Didaktični model izgradnje kombinatoričnih pojmov: prehod z razredne na predmetno stopnjo

Sanela Hudovernik

Univerza na Primorskem

sanela.mesinovic@pef.upr.si

Amalija Žakelj

Univerza na Primorskem

amalija.zakelj@pef.upr.si

Mara Cotič

Univerza na Primorskem

mara.cotic@pef.upr.si

Sposobnost kritične presoje predstavljenih podatkov, logično mišljenje, računska pismenost in obvladovanje računskih orodij za obdelavo podatkov so samo nekateri razlogi za učenje in poučevanje kombinatorike v šoli, ki je zaradi svoje praktične uporabe tudi odlična osnova za reševanje matematičnih problemov. V prispevku predstavljamo didaktični model vpeljave kombinatoričnih pojmov pri pouku matematike v osnovni šoli. Pri postavitvi modela smo upoštevali razvojne značilnosti učenca ter kognitivno-konstruktivistična spoznanja pedagoške stroke o učenju in poučevanju matematike. Pri usvajanju pojmov iz kombinatorike učenci prehodijo tri ravni, in sicer enaktivno (konkretno), ikonično (grafično) in simbolno raven. V prvem vzgojno-izobraževalnem obdobju učenci spoznavajo kombinatorične pojme na enaktivni ravni, ob koncu prvega in na začetku drugega vzgojno-izobraževalnega obdobja konkretne dejavnosti shematizirajo, šele v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju preidejo na simbolno raven. Posplošitev problema je praviloma v srednji šoli, kjer uporaba razvitega pojma v novi situaciji deluje kot instrument. Prehod iz enaktivne na simbolno raven je dolgoročni cilj, ki traja od začetka pa vse do konca osnovnošolskega oz. srednješolskega učenja kombinatorike.

Ključne besede: kombinatorika, enaktivna, ikonična in simbolna raven, kombinatorične situacije

Uvod

Kombinatorika velja za mlado vejo matematike, ki ima v zgodovini le-te pomembno mesto. Znana je predvsem zaradi nekaterih zgodovinskih problemov, kot so Pascalov trikotnik, magični kvadrati, problem königsberških mo-

stov itn. Poleg tega je kombinatorika neposredno povezana z realističnimi problemi, z računalniškimi vedami, verjetnostjo, s teorijo števil in topologijo (Sriraman in English 2004) ter z biologijo in fiziko (Annin in Lai 2010). Ravno zaradi tega Kapur (1970) priporoča učenje kombinatorike na vseh stopnjah izobraževanja.

Vsebine iz kombinatorike so bile v učne načrte slovenskih osnovnih in srednjih šol sistematično vpeljane leta 1998 s kurikularno prenovo. Pred tem so se jih učili le dijaki srednjih šol, v večini le na formalni ravni. S kurikularno prenovo leta 1998 in s posodobitvijo učnih načrtov leta 2011 so bile te vsebine vpeljane tudi v učni načrt za matematiko za osnovno šolo.

Učenci v osnovni šoli začnejo spoznavati kombinatoriko v drugem razredu in jo nadgradijo v drugem in tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju. V prvih letih šolanja še ne gre za »pravo« učenje kombinatorike, saj otrok prva znanja pridobiva le intuitivno, zgolj na konkretni ravni. Kombinatorika se v prvih letih šolanja obravnava v sklopu obdelave podatkov.

Didaktiki matematike že dolgo poudarjajo pomembnost vpeljevanja kombinatorike, ne samo v šolskem, pač pa tudi v predšolskem obdobju (Kapur 1970; Sriraman in English 2004). Kapur (1970) navaja naslednje razloge:

- kombinatorika ni odvisna od računskih operacij, zato je reševanje problemov primerno za otroke na vseh stopnjah izobraževanja;
- reševanje kombinatoričnih problemov razvija različne kompetence otrok, kot so štetje, sklepanje, posploševanje, sistematično mišljenje ter razvijanje številnih konceptov, kot so štetje, urejanje, razporejanje, funkcije, vzorci itd.;
- kombinatoriko uporabljamo tudi na drugih področjih, ne samo pri matematiki.

Zaradi navedenih razlogov je nujno, da učencem zagotovimo izkušnje s kombinatoričnimi problemi. Takšne dejavnosti se lahko začnejo v mlajših letih, že v predšolskem obdobju, in se nadaljujejo v srednji šoli. Na tak način širimo matematično obzorje, razvijamo matematično mišljenje in spodbujamo učenčevo kritično razmišljanje o svetu, v katerem živi, oz. po Cockcroftu (1982, 8): »Te vsebine niso zgolj tehnične narave (spoznavanje različnih metod obdelave podatkov, sistematično prikazovanje podatkov ...), ampak jih odlikujeta negotovost in spremenljivost ter nam omogočajo, da se pri raziskovanju množice negotovih in spremenljivih podatkov odločamo sami.« Učencem torej nudijo možnost, da se za postopke odkrivanja in reševanje le-teh odločajo sami.

Ravno zahteve glede poučevanja in postavljanja učitelja v vlogo, ko pasivno »predajanje« informacij učencem ni dovolj oz. je celo nezaželeno, omogočajo, da v vzgojno-izobraževalnem procesu vse večjo vlogo pridobiva učenec. Učiteljeva naloga ostajajo priprava gradiva, usmerjanje in posredno vodenje učencev skozi proces učenja in ugotavljanje doseganja predhodno zastavljenih učnih ciljev ter popravljanje napačne učenčeve predstave. Z uporabo sodobnih metod poučevanja, pri katerih je glavno vodilo lastna aktivnost učencev, lahko pri učencih pričakujemo kvalitetnejše znanje. Učenci, ki so pri pouku aktivno sodelujoči in usvajajo znanje, novo matematično znanje vgradijo v miselne povezave in na tak način višajo raven svoje matematične pismenosti (Kozel, Cotič in Žakelj, 2018).

Razlogi za poučevanje kombinatorike

Začetki kombinatorike segajo daleč pred naše štetje v stari Egipt, ko so se Egipčani zabavali z igro met kamna, ki je bila podobna današnji igri met kovanca. Filozofi v antiki so se ukvarjali z verjetnostjo dogodkov. Kasneje, z razvojem iger na srečo, pa so znanstveniki začeli razpravljati o slučajnostih in možnostih pri žrebu in metu kock. Prve zapise in razprave tako najdemo že iz začetka 16. stoletja. Verjetnost in kombinatoriko za otroke pa je v svoji teoriji prvi začel opisovati in raziskovati Piaget (Cotič 1998).

Številne raziskave (English 1991; Maher in Martino 1996) pričajo o pozitivnih posledicah, zaradi katerih je smiselna vpeljava kombinatoričnih problemov v zgodnje učenje matematike. Reševanje kombinatoričnih problemov tako spodbuja samostojno mišljenje, osredotočenost na strukturo, izmenjavo rešitev in omogoča oblikovanje novih problemov (English 1991).

Zaradi svoje praktične uporabe je kombinatorika odlična osnova za reševanje matematičnih problemov (Varga 1969). Oblikujemo lahko enostavne kombinatorične naloge, ki so primerne za učenje strategij reševanja matematičnih problemov. Take probleme so zmožni reševati tudi predšolski otroci (English 1991; Maher, Powell in Uptegrove 2011). Kombinatorični problemi v začetnih stopnjah temeljijo na preprostih tehnikah preštevanja, ki omogočajo manipulacijo s konkretnimi predmeti. Kasneje z ugibanjem, s posploševanjem, z optimizacijo in s sistematičnim mišljenjem, ki je nujno pri kombinatoričnem mišljenju, razvijamo osnovne matematične kompetence, opredeljene v učnem načrtu (Ministrstvo za šolstvo in šport 2011). Vsebine iz kombinatorike lahko tako smiselno prilagajamo predšolskim, osnovnošolskim in srednješolskim otrokom pa tudi otrokom s posebnimi potrebami oz. nadarjenim otrokom.

Kombinatorika prav gotovo spodbuja razvoj matematičnega mišljenja (Fu-

jita 1985), saj je temeljni cilj poučevanja le-te razvijati učenčevo logično mišljenje in sistematični pristop pri reševanju kombinatoričnih situacij ter avtonomnost njegovega mišljenja.

Cotičeva je ob uvedbi učnega načrta leta 1998 navedla pet pglavitnih razlogov za učenje vsebin iz kombinatorike pri osnovnošolski matematiki (Cotič 1998):

- računska pismenost (preglednice, prikazi, ankete so del našega vsakdana v časopisih, učbenikih ...);
- potrebe po poznavanju orodij za komuniciranje (dandanes pri sporočanju redno uporabljamo grafične prikaze, preglednice ...);
- potreba po sposobnosti kritične presoje predstavljenih podatkov (če ne razumemo tehnik prikazovanja podatkov in če jih ne znamo kritično presojati, smo zelo lahek plen za manipuliranje (reklame, volitve ...));
- dostopnost računskih orodij za obdelavo podatkov;
- neusklajenost z učnimi načrti večine držav (Anglija, Francija, Italija, Madžarska, Norveška ...).

Razvoj kombinatoričnega mišljenja

Raziskovalci so vedno pozornejši na kombinatorično mišljenje otrok oz. učencev, pri čemer preiskujejo predvsem pogoste napake, strategije in načine mišljenja pri reševanju kombinatoričnih problemov (English 1991; Batanero, Navarro-Pelayo in Godino 1997; Annin in Lai 2010; Lockwood in Gibson 2016). Kombinatorika je za večino učencev zelo zahtevno matematično področje (Batanero, Navarro-Pelayo in Godino 1997; Kimani, Gibbs in Anderson 2013). Od njih zahteva ustrezno izbiro »formule« za izračun permutacij in kombinacij, pri čemer pogosto zamenjajo eno z drugo (Sriraman in English 2004; Kimani, Gibbs in Anderson 2013). Napake učencev, ki jih je zaznati pri reševanju kombinatoričnih nalog, se pojavijo že pri razporejanju oz. izboru elementov ter pri ponavljanju in preštevanju razporeditev (Batanero, Navarro-Pelayo in Godino 1997; Annin in Lai 2010; Lockwood 2014). Zato reševanje kombinatoričnih nalog učenci povezujejo z negativno izkušnjo. Batanerova, Godino in Navarro-Pelayova (2005) menijo, da morajo raziskovalci raziskati in bolje razumeti težave, ki se pojavljajo pri reševanju kombinatoričnih problemov, ter prepoznati spremenljivke, ki morebiti vplivajo na te težave. Eden izmed razlogov za neuspeh je v načinu učenja kombinatorike, saj poučevanje še vedno poteka tradicionalno, pri čemer učitelj demonstrira tipične primere, uporabo algoritmov in simbolni zapis; učenci dobijo veliko formul z malo utemeljitve, ki si jih poskušajo zapomniti, kar lahko privede do zmede

(Tarlow 2008). Ne le učenci, tudi učitelji menijo, da je izmed vseh matematičnih vsebin najtežje razložiti oz. poučevati ravno kombinatoriko (Annin in Lai 2010). V ta namen so nekateri didaktiki in pisci učbenikov poskušali izdelati jasne smernice ter postopke reševanja kombinatoričnih problemov (Brualdi 2004; Rosen 2007). Vendar večina problemov ni enoličnih in ni dovolj izbrati ustrezno formulo, zaradi česar pride do negotovosti in napak v učenčevem razmišljanju (Annin in Lai 2010). Da do tega ne bi prišlo, bi morali učenci samostojno oz. z učiteljevo podporo oblikovati kombinatorične koncepte. Učenje kombinatorike je smiselno le, če so učenci aktivno vključeni v učni proces, tako da osmislijo vzorce in formule obravnavajo kot sintezo teh vzorcev (Kimani, Gibbs in Anderson 2013). Na ta način razvijajo smiselne predstavitve kombinatoričnih problemov, ki so jih zmožni tudi utemeljiti (Tarlow 2008). Zaradi tega je pomembno, da otroke dovolj zgodaj seznanimo s preprostimi in konkretnimi kombinatoričnimi problemi ter da postopoma z različnimi metodami raziskovanja odkrivajo kombinatorične koncepte in postopke. Še posebej je potrebno poudarek nameniti iskanju sistematičnega načina reševanja kombinatoričnih problemov, ki učenecem omogoča vedenje, ali so poiškali vse razporeditve, ki se ne ponavljajo, in s tem rešili problem. To je eden izmed pogojev za uspešno reševanje kombinatoričnih nalog (Lockwood in Gibson 2016). Za preprostejšo ponazoritev svojih idej lahko učenci uporabljajo različne prikaze, kot so preglednica, puščični prikaz ali kombinatorično drevo, ki pomembno vplivajo na uspešnost reševanja kombinatoričnih nalog (Fischbein in Gazit 1988 v Batanero, Navarro-Pelayo in Godino 1997; Sriraman in English 2004). Pomembno je, da jim omogočimo svobodo pri uporabi prikazov oz. drugih predstavitev in pristopov ter da jih spodbujamo pri opisanju in pojasnjevanju njihovih aktivnosti (Sriraman in English 2004).

Piaget je s sodelavci izvedel številne raziskave, s katerimi je pokazal razvoj kombinatoričnih operacij in ki imajo osrednjo vlogo v njegovi teoriji kognitivnega razvoja (Piaget 1958 v English 1991), saj je možnost kombiniranja temeljna komponenta formalnega mišljenja (Batanero, Navarro-Pelayo in Godino 1997). Njegova teorija razvoja kombinacij temelji predvsem na dveh preizkusih, in sicer na mešanju barvnih tekočin ter na izboru barvnih kovancev. V eksperimentu z barvnimi tekočinami so otroci dobili različne kemične snovi, ki so jih morali med seboj mešati na vse možne načine. Kemične reakcije snovi so povzročile različne barve, ki so služile prepoznavanju nastalih kombinacij. Dejavnost z barvnimi kovanci je od otrok zahtevala, da med določenim številom kovancev različnih barv izberejo čim več različnih parov. Piaget je s tovrstnimi nalogami pokazal, da otroci na predoperativni stopnji razporeditve ali postavitve tvorijo le s poskušanjem z naključnim izborom dveh

elementov hkrati, saj je njihovo mišljenje še vedno usmerjeno predvsem v konkretne predmete in dogodke, ki so prisotni v danem trenutku. Šele otroci na stopnji konkretnih operacij pri reševanju tovrstnih problemov uporabijo nekaj sistematičnih postopkov. Z vstopom v stopnjo formalnih operacij se spremenijo tako metode reševanja kombinatoričnih nalog kot tudi z njimi povezano sklepanje. Učenci na tej stopnji sistematično izbirajo elemente iz ene skupine in hkrati elemente iz druge, poleg tega so zmožni razmišljati prepozicijsko (Piaget 1958 v English 1991).

Piaget in Inhelder (1951 v Batanero, Navarro-Pelayo in Godino 1997) sta postavila tezo o kombinatoričnem sklepanju otrok tudi na primeru razporejanja predmetov v nize na vse možne načine. Otroci na predoperativni stopnji uporabljajo postopke naključnega razporejanja predmetov, ne da bi pri tem poskušali poiskati sistematično strategijo reševanja. Učenci na stopnji konkretnih operacij uporabljajo strategije poskusov in napak. Sistematične postopke za reševanje tovrstnih problemov razvijejo šele učenci na stopnji formalnih operacij, kljub temu pa je za vpeljevanje permutacij potrebno počakati, da učenci dopolnijo 15 let (Piaget in Inhelder 1951 v Batanero, Navarro-Pelayo in Godino 1997).

Nekateri didaktiki oz. psihologi se s Piagetovim delom niso strinjali. Številni kritiki menijo, da je podcenjeval sposobnosti otrok (Levine 1983). Pomisleki se pojavljajo glede narave njegovih poskusov, saj naj bi bila navodila dejavnosti otrokom podana preveč znanstveno in abstraktno (Carey 1985). Na otrokovo uspešnost naj bi negativno vplival tudi material, ki ga je Piaget uporabil pri eksperimentih, saj ga otroci niso dovolj dobro poznali (Dias in Harris 1988).

V nasprotju s Piagetom je Englisheva (1991) v svoji raziskavi uporabila za otroka privlačne materiale. Oblikovala je kombinatorične probleme, ki zagotavljajo konkretno zunanjo predstavitev in ne abstraktno interno predstavitev, ki je bila prisotna v preizkusu mešanja barvnih tekočin. S tem je pokazala, da so tudi mlajši otroci, natančneje otroci na stopnji konkretnih operacij, zmožni samostojno odkriti sistematične metode ob hkratnem izboru elementov iz ene in iz druge skupine (English 1991). Uporaba konkretnih materialov v smiselnem kontekstu kombinatoričnih problemov torej omogoča razumevanje kombinatoričnih postopkov v zgodnejših letih, pred stopnjo formalnih operacij, kot je trdil Piaget.

Na podlagi svoje raziskave je Englisheva (1991) ugotovila, katere strategije reševanja kombinatoričnih problemov uporabljajo otroci, stari od 4 do 10 let. Opredelila je šest vedno bolj dovršenih strategij reševanja, in sicer od naključnega izbora elementov pa vse do sistematičnega vzorčenja pri iskanju vseh kombinatoričnih situacij (English 1991). V skladu z ugotovitvami Piageta (Pia-

get in Inhelder 1975 v English 1991) so se te strategije pojavile v treh korakih: na začetku nastopijo »empirične kombinacije«, sledi »iskanje sistema« in na koncu »odkritje sistema«. Englisheva (1991) je ugotovila, da je uporabljena strategija tesno povezana s starostjo otrok. Mlajši otroci so bili namreč bolj naklonjeni manj učinkovitim strategijam, kjer so rešitve iskali naključno oz. s poskušanjem, medtem ko so starejši otroci (od 7. leta dalje) uporabljali naprednejše, algoritmične strategije, ki so jih odkrili povsem samostojno. Svoje postopke so bili zmožni tudi pojasniti in navesti, zakaj so najučinkovitejši pri reševanju kombinatoričnih problemov. Otroci, ki so uporabljali strategijo na najvišji stopnji, so se zavedali, kdaj so poiskali vse kombinatorične situacije oz. kdaj so rešili problem (Sriraman in English 2004). Učenci, ki samostojno odkrijejo temeljne strategije, se osredotočijo na razumevanje struktur danega problema, poleg tega se vključijo v reflektivno abstrakcijo (Sriraman in English 2004).

Pri učenju matematike učenci spoznajo različne strategije reševanja problemov. Pomembno je tudi, da imajo priložnosti za oblikovanje lastnih strategij kot orodja za podporo pri učenju matematike. Učenje, kjer so učenci aktivno vključeni v učni proces s konstrukcijo lastnega znanja, je najučinkovitejše (Kimani, Gibbs in Anderson 2013). Ravno kombinatorika ponuja probleme, ki učencem omogočajo, da konstruirajo, izboljšajo in uporabijo lastne predstave pri iskanju rešitev. Učitelj jih pri tem spodbuja s poslušanjem, spraševanjem in z iskrenim prizadevanjem, da bi razumel, kaj poskušajo učenci sporočiti s svojimi načrti reševanja kombinatoričnih problemov. Učencem ne bi smeli le posredovati kombinatoričnih postopkov in algoritmov, temveč bi jim morali ponuditi dovolj časa, da odkrijejo in razvijejo ideje v okolju, ki spodbuja oblikovanje smiselnih lastnih predstav (Tarlow 2008; Kimani, Gibbs in Anderson 2013). Pouk kombinatorike bi moral temeljiti na rekurzivnem sklepanju in iskanju sistematičnih postopkov (Batanero, Navarro-Pelayo in Godino 1997). Z neustreznim učenjem oz. poučevanjem niti učenci na stopnji formalnih operacij niso zmožni reševati kombinatoričnih problemov (Fischbein 1975)

Kombinatorika v osnovni šoli

Pri uvajanju kombinatorike pri pouku matematike v osnovni šoli se pojavljajo dileme, ali so učenci v prvem vzgojno-izobraževalnem obdobju sposobni reševati tovrstne probleme. Na tem mestu je seveda potrebno poudariti, da v prvih letih učenja kombinatorike ne gre za učenje formul in uporabo le-teh v problemih, pač pa učence seznanimo zgolj s preprostimi kombinatoričnimi situacijami, v katerih množica ni »prebogata«, zato lahko njene elemente pre-

prosto preštejejo. Kombinatorika je namreč matematična disciplina, za katero ne potrebujemo nobenih posebnih orodij, saj nam omogoča, da razporeditve oz. izbore enostavno preštejemo. Zato je njena vpeljava smiselna že pred osnovnošolskim izobraževanjem, kar je v svoji raziskavi pokazala Englisheva (1991). Otrok v predšolskem obdobju kombinatorične probleme rešuje z neposredno izkušnjo, z manipulacijo konkretnih predmetov (Fischbein 1975; English 1991) in s to metodo reševanja nadaljuje na samem začetku šolanja. Uporaba konkretnega didaktičnega materiala pri učenju kombinatorike omogoča globlje razumevanje (Kimani, Gibbs in Anderson 2013). Fischbein (1975) priporoča uporabo predmetov iz otrokovega vsakdana in navaja naslednje aktivnosti:

- iz kroglic različnih velikosti ali barv narediti čim več različnih verižic;
- razporediti raznobarvne žetone (modele likov, kocke ...) na vse možne načine;
- ob upoštevanju določenih navodil sestaviti iz danih dveh, treh, štirih črk ali zlogov čim več različnih besed;
- iz danih števk sestaviti vsa možna števila.

Ob teh oz. podobnih konkretnih dejavnostih ter z učiteljevo pomočjo so učenci zmožni uvideti, da se je kombinatoričnih situacij nujno potrebno lotiti predvsem sistematično. Seveda ne bo dovolj, da raziščejo en primer, temveč morajo raziskati več podobnih primerov na konkretni ravni v različnih kontekstih. Reševanje problemov in razmišljanje učencev se z vsako nalogo izboljšata (Kimani, Gibbs in Anderson 2013).

Učenci višjih razredov osnovne šole ob raziskovanju kombinatoričnih problemov pri ponazoritvi svojih rešitev spoznajo in uporabijo različne prikaze (preglednica, pušični prikaz, kombinatorično drevo) ter nazadnje povežejo osnovni izrek kombinatorike z množenjem. Osnovnošolska kombinatorika torej zajema (Cotič in Hodnik 1995, 65–78):

- nastavitvev in štetje možnih izidov pri preprostih kombinatoričnih situacijah;
- grafično (preglednica, pušični prikaz, kombinatorično drevo) predstavitev preprostih kombinatoričnih situacij;
- ponazoritev osnovnega izreka kombinatorike z množenjem.

Tak način učenja kombinatorike v osnovni šoli omogoča (Felda 1996, 35):

- razvoj sposobnosti opazovanja,

- razvoj občutka za relacijo enakosti oz. neenakosti,
- vzpostavljanje reda med neurejenostjo,
- spodbujanje razmišljanja in sklepanja,
- iskanje sorodnih ali enakih vzorcev in postavitev predpostavk o zakonitostih,
- opazovanje strukture sistema.

Čeprav bi bilo hitreje osnovni izrek kombinatorike učencem enostavno povedati, menimo, da je za učence boljše, da račun nastavijo sami. Če jim formule preprosto le predstavimo, v določenih okoliščinah stežka ugotovijo, katero formulo uporabiti, ker le-te za njih nimajo nobenega pomena (Kimani, Gibbs in Anderson 2013). Zatečejo se k iskanju ključnih besed v besedilu naloge ter uporabijo formule, ki so se jih naučili na pamet. Čeprav je uspeh pri reševanju kombinatoričnih problemov s takšnimi strategijami omejen, lahko pretirano zanašanje nanje pripelje do mišljenja, da gre pri kombinatoriki predvsem za prilagajanje problema formuli (Lockwood 2014). Izogibati se moramo dajanju receptov. Učence je potrebno vključiti v smiselno raziskovanje konceptov in jim dati možnost, da osmislijo formule, ki jih uporabijo (Kimani, Gibbs in Anderson 2013). Pomagati jim moramo, da so pri reševanju kombinatoričnih problemov bolj konceptualno in manj proceduralno osredotočeni.

Kombinatorične naloge naj rešujejo v manjših skupinah (Sriraman in English 2004). Podajo in razišečejo naj svoje ideje ter o njih razpravljajo s svojimi vrstniki, oblikujejo predstavitve in zapise, si izmislijo lastne strategije, ugibajo in preizkusijo svoje metode. Pri tem ima učitelj zelo pomembno vlogo. Učencem naj omogoči svobodo pri raziskovanju njihovih idej, opazuje njihovo delo in pozorno prisluhne, da lahko v pravem trenutku poseže ter jih spodbudi za nadaljnje delo. Svoje rešitve naj učenci delijo s sovrstniki; opišejo in pojasnijo naj, kako so prišli do svojih rešitev in zakaj so te smiselne. Ko učenci delijo svoje rešitve, učiteljem omogočijo vpogled v razumevanje kombinatorike, svojim vrstnikom pa omogočijo pomembne priložnosti za konstruktivne povratne informacije (Sriraman in English 2004).

Sposobnost postavljanja problemov (poleg njihovega reševanja) postaja v današnji družbi vse pomembnejša. S tem ko učence vključimo v oblikovanje kombinatoričnih problemov, lahko pozitivno vplivamo na njihovo pot pri iskanju pomembnih kombinatoričnih konceptov in postopkov, poleg tega pripomoremo k razumevanju struktur kombinatoričnih problemov (Sriraman in English 2004). Pri oblikovanju svojih problemov morajo učenci razmisliti o njihovi zasnovi, torej o sestavnih delih posameznega problema, kot so znane in neznane informacije, cilj, ki ga je treba doseči, ter morebitne omejitve ali po-

goj za doseganje cilja (Moses, Bjork in Goldenberg 1993). Razumevanje oblikovanja problemov učencem omogoča razlikovanje matematičnih od nematematičnih, dobrih od slabih in rešljivih od nerešljivih problemov (Sriraman in English 2004).

Kombinatorika v učnem načrtu za matematiko za osnovno šolo

V učnem načrtu za matematiko iz leta 2011 (preglednica 1) so vsebine iz kombinatorike vpeljene pri vsebini obdelave podatkov, pri matematičnih problemih in problemih z življenjskimi situacijami ter v zadnjem triletnju pri verjetnosti oz. pri pridobivanju izkušenj s slučajnimi dogodki. Učenci izvajajo poskuse (npr. met kovanca) in na podlagi analize s kombinatoričnim drevesom napovedujejo izide. Preglednica 1 prikazuje postopno vpeljavo kombinatoričnih situacij po celotni vertikali devetletke, ki sledi Dörflerjevemu modelu razvoja matematičnih pojmov.

Učenje in poučevanje kombinatorike

Pri usvajanju novih pojmov iz kombinatorike učenci prehodijo tri ravni, in sicer enaktivno, ikonično in simbolno. Učenčeve ravni pri reševanju kombinatoričnih situacij smo priredili in dopolnili po Dörflerjevemu modelu razvoja matematičnih pojmov (preglednica 2).

Ravni pri reševanju kombinatoričnih situacij si ne sledijo vedno samo v tem točno določenem vrstnem redu: enaktivna, ikonična in simbolna raven. Te predstavljene ravni moramo različno vključevati v pouk. Proces učenja kombinatoričnih konceptov najprej poteka samo enaktivno. Pred uporabo simbolne ravni je učencem potrebno ponuditi dovolj konkretnih izkušenj z igranjem situacij in s predstavitvami s predmeti. Le na tak način bomo dosegli poglobljeno razumevanje kombinatorike. Treba je poudariti, da so učenci v prvem vzgojno-izobraževalnem obdobju, ko se formalno prvič srečajo s kombinatoriko, na stopnji konkretnih operacij, zato enaktivne ravni ne smemo izpustiti, hkrati pa ta tudi ne sme biti prekratka. Razlog za nerazumevanje osnovnih kombinatoričnih konceptov je največkrat ravno v tem, da je konkretna raven izpuščena ali pa je prekratka (Cotič 1998).

Ob koncu prvega vzgojno-izobraževalnega obdobja in na začetku drugega konkretno enaktivnost shematiziramo. Šele v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju shematizirano dejavnost ponazorimo s simboli. V tem obdobju lahko tudi konkretno enaktivnost prenesemo takoj na simbolno raven. Nadalje lahko po sliki konkretno »operiramo« in obratno, po sliki opišemo potek in ga zapišemo s simboli (Tomić 1984).

Kot vidimo, je prehod iz enaktivne na simbolno raven dolgoročni cilj, ki

Preglednica 1 Kombinatorične situacije v 1., 2. in 3. triletju osnovne šole

	Vzgojno-izobraževalno obdobje		
	Prvo	Drugo	Tretje
Vsebina	Obdelava podatkov. Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami.	Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami.	Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami (odprti, zaprti). Izkušnje s slučajnimi dogodki.
Cilji	Učenci nastavijo in preštejejo vse možne izide pri najpreprostejših kombinatoričnih situacijah <i>na konkretni ravni</i> (razporeditve treh predmetov); preiskujejo kombinatorične situacije in jih grafično predstavijo.	Učenci raziskujejo kombinatorične situacije ter razvijajo različne metode reševanja kombinatoričnih problemov (metoda poskušanja); rešijo kombinatorični <i>problem na konkretni ravni</i> z uporabo konkretnih materialov, modelov in ponazoril; rešijo kombinatorični <i>problem na grafični ravni</i> in prikažejo rešitev kombinatoričnega problema <i>s skico</i> ; rešijo kombinatorične probleme, povezane z življenjskimi situacijami.	Učenci raziskujejo kombinatorične situacije; spoznajo in uporabijo kombinatorično drevo; rešijo kombinatorični <i>problem na grafični ravni</i> ; rešijo in prikažejo rešitev kombinatoričnega problema <i>s sliko, skico, preglednico, kombinatoričnim drevesom</i> ; rešijo kombinatorični <i>problem na simbolni ravni</i> (nastavitev računa); <i>posplošijo</i> rešitev kombinatoričnega problema (lahko tudi s primeri); rešijo kombinatorične probleme, povezane z življenjskimi situacijami; <i>izvajajo poskuse in na podlagi analize s kombinatoričnim drevesom napovedujejo izide</i> (npr. met kovanca).
Didaktična usmeritev	Pri kombinatoričnih situacijah učenci poiščejo razporeditve največ treh različnih predmetov (npr. kocko, valj in kroglo postavijo v vrsto in ugotovijo, na koliko načinov lahko to naredijo).	Razvoj znanj o kombinatoriki poteka ob različnih dejavnostih: npr. razporejanje knjig na knjižni polici, možnosti plačevanja računa z različnimi kovanci, sestava menija v restavraciji, sestava pohištva iz različnih kosov, sestavljanje šopka, postavljanje knjig na polico idr.	Razvoj znanj o kombinatoriki poteka ob različnih dejavnostih: učenci rešijo kombinatorične probleme, povezane z življenjskimi situacijami (sestava menija v restavraciji, sestava pohištva iz različnih kosov).

Opombe Prirejeno po Ministrstvu za šolstvo in šport (2011).

Preglednica 2 Učenčeve ravni pri reševanju kombinatoričnih situacij

Enaktivna (konkretna) raven	1. Zastavitev izhodiščne problemske situacije 2. Analiza izhodiščne problemske situacije 3. Izvedba aktivnosti (igranje situacij, predstavitve s predmeti)	Vrtec + prvo vzgojno-izobraževalno obdobje
Ikonična (grafična) raven	4. Shematizacija dejavnosti (risba, skica) 5. Izvedba dejavnosti v različnih drugih situacijah 6. Shematizacija dejavnosti s sistematičnimi prikazi (preglednica, kombinatorično drevo, puščični prikaz)	Prvo vzgojno-izobraževalno obdobje + drugo vzgojno-izobraževalno obdobje
Simbolna raven	7. Prikaz dejavnosti v še splošnejši obliki (nastavitvev računa za posamezen primer) 8. Posplošitev problema 9. Uporaba razvitega pojma v novi situaciji (razviti pojem deluje kot instrument)	Drugo vzgojno-izobraževalno obdobje + tretje vzgojno-izobraževalno obdobje + srednja šola

Opombe Prirejeno po Dörfler 1991.

traja od začetka pa vse do konca osnovnošolskega oz. srednješolskega učenja kombinatorike. Grafično prikazano ogrožje modela razvoja pojma bomo konkretizirali z dvema primeroma, in sicer s permutacijami brez ponavljanja in s permutacijami s ponavljanjem.

Permutacije brez ponavljanja

Za primer smo izbrali pojem razporedbe (brez in s ponavljanjem), kar je eden najelementarnejših pojmov iz kombinatorike.

Enaktivna (konkretna) raven

1. *Zastavitev izhodiščne problemske situacije.* Učenci imajo na razpolago link kocke treh različnih barv (rdeča, modra, zelena). Najprej se z njimi igrajo, npr. sestavljajo stolpce, oblikujejo vzorce, link kocke sortirajo po barvi ... Ob tem pridobivajo mnoge dragocene izkušnje. Nato jim zastavimo vprašanje (razporedbe brez ponavljanja): *Na koliko načinov lahko zgradiš stolpec iz treh link kock, pri čemer mora biti vsaka link kocka v stolpcu drugačne barve (rdeča, modra, zelena)?*
2. *Analiza izhodiščne problemske situacije.* Učenci analizirajo, na kakšen način bodo rešili zastavljeni problem: koliko link kock bodo postavili v stolpec, kakšne barve bodo link kocke, na kaj bodo morali biti pozorni, kako bodo prepoznali enake oz. različne stolpce ...
3. *Izvedba aktivnosti.* Učenci postavljajo link kocke v stolpec. Ker je število link kock majhno, bo večina učencev našla vseh šest razporedb. Na za-

Z	M	Z	M	R	R
M	R	R	Z	Z	M
R	Z	M	R	M	Z

Slika 1 Naključno, nesistematično reševanje kombinatoričnega problema

Z	M	Z	R	R	M
M	Z	R	Z	M	R
R	R	M	M	Z	Z

Slika 2 Sistematično reševanje kombinatoričnega problema

četu, ko učence prvič seznanimo s tovrstnim problemom, link kocke skoraj vsi postavljajo v stolpec naključno, nesistematično, zato se lahko zgodi, da dobijo enake stolpce ali pa kakšnega izpustijo. Učiteljeva naloga pri tem je predvsem, da učence usmerja k sistematičnemu načinu reševanja kombinatoričnega problema, saj bodo le na tak način dobili vse možne različne stolpce. Redki učenci se že takoj odločijo za določen vrstni red (sistem) pri razporejanju. Ob izvajanju aktivnosti učenci opisujejo in pojasnjujejo svoje postopke.

Ikonična (slikovna) raven

4. *Shematizacija dejavnosti (risba, skica).* V tem koraku učenci shematizirajo razporeditve, ki so jih sestavili s predmeti. Nekateri rišejo link kocke, drugi jih zamenjajo s kvadrati, tretji uporabijo samo barve link kock ... Najprej nastane nesistematična slika, prikazana na sliki 1. Nekateri učenci odkrijejo sistem (link kocko določene barve postavijo na prvo mesto in razporejajo ostali dve, saj se jim tako ne zgodi, da bi se določena postavitev ponovila). Tako nastane nova slika, prikazana na sliki 2.
5. *Izvedba dejavnosti v različnih drugih situacijah.* Nato učence spodbudimo, da sami povedo, kaj vse bi lahko še razporejali. Navadno predlagajo, da bi razporejali barvice, like, geometrijska telesa, lončnice na okenski polici, sami sebe ... Te dejavnosti naj spet izvedejo konkretno.
6. *Shematizacija dejavnosti s sistematičnimi prikazi (kombinatorično drevo).* V tem koraku učence navajamo, da kombinatorične situacije prikažejo s kombinatoričnim drevesom (slika 3).

Simbolna raven

7. *Prikaz dejavnosti v še splošnejši obliki (nastavitev računa za posamezen primer).* Ob danem drevesu učenci zapišejo račun, ki pove število razporedb; v našem primeru:

Slika 3

Kombinatorično drevo

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

8. *Posplošitev problema (formalno pravilo).* Dodamo še eno link kocko rumene barve. Učenci izvedejo aktivnosti s štirimi link kockami. Najspособnejši ugotovijo, da dobijo število vseh razporedb štirih elementov z naslednjim računom:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Zelo redki pridejo do tega, da v najpreprostejših kombinatoričnih situacijah razvijejo formalno pravilo. Število razporedb elementov dobimo z naslednjo formulo:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Poudariti moramo, da razviti formalno pravilo ni cilj razredne, ampak predmetne stopnje (pri najpreprostejših kombinatoričnih problemih) oz. srednje šole, kjer se pouk kombinatorike kot matematične discipline šele začne.

9. *Uporaba razvitega pojma v novi situaciji (razviti pojem deluje kot instrument).* Pojem razporedbe uporabimo v novih problemskih situacijah (npr. pri izgradnji pojma razporedbe s ponavljanjem in pri problemskih situacijah iz kombinatorike, verjetnosti ...).

Opisani model izgradnje pojma razporedba smo zaradi nazornosti predstavili v med seboj ločenih korakih. Vendar je že iz vsebine razvidno, da koraki med seboj niso tako strogo ločeni in da učenje permutacij poteka kot celovit proces. Ravni si vedno tudi ne sledijo v tako strogem določenem vrstnem redu oz. je včasih kakšna tudi izpuščena. Seveda ni nujno, da učenci

že v osnovni šoli »prehodijo« vseh devet korakov, ampak je to odvisno od narave in zahtevnosti kombinatoričnih konceptov ter učenčevih sposobnosti.

Pri načrtovanju in učenju kombinatorike na podlagi opisanega modela je potrebno upoštevati naslednje značilnosti (Labinowicz 1989, 202–203):

- učenci celo na najvišji ravni izvajajo aktivnosti z materiali;
- učenci se najprej osredotočijo na procese in intuitivne odnose ter šele potem na odgovore ali simbolizacije rešitev z matematičnimi izrazi;
- šele po precejšnjih izkušnjah na določeni ravni se lahko učenec začne ukvarjati s podobnimi aktivnostmi na višji ravni predstavitve;
- v razredu se lahko različni učenci kadar koli igrajo isto igro na različnih ravneh; učitelji »nadzorujejo« učenca pri prehodu na višjo raven;
- učenci imajo priložnosti, da sami usmerjajo nastajanje lastnih problemov in predstavljenih operacij.

Permutacije s ponavljanjem

Razporedbe brez ponavljanja, ki smo jih prikazali na primeru z link kockami, razširimo še na razporedbe s ponavljanjem, na primeru aktivnosti gasilski avto.

Enaktivna (konkretna) raven

1. Zastavitev izhodiščne problemske situacije.

Aktivnost: Gasilski avtomobil. Učenci imajo na razpolago gasilske avtomobile, zamaške dveh barv ter flomastre. Najprej se z avtomobilčki igrajo. Nato jim zastavimo vprašanje (razporedbe s ponavljanjem): *Pred seboj imaš gasilski avtomobil, ki je na nujni vožnji. Avtomobil ima tri luči. Tvoja naloga je, da uporabiš dve modri in eno rdečo luč ter sestaviš čim več različnih svetlobnih signalov. Koliko različnih signalov lahko sestaviš?*

Reševanje najprej poteka na konkretni ravni, sledi shematizacija dejavnosti z risbo. Ob vsaki postavitvi učenec pobarva postavitev.

2. Analiza izhodiščne problemske situacije.

Učenci analizirajo, na kakšen način bodo rešili problemsko situacijo: katere barve bodo svetlobni signali, na kaj vse bodo morali paziti, kako bodo prepoznali enake oz. različne svetlobne signale idr.

3. Izvedba aktivnosti.

Učenci najprej sestavljajo svetlobne signale na konkretni ravni. Vsak učenec ima dva modra in en rdeč zamašek, ki predstavljajo gasilske signalne luči. Reševanje poteka s konkretnim premikanjem zamaškov na kabini avtomobila iz stiropora, s sistemom »ježek«.

M	R	M
M	M	R
R	M	M

Slika 4 Naključno, nesistematično reševanje kombinatoričnega problema

R	M	M
M	R	M
M	M	R

Slika 5 Sistematično reševanje kombinatoričnega problema

Ker je število svetlobnih signalov majhno (tri), bo pretežna večina učencev našla vse možne razporedbe.

Ikonična (slikovna) raven

4. *Shematizacija dejavnosti (risba, skica).* V tem koraku učenci grafično beležijo razporeditve, ki so jih sestavili s predmeti (v našem primeru zamaški). Posamezno postavitve beležijo tako, da s flomastroma pobarvajo luči na gasilskem avtomobilu. Učenci imajo na voljo večje število »avtomobilov«, kot je vseh možnih razporedb.

Najprej nastane nesistematična slika, prikazana na sliki 4.

Nekateri učenci odkrijejo sistem (svetlobni signal rdeče barve postavijo na prvo mesto, nato na drugo mesto ...), prikazan na sliki 5.

Ob dani sliki učenci lahko preštejejo in izpišejo število razporedb (tri): RMM, MRM, MMR.

5. *Prikaz dejavnosti v še splošnejši obliki (nastavitev računa za posamezen primer).* Pomislimo, koliko je razporedb, če bi modre signale ločevali: M₁ M₂ R.

Če rdeči signal postavimo na prvo mesto, je razporedba samo ena, RMM, kar je pol toliko kot v primeru, ko smo med modrimi signali razlikovali (R M₁ M₂, R M₂ M₁). Tudi pri postavitvi rdečega signala na drugo mesto je ena razporedba (MRM) oz. pol toliko, kot če bi modre signale ločevali (M₁ R M₂, M₂ R M₁), in podobno velja, če rdeči signal postavimo na tretje mesto (MMR oz. M₁ M₂ R, M₂ M₁ R).

Razporedb je v našem primeru pol toliko kot v primeru, če bi bili vsi trije predmeti (kot v prejšnjem primeru z link kockami) različni:

$$P_2^3 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 3.$$

6. *Posplošitev problema (formalno pravilo).* Dodamo še en svetlobni signal

rdeče barve. Učenci izvedejo aktivnosti s štirimi svetlobnimi signali, po dva in dva sta enake barve. Najsposobnejši ugotovijo, da dobijo število vseh razporedb štirih elementov, pri katerih sta po dva enaka, z naslednjim računom:

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 6.$$

Šele v srednji šoli pridejo do tega, da v najpreprostejših kombinatoričnih situacijah razvijejo formalno pravilo. Če bi imeli n različnih simbolov (permutacije brez ponavljanja), bi imeli $n!$ razporedb. Če pa imamo razporedbe dolžine, v katerih na mestih nastopa enak simbol, je permutacij s ponavljanjem:

$$p_n^p = \frac{n!}{p!}.$$

Naša ugotovitev velja tudi splošneje. Če sestavljajo razporedbe dolžine n iz m različnih simbolov (elementov, objektov), od katerih prvi nastopa p_1 -krat, drugi p_2 -krat, m -ti p_m -krat (in je seveda $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_m = 2$), lahko to naredimo na

$$p_n^{p_1, p_2, \dots, p_m} = \frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_m!} \text{ načinov.}$$

Poudariti moramo, da razviti formalno pravilo ni cilj osnovne šole, temveč srednje, kjer se pouk kombinatorike kot matematične discipline šele začne.

Aktivnosti, s katerimi oblikujemo osnovne pojme iz kombinatorike v osnovni šoli

Kombinatoriko otroku približamo skozi reševanje preprostih življenjskih situacij in problemov, ki so del njegovega vsakdanjika. S tovrstnimi matematičnimi problemi se srečajo predšolski in osnovnošolski otroci, ti problemi pa omogočajo razvijanje matematičnega mišljenja, sklepanja, posploševanja, izpeljevanja ugotovitev idr. Vpeljujemo jih lahko na slikovni, simbolni in najbolj na konkretni ravni, da si otroci z manipulacijo predmetov, premikanjem in prelaganjem vizualno pomagajo pri reševanju preprostih kombinatoričnih dejavnosti (Cotič 1998).

V nadaljevanju je le nekaj kombinatoričnih problemov, s katerimi se srečajo učenci v realnih situacijah.

Slika 6

Grafični prikaz kombinacij

Aktivnost 1. Maja se želi lepo obleči za rojstnodnevno zabavo. Na razpolago ima hlače in krilo ter rdečo, vijolično in rožnato majico. Na koliko načinov se lahko Maja obleče?

V prvem triletju prevladuje enaktivna (konkretna) raven, ki pa jo ob koncu triletja nadgradimo s shematizacijo dejavnosti (risba, skica). Učenci izvedejo aktivnosti z igranjem situacij in situacije predstavijo s predmeti.

To aktivnost lahko izvajajo učenci na samem začetku šolanja oz. v vrtcu. Delo naj poteka v dvojicah ali v manjših skupinah. Potrebujemo papirnato lutko za oblačenje in papirnata oblačila za lutko. Učenci lahko papirnato lutko tudi sami izrežejo in pobarvajo njena oblačila. Na konkretni ravni najprej oblečejo lutko Majo na vse možne načine. Nato kombinacije oblačil grafično prikažejo (slika 6).

Skupaj z učenci ugotovimo, da je zgornji način prikazovanja precej neroden, saj se nam posebej pri večjem številu elementov obeh množic zgodi, da kakšen par izpustimo ali se kakšen par ponovi. Zato uporabimo najprej pušični prikaz (slika 7), nato pa razpredelnico (slika 8). Šele pri uporabi razpredelnice učenci opazijo, da dobimo število vseh možnih kombinacij oblačil z množenjem števila majic različnih barv s številom spodnjih delov oblačil:

$$3 \cdot 2 = 6.$$

Pri tej aktivnosti učenci navadno pridejo do posplošitve, torej do osnovnega izreka kombinatorike (pravilo zmnožka): *Če je sestavljen izbor tak, da zbiramo najprej med m možnostmi, nato pa neodvisno od prvega izbora med n možnostmi, je vseh možnosti $m \cdot n$.*

Pri opisani aktivnosti dosegamo cilje več razredov, in sicer:

- 2. razred: učenci nastavijo in preštejejo vse možne izide pri najpreprostejših kombinatoričnih situacijah;
- 3. razred: učenci predstavijo kombinatorične situacije grafično, s preglednico in kombinatoričnim drevesom;
- 7. razred: učenci rešijo kombinatorični problem na simbolni ravni (nastavitev računa).

Slika 7 Ponazoritev kombinacij s puščičnim prikazom

Slika 8 Ponazoritev kombinacij s preglednico

Aktivnost 2: Na koliko načinov lahko razporedimo knjige na polico?

V drugem vzgojno-izobraževalnem obdobju učenci postopoma nadgradijo enaktivno (konkretno) raven s shematizacijo dejavnosti in kombinatorične situacije prikažejo s preglednico, kombinatoričnim drevesom in puščičnim prikazom. Učitelj jih razdeli v manjše skupine (trije oz. štirje učenci v skupini) in jim omogoči, da raziščejo naslednje probleme. Na koliko načinov lahko na polico razporedimo

- knjigo slovenščine in matematike? (Rešitev: $P_2 = 2$)
Učenci poiščejo: SM, MS.
- knjigo slovenščine, matematike in angleščine? (Rešitev: $P_3 = 6$)
Učenci poiščejo: SMA, SAM, MSA, MAS, ASM, AMS.
- dve enaki knjigi matematike in knjigo slovenščine? (Rešitev: $P_3^2 = 3$)
Učenci poiščejo: MMS, MSM, SMM.
- dve enaki knjigi slovenščine, knjigo matematike in knjigo naravoslovja? (Rešitev: $P_4^2 = 12$)
Učenci poiščejo: SSMN, SSNM, SMSN, SMNS, MSSN, MSNS, MNSS, NSSM, NSMS, NMSS.
- knjigo matematike, slovenščine, angleščine in naravoslovja? (Rešitev: $P_4 = 24$)
Učenci poiščejo: MSAN, MSNA, MASN, MANS, MNSA, MNAS, SMAN, SMNA, SAMN, SANM, SNMA, SNAM, AMSN, AMNS, ASMN, ASNM, ANMS, ANSM, NMSA, NMAS, NSMA, NSAM, NAMS, NASM.

Vsak učenec v skupini oblikuje razporedbo, ki mora biti različna od že nastavljenih. Če je število razporedb majhno, je zelo verjetno, da bodo poiskali vse. V prvi fazi dela v razredu ne moremo pričakovati, da bodo učenci razporedbe iskali sistematično, ampak je pomembno, da otrok osvoji naslednje cilje:

- upošteva dana navodila in ugotavlja, ali nastavljena razporedba ustreza danemu pravilu;
- prepozna, ali je nastavljena razporedba nova ali je ponovitev katere od predhodnih;
- poišče čim več razporedb;
- v najpreprostejših primerih poišče vse razporedbe;
- se vpraša, kako to, da po določenem številu nastavljenih razporedb ni nobene več.

V drugem vzgojno-izobraževalnem obdobju lahko učenci raziščejo preproste probleme variacij s ponavljanjem in brez ponavljanja ter kombinacij s ponavljanjem in brez ponavljanja. Poglejmo si naslednji dve aktivnosti.

Aktivnost 3: Jaka ima vijolične, rumene in črne žetone. Z njimi se igra v igrici:

- (Variacije s ponavljanjem) Koliko različnih parov lahko naredi? (Rešitev: $(p)V_3^2 = 3^2 = 9$)
Učenci poiščejo: VV, VČ, VR, ČČ, ČV, ČR, RR, RV, RČ.
- (Variacije brez ponavljanja) Koliko različnih parov lahko naredi, če je vsak par sestavljen iz dveh različnih barv žetonov? (Rešitev: $V_3^2 = 6$)
Učenci poiščejo: VČ, VR, ČV, ČR, RV, RČ.

Aktivnost 4: V cvetličarni prodajajo vrtnice, sončnice in orhideje. Cvetličarka izdeluje šopke iz dveh rož.

- (Kombinacije s ponavljanjem) Koliko različnih šopkov lahko izdelata? (Rešitev: $(p)C_3^2 = 6$)
Učenci poiščejo: VV, VS, VO, SS, SO, OO.
- (Kombinacije brez ponavljanja) Koliko različnih šopkov lahko izdelata, če sta roži v šopku različni? (Rešitev: $C_3^2 = 3$)
Učenci poiščejo: VS, VO, SO.

Aktivnosti 2, 3 in 4 omogočajo, da učenci razporeditve oz. izbore predmetov opazujejo in ugotovijo, da je število rešitev odvisno od danega navodila in da se morajo problema lotiti sistematično, sicer se zelo hitro zgodi,

da katero od nastavitvev ponovijo ali pa celo izpustijo. Poleg tega te dejavnosti omogočajo, da učenci sami ugotovijo, pri katerih kombinatoričnih problemih je vrstni red pomemben (permutacije in variacije) oz. ni pomemben (kombinacije).

Ko imajo učenci dovolj izkušenj z različnimi kombinatoričnimi situacijami, lahko sami predlagajo, katere predmete in tudi simbole bi lahko razporejali: kocke, perle, lončnice, črke, številke, zloge ... Sami naj sestavijo tudi navodila in naloge rešijo.

Aktivnost 5: Koliko je trimestrnih števil iz števk 1, 2, 3, če se številke ne ponavljajo?

Po izkušnjah z reševanjem kombinatoričnih problemov na konkretni in grafični ravni z uporabo konkretnih materialov, modelov in ponazoril učenci tretjega vzgojno-izobraževalnega obdobja raziskujejo kombinatorične situacije, rešitev kombinatoričnega problema pa ponazorijo s sliko, skico, preglednico, kombinatoričnim drevesom. Kombinatorični problem rešijo na simbolni ravni (nastavitvev računa). Izkušnje in znanje kombinatorike uporabijo pri napovedovanju verjetnosti slučajnih dogodkov.

Pri reševanju aktivnosti 5 se ob primeru naslonimo na osnovni izrek kombinatorike, ki ga v osnovni šoli na formalni ravni ne obravnavamo.

V danem primeru trimestrnih števil proces odločanja poteka v treh fazah, in sicer:

- V prvi fazi izbiramo med vsemi tremi števkami: 1, 2 in 3.
- V drugi fazi izbiramo med dvema števkama, neodvisno od tega, kaj smo izbrali v prvi fazi.
- V tretji fazi je še ena možnost, neodvisno od tega, kaj smo izbrali v prvi oz. drugi fazi.

Shematizacijo dejavnosti prikažemo s kombinatoričnim drevesom (slika 9).

Učenci pridejo do ugotovitev: *Če je sestavljen izbor tak, da izbiramo najprej med tremi števkami, nato neodvisno od prvega izbora še med dvema števkama in na koncu neodvisno od tega, kaj smo izbrali v prvi oz. drugi fazi, med eno številko, je število vseh trimestrnih števil enako $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.* Izide tudi izpišemo:

123 132 213 231 312 321

Problem lahko nadgradimo: Koliko je trimestrnih števil iz števk 1, 2, 3, če se številke lahko ponavljajo? V tem primeru je proces odločanja z uporabo osnovnega izreka kombinatorike v treh fazah naslednji:

Slika 9

Ponazoritev problema s kombinatoričnim drevesom

- V prvi fazi izbiramo med vsemi tremi števkami: 1, 2 in 3.
- Glede na to, da se številke lahko ponavljajo, tudi v drugi fazi izbiramo med vsemi tremi števkami: 1, 2 in 3.
- V tretji fazi prav tako izbiramo med vsemi tremi števkami.

Učenci pridejo do ugotovitev: Če je sestavljen izbor tak, da izbiramo najprej med tremi števkami, nato neodvisno od prvega izbora zopet med tremi števkami in na koncu neodvisno od tega, kaj smo izbrali v prvi oz. drugi fazi, izbiramo med tremi števkami, je število vseh trimestnih števil s ponavljanjem $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Izide tudi izpišemo:

111	222	333
112	121	211
113	131	311
223	232	322
221	121	122
331	313	133
332	323	233
123	132	213
231	312	321

Šele v srednji šoli pridejo do tega, da razvijejo formalno pravilo. Če proces odločanja sestavlja k zaporednih faz, pri čemer je v prvi fazi n_1 , v drugi fazi $n_2 \dots$, v k -ti fazi pa n_k možnih odločitev in je število izborov v posamezni fazi neodvisno od tega, katere možnosti smo izbrali v prejšnjih fazah, je število izborov n enako: $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Aktivnost 6: V cvetličarni prodajajo vrtnice, sončnice, orhideje in nageljne. Koliko med seboj različnih šopkov lahko cvetličarka izdela, če so v vsakem šopku različne rože? Naredi seznam vseh možnosti.

Učenci lahko raziskujejo, koliko različnih šopkov lahko izdelamo, če je v šopku ena roža pa tudi dve, tri ali štiri med seboj različne rože.

Problem cvetličarke je razširitev aktivnosti 4. To je zapletena naloga, ki učencem omogoča, da se vključijo v matematične procese predstavitve, razmišljanja, abstrakcije, posploševanja in utemeljitve. Tovrstni problemi so še posebej učinkoviti, če so predstavljeni na način, ki učencem omogoča, da sami odkrijejo splošna načela. Na tak način učitelj pripomore, da učenci razvijejo samostojno in sistematično mišljenje (Sriraman in English 2004).

Zaključek

Temeljni cilj poučevanja kombinatorike je torej razvijati učenčevo logično mišljenje in sistematični pristop pri reševanju kombinatoričnih situacij ter avtonomnost njegovega mišljenja. Seveda na začetku šolanja ne moremo govoriti o pouku kombinatorike kot matematične discipline, ampak učenci rešujejo preproste kombinatorične situacije z neposredno izkušnjo in igro na konkretni ravni. Lahko rečemo, da v kasnejših letih šolanja, ko kombinatorične situacije rešujemo na simbolni ravni z razvijanjem formul, učenje teh vsebin učencu razkrije »srce« matematike. Kombinatorični koncepti se izražajo z jezikom teorije množic, rezultati in metode iz kombinatorike so zelo uporabni in koristni tudi na drugih matematičnih področjih, prav posebej v teoriji verjetnosti. Verjetnost se namreč danes uporablja tudi na področjih, ki so del tako človekovega vsakdana kot njegovega profesionalnega dela. Osnovno znanje iz verjetnosti in kombinatorike potrebujejo vsi odrasli, ne le tisti v tehničnih in znanstvenih poklicih. To znanje potrebujejo za osebno izpolnitev, za svoje delovno mesto in za polno udeležbo v družbi.

Literatura

- Annin, S. A., in K. S. Lai. 2010. »Common Errors in Counting Problems.« *Mathematics Teacher* 103 (6): 402–409.
- Batanero, C., J. D. Godino in V. Navarro-Pelayo. 2005. »Combinatorial Reasoning and its Assessment.« V *The Assessment Challenge in Statistics Educations*, ur. I. Gal in J. B. Garfield, 239–252. Amsterdam: IOS.
- Batanero, C., V. Navarro-Pelayo in J. D. Godino. 1997. »Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils.« *Educational Studies in Mathematics* 32 (2): 181–199.
- Brualdi, R. A. 2004. *Introductory Combinatorics*. 4. izd. Upper Saddle River, NJ: Pearson/Prentice Hall.

- Carey, S. 1985. »Are Children Fundamentally Different Kinds of Thinkers and Learners than Adults?« V *Thinking and Learning Skills*. 2. zv., *Current Research and Open Questions*, ur. S. F. Chipman, J. W. Segal in R. Glaser, 485–517. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Cockcroft, W. H. 1982. *Mathematics Counts*. London: HMSO.
- Cotič, M. 1998. »Uvajanje vsebin iz statistike in verjetnosti ter razširitev pojma matematičnega problema pri razrednem pouku matematike.« Doktorska disertacija, Univerza v Ljubljani.
- Cotič, M., in T. Hodnik. 1995. »O pouku matematike na začetku šolanja v novi osnovni šoli.« *Matematika v šoli* 3 (3): 143–157.
- Dias, M. G., in P. L. Harris. 1988. »The Effect of Make-Believe Play on Deductive Reasoning.« *British Journal of Developmental Psychology* 6 (3): 207–221.
- Dörfler, W. 1991. »Forms And Means Of Generalization In Mathematics.« V *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, ur. A. J. Bishop, 63–85. Upper Saddle River, NJ: Pearson/Prentice Hall.
- English, L. D. 1991. »Young Children's Combinatoric Strategies.« *Educational Studies in Mathematics* 22 (5): 451–474.
- Felda, D. 1996. »Obarvana matematika.« V *Prispevki k poučevanju matematike*, ur. S. Kmetič, 35–38. Maribor: Rotis.
- Fischbein, E. 1975. *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Dordrecht: Reidel.
- Fujita, H. 1985. »The Present State and a Proposal Reform of Mathematical Education at Senior Secondary Level in Japan.« *Journal of Science Education in Japan* 9 (2): 39–52.
- Kapur, J. N. 1970. »Combinatorial Analysis and School Mathematics.« *Educational Studies in Mathematics* 3 (1): 111–127.
- Kimani, P. M., R. T. Gibbs in S. M. Anderson. 2013. »Restoring Order to Permutations & Combinations.« *Mathematics Teaching in the Middle School* 18 (7): 430–438.
- Kozel, L., M. Cotič in A. Žakelj. 2018. *Kognitivno-konstruktivistični model pouka matematike v 1. triletju osnovne šole*. Koper: Založba Univerze na Primorskem.
- Labinowicz, E. 1989. *Izvirni Piaget*. Ljubljana: DZS.
- Levine, S. 1983. »The Child-as-Philosopher: A Critique of the Presuppositions of Piagetian Theory and an Alternative Approach to Children's Cognitive Capacity.« *Thinking: The Journal of Philosophy for Children* 5 (1): 1–9.
- Lockwood, E. 2014. »A Set-Oriented Perspective on Solving Counting Problems.« *For the Learning of Mathematics* 34 (2): 31–37.
- Lockwood, E., in B. Gibson. 2016. »Combinatorial Tasks and Outcome Listing: Examining Productive Listing among Undergraduate Students.« *Educational Studies in Mathematics* 91 (2): 247–270.
- Maher, C. A., in Martino, A. M. 1996. »The Development of the Idea of Mathe-

- mathematical Proof: A Five-Year Case Study.« *Journal for Research in Mathematics Education* 27 (2): 194–214.
- Maher, C. A., A. B. Powell in E. B. Uptegrove. 2011. *Combinatorics and Reasoning: Representing, Justifying and Building Isomorphisms*. New York: Springer.
- Ministrstvo za šolstvo in šport. 2011. *Učni načrt: program osnovna šola; matematika*. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport in Zavod Republike Slovenije za šolstvo.
- Moses, B., E. Bjork in E. P. Goldenberg. 1993. »Beyond Problem Solving: Problem Posing.« V *Problem Posing: Reflections and Applications*, ur. S. I. Brown in M. Walter, 178–188. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Rosen, K. H. 2007. *Discrete Mathematics and Its Applications*. New York: McGraw-Hill.
- Sriraman, B., in L. D. English. 2004. »Combinatorial Mathematics: Research into Practice.« *The Mathematics Teacher* 98 (3): 182–191.
- Tarlow, L. D. 2008. »Sense-Able Combinatorics: Students' Use of Personal Representations.« *Mathematics Teaching in the Middle School* 13 (8): 484–489.
- Tomič, A. 1984. »Teorija in praksa matematičnega pouka v nižjih razredih osnovne šole.« Doktorska disertacija, Univerza v Ljubljani.
- . 1997. *Izbrana poglavja iz didaktike*. Ljubljana: Center za pedagoško izobraževanje Filozofske fakultete.
- Varga, T. 1969. »Combinatorics and Probability for Young Children (Part 1).« *Journal of Structural Learning* 1 (4):49–99.

A Didactic Model of Building Combinatorial Concepts: Transition from Primary to Secondary Level

The abilities of critically assessing presented data, logical thinking, computational literacy, and mastering computational tools for data processing are just some of the reasons for learning and teaching combinatorics, which due to its practical applicability is also an excellent basis for solving mathematical problems, at school. In the paper a didactic model of introducing combinatorial concepts into the teaching of mathematics in basic school is presented. At establishing the model, the developmental characteristics of the pupil and the cognitive-constructivist findings of educational sciences about learning and teaching mathematics were taken into account. When acquiring the concepts of combinatorics, pupils transit three levels of representation, namely the enactive (concrete), the iconic (graphical), and the symbolic level. In the first educational cycle, pupils get familiar with combinatorial concepts at the enactive level, at the end of the first and at the beginning of the second educational cycle they schematise the concrete activities, and only in the third educational cycle of basic school do they progress to the symbolic level. As a rule, generalisation of the problem follows in (upper) secondary school, where the use of

the developed concept functions as an instrument. Transition from the enactive to symbolic level is a long-term goal that spans from the beginning past the end of basic school to learning combinatorics at (upper) secondary level.

Keywords: combinatorics, the enactive, iconic, and symbolic level, combinatorial situations