О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГЕОСТРОФИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМ ВЕРТИКАЛЬНЫМ СДВИГОМ СКОРОСТИ С УЧЕТОМ ДИФфуЗИИ МАССЫ И ИМПУЛЬСА

Кузьмина Н.П.¹, Скороходов С.Л.², Журбас Н.В.¹, Лыжков Д.А.¹

¹ Институт океанологии им. П.П. Шириова РАН, 117997, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 36, тел. +7 499 124-5996, e-mail: kuzmina@ocean.ru

² ФИЦ “Информатика и Управление” РАН
119333, ул. Вавилова, 44, г. Москва, тел. +7 499 135-0440,
e-mail: sskorokhodov@gmail.com

The instability of the geostrophic current with a constant vertical velocity shear is analyzed including friction and diffusion of buoyancy. The model problem reduces to solving a spectral equation of the Orr-Sommerfeld type. The results of numerical calculations of model equation are compared with analytical results obtained for an ideal fluid.

Анализируется неустойчивость геострофических течений с постоянным вертикальным сдвигом скорости применительно к описанию образования интрузий и вихрей во фронтальных зонах океана, характеризующихся абсолютно устойчивой стратификацией.

Для исследования устойчивых и неустойчивых возмущений течений используется уравнение потенциального вихря в квазигеострофическом приближении, представленное в безразмерном виде в работе [1]. Спектральная задача для геострофического течения с постоянным вертикальным сдвигом скорости сводится к следующему уравнению и граничным условиям (подробнее см. [1, 2]):

$$(z - c) \left(\frac{d^2 F}{dz^2} - Bu \cdot (k^2 + \pi^2) F \right) = \frac{1}{ikR} \left(\frac{d^4 F}{dz^4} - \text{Pr} \cdot Bu \cdot (k^2 + \pi^2) \frac{d^2 F}{dz^2} \right), \quad (1)$$

$$(z - c) \frac{dF}{dz} - F = \frac{1}{ikR} \frac{d^3 F}{dz^3} \text{ при } z = 0, z = 1, \quad (2)$$

$$\frac{d^2 F}{dz^2} = 0 \text{ при } z = 0, z = 1, \quad (3)$$

где $F(z)$ – возмущение давления, k – безразмерное волновое число вдоль течения, $R = \text{Pe} \cdot H/L$, Pe – число Пекле (аналог числа Рейнольдса), H – вертикальный масштаб слоя, L – поперечный масштаб течения, Bi – число Бургера, Pr – число Прандтля, $c = c_1 + i c_2$ – собственное значение задачи. Возмущения являются неустойчивыми, если $c_2 > 0$. Как видно из (1)–(3), существуют сходства и различия данной спектральной задачи с задачей Орра-Зоммерфельда для течения Куэтта.

В рамках идеальной жидкости, то есть без учета трения и диффузии плавучести, данная задача идентична известной задаче Иди [3], решения которой выражаются экспоненциальными функциями. Близким к задаче (1)–(3) является аналитический анализ Майлза [4], который был посвящен изучению влияния диффузии плавучести на бароклинную неустойчивость геострофического течения в полубесконечном слое. Численные решения задачи (1)–(3) в широком диапазоне изменения волнового числа и при различных значениях чисел Бургера, Прандтля и Пекле позволяют в полном объеме описать различные виды неустойчивости геострофического течения с постоянным вертикальным сдвигом скорости. Сравнение решений задачи (1)–(3) с решениями аналогичной задачи для идеальной жидкости может дать важную информацию о влиянии диссипативных процессов на развитие неустойчивости геострофических течений.

Задача (1)–(3) решалась численным высокоточным методом, предложенным в работе [5]. Численные расчеты проверялись с помощью аналитических асимптотических разложений при малых k . Для анализа различий решений задачи (1)–(3) и аналогичной задачи для идеальной жидкости рассчитывались комплексные фазовые скорости (собственные значения), а также инкременты роста неустойчивых мод. На рис. 1 представлены распределения собственных значений в координатных осях c_1 и c_2 при некоторых конкретных значениях параметров задачи (Bi , Pr , R) и различных волновых числах k для идеальной жидкости (а) и диссипативной жидкости (б). Устойчивые и неустойчивые возмущения геострофического течения идеальной жидкости характеризуются постоянной фазовой скоростью. С учетом диффузии плавучести и трения неустойчивые возмущения геострофического течения имеют более широкий спектр изменчивости по волновому числу, причем как для устойчивых, так и неустойчивых возмущений при больших волновых числах существует зависимость фазовой скорости от волнового числа. На рис. 2 представлены инкременты роста неустойчивых мод: а) идеальная жидкость, б) диссипативная жидкость. Первый максимум на рис. 2б соответствует максимально растущей моде с масштабом

Рис. 1. Собственные значения в координатных осях c_1 и c_2 в широком диапазоне изменения волнового числа k при, $R = 1$, $Bu = 0.0001$, $Pr = 1$:

а) идеальная жидкость; б) диссипативная жидкость.

$l \sim L/k$, который равен приблизительно радиусу Россби. Этот максимум практически совпадает с максимумом на рис. 2а (максимально растущая бароклинная мода): существующие различия при $Pr = 1$ незначительны. Второй максимум на рис. 2б соответствует максимально растущей моде с масштабом, меньшим радиуса Россби (неустойчивость, обусловленная диффузией плавучести и трением).

Расчеты задачи (1)–(3) при различных числах Прандтля ($Pr = 1, 4, 10$) показали, что с увеличением числа Прандтля при постоянных значе-

Рис. 2. Инкременты роста неустойчивых мод при $R = 1$, $Bu = 0.0001$, $Pr = 1$:

а) идеальная жидкость; б) диссипативная жидкость.

ниях чисел Пекле и Бургера амплитуды первого и второго максимумов возрастают. Однако амплитуда первого максимума растет медленнее амплитуды второго максимума, что может приводить при некоторых значениях числа Прандтля к выравниванию инкрементов роста бароклинных возмущений и коротковолновых возмущений, обусловленных трением и диффузией плавучести. По мнению авторов, неустойчивые коротковолновые моды следует отнести к так называемым субмезомасштабным структурам.

В работе приводятся результаты расчетов задачи (1)–(3) при различных значениях чисел Бургера, Прандтля и Пекле и сравнение полученных результатов с решениями задачи о неустойчивости течения для идеальной жидкости.

Исследования, представленные в докладе, поддерживались ФАНО России (государственное задание по теме 0149-2018-0002), РФФИ (проект 16-01-00781).

Расчеты распределений собственных значений для идеальной жидкости и интерпретация результатов проводилась Н.В. Журбас. Эта часть работы поддерживалась грантом РНФ 17-77-10080.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А. О неустойчивости геострофического течения с линейным вертикальным сдвигом скорости на масштабах интрузионного расслоения // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2018. Т. 54. № 1. С. 54–63.
2. Kuzmina N.P. Generation of large-scale intrusions at baroclinic fronts: an analytical consideration with a reference to the Arctic ocean // Ocean Science. 2016. Vol. 12. P. 1269–1277. DOI: 10.5194/os-12-1269-2016.
3. Eady E.T. Long waves and cyclone waves // Tellus. 1949. Vol. 1 (3). P. 33–52.
4. Miles J.W. Effect of Diffusion on Baroclinic Instability of the Zonal Wind // J. Atmos. Sci. 1965. Vol. 22. P. 146–151.
5. Скороходов С.Л. Численный анализ спектра задачи Орра-Зоммерфельда // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 10. С. 1672–1691.