ТЕПЛООБМЕН ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ОТВОДЕ ТЕПЛА ОТ ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ МАГНИТНОГО ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА

С.В. Соловьев

ВЦ ДВО РАН, г. Хабаровск

Представлены результаты численного моделирования нестационарного теплообмена и магнитной гидродинамики электропроводной жидкости в сферическом слое. Исследовано влияние малых значений магнитного числа Рейнольдса и диссипации джоулевой теплоты на эволюцию структуры течения жидкости, поле температуры, магнитной индукции и распределение чисел Нуссельта.

Ключевые слова: математическое моделирование, нестационарный теплообмен, магнитная гидродинамика, магнитное число Рейнольдса, диссипации джоулевой теплоты, сферический слой.

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость изучения движений электропроводных жидкостей и газов возникает при исследовании широкого класса задач физики и техники, астрофизики и аэродинамики больших скоростей, МГД генераторов и плазменных ускорителей, сферических термоядерных реакторов [1–11]. При изучении магнитной гидродинамики рассматриваются два класса задач, которые определяются величиной магнитного числа Рейнольдса Re_m : $Re_m \ll 1$ (жидкость с малой проводимостью) и $Re_m \gg 1$ (жидкость с большой проводимостью). Магнитное число Рейнольдса характеризует взаимодействие проводящих движущихся жидкостей и газов (плазмы) с магнитным полем. В работе [8] рассмотрен нестационарный теплообмен электропроводной жидкости при малых значениях чисел Re_m для температурных граничных условий первого рода на поверхностях сферического слоя. Безразмерные числа подобия принимали следующие значения [8]: $d/D = 1/1,5$; $Gr = 10^3$; $Re_m = 10^{-1}$; 10^{-2} ; 10^{-3} ; 10^{-4} ; 10^{-5} ; 10^{-6} ; $Ho = Re = S = 1$; $Pe = 10$; $G = 1$. Целью настоящей работы является исследование теплообмена и магнитной гидродинамики жидкости (при тех же числах подобия работы [8]), когда в отличие от результатов работы [8] для температуры задаются граничные условия смешанного типа (от внутренней поверхности слоя жидкости отводится тепло по закону Фурье, а на внешней задается постоянное значение температуры). Исследуется влияние малых чисел Re_m и диссипации джоулевой теплоты на теплообмен электропроводной жидкости. Вектор силы тяжести направлен по радиусу к центру сферического слоя.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Математическая постановка задачи имеет вид [8, 9]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Ho} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \omega \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{Gr}{Re^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + \\ + \frac{S}{Re_m} \left(B_r \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + 2 \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \right. \\ \left. - \frac{B_r}{r} \frac{\partial^2 B_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \right. \\ \left. \frac{2B_\theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\omega r \sin \theta, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Ho} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \right. \\ \left. + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) - \\ - \frac{J}{Pe} \left(\frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} B_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Ho} \frac{\partial B_r}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + B_r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{1}{Re_m} \left(\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{2B_r}{r^2} - \frac{2B_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{1}{Ho} \frac{\partial B_\theta}{\partial \tau} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(-B_r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{Re_m} \left[\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{ctg \theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right]. \quad (5)$$

Для температуры на внутренней Γ_1 ($r = 1$) и на внешней Γ_2 ($r = r_2$) поверхности сферического слоя задавались граничные условия второго и первого родов соответственно: $\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \Big|_{\Gamma_1} = 1$; $\vartheta \Big|_{\Gamma_2} = 0$. На оси

симметрии ставилось условие: $\frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0,\pi} = 0$.

Граничные условия для функции тока, вихря и магнитной индукции имели следующий вид [9]:

$$\psi \Big|_{\Gamma_{1,2}} = \psi \Big|_{\theta=0,\pi} = \omega \Big|_{\theta=0,\pi} = 0; \quad \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0,\pi} = \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0,\pi} = 0;$$

$$B_r \Big|_{\Gamma_1} = B_r \Big|_{\Gamma_2} = 0; \quad B_\theta \Big|_{\Gamma_1} = -0,01 \sin \theta; \quad B_\theta \Big|_{\Gamma_2} = 0,01 \sin \theta.$$

Локальные и осредненные числа Нуссельта на поверхности внутренней и наружной сферы рассчитывались по формулам:

$$Nu_1 = - \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \Big|_{\Gamma_1}, \quad Nu_2 = -r_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \Big|_{\Gamma_2}.$$

$$\overline{Nu}_1 = - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right]_{\Gamma_1} \sin \theta d\theta, \quad \overline{Nu}_2 = - \frac{r_2}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right]_{\Gamma_2} \sin \theta d\theta.$$

Обозначения величин, используемых при записи системы уравнений (1)-(5), приведены в работе [9]. Численное решение задачи (1)-(5) осуществлялось методом конечных элементов [10].

На рис. 1-6 приведены результаты расчетов поля температуры, функции тока, вихря, магнитной индукции и распределений чисел Нуссельта для различных значений чисел Re_m с учетом диссипации Джоулевой теплоты.

Для заданного температурного граничного условия на внутренней поверхности сферического слоя жидкости числа Нуссельта для всех рассмотренных режимов принимают постоянное значение $\overline{Nu}_1 = Nu_1 = -10$.

На рис. 1 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^{-1}$ в моменты времени (здесь и далее): 1- $\tau = 0,2$; 2- $\tau = 0,5$; 3- $\tau = 1$; 4- $\tau = 2$; 5- $\tau = 3$; 6- $\tau = 4$; 7- $\tau = 5$; 8- $\tau = 6$; 9- $\tau = 7$.

Теплообмен в слое для $\tau = 0,2-7$ осуществляется теплопроводностью. Изотермы представляют собой концентрические окружности (рис. 1а). Интервалы изменения температуры в слое жидкости с течением времени увеличиваются: $\vartheta \in [-2,748; 0]$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $[-3,356; 0]$ ($\tau = 2; 3; 4$); $[-3,367; 0]$ ($\tau = 5; 6; 7$).

Рис. 1. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), радиальной (г) и меридиональной (д) составляющих магнитной индукции

Числа Нуссельта принимают следующие значения:

$$1 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -0,283; \quad 2 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -2,077.$$

$$3 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -4,376; \quad 4 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -6,116.$$

$$5 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -6,611; \quad 6 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -6,732.$$

$$7 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -6,764; \quad 8 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -6,772.$$

$$9 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -6,774.$$

При $\tau = 7$ наступает квазистационарное состояние. Теплообмен на внешней поверхности слоя интенсивнее, чем на внутренней. Для рассмотренных моментов времени в слое жидкости образуются две крупномасштабные конвективные ячейки и два вихря (рис. 1б, в): в северном полушарии отрицательные значения функции тока и вихря (синий цвет, “-”, жидкость движется по часовой стрелке), в южном – положительные значения (красный цвет, “+”, жидкость движется против часовой стрелки). Максимальные значения функции тока и вихря:

$|\Psi_{max}| = 4,03 \cdot 10^{-5}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $3,94 \cdot 10^{-5}$ ($\tau = 2; 3; 4$); $3,82 \cdot 10^{-5}$ ($\tau = 5; 6; 7$); $|\omega_{max}| = 1,81 \cdot 10^{-3}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $1,78 \cdot 10^{-3}$ ($\tau = 2; 3; 4$); $1,73 \cdot 10^{-3}$ ($\tau = 5; 6; 7$). Поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции (красный цвет – положительные значения, синий цвет – отрицательные), приведенные на рис. 1г и 1д, со временем не изменяются. Максимальные значения радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции для всех рассмотренных значений времени и Re_m не изменяются: $|B_{rmax}| = 1,49 \cdot 10^{-4}$; $|B_{\theta max}| = 10^{-2}$ (далее не приводятся).

Оказалось, что для $Re_m = 10^{-2}$ поля температуры, функции тока и вихря качественно аналогичны результатам, приведенным на рис. 1а, б, в, 1-3. В слое жидкости начинает зарождаться конвекция, но изотермы практически не отличаются от концентрических окружностей. Числа Нуссельта принимают следующие значения:

$$1 - \overline{Nu}_2 = -0,262; -0,285 \leq Nu_2 \leq -0,243.$$

$$2 - \overline{Nu}_2 = -2,046; -2,079 \leq Nu_2 \leq -2,020.$$

$$3 - \overline{Nu}_2 = -4,336; -4,373 \leq Nu_2 \leq -4,308.$$

$$4 - \overline{Nu}_2 = -6,068; -6,105 \leq Nu_2 \leq -6,042.$$

$$5 - \overline{Nu}_2 = -6,562; -6,598 \leq Nu_2 \leq -6,536.$$

$$6 - \overline{Nu}_2 = -6,682; -6,718 \leq Nu_2 \leq -6,656.$$

При $\tau = 4$ имеет место квазистационарное состояние. Теплообмен на внешней поверхности слоя интенсивнее, чем на внутренней. Температура жидкости изменяется в интервале: $\vartheta \in [-2,747; 0]$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $[-3,352; 0]$ ($\tau = 2; 3; 4$). Максимальные величины функции тока и вихря принимают следующие значения: $|\Psi_{max}| = 4,03 \cdot 10^{-4}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $3,95 \cdot 10^{-4}$ ($\tau = 2; 3; 4$); $|\omega_{max}| = 1,81 \cdot 10^{-2}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $1,78 \cdot 10^{-2}$ ($\tau = 2; 3; 4$).

Для $Re_m = 10^{-3}$ поля функции тока и вихря качественно аналогичны результатам, приведенным на рис. 1б, в. Изотермы поля температуры незначительно отличаются от концентрических окружностей. В слое жидкости слабая конвекция. Температура жидкости изменяется в интервале: $\vartheta \in [-2,730; 0,002]$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $[-3,311; 0]$ ($\tau = 2; 3; 4$). Для $\tau = 0,2; 0,5; 1$ температура жидкости принимает как отрицательные, так и положительные значения, в отличие от режимов при $Re_m = 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3}$ ($\tau = 2; 3; 4$), для которых температура жидкости принимает отрицательные и нулевые значения. Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 4,06 \cdot 10^{-3}$ ($\tau =$

$0,2; 0,5; 1$); $3,98 \cdot 10^{-3}$ ($\tau = 2; 3; 4$); $|\omega_{max}| = 1,82 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $1,79 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 2; 3; 4$). Числа Нуссельта:

$$1 - \overline{Nu}_2 = -0,058; -0,284 \leq Nu_2 \leq 0,134.$$

$$2 - \overline{Nu}_2 = -1,738; -2,062 \leq Nu_2 \leq -1,479.$$

$$3 - \overline{Nu}_2 = -3,934; -4,303 \leq Nu_2 \leq -3,656.$$

$$4 - \overline{Nu}_2 = -5,642; -6,007 \leq Nu_2 \leq -5,372.$$

$$5 - \overline{Nu}_2 = -6,081; -6,440 \leq Nu_2 \leq -5,815.$$

$$6 - \overline{Nu}_2 = -6,192; -6,549 \leq Nu_2 \leq -5,927.$$

На рис. 2 приведены распределения чисел Нуссельта.

Рис. 2. распределение чисел Нуссельта

Теплообмен на внешней поверхности слоя интенсивнее, чем на внутренней поверхности.

На рис. 3 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^{-4}$.

Рис. 3. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), распределение чисел Нуссельта (е)

Оказалось, что для $\tau = 0,2; 0,5; 1$ поля функции тока и вихря качественно аналогичны результатам, приведенным на рис. 1б, в, 1-3. В отличие от результатов, представленных на рис. 1-3, конвекция для $Re_m = 10^{-4}$ имеет место уже на начальной стадии теплообмена (рис. 3а, 1). С течением времени интенсивность конвекции в слое жидкости увеличивается (рис. 3а, 2-9). Наибольшие градиенты температуры имеют место в экваториальной области (рис. 3а, 1-9), что соответствует максимуму в распределении чисел Нуссельта (рис. 3е, 1-9; на внутренней поверхности – красная линия, на внешней – зеленая). Оказывается, что при значении $Re_m = 10^{-4}$, происходит увеличение вклада диссипации джоулевой теплоты (магнитная вязкость увеличивается), что и приводит к перестройке поля температуры (рис. 3а, 1-9). Числа Нуссельта принимают следующие значения:

- 1 – $\overline{Nu}_2 = 1,998; -0,275 \leq Nu_2 \leq 3,920$.
- 2 – $\overline{Nu}_2 = 1,388; -1,906 \leq Nu_2 \leq 4,036$.
- 3 – $\overline{Nu}_2 = 0,131; -3,677 \leq Nu_2 \leq 3,078$.
- 4 – $\overline{Nu}_2 = -0,880; -4,738 \leq Nu_2 \leq 2,062$.
- 5 – $\overline{Nu}_2 = -1,173; -4,998 \leq Nu_2 \leq 1,738$.
- 6 – $\overline{Nu}_2 = -1,243; -5,058 \leq Nu_2 \leq 1,659$.
- 7 – $\overline{Nu}_2 = -1,262; -5,073 \leq Nu_2 \leq 1,638$.

$$8 - \overline{Nu}_2 = -1,266; -5,077 \leq Nu_2 \leq 1,632.$$

$$9 - \overline{Nu}_2 = -1,268; -5,078 \leq Nu_2 \leq 1,631.$$

При $\tau = 7$ наступает стационарное состояние.

Теплообмен на внешней поверхности слоя интенсивнее, чем на внутренней поверхности. Температура жидкости изменяется в интервале: $\vartheta \in [-2,573; 0,227]$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $[-2,946; 0,056]$ ($\tau = 2; 3; 4$); $[-2,952; 0,036]$ ($\tau = 5; 6; 7$).

При $Re_m = 10^{-4} - 10^{-6}$ температура в сферическом слое жидкости принимает как отрицательные, так и положительные значения. По-видимому, это происходит вследствие увеличения вклада диссипации джоулевой теплоты в процесс теплообмена. Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 4,32 \cdot 10^{-2}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $4,40 \cdot 10^{-2}$ ($\tau = 2; 3; 4$); $4,32 \cdot 10^{-2}$ ($\tau = 5; 6; 7$); $|\omega_{max}| = 1,91$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $1,94$ ($\tau = 2; 3; 4$); $1,91$ ($\tau = 5; 6; 7$).

На рис. 4 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^{-5}$.

Рис. 4. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), распределение чисел Нуссельта (е)

Уменьшение Re_m приводит к значительным изменениям поля температуры и распределений чисел Нуссельта (рис. 4) по сравнению с результатами, приведенными на рис. 1-3. В поле температуры в экваториальной области образуется тепловая каверна (рис. 4а, 1-6), масштаб которой с течением времени увеличивается. Температура жидкости изменяется в интервале: $\vartheta \in [-1,730; 7,526]$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $[-1,611; 7,793]$ ($\tau = 2; 3; 4$). Распределение чисел Нуссельта (рис. 4е) на внешней поверхности слоя жидкости имеет максимум. Для $\tau = 2-4$ распределение чисел Нуссельта качественно и количественно практически не изменяется, по сравнению с результатом, приведенным на рис. 4е, 3. Числа Нуссельта принимают следующие значения:

1 – $\overline{Nu}_2 = 23,467$; $-0,193 \leq Nu_2 \leq 43,518$.

2 – $\overline{Nu}_2 = 37,601$; $-0,843 \leq Nu_2 \leq 73,623$.

3 – $\overline{Nu}_2 = 46,435$; $-0,754 \leq Nu_2 \leq 93,582$.

4 – $\overline{Nu}_2 = 48,168$; $-0,511 \leq Nu_2 \leq 96,637$.

5 – $\overline{Nu}_2 = 48,331$; $-0,478 \leq Nu_2 \leq 96,944$.

6 – $\overline{Nu}_2 = 48,344$; $-0,475 \leq Nu_2 \leq 96,968$.

При $\tau = 4$ наступает квазистационарное состояние. Интенсивность теплообмена на внешней поверхности слоя выше, чем на внутренней. В поле функции тока и вихря (рис. 4б, в) образуются две конвективные ячейки и два вихря. В конвективной ячейке и вихре северного полушария жидкость движется по часовой стрелке, а в южном полушарии – против часовой стрелки. Поля функции тока и вихря (рис. 4б, в) качественно аналогичны результатам, приведенным на рис. 3б, в. Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 4,68 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $4,79 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 2; 3; 4$); $|\omega_{max}| = 1,92 \cdot 10$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $1,96 \cdot 10$ ($\tau = 2; 3; 4$).

На рис. 5 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^{-6}$.

С уменьшением значения Re_m на порядок происходят дальнейшие изменения поля температуры, функции тока, вихря и распределений чисел Нуссельта (рис. 5) по сравнению с результатами, приведенными на рис. 4. Форма тепловой каверны изменяется, масштаб ее увеличивается (рис. 5а) по сравнению с результатом, приведенным на рис. 4а.

Рис. 5. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), распределение чисел Нуссельта (е)

Температура жидкости изменяется в интервале: $\vartheta \in [-1,007; 45,668]$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $[0; 46,968]$ ($\tau = 2; 3; 4$). Числа Нуссельта принимают следующие значения:

1 – $\overline{Nu}_2 = 328,983$; $0,342 \leq Nu_2 \leq 616,826$.

2 – $\overline{Nu}_2 = 460,962$; $4,520 \leq Nu_2 \leq 754,323$.

3 – $\overline{Nu}_2 = 528,219$; $7,619 \leq Nu_2 \leq 847,883$.

4 – $\overline{Nu}_2 = 543,527$; $8,402 \leq Nu_2 \leq 868,679$.

5 – $\overline{Nu}_2 = 544,443$; $8,449 \leq Nu_2 \leq 869,925$.

6 – $\overline{Nu}_2 = 544,481$; $8,4510 \leq Nu_2 \leq 869,977$.

При $\tau = 4$ наступает квазистационарное состояние. Интенсивность теплообмена на внешней поверхности слоя выше, чем на внутренней. Изменения имеют место в форме конвективных ячеек и вихрей (рис. 5б, в) по сравнению с результатом, приведенным на рис. 4б, в. Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 1,54$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1; 2; 3; 4$); $|\omega_{max}| = 8,16 \cdot 10$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $8,43 \cdot 10$ ($\tau = 2; 3; 4$).

На рис. 7, 8 приведены результаты расчетов без учета диссипации джоулевой теплоты (в уравнении (3) коэффициент $J = 0$), позволяющие оценить ее влияние на теплообмен и магнитную гидродинамику жидкости.

На рис. 7 приведены результаты для $Re_m = 10^{-1}$.

Рис. 7. Поля функции тока (б), вихря (в)

Для $\tau = 0,2-7$ теплообмен в слое осуществляется теплопроводностью. Поле температуры аналогично результату, приведенному на рис. 1а. Поля функции тока и вихря (рис. 7б, в) отличаются от соответствующих полей, приведенных на рис. 1б, в. В отличие от результатов, приведенных на рис. 1-6, поле вихря становится двухъярусным (рис. 7в, 1-9): на первом ярусе (мелкомасштабные вихри у внутренней поверхности) в северном полушарии значения вихря отрицательные, а в южном – положительные. На втором ярусе (крупномасштабные вихри у внешней поверхности) тенденция противоположная. Не учет диссипации джоулевой теплоты приводит к изменению направления движения жидкости в конвективных ячейках и крупномасштабных вихрях (рис. 7б, в) на противоположное по сравнению с соответствующими результатами, приведенными на рис. 1-6. Для $\tau = 2-7$ поле функции тока аналогично результату, приведенному на рис. 7б, 1. Значения расчетных функций:

$\mathcal{G} \in [-2,749; 0]$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $[-3,356; 0]$ ($\tau = 2; 3; 4$); $[-3,367; 0]$ ($\tau = 5; 6; 7$); $|\Psi_{max}| = 2,42 \cdot 10^{-7}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $1,93 \cdot 10^{-7}$ ($\tau = 2; 3; 4$); $1,90 \cdot 10^{-7}$ ($\tau = 5; 6; 7$); $|\omega_{max}| = 1,87 \cdot 10^{-5}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $1,70 \cdot 10^{-5}$ ($\tau = 2; 3; 4$); $1,68 \cdot 10^{-5}$ ($\tau = 5; 6; 7$). Числа Нуссельта:

1 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -0,285$; 2 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -2,080$.
3 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -4,380$; 4 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -6,121$.
5 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -6,617$; 6 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -6,737$.
7 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -6,769$; 8 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -6,778$.
9 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -6,780$.

При $\tau = 7$ наступает стационарное состояние. Теплообмен на внешней поверхности слоя интенсивнее, чем на внутренней. Оказалось, что поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции для всех рассмотренных моментов времени и чисел Re_m качественно и количественно аналогичны соответствующим полям, полученным при учете диссипации джоулевой теплоты.

Поля функции тока и вихря, рассчитанные для $Re_m = 10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}; 10^{-5}; 10^{-6}$, оказались качественно аналогичными результатам, приведенным на рис. 7б, в. Для $Re_m = 10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}$ в слое жидкости теплопроводность. Для $Re_m = 10^{-5}$ в жидкости начинает зарождаться конвекция, интенсивность которой возрастает при $Re_m = 10^{-6}$. Значения расчетных функций для различных чисел Re_m приведены ниже (из-за ограничения объема статьи представлены результаты для двух временных интервалов).

$Re_m = 10^{-2}$:

$\tau = 0,2; 0,5; 1$: $\mathcal{G} \in [-2,749; 0]$; $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -0,285$;
-2,080; -4,380. $|\Psi_{max}| = 2,43 \cdot 10^{-6}$; $|\omega_{max}| = 1,87 \cdot 10^{-4}$.

$\tau = 2; 3; 4$: $\mathcal{G} \in [-3,356; 0]$; $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -6,121$; -6,617;
-6,737. $|\Psi_{max}| = 1,94 \cdot 10^{-6}$; $|\omega_{max}| = 1,70 \cdot 10^{-4}$.

Оказалось, что значения чисел Нуссельта для $Re_m = 10^{-3}; 10^{-4}$ такие же, как и для режима при $Re_m = 10^{-2}$.
 $Re_m = 10^{-3}$:

$\tau = 0,2; 0,5; 1$: $\mathcal{G} \in [-2,749; 0]$; $|\Psi_{max}| = 2,43 \cdot 10^{-5}$;
 $|\omega_{max}| = 1,87 \cdot 10^{-3}$.

$\tau = 2; 3; 4$: $\mathcal{G} \in [-3,356; 0]$; $|\Psi_{max}| = 1,94 \cdot 10^{-6}$; $|\omega_{max}| = 1,70 \cdot 10^{-4}$.

$Re_m = 10^{-4}$:

$\tau = 0,2; 0,5; 1$: $\mathcal{G} \in [-2,749; 0]$; $|\Psi_{max}| = 2,43 \cdot 10^{-4}$;
 $|\omega_{max}| = 1,87 \cdot 10^{-2}$.

$\tau = 2; 3; 4$: $\mathcal{G} \in [-3,357; 0]$; $|\Psi_{max}| = 1,94 \cdot 10^{-4}$; $|\omega_{max}| = 1,70 \cdot 10^{-2}$.

$Re_m = 10^{-5}$:

$\tau = 0,2; 0,5; 1$: $\mathcal{G} \in [-2,754; 0]$; $|\Psi_{max}| = 2,43 \cdot 10^{-3}$;
 $|\omega_{max}| = 1,87 \cdot 10^{-1}$;

1 – $\overline{Nu}_2 = -0,285$; $-0,288 \leq Nu_2 \leq -0,284$.

2 – $\overline{Nu}_2 = -2,081$; $-0,103 \leq Nu_2 \leq -0,284$.

3 – $\overline{Nu}_2 = -4,380$; $-4,430 \leq Nu_2 \leq -4,356$.

$\tau = 2; 3; 4$: $\mathcal{G} \in [-3,365; 0]$; $|\Psi_{max}| = 1,94 \cdot 10^{-3}$; $|\omega_{max}| = 1,70 \cdot 10^{-1}$;

4 – $\overline{Nu}_2 = -6,121$; $-6,188 \leq Nu_2 \leq -6,087$.

5 – $\overline{Nu}_2 = -6,617$; $-6,689 \leq Nu_2 \leq -6,581$.

6 – $\overline{Nu}_2 = -6,737$; $-6,811 \leq Nu_2 \leq -6,701$.

$Re_m = 10^{-6}$:

$\tau = 0,2; 0,5; 1$: $\mathcal{G} \in [-2,809; 0]$; $|\Psi_{max}| = 2,43 \cdot 10^{-2}$;
 $|\omega_{max}| = 1,87$;

1 – $\overline{Nu}_2 = -0,285$; $-0,314 \leq Nu_2 \leq -0,271$.

2 – $\overline{Nu}_2 = -2,083$; $-2,316 \leq Nu_2 \leq -1,969$.

3 – $\overline{Nu}_2 = -4,384$; $-4,885 \leq Nu_2 \leq -4,139$.

$\tau = 2; 3; 4$: $\mathcal{G} \in [-3,446; 0]$; $|\Psi_{max}| = 1,95 \cdot 10^{-2}$; $|\omega_{max}| = 1,70$;

4 – $\overline{Nu}_2 = -6,122$; $-6,812 \leq Nu_2 \leq -5,785$.

5 – $\overline{Nu}_2 = -6,617$; $-7,354 \leq Nu_2 \leq -6,257$.

6 – $\overline{Nu}_2 = -6,737$; $-7,485 \leq Nu_2 \leq -6,372$.

Теплообмен на внешней поверхности слоя интенсивнее, чем на внутренней. При $\tau = 7$ имеет место квазистационарное состояние.

Распределение чисел Нуссельта для $Re_m = 10^{-6}$ приведено на рис. 8.

Рис. 8. Распределение чисел Нуссельта

Следует отметить, что для $\tau = 5-7$ распределение чисел Нуссельта качественно аналогично результату, приведенному на рис. 8е, 6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. При учете диссипации джоулевой теплоты:
 - для $Re_m = 10^{-5}; 10^{-6}$ происходят значительные изменения полей температуры, функции тока, вихря и распределений чисел Нуссельта по сравнению с соответствующими результатами для $Re_m = 10^{-1}-10^{-4}$;
 - для $Re_m = 10^{-1}-10^{-6}$ теплообмен на внешней поверхности слоя жидкости интенсивнее, чем на внутренней;
 - для $Re_m = 10^{-1} - 10^{-3}$ температура жидкости в слое принимает отрицательные и нулевые значения, а начиная с $Re_m = 10^{-4}$ и по $Re_m = 10^{-6}$ – отрицательные и положительные значения. Это происходит из-за увеличения вклада диссипации джоулевой теплоты.

2. При не учете диссипации джоулевой теплоты:
 - для $Re_m = 10^{-1}-10^{-6}$ теплообмен на внутренней поверхности слоя жидкости интенсивнее, чем на внешней; температура жидкости в слое принимает отрицательные и нулевые значения.

3. Поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции для рассмотренных моментов времени и чисел $Re_m = 10^{-1}-10^{-6}$ одинаковые как при учете, так и не учете диссипации джоулевой теплоты.

Из полученных результатов следует, что при малых числах Re_m ($Re_m = 10^{-1}-10^{-6}$) взаимодействие электропроводной движущейся жидкости с магнитным полем практически отсутствует. Полученные численные результаты согласуются с

теоретическим положением о том, что магнитное число Рейнольдса характеризует взаимодействие проводящих движущихся жидкостей и газов с магнитным полем.

4. Результаты, полученные при смешанных температурных граничных условиях, имеют значительные отличия по сравнению с результатами, полученными при температурных граничных условиях первого рода [8].

5. Полученные результаты позволяют проследить эволюцию теплообмена и магнитной гидродинамики электропроводной жидкости в сферическом слое при малых значениях магнитного числа Рейнольдса, а также оценить влияние диссипации джоулевой теплоты и температурных граничных условий на теплообмен электропроводной жидкости.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Elkhazen M. I., Hassen W., Gannoun R., Hussein A. K. and Borjini M. N. Numerical study of electroconvection in a dielectric layer between two cofocal elliptical cylinders subjected to unipolar injection. *Инженерно-физический журнал*. 2019. Т. 92, № 5. С. 2358.
2. Кашевский С. Б., Кашевский Б. Э., Худолей А. Л. Экспериментальная модель для исследования динамики магнитных дисперсий в градиентном магнитном поле. *Инженерно-физический журнал*. 2018. Т. 91, № 1. С. 184.
3. Ahmed N. Heat and mass transfer in mhd poiseuille flow with porous walls. *Инженерно-физический журнал*. 2019. Т. 92, № 1. С. 128.
4. Борисевич В. Д., Потанин Е. П. Магнитная гидродинамика и теплоперенос во вращающихся потоках. *Инженерно-физический журнал*. 2019. Т. 92, № 1. С. 174.
5. Федоров С. В. Усиление магнитного поля в струйных течениях проводящих материалов: соударение двух струй с магнитным полем. *Инженерно-физический журнал*. 2021. Т. 94, № 3. С. 675-685.
6. Ковалева Л. А., Мухарямова Г. И. Влияние электромагнитной обработки на реологические свойства нефти: эксперимент и приложение. *Инженерно-физический журнал*. 2021. Т. 94, № 3. С. 734-740.
7. Belabid J. Hydromagnetic natural convection from a horizontal porous annulus with heat generation or absorption. *Инженерно-физический журнал*. 2021. Т. 94, № 4. С. 960-965.
8. Соловьев С. В., Соловьева Т. С. Теплообмен электропроводной жидкости при малых значениях магнитного числа Рейнольдса // *Южно-Сибирский научный вестник*. – 2021. – № 2. – С. 71-79.
9. Соловьев С. В. Теплообмен и магнитная гидродинамика электропроводной жидкости в сферическом слое // *Южно-Сибирский научный вестник*. – 2020. – № 4. – С. 16-24.
10. Solov'yov S. V. Simulation of Convective Heat Exchange in the Electrically Conducting Liquid in a Spherical Cavity. Algorithm of Solution // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2015. – Vol. 88. – Issue 6. – P. 1416-1431.
11. Соловьев С. В. Влияние числа гомохронности на теплообмен электропроводной жидкости в сферическом слое // *Вестник Тихоокеанского государственного университета*. – 2018. – № 4. – С. 57-66.

Соловьев Сергей Викторович – д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник ВЦ ДВО РАН, г. Хабаровск, тел. +7 (4212) 22-72-67, e-mail: solovjovsv@rambler.ru.

HEAT EXCHANGE OF ELECTRIC CONDUCTIVE LIQUID WHEN DEPLOYING THE HEAT FROM THE INNER SURFACE OF THE SPHERICAL LAYER AT SMALL VALUES OF THE REYNOLD'S MAGNETIC NUMBER

S.V. Solov'yov

Abstract – The results of numerical simulation of unsteady heat transfer and magneto hydrodynamics of an electrically conductive fluid in a spherical layer are presented. The influence of small values of the magnetic Reynolds number and dissipation of Joule heat on the evolution of the structure of the fluid flow, the field of temperature, magnetic induction and the distribution of Nusselt numbers is investigated.

Index terms: mathematical modeling, unsteady heat transfer, magnet ohydrodynamics, magnetic Reynolds number, dissipation of Joule heat, spherical layer.

REFERENCES

1. Elkhazen M. I., Hassen W., Gannoun R., Hussein A. K. and Borjini M. N. "Numerical study of electroconvection in a dielectric layer between two cofocal elliptical cylinders subjected to unipolar injection," *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 92, issue. 5, pp. 1318-1329, 2019.
2. Kashevskii S.B., Kashevskii B. É., Khudolei A.L. "An experimental model for investigating the dynamics of magnetic dispersions in a gradient magnetic field," *Journal of engineering physics and thermophysics*, vol. 91, issue. 1, pp. 172-180, 2018.
3. Ahmed N. "Heat and mass transfer in mhd poiseuille flow with porous walls," *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 92, issue. 1, pp. 122-131, 2019.
4. Borisevich V.D., Potanin E.P. "Magnetohydrodynamics and heat transfer in rotating flows," *Journal of engineering physics and thermophysics*, vol. 92, issue. 1, pp. 169-175, 2019.
5. Fedorov S.V. "Intensification of the magnetic field in jet flows of conducting materials: collision of two such flows," *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 94, issue. 3, pp. 654-665, 2021.
6. Kovaleva L.A., G. I. Mukharyamova G.I. "Effects of electromagnetic treatment on rheological properties of oil: experiment and application," *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 94, issue. 3, pp. 714-719, 2021.
7. Belabid J. "Hydromagnetic natural convection from a horizontal porous annulus with heat generation or absorption," *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 94, no. 4, pp. 960-965, 2021.
10. Solov'ev S.V., Solov'eva T.S. "Heat exchange of electric conductive liquid for small Reynolds' magnetic number," *yuzhno-sibirskij nauchny'j vestnik*, no. 2, pp. 71-79, 2021.
11. Solov'yov S.V. "Heat exchange and magnetic hydrodynamics electric conductive liquid in a spherical layer," *yuzhno-sibirskij nauchny'j vestnik*, no. 4, pp. 16-24, 2020.
12. Solov'yov S. V. "Simulation of Convective Heat Exchange in the Electrically Conducting Liquid in a Spherical Cavity. Algorithm of Solution," *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 88, issue 6, pp. 1416-1431, 2015.
13. Solov'ev S. V. "The influence of the homochronicity number on the heat transfer of an electrically conducting fluid in a spherical layer," *Vestnik Tixookeanskogo gosudarstvennogo universiteta*, no. 4, pp. 57-66, 2018.

Solovyov Sergey Viktorovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Researcher of Computing Center of Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, 65 Kim Yu Chen st., Khabarovsk, 680000, Russia, tel. +7 (4212)22-72-67, e-mail: solovjovsv@rambler.ru.