krusell and A. Smith) [11], заключающийся в замене динамики функции распределения доходов динамикой моментов этой функции. Отметим, что этот подход ассоциируется с алгоритмом формирования ожиданий путем обучения агентов методом проб и ошибок (более подробно этот алгоритм рассматривается ниже). В общем случае функция распределения характеризуется статистикой моментов $m = (m_1, m_2, \dots, m_I)$, где I – порядок момента. Авторы [11] показали, что игнорирование моментов порядка выше первого приводит к экстремально малой ошибке. Поэтому мы рассмотрим простейший случай аппроксимации динамики функции распределения запасов капитала индивидуальных агентов динамикой ее первого момента, т. е. агрегированного капитала K_t . Для решения задачи оптимизации к условиям (7)–(10) необходимо добавить воспринимаемый агентами закон изменения агрегированного капитала $K_t = f(K_{t-1}, z_{1,t}, z_{2,t})$. В исследуемой модели с гетерогенными агентами последние делают предположение о законе движения агрегированной переменной (капитала).

Для решения задачи оптимизации будем использовать воспринимаемый закон изменения агрегированного капитала [4; 6]:

$$K_t = b_0 + b_K K_{t-1} + b_{z_1} (z_{1,t} - z_1) + b_{z_2} (z_{2,t} - z_2), \quad (11)$$

где z_1, z_2 – стационарные детерминированные состояния технологических шоков $z_{1,t}, z_{2,t}$; $b_0, b_K, b_{z_1}, b_{z_2}$ – параметры убеждений агентов относительно закона изменения агрегированного капитала (могут изменяться при обучении методом проб и ошибок).

Таким образом, общее равновесие в исследуемой модели устанавливается в результате:

оптимизации – агенты – домашние хозяйства решают задачу максимизации (7)–(10) при заданных значениях (4)–(6), (11);

ценового фактора – заработные платы и процентная ставка определяются из условий максимизации прибыли фирм (4)–(6);

агрегирования – факторы производства генерируются в результате агрегации агентов, $K_t = \int k_{i,t} di, h_{t,r} = \int h_{i,t,r} di, h_{t,u} = \int h_{i,t,u} di$.

Рассмотрим пошагово алгоритм Краселла – Смита применительно к исследуемой модели.

1. Задаем начальный вектор параметров убеждений агентов b из компонент $b_0, b_K, b_{z_1}, b_{z_2}$. Генерируем временную последовательность агрегированных шоков $z_{1,t}, z_{2,t}$ длиной T . Задаем начальные значения запасов капитала k_{it} для N индивидуальных агентов. Генерируем для каждого агента временную последовательность идиосинкратических шоков длиной T .

2. Для заданного вектора параметров b и закона изменения агрегированного капитала (11) решаем задачу оптимизации (7)–(10) для индивидуального агента.

3. Используя полученные на втором шаге поведенческие функции (правила) для индивидуальных агентов, проводим имитационное моделирование с помощью метода Монте-Карло индивидуальных запасов капитала k_{it} для совокупности N агентов. Агрегируя на каждом периоде симуляции запасы капитала индивидуальных агентов, получаем временной ряд K_t .

4. С помощью регрессионного анализа для переменной K_t , полученной на предыдущем шаге, находим вектор регрессионных параметров $\tilde{b}$, компонентами которого являются параметры $\tilde{b}_0, \tilde{b}_K, \tilde{b}_{z_1}, \tilde{b}_{z_2}$.

5. Задаем вектор параметров $\tilde{b}_{new}$ для следующей возможной итерации по правилу $\tilde{b}_{new} = \lambda b + (1 - \lambda)\tilde{b}$, где $\lambda \in [0, 1]$ – параметр обновления.

6. Повторяем шаги со второго по пятый до тех пор, пока норма вектора разности $\tilde{b}_{new} - b$ не будет превышать заданную величину ошибки.

Остановимся более подробно на втором шаге. Задача оптимизации (7)–(10) решается в данной работе методами теории возмущений второго порядка [10; 14]. Для абстрагирования от ограничения $k_{i,t+1} \geq 0$ в виде неравенства следует заменить это ограничение стандартным добавлением в условие максимизации (7) штрафной функции [6]:

$$P(k_{i,t+1}) = \frac{\eta_1}{\eta_0} \exp(-\eta_0 k_{i,t+1}) - \eta_2 k_{i,t+1}, \quad (12)$$

где η_0, η_1, η_2 – параметры штрафной функции.

Условие максимизации (7) в этом случае примет вид

$$\max_{\{c_{it}, k_{i,t+1}, h_{i,t,r}, h_{i,t,u}\}} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_{it}, h_{i,t,r}, h_{i,t,u}) + P(k_{i,t+1}). \quad (13)$$

Реализация алгоритма Краселла – Смита для анализа модели с гетерогенными агентами осуществлялась в пакете программ Matlab с использованием пакета функций Dynare¹. Функция полезности имеет аналогичный приведенному в работе [5] вид:

¹ Ввиду специфического формата публикации промежуточные выкладки результатов решения задачи оптимизации методами теории возмущений опущены и могут быть представлены автором вместе с программными кодами при запросе по электронной почте.

$$U(c_{it}, h_{it,r}, h_{it,u}) \equiv \frac{c_{it}^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{B_r (1 - h_{it,r} - h_{it,u})^{1-\mu}}{1-\mu} - \frac{B_u h_{it,u}^{1+\varphi}}{1+\varphi}, \quad (14)$$

где $B_r, B_u > 0$, σ – параметр, обратный эластичности межвременного замещения; B_r, B_u, φ, μ – параметры предпочтений досуга и труда агентов. Примем, что $\sigma = 1$; $\alpha = 0,36$; $\delta = 0,025$; $\rho_1 = \rho_2 = 0,95^1$. Параметры штрафной функции $\eta_0 = 0,4$; $\eta_1 = 0,3$; $\eta_2 = 0,4$ (выбраны из условий устойчивости и максимальной скорости схождения алгоритма). Начальные значения параметров убеждений обучающихся агентов: $b_0 = 1,4$; $b_k = 0,6$; $b_z = 0,95$ и значение параметра $\lambda = 0,5$ выбраны из условий максимальной скорости схождения алгоритма. Число гетерогенных агентов, участвующих в накоплении капитала, $N = 1000$, длина временного ряда $T = 10000$. Начальные значения запасов капитала для всех индивидуальных агентов равны запасам капитала в стационарном детерминированном (долгосрочном) состоянии. Параметр s принят равным 1,3, так как штраф за неуплату налогов, согласно Налоговому кодексу Российской Федерации, составляет 20% и 40% (за умышленные действия) от неуплаченной суммы налога. Параметр p принят равным 0,1. Налоговые ставки $\tau_Y = 0,13$, $\tau_F = 0,2$. Значения дисперсий $\sigma_1^2 = 0,03$, $\sigma_2^2 = 0,03$, $\sigma_{3,i}^2 = 0,07$, $\sigma_{4,i}^2 = 0,07$.

Наибольшую трудность представляет калибровка параметров предпочтений досуга и труда агентов B_r, B_u, φ, μ . Калибровка этих параметров проводилась с использованием статистических данных российской экономики. При этом использовались квартальные данные Росстата по валовому внутреннему продукту (ВВП), конечному потреблению домашних хозяйств в постоянных ценах 2008 г. в период 2003–2015 гг. Для данных по ВВП легального и теневого сектора экономики использовались годовые показатели корректировки валовой добавленной стоимости на экономические операции, не наблюдаемые прямыми статистическими методами². Для перевода годовых показателей корректировки (процент к валовой добавленной стоимости) в квартальные использовался аппарат сплайн-аппроксимации, позволяющий сгладить годовую статистику, а также интерполировать данные. Аппроксимация макроэкономических показателей с помощью кубического сплайна дает возможность найти промежуточные значения годовой статистики и восстановить квартальные значения. Для получения окончательных данных по кварталам необходимо воспользоваться поправочным коэффициентом. Для нахождения поправочного коэффициента следует найти среднее значение данных по кварталам за год, полученных при разбиении с помощью сплайнов. Это число делится на годовое значение (по данным Росстата). Учитывая его значение, показатель корректировки пересчитывается по формуле

$$\text{Показатель корректировки} = \frac{\text{Значение за квартал}}{\text{Поправочный коэффициент}}.$$

Для нахождения значений параметров предпочтений B_r, B_u, φ, μ применялся подход, использованный в работе [5]. Искомые параметры определялись из сравнения четырех модельных и фактических показателей:

- отношение стандартных отклонений общего (с учетом теневого сектора) ВВП и конечного потребления;
- коэффициент корреляции между общим ВВП и конечным потреблением;
- коэффициент корреляции между теневым ВВП и конечным потреблением;
- коэффициент корреляции между легальным ВВП и конечным потреблением.

¹ Эти значения параметров наиболее часто используются при калибровке DSGE-моделей российской экономики.

² Национальные счета России в 2007–2014 годах: стат. сб. / Росстат. М., 2015; Национальные счета России в 2000–2007 годах: стат. сб. / Росстат. М., 2008.

В результате сравнений получены следующие значения параметров предпочтений: $B_r = 0,95$; $B_u = 1,55$; $\varphi = 0,8$; $\mu = 1,2$.

Результаты моделирования

Исследуемая авторами модель сопоставлялась с подобной моделью (при наличии теневого сектора), в которой экономические агенты являются репрезентативными и формируют рациональные ожидания. При этом параметры предпочтений в модели с репрезентативными агентами B_r , B_u , φ , μ оценивались так же, как и в исследуемой модели, остальные параметры совпадали. Результаты сравнения приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты сравнения качества моделей при наличии теневого сектора с гетерогенными и репрезентативными агентами

Переменная	Y_r	Y_u	Y_{tot}	c
Фактические данные (российская экономика)				
$\sigma_{\text{переменной}}$	3,865	2,345	3,091	2,343
$\rho(Y_{tot}, \text{переменная})$	0,751	-0,572	1,000	0,835
Результаты, полученные для модели с репрезентативными агентами				
$\sigma_{\text{переменной}}$	4,543	3,567	4,765	3,234
$\rho(Y_{tot}, \text{переменная})$	0,843	-0,67	1,000	0,876
Результаты, полученные для модели с гетерогенными агентами				
$\sigma_{\text{переменной}}$	3,434	2,543	3,567	2,665
$\rho(Y_{tot}, \text{переменная})$	0,811	-0,602	1,000	0,891

В табл. 1 $Y_{tot} = Y_r + Y_u$ является агрегированным ВВП с учетом теневого сектора экономики; $\sigma_{\text{переменной}}$ – стандартное отклонение соответствующей переменной; $\rho(Y_{tot}, \text{переменная})$ – коэффициент корреляции между соответствующей переменной и агрегированным ВВП. Суммарная статистика в таблице получена по результатам анализа пятидесятипериодных модельных симуляций и фактических квартальных данных российской экономики за 2003–2015 гг. Использовались очищенные от сезонности и тренда логарифмы фактических данных, умноженные на 100. Тренд удалялся с помощью фильтра Ходрика – Прескотта.

Анализ показывает, что волатильность переменных, оцениваемая по стандартному отклонению, в моделях с гетерогенными агентами гораздо ближе к фактическим данным, нежели в моделях репрезентативных агентов. Отметим меньшее значение стандартного отклонения потребления домашних хозяйств в моделях с гетерогенными агентами (и более близкое к фактическим данным), по сравнению с волатильностью потребления в моделях с репрезентативными агентами. Это означает, что индивидуальные агенты более эффективно сглаживают свое потребление в модели с гетерогенными агентами. Следует отметить, что одним из недостатков современных DSGE-моделей является несоответствие фактической волатильности и моделируемой волатильности потребления домашних хозяйств. Значение последней намного превышает фактическую волатильность потребления. Для устранения этого несоответствия в уравнения DSGE-моделей вводят не совсем реалистичную предпосылку о формировании у агентов привычек в потреблении (habit formation). Агенты стараются поддерживать одинаковый уровень потребления при изменяющемся доходе в силу своих привычек и сглаживают свое потребление. Введение в модель гетерогенности агентов для сглаживания потребления является, по мнению авторов, более реалистичной предпосылкой, чем предпосылка о формировании привычек в потреблении. Анализ коэффициентов корреляции (см. табл. 1) $\rho(Y_{tot}, \text{переменная})$ также свидетельствует о том, что качество модели

с гетерогенными агентами выше по сравнению с качеством модели репрезентативных агентов.

Одной из важнейших характеристик DSGE-моделей является поведение функций импульсного отклика. Авторы из-за ограниченного объема публикации не приводят вид этих функций, так как качественное поведение функций импульсного отклика не отличается от поведения их в моделях с репрезентативными агентами.

Представляет интерес исследование влияния параметров, описывающих теневой сектор экономики, на волатильность основных переменных модели. В табл. 2 отражены результаты декомпозиции дисперсии эндогенных переменных, т. е. доля дисперсии этих переменных, которая вызывается двумя идиосинкратическими e_3 , e_4 и двумя агрегированными e_1 , e_2 шоками.

Таблица 2

**Влияние параметров, описывающих теневой сектор экономики,
на декомпозицию дисперсий основных переменных модели**

Переменная	e_1	e_2	e_3	e_4
$B_u = 1,55, \varphi = 0,8$				
k	85,10	8,10	2,10	4,70
K	90,90	6,60	2,30	0,20
c	70,25	19,60	6,10	4,05
$B_u = 0,85, \varphi = 0,8$				
k	87,10	6,10	4,10	2,70
K	91,90	5,60	2,50	0,00
c	80,25	10,60	7,10	2,05
$B_u = 0,85, \varphi = 1,5$				
k	88,10	5,10	3,10	3,70
K	90,90	6,60	2,30	0,20
c	79,25	11,60	6,10	3,05

Результаты декомпозиции дисперсий (табл. 2) получены при значениях $\sigma_1^2 = 0,03$, $\sigma_2^2 = 0,03$, $\sigma_{3,i}^2 = 0,07$, $\sigma_{4,i}^2 = 0,07$. Из анализа результатов декомпозиции дисперсий следует, что на распределение дисперсий влияет только параметр B_u – весовой фактор, отражающий активность в теневом секторе экономики. Параметр φ – величина, обратная эластичности предложения труда по реальной заработной плате в теневом секторе, практически не влияет на распределение дисперсий. При этом, как видно из табл. 2, параметр B_u оказывает влияние в основном на распределение дисперсий потребления индивидуальных агентов. С увеличением параметра B_u растет доля дисперсии (в общей дисперсии потребления), вызванная шоками e_2 и e_4 (в меньшей степени).

Заключение

Исследовано влияние теневого сектора экономики на поведение гетерогенных агентов в DSGE-модели. Для анализа применялся алгоритм формирования ожиданий, ассоциируемый с обучением агентов методом проб и ошибок. Проведено сравнение качества этой модели с подобной моделью репрезентативных агентов, результаты которого позволяют утверждать, что качество полученной модели превосходит качество подобной модели с репрезентативными агентами.

Исследовано влияние теневых факторов модели на декомпозицию дисперсий. Показано, что параметр предпочтений агентов – домашних хозяйств, обратный эластичности предложения труда по реальной заработной плате в теневом секторе, практически не влияет на распределение дисперсий.

Полученные результаты могут представлять интерес при анализе не только низко-размерных (как исследуемая модель), но и крупномасштабных DSGE-моделей.

Источники

1. Андреев М. Ю., Поспелов И. Г. Принцип рациональных ожиданий: обзор концепций и примеры моделей. М. : ВЦ РАН, 2008.
2. Серков Л. А. Моделирование ожиданий в системах с гетерогенными агентами // Журнал экономической теории. 2015. № 2. С. 86–92.
3. Adolfson M., Laséen S., Lindé J., Villani M. RAMSES – A New General Equilibrium Model for Monetary Policy Analysis // Sveriges Riksbank Economic Review. 2007. No. 2. P. 5–39.
4. Aiyagari S. Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving // Quarterly Journal of Economics. 1994. Vol. 109. Issue 3. P. 659–684.
5. Busato F., Chiarini B. Market and Underground Activities in a Two-Sector Dynamic Equilibrium Model // Economic Theory. 2004. Vol. 23. No. 4. P. 831–861.
6. Den Haan W. J., Rendahl P. Solving the Incomplete Markets Model with Aggregate Uncertainty Using Explicit Aggregation // Journal of Economic Dynamics and Control. 2010. Vol. 34. No. 1. P. 69–78.
7. Erceg C. J., Guerrier L., Gust C. SIGMA: A New Open Economy Model for Policy Analysis // International Journal of Central Banking. 2006. Vol. 2. No. 1. P. 111–144.
8. Evans G. W., Honkapohja S. Adaptive Learning and Monetary Policy Design // Journal of Money, Credit and Banking. 2003. Vol. 35. No. 6. Part 2. P. 1045–1072.
9. Harrison R., Nikolov K., Quinn M., Ramsay G., Scott A., Thomas R. The Bank of England Quarterly Model. L. : Bank of England Publ., 2005.
10. Kim S. H., Kollmann R., Kim J. Solving the Incomplete Markets Model with Aggregate Uncertainty Using a Perturbation Method // Journal of Economic Dynamics and Control. 2010. Vol. 34. No. 1. P. 50–58.
11. Krusell P., Smith A. A. Income and Wealth Heterogeneity, Portfolio Choice, and Equilibrium Asset Returns // Macroeconomic Dynamics. 1997. Vol. 1. Issue 2. P. 387–422.
12. Murchison S., Rennison A. ToTEM: The Bank of Canada's New Quarterly Projection Model. Technical Report No. 97. Ottawa, Ontario : Bank of Canada Publ., 2006.
13. Orsi R., Raggi D., Turino F. Size, Trend and Policy Implications of the Underground Economy. Working paper No. 818. Dipartimento Scienze Economiche, Università di Bologna, 2012.
14. Schmitt-Grohe S., Uribe M. Solving Dynamic General Equilibrium Models Using a Second-Order Approximation to the Policy Function // Journal of Economic Dynamics and Control. 2004. Vol. 28. Issue 4. P. 755–775.

Modeling of Expectations in the Systems with Heterogeneous Agents in the Presence of Shadow Economy

by Leonid A. Serkov and Dmitry B. Yelizarov

The paper investigates the influence of an informal sector of economy on the dynamic stochastic general equilibrium models (DSGE-models) with heterogeneous agents using the algorithm of formation of expectations associated with agent learning by trial and error. The authors study a neoclassical DSGE-model with two sectors of economy, namely legal and shadow ones, exposed to aggregate produc-

tivity shocks. The model describes an economy with incomplete markets, aggregate uncertainty and an infinite number of heterogeneous economic agents (households and firms). The source of heterogeneity is idiosyncratic shocks of the agents' revenues. The authors test the parameters of the model on the statistics on the Russian economy and compare the constructed model with a similar one with representative agents. They prove that the quality of the developed model is higher than the quality of the models with representative agents. Finally, the authors examine the impact of the factors of informal sector on the volatility of variables in the model.

Keywords: shadow economy; heterogeneous agents; expectations; learning by trial and error.

References:

1. Andreev M. Yu., Pospelov I. G. *Printsip ratsional'nykh ozhidaniy: obzor kontseptsii i primery modely* [The principle of rational expectations: Survey of concepts and examples of models]. Moscow: Dorodnitsyn Computing Centre of RAS, 2008.
2. Serkov L. A. Modelirovanie ozhidaniy v sistemakh s geterogennymi agentami [Modeling expectations in the systems with heterogeneous agents]. *Zhurnal ekonomicheskoy teorii – Russian Journal of Economic Theory*, 2015, no. 2, pp. 86–92.
3. Adolfson M., Laséen S., Lindé J., Villani M. RAMSES – A New General Equilibrium Model for Monetary Policy Analysis. *Sveriges Riksbank Economic Review*, 2007, no. 2, pp. 5–39.
4. Aiyagari S. Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving. *Quarterly Journal of Economics*, 1994, vol. 109, issue 3, pp. 659–684.
5. Busato F., Chiarini B. Market and Underground Activities in a Two-Sector Dynamic Equilibrium Model. *Economic Theory*, 2004, vol. 23, no. 4, pp. 831–861.
6. Den Haan W. J., Rendahl P. Solving the Incomplete Markets Model with Aggregate Uncertainty Using Explicit Aggregation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2010, vol. 34, no. 1, pp. 69–78.
7. Erceg C. J., Guerrier L., Gust C. SIGMA: A New Open Economy Model for Policy Analysis. *International Journal of Central Banking*, 2006, vol. 2, no. 1, pp. 111–144.
8. Evans G. W., Honkapohja S. Adaptive Learning and Monetary Policy Design. *Journal of Money, Credit and Banking*, 2003, vol. 35, no. 6, part 2, pp. 1045–1072.
9. Harrison R., Nikolov K., Quinn M., Ramsay G., Scott A., Thomas R. *The Bank of England Quarterly Model*. L.: Bank of England Publ., 2005.
10. Kim S. H., Kollmann R., Kim J. Solving the Incomplete Markets Model with Aggregate Uncertainty Using a Perturbation Method. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2010, vol. 34, no. 1, pp. 50–58.
11. Krusell P., Smith A. A. Income and Wealth Heterogeneity, Portfolio Choice, and Equilibrium Asset Returns. *Macroeconomic Dynamics*, 1997, vol. 1, issue 2, pp. 387–422.
12. Murchison S., Rennison A. ToTEM: *The Bank of Canada's New Quarterly Projection Model*. Technical Report No. 97. Ottawa, Ontario: Bank of Canada Publ., 2006.
13. Orsi R., Raggi D., Turino F. *Size, Trend and Policy Implications of the Underground Economy*. Working paper no. 818. Dipartimento Scienze Economiche, Università di Bologna, 2012.
14. Schmitt-Grohe S., Uribe M. Solving Dynamic General Equilibrium Models Using a Second-Order Approximation to the Policy Function. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2004, vol. 28, issue 4, pp. 755–775.

Contact Info:

Leonid A. Serkov, Cand. Sc. (Physics & Mathematics), Sr. Researcher
 Phone: (343) 371-04-11
 e-mail: dsge2012@mail.ru
 Dmitry B. Yelizarov, Cand. Sc. (Eng.), Associate Prof. of Business Information Science Dept.
 Phone: (343) 376-45-13
 e-mail: elizarovdb@yandex.ru

Institute of Economics (Ural branch of the Russian Academy of Sciences)
 29 Moskovskaya St., Yekaterinburg, Russia, 620014
 Ural State University of Economics
 62/45 8 Marta/Narodnoy Voli St., Yekaterinburg, Russia, 620144