Г.Н. Кузнецов¹, А.Н. Степанов^{1,2}

МУЛЬТИПОЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ИСТОЧНИКА ЗВУКА В ВОЛНОВОДЕ

¹Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН
Россия, 117036, Москва, ул. Вавилова, 38,

²Самарский национальный университет им. акад. С.П. Королева
Тел.: 8(977)513-13-50, E-mail: skbmortex@mail.ru

Приводятся результаты аналитического представления мультипольной модели источника звука, эквивалентного на низких частотах по характеристикам излучения реальным объемным пространственно-развитым источникам. Обоснована необходимость учета критерия для разделения полей в ближней и дальней зоне при решении прямых и обратных задач в линейной постановке. Поставлена и решена краевая задача для модельного излучателя в полупространстве. Выполнен переход от неоднородного к однородному уравнению Гельмгольца.

Ключевые слова: мультипольная модель, ближняя и дальняя зоны, однородная краевая задача

Рис.1.

Пусть в однородном неограниченном пространстве Ω находится монохроматический источник звука конечных размеров и произвольной формы. Выбрав внутри источника произвольную точку O , построим из нее как из центра сферу S_0 радиуса R_0 так, чтобы источник целиком находился внутри сферы (рис. 1). Построим далее сферическую систему координат, центр которой совмещен с точкой O . Давление, создаваемое монохроматическим источником в некоторой точке поверхности сферы, определяется потенциалом скоростей звукового поля $\tilde{\psi}(R_0, \theta, \varphi)$, где $R = R_0, \theta, \varphi$ – сферические координаты. А звуковые колебания, создаваемые исходным источником в области Ω вне сферы S_0 , можно описать функцией, которая является решением внешней задачи Дирихле, поставленной для сферы S_0 : найти функцию $\psi(M)$,

где M – точка на поверхности сферы S_0 . Пусть $\tilde{\psi}(R_0, \theta, \varphi)$ – потенциал скоростей звукового поля в точке M на поверхности сферы S_0 . Тогда функция $\psi(M)$ является решением задачи Дирихле, поставленной для сферы S_0 : найти функцию $\psi(M)$, удовлетворяющую условиям:

удовлетворяющую в области Ω однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\psi(M) + k^2\psi(M) = 0, \quad M \in \Omega, \text{ и принимающую на ее границе задан-}$$

ное значение: $\psi(M) = \tilde{\psi}(M)$, $M \in S_0$, где Δ – оператор Лапласа, $k = \omega/c$, M – точка рассматриваемой области или поверхности. Кроме того, на бесконечности искомый потенциал ψ должен удовлетворять условию излучения Зоммерфельда. Решение этой задачи известно, оно единственно и может быть представлено равномерно сходящимся рядом:

$$\psi_0(R, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{nm} h_n^{(1)}(kR) P_n^{(m)}(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad (1)$$

где $h_n^{(1)}$ – сферические функции Бесселя третьего рода порядка n , $P_n^{(m)}$ – присоединенные полиномы Лежандра. Необходимо показать, что коэффициенты этого ряда не зависят от радиуса R_0 сферы S_0 , для которой поставлена внешняя задача Дирихле. Для доказательства этого утверждения следует поставить задачу Дирихле для сферы, которая также полностью заключает в себя исходный источник, но с радиусом $R_0 < R_0$. Можно считать, что (1) представляет собой потенциал поля модельного направленного точечного излучателя, эквивалентного исходному реальному источнику конечных размеров. Эквивалентность эта понимается в том смысле, что акустическое поле такого точечного излучателя совпадает с полем исходного источника конечных размеров всюду вне любой сферы, целиком содержащей в себе исходный источник. Направленные свойства модельного излучателя полностью определяются входящими в (1) параметрами C_{nm} . Эти параметры имеют смысл моментов элементарных сферических мультиполей, из которых состоит разложение. При этом модуль параметра представляет собой производительность, а его аргумент – начальную фазу колебания соответствующего мультиполя. Ряд (1) содержит бесконечное количество слагаемых. Однако на практике можно оставлять только конечное их количество. В большинстве случаев можно ограничиться мультиполями второго порядка включительно, что соответствует удержанию в разложении монополя, трех диполей и пяти квадрупольей (18 неизвестных параметров).

При использовании точечной модели вместо источника конечных размеров возникает вопрос о выборе в габаритах источника центра приведения – фазового центра для размещения в этом центре точечного модельного излучателя с потенциалом в виде (1). Для решения прямых задач необходимо выяснить, как влияет произвол в выборе центра приведения на поле, создаваемое точечным излучателем с заданными

моментами C_{nm} . Для решения обратных задач необходимо выяснить, как влияет произвол в выборе центра приведения на значения мультипольных моментов C_{nm} , которые рассчитываются по созданному исходным источником полю в волноводе.

Выбор оптимального в каком-либо смысле положения центра приведения в габаритах объемного излучателя в общем случае представляет собой существенно нелинейную задачу. Другой подход состоит в определении условий, при соблюдении которых можно пренебрегать возникающими при изменении положения центра приведения изменениями в значениях величин, характеризующих поле. Этот подход позволяет сохранить линейность задачи. Принято считать, что если различие в полях для предельно разнесенных в габаритах исходного источника положений центра приведения невелико, то выбор его положения внутри источника может быть осуществлен произвольным образом. В этом случае источник конечных размеров может быть заменен точечным, который находится в произвольно выбранном центре приведения внутри объема исходного пространственно-развитого источника. Этот подход приводит к известным качественным условиям малости характерного линейного размера источника L по сравнению с длиной волны λ и расстоянием R до точки приема: $L \ll \lambda$ и $kL^2/R \ll 1$. Получим аналогичные ограничения для мультипольной модели. Пусть монохроматический источник находится в неограниченном однородном пространстве и имеет характерный линейный размер L . Выберем в габаритах источника в качестве двух центров приведения произвольные точки O и O' , расположенные на расстоянии L друг от друга. Построим в этих точках декартовы системы координат $OXYZ$ и $O'X'Y'Z'$. Критерий малости различия между потенциалами, рассчитываемыми для различных центров приведения, включает в себя два требования: а) относительная разность амплитуд δ_1 для любых точек поля должна быть мала и б) абсолютная разность фаз δ_2 для любых точек поля должна быть мала:

$$\delta_1 = \frac{||\psi(R', \theta', \varphi')| - |\psi(R, \theta, \varphi)||}{|\psi(R, \theta, \varphi)|} < \varepsilon_1, \quad (2)$$

$$|\arg(\psi(R', \theta', \varphi')) - \arg(\psi(R, \theta, \varphi))| < \varepsilon_2$$

где ε_1 и ε_2 достаточно малые числа, определяющие допустимую для рассматриваемой практической задачи степень различия между уровнями и фазами полей давления. С физической точки зрения выбор значений

этих величин осуществляется, например, исходя из точности измерительной аппаратуры. При этом методическая погрешность должна быть не больше аппаратурной (инструментальной). На практике приемлемыми различиями между уровнями давления считаются 1–3 децибела, а набег фазы не должен превышать 5–10 градусов. Поэтому ε_1 следует выбирать в диапазоне 0.15–0.45, а ε_2 – в диапазоне 0.1–0.2. Проведенный анализ различных частных случаев мультипольных источников, а также общего случая, когда модельный источник состоит из произвольного набора элементарных мультиполей с различными моментами, показывает, что в большинстве реально возникающих ситуаций условия (2) выполняются, если линейные размеры излучателя L и расстояние до точки наблюдения R удовлетворяют ограничению: $L/R < \varepsilon_1 / a / (1 + \varepsilon_1)$, где $a = 3.7$ и $kL < \varepsilon_2$ и, следовательно, для такого источника конечных размеров можно использовать модель точечного мультипольного излучателя. Иначе говоря, для использования точечной мультипольной модели, а также для того, чтобы при оценке моментов C_{nm} работать в рамках линейной постановки задач, необходимо выбирать расстояние до излучателя в 3–5 раз большее, чем при использовании монопольной модели. Таким образом, условия (2) являются критерием разделения ближней и дальней зон, для которых обратные задачи при обработке данных решаются в нелинейной или линейной постановках соответственно.

Для решения задач, связанных с определением полей давления произвольных гидроакустических источников конечных размеров в различных водоемах, обычно используется стандартная техника построения функции Грина с последующим интегрированием по объему или по поверхности, занятой источником. При этом речь, как правило, идет о решении неоднородного уравнения Гельмгольца, в правой части которого находится дельта-функция, соответствующая монопольной модели излучателя. Следовательно, для мультипольной модели аналогичная методика приводит к необходимости решать уравнение Гельмгольца, в правой части которого находится не только дельта-функция, но и ее производные различных порядков.

Рассмотрим этот подход на примере постановки прямой задачи для глубокого океана. В этом случае моделью области, в которой решается задача, является полупространство с абсолютно мягкой границей. Тогда, считая, что излучатель находится достаточно далеко от границы полупространства, чтобы можно было пренебречь дифракционными эффектами на поверхности заменяемого модельным реальным источником, получим следующую задачу: найти функцию $\psi(M)$, которая удовлетворяет 1) однородному уравнению Гельмгольца $\Delta\psi(M) + k^2\psi(M) = 0$

всюду в полупространстве, за исключением, может быть, точки O , в которой находится модельный излучатель; 2) однородному граничному условию первого рода $\psi(M) = 0$ на поверхности полупространства; и 3) дополнительному требованию у излучателя, которое замыкает постановку задачи. В качестве такого дополнительного условия у излучателя ряд авторов предлагает использовать условие стремления решения $\psi(M)$ к потенциалу $\psi_0(M)$ при $M \rightarrow O$. Однако это условие является слишком жестким и фактически не удовлетворяется известными решениями аналогичных задач даже для монопольного излучателя. Для замыкания краевых задач, ставящихся в рамках мультипольной модели точечного направленного излучателя, предлагается задавать дополнительное граничное условие у излучателя в виде $\lim_{R \rightarrow 0} R |\psi(R, \theta, \varphi) - \psi_0(R, \theta, \varphi)| = 0$. Доказано [1], что это условие не только гарантирует совпадение решения с потенциалом ψ_0 при удалении границ области на бесконечность, но и обеспечивает единственность рассматриваемых краевых задач. Решение поставленной задачи имеет вид:

$$\psi(M) = \sum_{n=0}^2 \sum_{m=-n}^n C_{nm} \left(h_n^{(1)}(kR) P_n^{im}(\cos \theta) - \chi_{nm} h_n^{(1)}(kR') P_n^{im}(\cos \theta') \right) e^{im\varphi}$$

где $\chi_{nm} = (-1)^{n+|m|}$, $R'^2 = R^2 + 4Rz_0 \cos \theta + 4z_0^2$, $\cos \theta' = (R \cos \theta + 2z_0) / R'$, z_0 – расстояние от источника до границы полупространства. Аналогичными способами могут быть поставлены однородные задачи и для других областей с направленными гидроакустическими источниками.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00941).

Литература

1. Быковцев Г.И., Кузнецов Г.Н., Степанов А.Н. Акустическое поле направленного источника в океанических волноводах // ДАН СССР. 1985. Т. 280. № 1. С. 57–59.

G.N. Kuznetsov¹, A.N. Stepanov^{1,2}

MULTIPOLE MODEL OF SOUND SOURCE IN WAVEGUIDE

¹ *Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences
38, Vavilov st., Moscow, Russia, 117036,*

² *Samara National Research University imeni academica S.P. Koroleva,
34, Moscow highway, Samara, Russia, 443086,
Tel.: 8(977)513-13-50, E-mail: skbmortex@mail.ru*

The results of an analytical representation of a multipole model of a sound source, which are equivalent in radiation characteristics to real volume low-frequency sources, are presented. The existence of a criterion for separating fields in the near and far zones, which is necessary for solving direct and inverse problems in a linear setting, is shown. A boundary value problem for a model radiator in a half-space is formulated and solved. The transition from the inhomogeneous to the homogeneous Helmholtz equation

Keywords: multipole model, near and far zones, homogeneous boundary value problem

Acknowledgment: The work was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-08-00941).

References

1. Bykovtsev G.I., Kuznetsov G.N., and Stepanov A.N. Acoustic field of a directional source in oceanic waveguides. DAN USSR, 1985, Vol. 280, No. 1, pp. 57–59.