ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРА НАГРЕВАТЕЛЯ НА ТЕПЛООБМЕН В СТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОЙ ПЛЁНКЕ

В.В. Кузнецов

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск

Проведены расчеты полей скорости и температуры, а также положение границы раздела жидкость-газ при стекании тонкой пленки жидкости по плоской подложке, наклоненной к горизонту. На подложке расположен нагреватель квадратной формы, мощность которого фиксирована, а размеры варьировались в ходе расчетов:

- одним из перспективных методов отвода высоких тепловых потоков от электронного оборудования являются технологии, использующие тонкие пленки жидкости, движущиеся по охлаждаемой поверхности. Целью работы было исследование зависимости динамики и теплообмена в пленке от размера нагревателя;

- на основе разработанной трехмерной нестационарной модели движения проведены расчеты теплообмена в движущейся пленке. При этом учитывалось действие всех основных физических факторов при их взаимодействии: диффузионный и конвективный теплопереносы, зависимость вязкости от температуры, термокапиллярный эффект, появление и эволюция поверхностных деформаций;

- установлено, что размер нагревателя существенно влияет на поля температуры и поверхностные деформации, а также на значение температурных экстремумов. Выведена аналитическая формула для расчета наибольшего достигаемого на подложке превышения температуры её среднего значения;

- результаты могут применяться при проектировании систем охлаждения электронного оборудования.

Ключевые слова: моделирование теплообмена, тонкие пленки, численные расчеты, поверхностные деформации

ВВЕДЕНИЕ

Изучение динамики тонких пленок жидкости при локальном нагреве подложки является в настоящее время одной из востребованных и сложнейших задач в теплофизике, поскольку прямым образом связано с проблемой охлаждения микроэлектронного оборудования [1]. Современные микропроцессоры представляют собой поверхность, состоящую из зон с неоднородным тепловыделением [2]. Форма этих зон часто близка к прямоугольной [3], а размер может составлять от нескольких микрон до нескольких см. Существует ряд подходов к решению задач теплоотвода от "точечных" горячих зон. Одним из перспективных методов отвода высоких тепловых потоков от электронного оборудования являются технологии, использующие тонкие слои жидкости, движущиеся по подложке, содержащей зоны тепловыделения. Известно значительное число работ, в которых развиваются различные подходы для изучения динамики локально нагреваемой жидкости. Так, в работе [4] выполнено экспериментальное и теоретическое исследование течения пленки жидкости по вертикальной поверхности с локальным нагревом. Проводились численно-аналитические расчеты формы поверхности пленки для двумерного случая. Отмечено согласование рассчитанной высоты термокапиллярного валика с экспериментальными данными. В работе [5] методом частиц численно изучалось течение тонкой пленки на вертикальной пластине с локальным нагревом. Исследован эффект образования периодической ручейковидной

структуры. В работе [6] исследована трехмерная эволюция тонких жидких пленок в рамках длинноволнового приближения. Изучено возникновение неустойчивостей и разрывов пленки. В отличие от динамики в двух измерениях, эволюция границы раздела в трех измерениях может сильно зависеть от выбора начального условия.

В работах [7], [8] разработана математическая модель и алгоритм численного расчета полей скорости и температуры, а также эволюции поверхностных возмущений тонкой жидкой пленки, стекающей под действием гравитации по плоской подложке, наклоненной к горизонту, при наличии на подложке локализованных нагревателей. Модель описывает нестационарные трехмерные течения, и в ней учтено действие всех основных физических факторов при их взаимодействии: диффузионный и конвективный теплопереносы, зависимость вязкости жидкости от температуры, термокапиллярный эффект, появление и эволюция поверхностных деформаций. В данной работе на основе этой модели проведено исследование зависимости теплообмена в движущейся пленке от размера квадратного нагревателя, если его суммарная мощность фиксирована. Выведена аналитическая формула для расчета наибольшего достигаемого на подложке превышения температурой её среднего значения. Это очень важный параметр для систем охлаждения электронных устройств. Полученная формула позволяет спрогнозировать значение этого параметра

для нагревателей разных размеров, если известно его значение для одного размера нагревателя.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Пусть подложка наклонена к горизонту под углом α . Выберем систему декартовых координат x, y, z так, что ось oz ортогональна к подложке, а ось ox направлена в сторону действия скатывающей силы. Пусть жидкость занимает область $\Omega = \{(x, y, z) : -\infty < x, y < \infty, 0 < z < H(t, x, y)\}$, где H - толщина пленки. Если u, v, w - компоненты вектора скорости $\vec{v}$, p - гидродинамическое давление, а T - температура жидкости, то движения жидкости описывается системой уравнений Навье-Стокса

$$\rho(u_t + uu_x + vu_y + wu_z) = -p_x + \rho g \sin \alpha + 2(\mu D_{11})_x + 2(\mu D_{12})_y + 2(\mu D_{13})_z, \quad (1)$$

$$\rho(v_t + uv_x + vv_y + wv_z) = -p_y + 2(\mu D_{12})_x + 2(\mu D_{22})_y + 2(\mu D_{23})_z, \quad (2)$$

$$\rho(w_t + uw_x + vw_y + ww_z) = -p_z - \rho g \cos \alpha + 2(\mu D_{13})_x + 2(\mu D_{23})_y + 2(\mu D_{33})_z \quad (3)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad (4)$$

$$\rho c_p (T_t + uT_x + vT_y + wT_z) = \kappa (T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}). \quad (5)$$

Здесь D_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$; $D_{ij} = D_{ji}$) - компоненты тензора скоростей деформаций D , κ - коэффициент теплопроводности, c_p - удельная теплоемкость, $\mu = \mu(T)$ - динамический коэффициент вязкости, ρ - плотность жидкости. Граничные условия для системы (1)-(5) имеют следующий вид: на подложке, при $z = 0$

$$u = v = w = 0, \quad (6)$$

$$T = T_0, \text{ или если } (x, y) \in N, \text{ то } \kappa T_z = -q, \quad (7)$$

где N - область подложки, занятая нагревателем; на свободной поверхности пленки при $z = H$:

$$H_t + uH_x + vH_y + wH_z - w = 0, \quad (8)$$

$$(p_0 - p)\vec{n} + 2\mu D \cdot \vec{n} = \sigma K\vec{n} + \nabla_s \sigma, \quad (9)$$

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial n} + b(T - T_0) = 0. \quad (10)$$

В начальный момент времени при $t = 0$ задаются начальные условия

$$v = w = 0, u = u_0(z), T = T_0, H = H_0. \quad (11)$$

Здесь T_0 - средняя температура жидкости и подложки, H_0 - невозмущенная толщина стекающего слоя жидкости, b - коэффициент теплообмена на границе жидкость-газ, q - задаваемый на нагревателе тепловой поток. Далее, K - удвоенная средняя кривизна свободной поверхности, $\nabla_s = \nabla - \vec{n}(\vec{n} \cdot \nabla)$ - поверхностный градиент, начальная продольная скорость $u_0(z)$ задается из точного решения задачи о стекании по наклонной плоскости слоя жидкости с

постоянной толщиной H_0 и прямолинейными линиями тока (см. [9], глава II, §11). Коэффициент поверхностного натяжения σ считается линейно зависящим от температуры: $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$, $\sigma_0, \sigma_T = \text{const} > 0$, p_0 - давление в газе, $\vec{n}$ - единичный вектор внешней нормали к поверхности пленки.

Сделаем в задаче (1)-(11) замену переменных: вместо координаты z и компонент вектора скорости u, v, w будем использовать координату $\xi = z/H(t, x, y)$ и модифицированные компоненты вектора скорости $u^1 = uH$, $v^1 = vH$, $w^1 = w - u\xi H_x - v\xi H_y$. Эта замена переменных специально разработана в [7], [8] для решения задач динамики тонких пленок. Её удобства в том, что вид уравнения неразрывности (4) в новых переменных не изменяется, кинематическое условие (8) существенно упрощается, в то время как громоздкие упрощения при замене переменных во вторых производных системы во многом снимаются применением приближения тонкого слоя. Здесь подробный вид задачи (1)-(11) не приводится ввиду громоздкости. Подробнее изложено в работах [7], [8].

Для приведения задачи к безразмерному виду использовались масштабы размерных величин - толщины пленки, температуры, скорости жидкости и продольной длины по формулам

$$H_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} H(t, x, y), \delta T = \sup_{t, x, y} \frac{H_0 q(t, x, y)}{\kappa},$$

$$U = \frac{\mu_0}{\rho H_0}, l = \left(\frac{\sigma_0 H_0^2}{\rho U^2} \right)^{1/3}. \quad \text{Здесь } \mu_0 = \mu(T_0). \text{ Будем}$$

считать, что имеет место приближение тонкого слоя, при котором $\varepsilon = H_0/l \ll 1$. Перейдем к безразмерным величинам $\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\theta}, h, \bar{q}, \bar{p}, \bar{\mu}$ с помощью формул:

$$t = \bar{t}/U, x = \bar{x}, y = \bar{y}, u^1 = UH_0 \bar{u}, v^1 = UH_0 \bar{v},$$

$$w^1 = UH_0 \bar{w}/l, H = hH_0, T = T_0 + \delta T \bar{\theta}, q = \kappa \delta T \bar{q}/H_0,$$

$$\mu = \mu_0 \bar{\mu}, p = p_0 + \sigma_0 H_0 \bar{p}/l^2 + \rho g \bar{x} \sin \alpha - \rho g H_0 \xi \cos \alpha.$$

Используя эти обозначения и пренебрегая младшими по степеням ε членами, задача сводилась к упрощенному виду, который здесь не приводится. С помощью интегрирования упрощенных уравнений поперек потока, как это было сделано в в работах [7], [8], приводим задачу к нахождению двух функций $h(t, x, y)$ и $\theta(t, x, y, \xi)$. Все остальные величины находятся из этих двух по явным формулам, в том числе и квадратурным, которые здесь не приводятся. Черточки над переменными всюду опускаются. Для нахождения этих функций получается система уравнений

$$h_t + \left[h^3 \varphi (\Delta h - Ah + Cx)_x + Mah^2 \gamma \tilde{\theta}_x \right]_x + \left[h^3 \varphi (\Delta h - Ah)_y + Mah^2 \gamma \tilde{\theta}_y \right]_y = 0. \quad (12)$$

$$Ph \left[h \theta_t + u \theta_x + v \theta_y + (w - \xi w|_{\xi=1}) \theta_\xi \right] = \varphi_1 \Delta \theta + \left[1 + \varphi_2 (h_x^2 + h_y^2) \right] \theta_{\xi\xi} - 2\varphi_3 h (h_x \theta_{x\xi} + h_y \theta_{y\xi}) + \varphi_3 \left[2(h_x^2 + h_y^2) - h \Delta h \right] \theta_\xi. \quad (13)$$

Здесь Δ - оператор Лапласа, функции $\varphi, \gamma, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ вычисляются по явным формулам. Для системы уравнений (12)-(13) ставятся начальные условия при $t = 0$

$$h = 1, \theta = 0, \quad (14)$$

и граничные условия

$$\theta \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty \text{ и при } y \rightarrow \pm\infty, \quad (15)$$

$$\theta_x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty, \quad (16)$$

$$\theta = 0 \text{ при } \xi = 0, \text{ если } (x, y) \notin N, \quad (17)$$

$$\theta_\xi = -qh \text{ при } \xi = 0, \text{ если } (x, y) \in N, \quad (18)$$

$$\theta_\xi + Bi\theta h = 0 \text{ при } \xi = 1, \quad (19)$$

$$h \rightarrow 1, h_x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty. \quad (20)$$

Безразмерные критерии подобия задаются формулами:

$$A = \frac{gH_0^2 \cos \Theta}{IU^2}, C = \frac{gH_0 \sin \Theta}{U^2}, Ma = \frac{\sigma_T [T] H_0}{Ul\mu_0},$$

$$Bi = \frac{bH_0}{k}, P = \frac{H_0 \mu_0 c_p}{Ik}.$$

Числа A и C определяют вклад в градиент давления его гидростатических, продольной и поперечной, составляющих. Число Био Bi задает интенсивность теплообмена пленки с внешней газовой средой. Число Марангони Ma характеризует действие термокапиллярных сил на поверхности неоднородно нагретой пленки, число P - модифицированное число Прандтля, характеризует вклад в теплоперенос его конвективной составляющей. Важной особенностью рассматриваемых здесь задач является то, что $P \sim I$, т.е. принимает умеренные значения. Таким образом, несмотря на приближение тонкого слоя, в уравнении переноса тепла нельзя пренебрегать конвективными членами.

Численное решение уравнений (12) и (13) с условиями (14)-(20) проводилось следующим образом. Считалось, что начало координат совпадает с центром нагревателя. Решение задачи в неограниченной по x, y области заменялось решением в ограниченной области. Начальные условия и условия теплового баланса сохраняют свой вид, а краевые условия переносятся на новые границы. Размеры области выбирались так, чтобы все возмущения, как тепловые, так и поверхностные, не

достигали границы расчетной области. Необходимо, чтобы в окрестности этих границ имело место невозмущенное стекание слоя постоянной толщины с прямолинейными линиями тока и постоянной температурой. При этом дальнейшее расширение расчетной области ничего не меняет. В проведенных расчетах принималось, что размеры расчетной области составляли $4,5 \times 4,0$ см, при этом выбранные размеры отвечали изложенным выше требованиям

Затем проводился численный расчет по алгоритмам и схемам, аналогичным изложенным в работах [7], [8]. Возможны различные варианты режимов нагрева: мгновенное включение нагревателей или постепенный набор ими заданной интенсивности за некоторое конечное время. В рассматриваемых ниже примерах был реализован второй вариант, так как изучение возникающих при мгновенном включении всплесков температурных и поверхностных возмущений не входило в цели данного исследования.

При проведении расчетов принималось, что свободная поверхность пленки теплоизолирована, т.е. $Bi = 0$. Для случая неподвижного газа это допущение вполне оправдано, и является следствием малости коэффициентов теплопроводности и диффузии. Считалось также, что температура окружающего газа, натекающего потока жидкости и подложки (за исключением области нагревателя) имеет значение $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Нагреватель имеет форму квадрата и расположен так, что его центр совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям. Мощность нагревателя распределена равномерно по его площади, и суммарно составляла 1 Вт. Угол наклона подложки к горизонту α в рассматриваемых примерах брался равным $\pi/2$, а материальные постоянные жидкости и функции $\mu(T)$, $\sigma(T)$ соответствовали 25% раствору этилового спирта в воде. Невозмущенная толщина пленки составляла 125 мкм, при этом число Рейнольдса $Re = 1,0$. В этих условиях безразмерные параметры принимают следующие значения: $A = 0$, $C = 3,0$, $P = 2,472$, $Ma = 0,341$. Размер стороны квадрата d , занятого нагревателем, варьировался в пределах $0,1 - 1,0$ см. Расчеты показали, что распределение поверхностной температуры существенно зависит от размера нагревателя. У маленьких нагревателей температура достигает своего наибольшего значения вблизи середины нижней кромки нагревателя. В случае больших нагревателей имеется два симметричных максимума температуры, расположенных по краям нижней комки области нагрева. Пример расчета для первого случая приведен на рис.1, для второго - на рис.2.

Рис. 1. Распределение температуры по поверхности раздела газ-жидкость при $d=0,15$ см.

Рис. 2. Распределение температуры по поверхности раздела газ-жидкость при $d=1,0$ см.

Неизотермичность поверхности раздела приводит, вследствие действия термокапиллярных сил, к деформациям этой поверхности. При этом для нагревателей малых размеров эти деформации приводят к появлению характерного U-образного валика, окружающего зону нагрева. Пример расчета поверхностных деформаций для стороны нагревателя $d=0,15$ см приведен на рис. 3.

Рис. 3. Форма поверхности пленки, $d=0,15$ см

В случае нагревателей больших размеров поверхностные деформации дают другую картину. Возникают подобия стекающих струй, двух боковых и одной центральной. Пример расчета при $d=1,0$ см приведен на рис. 4.

Рис. 4. Форма поверхности пленки, $d=1,0$ см

Также можно заметить (см. шкалу справа от рисунка), что отклонения от среднего значения толщины пленки для случая малых нагревателей гораздо значительней. Это объясняется более высокими градиентами температуры вследствие концентрации нагрева, а так как термокапиллярные силы пропорциональны этому градиенту, то сильнее и деформации.

Для приложений, связанных с отводом тепла от электронных устройств, наиболее важным параметром является наибольшее достигаемое на подложке превышение температуры её среднего значения. В проведенной серии расчетов была изучена зависимость этого параметра от размера стороны нагревателя. С помощью факторного анализа была выведена формула этой зависимости

$$[T] = \frac{JE}{(d/l)^{1,36}}, \text{ где } J = \frac{H_0 Q}{\kappa l^2}, \quad (21)$$

здесь Q – суммарная мощность нагревателя, параметр J имеет размерность температуры, а число E вычисляется из данных задачи и свойств жидкости. В проведенной серии расчетов $E \approx 0.000803$. Формла (21) получена следующим образом. Было сделано допущение, что зависимость $[T]$ от d имеет степенной вид, т.е. $[T] = Gd^m$, где G, m – некоторые постоянные. При этом из расчетов значения $[T]$ известны для некоторого набора значений параметра d . Если вычислить логарифмы всех этих значений, то с помощью факторного анализа можно найти линейную зависимость $\ln[T] = \delta \ln d + \gamma$, причем δ, γ находятся такими, что среднее квадратическое отклонение наименьшее. Далее с помощью потенцирования получается искомая зависимость. Наконец, необходимо проверить, действительно ли получена адекватная формула, т.к. исходная зависимость могла и не являться степенной. На рис. 5 приведено сравнение значений $[T]$, вычисленного по формуле (21) и в ходе расчета полей скорости и температуры по численному алгоритму при варьировании параметра d .

Очевидно, что соответствие очень хорошее, и формула (21) правильно передаёт изучаемую зависимость. Видно также, что с уменьшением размера нагревателя перегревы подложки резко возрастают.

Сплошная линия – расчет по формуле (21); треугольники – расчет по вычислительному алгоритму

Рис. 5. Зависимость наибольшего перегрева от размера нагревателя

Изучение поверхностных возмущений пленки также имеет важное значение, ввиду возможных её разрывов. Разрывы происходят при критических утончениях пленки, при которых силы межмолекулярных взаимодействий становятся сравнимыми с поверхностными. На рис. 6 изображены зависимости наименьших и наибольших достигнутых относительных толщин пленки от времени для различных нагревателей.

1 – наибольшая относительная толщина пленки при $d=0,15$ см; 2 – наибольшая её толщина при $d=1,5$ см; 3 – наименьшая относительная толщина пленки при $d=0,15$ см; 4 – наименьшая толщина при $d=1,5$ см;

Рис. 6. Зависимость экстремальных значений безразмерной толщины пленки от времени

Нетрудно заметить, что для нагревателей малого размера поверхностные деформации значительнее. Это объясняется более высокими градиентами температуры на поверхности пленки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведена серия расчетов полей скорости, температуры и положения поверхности пленки, стекающей по наклонной подложке с расположенным на ней квадратным нагревателем. Изучены зависимости параметров задачи от размера нагревателя при фиксированной его мощности. Отмечены особенности полей температуры и эволюции поверхности пленки при варьировании размера нагревателя. Выведена формула для расчета наибольшего превышения температуры подложки в зависимости от длины стороны нагревателя.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Hirokawa T, et al, "Experiments on heat transfer characteristics of shear-driven liquid film in co-current gas flow", *Frontiers in Heat and Mass Transfer* vol. 5, Issue 17, pp 1-8. 2014.
2. Mahajan R., Chin C., and Chrysler G., "Cooling a Microprocessor chip", *Proceedings of the IEEE94*, vol. 8, pp 1476-85. 2006.
3. Sri-Jayantha S. M., et al, "Thermomechanical modeling of 3D electronic packages", *IBM Journal, Res. & Dev.* 52, vol. 6, pp 623-634. 2008.
4. Кабов О.А., Летро Ж.К., Марчук И.В., Шейд Б.. Деформация свободной поверхности в движущемся локально нагреваемом тонком слое жидкости, *Известия РАН. МЖГ*. № 3, с. 200-208. 2001.
5. Frank A.M. 3D numerical simulation of regular structure formation in a locally heated falling film// *Europ. J. Mech. B/Fluids*, vol. 22, pp 445-471. 2003.
6. Oron A. Nonlinear dynamics of three-dimensional long-wave Marangoni instability in thin liquid films, *AIP Physics of Fluids*, vol. 12, p. 1633. 2000.
7. Кузнецов В.В. О влиянии геометрической формы нагревателя на динамику стекающей жидкой плёнки, *Сибирский журнал индустриальной математики*, Т. 10, № 3(31), с. 71-83. 2007.
8. Kabova Yu.O., Kuznetsov V.V. and Kabov O.A., "The Effect of Mutual Location of Heaters on the Falling Film Dynamics", *Microgravity Science and Technology*, vol. 19, Issue 3-4, pp. 53-56. 2007.
9. Кочин, Н.Е. Теоретическая гидромеханика. Часть 2 / Н.Е. Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе. – М.: Физматгиз, 1963. – 728 с.

Кузнецов Владимир Васильевич – заведующий лабораторией прикладной и вычислительной гидродинамики Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН тел. (383)3333046, e-mail: qznetsov2013@yandex.ru

EFFECT OF HEATER SIZE ON HEAT TRANSFER IN A FALLING LIQUID FILM

V.V. Kuznetsov

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk

Abstract – On the basis of the developed three-dimensional non-stationary model of motion, calculations of heat transfer in a moving roll were carried out. In this case, the action of all the main physical factors during their interaction was taken into account: diffusion and convective heat transfer, the dependence of viscosity on temperature, the thermocapillary effect, the appearance and evolution of surface deformations. □ it was found that the size of the heater significantly affects the temperature fields and surface deformations, as well as the value of temperature extremes. An analytical formula is derived for calculating the maximum temperature rise attainable on the substrate of its average value.

Index terms: heat transfer modeling, thin films, numerical calculations, surface deformations

REFERENCES

1. Hirokawaa T, et al, “Experiments on heat transfer characteristics of shear-driven liquid film in co-current gas flow”, *Frontiers in Heat and Mass Transfer* vol. 5, Issue 17, pp 1-8. 2014.
 2. Mahajan R., Chin C., and Chrysler G., “Cooling a Microprocessor chip”, *Proceedings of the IEEE94*, vol. 8, pp 1476-85. 2006.
 3. Sri-Jayantha S. M., et al, “Thermomechanical modeling of 3D electronic packages”, *IBM Journal, Res. & Dev.* 52, vol. 6, pp 623-634. 2008.
 4. O. A. Kabov, J. K. Legros, I. V. Marchuk, and B. Sheid. Deformation of the Free Surface in a Moving Locally-Heated Thin Liquid Layer. *Fluid Dynamics*, Vol. 36, No. 3, , pp. 521–528. 2001.
 5. Frank A.M. 3D numerical simulation of regular structure formation in a locally heated falling film// *Europ. J. Mech. B/Fluids*, vol. 22, pp 445-471. 2003.
 6. Oron A. Nonlinear dynamics of three-dimensional long-wave Marangoni instability in thin liquid films, *AIP Physics of Fluids*, vol. 12, p. 1633. 2000.
 7. Kuznetsov V.V. On the influence of the geometric shape of the heater on the dynamics of the falling liquid film // *Sibirskii hurnal industrialnoi matematiki* (in Russian). 2007. Vol. 10, № 3(31). pp 71-83.
 8. Kabova Yu.O., Kuznetsov V.V. and Kabov O.A., “The Effect of Mutual Location of Heaters on the Falling Film Dynamics”, *Microgravity Science and Technology*, vol. 19, Issue 3-4, pp. 53-56. 2007.
 9. Kochin, N.E., I.A. Kibel, N.V. Roze. Theoretical hydromechanics. Part 2 (in Russian).. Moskow: Fizmatgiz, 1963.
- Kuznetsov Vladimir Vasilyevich, head of the laboratory of applied and computational hydrodynamics, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, (383)3333046, e-mail: qznetsov2013@yandex.ru*