О.С. Красулин^{1,2}, А.С. Шуруп^{1,2,3}

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТОМОГРАФИИ ОКЕАНА

¹МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики

Россия, 119992 ГСП-2, Москва, Ленинские горы, 1/2,

Тел. 8(495) 939-30-81, E-mail: krasulin.os15@physics.msu.ru

²Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН

Россия, 117218, Москва, Нахимовский пр., 36,

Тел. 8(495) 380-41-50, E-mail: zeljin2@gmail.com

³Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН

Россия, 123242, г. Москва, Б. Грузинская ул., 10/1,

Тел.: 8(499) 254-90-80, E-mail: shurup@physics.msu.ru

Рассматривается численная реализация схемы модовой томографии океана, основанная на решении функционально-аналитического алгоритма Новикова-Сантацесариа. Рассматриваемый подход не требует построения матриц возмущений, организации итерационных процедур, а также применения регуляризующих алгоритмов, что выгодно отличает его от известных подходов к решению задачи акустической томографии океана. Исследуется устойчивость рассматриваемого алгоритма к шумам при работе в многочастотном режиме.

Ключевые слова: модовая томография океана, обратные задачи рассеяния, функциональный алгоритм, адиабатическое приближение

Акустическая томография океана [1] позволяет восстанавливать пространственные распределения характеристик водного слоя по данным измерений на границе исследуемой области, что делает метод привлекательным для мониторинга обширных акваторий, а в некоторых случаях и незаменимым, например, в труднодоступных районах Арктики. В настоящей работе рассматривается решение задачи модовой томографии океана на основе функционально-аналитического алгоритма Новикова-Сантацесариа [2], изначально разработанного для решения обратных задач рассеяния в квантовой механике. Данный подход не требует ни линеаризации модели и построения матриц возмущений, ни итераций и привлечения дополнительных процедур регуляризации, что выгодно отличает его от используемых в настоящее время методов, а также делает перспективным исследование его возможностей в задачах

акустической томографии океана. Исследования возможностей различных функциональных алгоритмов в акустических приложениях имеют давнюю историю [3] и были изначально направлены на медицинские приложения. В большинстве случаев рассматривалось решение задач восстановления двумерных неоднородностей [4]. Возможности функциональных алгоритмов при восстановлении трехмерных рассеивателей в волноводах океанического типа рассматриваются сравнительно недавно [5]. Ранее была численно реализована схема, демонстрирующая восстановление трехмерных возмущений скорости звука в адиабатическом приближении [5]. При этом исходные данные рассеяния предполагались незашумленными. В настоящей работе исследуется помехоустойчивость разрабатываемой томографической схемы при наличии в исходных данных шумов. Для повышения точности получаемых оценок используется многочастотный режим зондирования. Многочастотное обобщение функционального алгоритма для решения обратной двумерной задачи рассеяния ранее было рассмотрено в [6].

Рассматривается уравнение Гельмгольца, которое в случае присутствия неоднородности скорости звука имеет вид:

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}) + k_0^2(z)p(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r})p(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ – радиус-вектор в выбранной системе координат; $v(\mathbf{r}, \omega_i) = \omega_i^2 \left(\frac{1}{c_0^2(z)} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right)$ – функция рассеивателя, описывающая отклонение скорости звука $c(\mathbf{r})$ от ее фонового значения $c_0(\mathbf{r}) \equiv c_0(z)$; индекс i у циклической частоты $\omega_i = 2\pi f_i$ подразумевает использование многочастотного режима зондирования; $k_0 = \omega_i / c_0(z)$. Решение (1) ищется в виде суммы мод $p(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x, y) \Psi_n(z)$ где $\Phi_n(x, y)$ описывает решение уравнения Гельмгольца в горизонтальной плоскости (x, y) , а $\Psi_n(z)$ – вертикальный профиль моды номера n в фоновом (невозмущенном) волноводе. В качестве фонового удобно рассматривать идеальный волновод глубины H , когда профили мод $\Psi_n(z)$ имеют аналитическое выражение. В общем случае выбор фонового волновода для решения конкретной задачи определяется лишь возможностью привлечения априорной информации об исследуемом регионе. С учетом ортогональности профилей мод: $\int_0^H \Psi_n(z) \Psi_m(z) dz = \delta_{nm}$, уравнение (1) переписывается в виде:

$$\nabla_{x,y}^2 \Phi_m(x,y) + k_{0m}^2 \Phi_m(x,y) = S_{mm}(x,y) \Phi_n(x,y), \quad (2)$$

где оператор $S_{mm}(x,y) \equiv \int_0^H \Psi_m(z) v(x,y,z) \Psi_n(z) dz$ описывает модовое взаимодействие, k_{0m} – горизонтальное волновое число m -ой моды в невозмущенном волноводе. Рассматриваемый функционально-аналитический алгоритм [2, 4] позволяет на основе рассеянных полей $\Phi_n(x,y)$ оценить из (2) значения оператора S_{mm} . Далее, используя S_{mm} , восстановленные для различных номеров мод, проводится оценка трехмерных распределений скорости звука. Восстановление трехмерных неоднородностей может основываться на разложении по ортогональным эмпирическим функциям Карунена-Лоэва [5, 7]. На данном этапе исследований обратная задача решается для адиабатического приближения, когда $S_{nm} \equiv 0$, если $n \neq m$.

В любой ситуации, приближенной к условиям реального эксперимента, исходные данные для решения обратной задачи в виде рассеянных полей $\Phi_n(x_\Gamma, y_\Gamma)$, зарегистрированных в точках (x_Γ, y_Γ) на границе области томографирования, будут определены с конечной точностью. В использованной численной модели зашумление было реализовано следующим образом: $\tilde{\Phi}_n(x_\Gamma, y_\Gamma) = \Phi_n(x_\Gamma, y_\Gamma) + \tilde{N} \Omega \bar{\Phi}$, здесь N – коэффициент, задающий относительный уровень шума, Ω – случайная нормально распределенная величина с нулевым средним и единичной амплитудой, а $\bar{\Phi}$ – среднеквадратичная амплитуда сигнала. Зашумление данных рассеяния проводилось на каждой из рассматриваемых частот независимо. На рис. 1а представлены результаты восстановления $\bar{S}_{11}^{\Delta f}$ оператора $S_{11}(x,y)$ при использовании зашумленных данных ($N = 0.2$) на 21 частоте в диапазоне $\Delta f = 78 \div 82$ Гц.

Неоднородность представляла возмущение скорости звука, в горизонтальной плоскости которое имело форму, близкую к гауссовской (рис. 1а). При этом неоднородность выбиралась с небольшим пространственным размером, составляющим несколько длин волн, но с существенным контрастом $\Delta c/c_0 \approx 0.53$. Представленные на рис. 1 результаты восстановления характеризуют, в определенной мере, разрешающую способность метода, а также возможность восстановления сильноконтрастных, локализованных в пространстве, рассеивателей. На рис. 1б приведены сечения исходного распределения S_{11} , его многочастотной

Рис. 1. Фрагмент области томографирования, содержащий многочастотную оценку $\bar{S}_{11}^{\Delta f}(x, y)$, полученную при уровне шума $N = 0.2$ (а). Сечения исходного оператора $S_{11}(x, y = 0)$ (сплошная линия) и результатов его восстановления в монохроматическом $\bar{S}_{11}^{f_1}(x, y = 0)$ (линия в виде окружностей) и многочастотном $\bar{S}_{11}^{\Delta f}(x, y = 0)$ (пунктирная линия) режимах зондирования (б).

оценки $\bar{S}_{11}^{\Delta f}$, а также результат восстановления $\bar{S}_{11}^{f_1}$ на одной частоте $f_1 = 80$ Гц. Как видно на рис. 1, при зашумлении исходных данных многочастотный режим зондирования позволяет получить приемлемые результаты восстановления с использованием рассматриваемого функционального алгоритма. Устойчивость рассматриваемого алгоритма решения обратной задачи к шумам указывает на возможность его успешного применения для решения практических задач в тех случаях, когда в эксперименте удастся получить данные рассеяния в достаточно широкой полосе частот.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 20-51-15004 НЦНИ_а, № 18-05-00737.

Литература

1. Гончаров В.В., Зайцев В.Ю., Куртепов В.М., Нечаев А.Г., Хилько А.И. Акустическая томография океана. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997. 255 с.
2. Novikov R.G., Santacesaria M. Monochromatic reconstruction algorithms for two-dimensional multi-channel inverse problems // International Mathematics Research Notices. 2013. Vol. 2013. No. 6. P. 1205–1229.
3. Буров В.А., Румянцева О.Д. Решение двумерной обратной задачи акустического рассеяния на основе функционально-аналитических методов // Акустический журнал. 1992. Т. 38. № 3. С. 413–420.
4. Буров В.А., Шуруп А.С., Зотов Д.И., Румянцева О.Д. Моделирование функционального решения задачи акустической томографии по данным от квазиточечных преобразова-

- телей // Акустический журнал. 2013. Т. 59. № 3. С. 391–407.
5. Красулин О.С., Шуруп А.С. Численное решение трехмерной задачи адиабатической модовой томографии океана на основе функционально-аналитического алгоритма // Известия РАН. Серия физическая. 2020. Т. 84. № 2. С. 289–294.
 6. Буров В.А., Алексеенко Н.В., Румянцева О.Д. Многочастотное обобщение алгоритма Новикова для решения обратной двумерной задачи рассеяния // Акустический журнал. 2009. Т. 55. № 6. С. 784–798.
 7. Солодовников А.Ю., Платонов А.К. Исследование метода Карунена-Лозва. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2006. № 19. 29 с.

O.S. Krasulin^{1,2}, A.S. Shurup^{1,2,3}

APPLICATION OF A FUNCTIONAL ANALYTICAL ALGORITHM FOR SOLVING THE THREE-DIMENSIONAL PROBLEM OF OCEAN TOMOGRAPHY

*¹Faculty of Physics, M.V. Lomonosov Moscow State University
Leninskie Gory, 1/2, Moscow, Russia, 119991,
Tel.: 8(495) 939-30-81; E-mail: krasulin.os15@physics.msu.ru*

*²Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences
Nakhimovskiy prospekt, 36, Moscow, Russia, 117997,
Tel.: 8(495) 380-41-50; E-mail: zeljin2@gmail.com*

*³Shmidt Institute of the Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences
Bolshaya Gruzinskaya str., 10-1, Moscow, Russia, 123242,
Tel.: 8(499) 254-90-80, E-mail: shurup@physics.msu.ru*

A numerical implementation of the ocean mode tomography scheme is considered, based on the Novikov-Santatsesaria functional-analytical algorithm. The approach under consideration does not require the construction of perturbation matrices, the organization of iterative procedures, and the use of regularization algorithms, which distinguishes it from the known approaches for solving the problem of ocean acoustic tomography. The noise stability of the considered algorithm is investigated in the multi-frequency regime.

Keywords: ocean mode tomography, inverse scattering problems, functional algorithm, adiabatic approximation

Acknowledgment: The work was carried out with the financial support of RFBR grants No. 20-51-15004 NTSNI_a, No. 18-05-00737.

References

1. Goncharov V.V., Zaitsev V.Yu., Kurtepov V.M., Nechaev A.G., and Khilko A.I. Acoustic tomography of the ocean. Nizhny Novgorod: IAP RAS, 1997, 255 p.

2. Novikov R.G. and Santacesaria M. Monochromatic reconstruction algorithms for two-dimensional multi-channel inverse problems. *International Mathematical Research Notices*, 2013, Vol. 2013, No. 6, pp. 1205–1229.
3. Burov V.A. and Rumyantseva O.D. Solution of two-dimensional acoustical inverse scattering problem on the basis of functional-analytical methods. *Soviet physics. Acoustics*, 1992, Vol. 38, No. 3, pp. 226–230.
4. Burov V.A., Shurup A.S., Zotov D.I., and Rumyantseva O.D. Simulation of a functional solution to the acoustic tomography problem for data from quasi-point transducers. *Acoustical Physics*, 2013, Vol. 59, No. 3, pp. 345–360.
5. Krasulin O.S. and Shurup A.S. Numerical solution of adiabatic 3D ocean tomography problem based on functional-analytical algorithm. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences, Physics*, 2020, Vol. 84, No. 2, pp. 289–294, [in Russian].
6. Alekseenko N.V., Burov V.A., and Rumyantseva O.D. Solution of the three-dimensional acoustic inverse scattering problem. The modified Novikov algorithm. *Acoustical Physics*, 2008, Vol. 54, No. 3, pp. 407–419.
7. Solodovschikov A.Yu. and Platonov A.K. Investigation of the Karunen-Loev method. *Preprints of Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS*, 2006, No. 19, 29 p., [in Russian].