ТЕПЛООБМЕН ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ МАГНИТНОГО ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА

С.В. Соловьев¹, Т.С. Соловьева²

¹ Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск

² Обнинский институт атомной энергетики – филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Представлены результаты численного моделирования нестационарного конвективного теплообмена и магнитной гидродинамики электропроводной жидкости в сферическом слое. Исследовано влияние магнитного числа Рейнольдса на эволюцию структуры течения жидкости, поле температуры, магнитной индукции и распределение чисел Нуссельта.

Ключевые слова: математическое моделирование, нестационарный теплообмен, магнитная гидродинамика, магнитное число Рейнольдса, сферический слой.

ВВЕДЕНИЕ

В ряде областей физики, механики и техники возникает необходимость изучения движений электропроводных жидкостей и газов. К таким областям относятся астрофизика, аэродинамика больших скоростей, МГД генераторы, электромагнитные насосы для перекачки жидких металлов, плазменные ускорители, термоядерные реакторы. В работах [1-5] обсуждаются лабораторные эксперименты для значений магнитного числа Рейнольдса $Re_m > 1$ (магнитное число Рейнольдса характеризует взаимодействие электропроводящих движущихся жидкостей и газов с магнитным полем). При изучении магнитной гидродинамики рассматриваются два класса задач, которые определяются величиной магнитного числа Рейнольдса Re_m : $Re_m \ll 1$ (жидкость с малой проводимостью, например, низкотемпературная плазма) и $Re_m \gg 1$ (жидкость с большой проводимостью или объект с большими размерами, например, высокотемпературная плазма, астрофизические объекты). В работах [6-11] приведены результаты конвективного теплообмена и магнитной гидродинамики жидкости между двумя сферами при $Re_m = 1; 10^2$. В этой связи самостоятельный интерес представляет рассмотрение теплообмена и магнитной гидродинамики при малых числах Re_m . В настоящей работе приведены результаты нестационарного теплообмена электропроводной жидкости в сферическом слое при малых значениях магнитного числа Рейнольдса. Учитывалась теплота джоулевой диссипации. Вектор силы тяжести направлен по радиусу к центру сферической прослойки.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Математическая постановка задачи имеет вид [6-8]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Ho} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \omega \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{Gr}{Re^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + \\ + \frac{S}{Re_m} \left(B_r \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + 2 \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \right. \\ \left. - \frac{B_r}{r} \frac{\partial^2 B_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \right. \\ \left. \frac{2 B_\theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\omega r \sin \theta, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Ho} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \right. \\ \left. + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) - \\ - \frac{J}{Pe} \left(\frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} B_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Ho} \frac{\partial B_r}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + B_r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{1}{Re_m} \left(\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{2 B_r}{r^2} - \frac{2 B_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Ho} \frac{\partial B_\theta}{\partial \tau} = \frac{1}{r \sin \theta} & \left(-B_r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \right. \\ & \left. + \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{Re_m} \left[\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{ctg \theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

При $Re_m \rightarrow 0$ уравнения (1), (4), (5) примут следующий (стационарный) вид (1b), (4b), (5b):

$$\begin{aligned} B_r \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + 2 \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \\ - \frac{B_r}{r} \frac{\partial^2 B_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \\ + \frac{2B_\theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} = 0, \end{aligned} \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} + \frac{ctg \theta}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \\ - \frac{2B_r}{r^2} - \frac{2B_\theta}{r^2} \frac{ctg \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} = 0, \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{ctg \theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \\ - \frac{B_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} = 0. \end{aligned} \quad (5b)$$

Из сравнения уравнений (1) и (1b) следует, что при $Re_m \rightarrow 0$ движение электропроводной жидкости не влияет на магнитное поле (плазменные ускорители, МГД генераторы, электромагнитные насосы для перекачки жидких металлов. Магнитная индукция определяется из уравнения $\Delta \mathbf{B} = 0$). При $Re_m \rightarrow 0$ возрастает роль сил магнитной вязкости, и, как следствие, увеличивается вклад теплоты джоулевой диссипации в теплообмен электропроводной жидкости (полученные численные результаты подтверждают это).

Для температуры на внутренней Γ_1 ($r = 1$) и на внешней Γ_2 ($r = r_2$) поверхности сферического слоя задавались граничные условия первого рода: $\mathcal{G}|_{\Gamma_1} = 1$; $\mathcal{G}|_{\Gamma_2} = 0$. Внутренняя сфера более нагрета.

На оси симметрии ставилось условие: $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0,\pi} = 0$.

Граничные условия для функции тока, вихря и магнитной индукции имели следующий вид [6]:

$$\begin{aligned} \psi|_{\Gamma_{1,2}} = \psi|_{\theta=0,\pi} = \omega|_{\theta=0,\pi} = 0; \quad \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0,\pi} = \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0,\pi} = 0; \\ B_r|_{\Gamma_1} = B_r|_{\Gamma_2} = 0; \quad B_\theta|_{\Gamma_1} = -0,01 \sin \theta; \quad B_\theta|_{\Gamma_2} = 0,01 \sin \theta. \end{aligned}$$

Локальные и осредненные числа Нуссельта на поверхности внутренней и наружной сферы рассчитывались по формулам:

$$Nu_1 = - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \Big|_{\Gamma_1}, \quad Nu_2 = - r_2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \Big|_{\Gamma_2}.$$

$$\overline{Nu}_1 = - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right]_{\Gamma_1} \sin \theta d\theta, \quad \overline{Nu}_2 = - \frac{r_2}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right]_{\Gamma_2} \sin \theta d\theta.$$

Обозначения величин, используемых при записи системы уравнений (1)-(5), приведены в работах [6-11]. Численное решение задачи (1)-(5) осуществлялось методом конечных элементов. По времени применялась неявная разностная схема с шагом $\Delta \tau = 0,01$. В начальный момент времени значения расчетных функций приняты равными нулю. Расчеты проводились для следующих чисел подобия: $d/D = 1/1,5$; $Gr = 10^3$; $Re_m = 10^{-1}$; 10^{-2} ; 10^{-3} ; 10^{-4} ; 10^{-5} ; 10^{-6} ; $Re = S = 1$; $Pe = 10$; $G = 1$; $Ho = 1$.

На рис. 1-6 приведены результаты расчетов поля температуры, функции тока, вихря, магнитной индукции и распределений чисел Нуссельта для различных значений магнитного числа Рейнольдса.

На рис. 1 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^{-1}$ в моменты времени (здесь и далее): 1- $\tau = 0,2$; 2- $\tau = 0,5$; 3- $\tau = 1$; 4- $\tau = 2$; 5- $\tau = 3$; 6- $\tau = 4$; 7- $\tau = 5$; 8- $\tau = 6$; 9- $\tau = 7$.

Рис. 1. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), радиальной (г) и меридиональной (д) составляющих магнитной индукции, распределение чисел Нуссельта (е)

Теплообмен в слое для $\tau = 0,2; 0,5; 1$ осуществляется теплопроводностью. Изотермы представляют собой концентрические окружности (на рис. 1а не приводятся). С течением времени ($\tau = 2$) в слое жидкости начинает развиваться конвективный механизм передачи тепла (рис. 1а, е, 4), интенсивность которого при $\tau = 3-7$ увеличивается. В поле температуры в области полюсов и экватора образуются три тепловых плюма (рис. 1а, 5-9). Максимальное значение температуры в слое жидкости $\theta_{max} = 1$. На рис. 1е приведены распределения локальных чисел Нуссельта (на внутренней поверхности – красная линия, на внешней – зеленая).

Распределения локальных чисел Нуссельта для $\tau = 2-7$ (рис. 1е, 4-9) на внутренней поверхности слоя имеют два максимума и один минимум, а на внешней – один максимум и два минимума. Локальные и осредненные числа Нуссельта принимают следующие значения:

$$1 - \overline{Nu}_1 = \overline{Nu}_1 = 5,013; \overline{Nu}_2 = \overline{Nu}_2 = 0,365.$$

$$2 - \overline{Nu}_1 = 3,542; \overline{Nu}_2 = 1,438; 3,537 \leq Nu_1 \leq 3,546; 1,434 \leq Nu_2 \leq 1,442.$$

$$3 - \overline{Nu}_1 = 3,049; \overline{Nu}_2 = 1,933; 3,036 \leq Nu_1 \leq 3,060; 1,924 \leq Nu_2 \leq 1,944.$$

$$4 - \overline{Nu}_1 = 2,978; \overline{Nu}_2 = 2,022; 2,456 \leq Nu_1 \leq 3,200; 1,854 \leq Nu_2 \leq 2,452.$$

$$5 - \overline{Nu}_1 = 4,714; \overline{Nu}_2 = 3,323; 0,488 \leq Nu_1 \leq 6,841; 0,537 \leq Nu_2 \leq 10,354.$$

$$6 - \overline{Nu}_1 = 5,318; \overline{Nu}_2 = 3,613; 0,457 \leq Nu_1 \leq 7,880; 0,377 \leq Nu_2 \leq 10,425.$$

$$7 - \overline{Nu}_1 = 5,322; \overline{Nu}_2 = 3,614; 0,449 \leq Nu_1 \leq 7,894; 0,378 \leq Nu_2 \leq 10,388.$$

$$8 - \overline{Nu}_1 = 5,323; \overline{Nu}_2 = 3,615; 0,447 \leq Nu_1 \leq 7,898; 0,379 \leq Nu_2 \leq 10,379.$$

$$9 - \overline{Nu}_1 = 5,323; \overline{Nu}_2 = 3,615; 0,447 \leq Nu_1 \leq 7,899; 0,379 \leq Nu_2 \leq 10,376.$$

Теплообмен на внутренней поверхности слоя интенсивнее, чем на внешней. Для $\tau = 0,2$ поля функции тока и вихря еще не сформировались. При $\tau = 0,5$ в слое образуются две конвективные ячейки и два вихря (рис. 1б, в, 2), а для $\tau = 1-7$ их количество удваивается (рис. 1б, в, 3-9). Знаки величин функции тока и вихря от северного полюса к южному изменяются в следующей последовательности: “+”, “-”, “+”, “-” (“+” – жидкость движется против часовой стрелки, красный цвет; “-” – жидкость движется по часовой стрелке, синий цвет). Максимальные величины функции тока и вихря принимают следующие значения: $|\Psi_{max}| = 1,84 \cdot 10^{-3}$ ($\tau = 0,5; 1$); $|\Psi_{max}| = 5,54 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 2-4$); $|\Psi_{max}| = 5,53 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 5-7$); $|\omega_{max}| = 8,51 \cdot 10^{-2}$ ($\tau = 0,5; 1$); $|\omega_{max}| = 2,65 \cdot 10^{-2}$ ($\tau = 2-7$). Поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции (красный цвет – положительные значения, синий цвет – отрицательные), приведенные на рис. 1г и 1д, со временем практически не изменяются. Максимальные значения радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции для всех рассмотренных значений времени (здесь и далее): $|B_{rmax}| = 1,49 \cdot 10^{-4}$; $|B_{\theta max}| = 10^{-2}$. Оказалось, что как качественно, так и количественно поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции (рис. 1г, д) для всех рассмотренных значений магнитного числа Рейнольдса Re_m не изменяются (поэтому далее не приводятся).

На рис. 2 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^{-2}$.

Начиная с $\tau = 0,5$ теплообмен в жидкости осуществляется конвекцией (рис. 2а, е, 2). Для интервала времени $\tau = 2-5$ распределение температуры практически не изменяется (рис. 2а, 4-7). Поле температуры (рис. 2а, 4-7) аналогично результату, приведенному на рис. 1а, 5-9.

Рис. 2. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), распределение чисел Нуссельта (е)

Максимальное значение температуры в слое жидкости $\vartheta_{max} = 1$. На рис. 2е приведены распределения чисел Нуссельта, характер изменения которых (рис. 2е, 3-7) аналогичен результату, приведенному на рис. 1е, 4-9. Локальные и осредненные числа Нуссельта принимают следующие значения:

1 – $\overline{Nu}_1 = 4,996$; $\overline{Nu}_2 = 0,386$; $4,974 \leq Nu_1 \leq 5,018$; $0,364 \leq Nu_2 \leq 0,407$.

2 – $\overline{Nu}_1 = 3,518$; $\overline{Nu}_2 = 1,467$; $3,462 \leq Nu_1 \leq 3,563$; $1,428 \leq Nu_2 \leq 1,512$.

3 – $\overline{Nu}_1 = 3,026$; $\overline{Nu}_2 = 1,966$; $2,848 \leq Nu_1 \leq 3,177$; $1,850 \leq Nu_2 \leq 2,107$.

4 – $\overline{Nu}_1 = 4,145$; $\overline{Nu}_2 = 2,959$; $0,514 \leq Nu_1 \leq 5,962$; $0,747 \leq Nu_2 \leq 9,469$.

5 – $\overline{Nu}_1 = 5,297$; $\overline{Nu}_2 = 3,650$; $0,457 \leq Nu_1 \leq 7,864$; $0,393 \leq Nu_2 \leq 10,426$.

6 – $\overline{Nu}_1 = 5,300$; $\overline{Nu}_2 = 3,649$; $0,451 \leq Nu_1 \leq 7,874$; $0,393 \leq Nu_2 \leq 10,400$.

7 – $\overline{Nu}_1 = 5,301$; $\overline{Nu}_2 = 3,650$; $0,450 \leq Nu_1 \leq 7,876$; $0,393 \leq Nu_2 \leq 10,393$.

Для $\tau = 5,01$; $5,02$ числа Нуссельта принимают такие же значения, как и для $\tau = 5$ (расчеты для $\tau = 5,01$; $5,02$; $6,01$ проводились с целью уточнения начала наступления квазистационарного режима). Теплообмен на внутренней поверхности слоя интенсивнее, чем на внешней. Поля функции тока и вихря (рис. 2б, в) качественно аналогичны соответствующим полям, приведенным на рис. 1б, в. Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 2,58 \cdot 10^{-2}$ ($\tau = 0,2-1$); $|\Psi_{max}| = 5,56 \cdot 10^{-2}$ ($\tau = 2-4$); $|\Psi_{max}| = 5,55 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 5$; $5,01$; $5,02$); $|\omega_{max}| = 1,19$ ($\tau = 0,2-1$); $|\omega_{max}| = 2,65 \cdot 10$ ($\tau = 2-4$); $|\omega_{max}| = 2,66 \cdot 10$ ($\tau = 5$; $5,01$; $5,02$).

На рис. 3 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^{-3}$.

Рис. 3. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), распределение чисел Нуссельта (е)

Рассчитанные поля (рис. 3) качественно аналогичны полям, приведенным на рис. 2. Исключение составляют лишь поле температуры и распределение чисел Нуссельта (рис. 3а, е, 1-3). Для $Re_m = 10^{-3}$ конвекция наступает раньше, чем при $Re_m = 10^{-2}$ (рис. 3е, 1 и рис. 2е, 2). Максимальное значение температуры жидкости $\vartheta_{max} = 1$. Локальные и осредненные числа Нуссельта принимают следующие значения:

1 – $\overline{Nu}_1 = 4,838$; $\overline{Nu}_2 = 0,590$; $4,607 \leq Nu_1 \leq 5,055$; $0,360 \leq Nu_2 \leq 0,796$.

2 – $\overline{Nu}_1 = 3,306$; $\overline{Nu}_2 = 1,760$; $2,724 \leq Nu_1 \leq 3,754$; $1,357 \leq Nu_2 \leq 2,240$.

3 – $\overline{Nu}_1 = 3,135$; $\overline{Nu}_2 = 2,533$; $1,218 \leq Nu_1 \leq 4,366$; $1,315 \leq Nu_2 \leq 4,363$.

4 – $\overline{Nu}_1 = 5,068$; $\overline{Nu}_2 = 4,001$; $0,494 \leq Nu_1 \leq 7,667$; $0,522 \leq Nu_2 \leq 10,583$.

5 – $\overline{Nu}_1 = 5,082$; $\overline{Nu}_2 = 3,997$; $0,485 \leq Nu_1 \leq 7,690$; $0,525 \leq Nu_2 \leq 10,548$.

6 – $\overline{Nu}_1 = 5,084$; $\overline{Nu}_2 = 3,998$; $0,482 \leq Nu_1 \leq 7,693$; $0,526 \leq Nu_2 \leq 10,539$.

7 – $\overline{Nu}_1 = 5,084$; $\overline{Nu}_2 = 4,000$; $0,482 \leq Nu_1 \leq 7,693$; $0,527 \leq Nu_2 \leq 10,537$ (для $\tau = 5,01$; $5,02$ числа Нуссельта принимают такие же значения, как и для $\tau = 5$).

Интенсивность теплообмена на внутренней поверхности слоя выше, чем на внешней. Максимальные значения функции тока и вихря (для $\tau = 0,2$ поля функции тока и вихря еще не сформировались): $|\Psi_{max}| = 2,80 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 0,5$; 1); $|\Psi_{max}| = 5,77 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 2-4$); $|\Psi_{max}| = 5,76 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 5$; $5,01$; $5,02$); $|\omega_{max}| = 1,29 \cdot 10$ ($\tau = 0,5$; 1); $|\omega_{max}| = 2,65 \cdot 10$ ($\tau = 2-5$; $5,01$; $5,02$).

На рис. 4 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^{-4}$.

Рис. 4. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), распределение чисел Нуссельта (е)

Поля функции тока и вихря (рис. 4б, в) качественно аналогичны соответствующим полям, приведенным на рис. 3б, в. Значительные изменения происходят с полем температуры и распределением чисел Нуссельта (рис. 4а, е) по сравнению с результатами, приведенными на рис. 3а, е. Оказывается, что начиная со значения $Re_m = 10^{-4}$ возрастает роль сил магнитной вязкости, в результате чего возрастает вклад теплоты джоулевой диссипации в теплообмен электропроводной жидкости, что приводит к перестройке поля температуры и изменению интенсивности теплообмена на поверхностях слоя жидкости. В поле температуры в экваториальной области слоя образуется температурная каверна (рис. 4а, 2-6). По сравнению с результатами, приведенными на рис. 1-3, для $Re_m = 10^{-4}$ увеличиваются максимальные значения температуры в слое жидкости: $\vartheta_{max} = 1,197$ ($\tau = 0,2-1$); $\vartheta_{max} = 1,207$ ($\tau = 2-4$). На рис. 4е приведены распределения чисел Нуссельта. Локальные и осредненные числа Нуссельта принимают следующие значения:

1 – $\overline{Nu}_1 = 3,430$; $\overline{Nu}_2 = 2,737$; $1,184 \leq Nu_1 \leq 5,438$;
 $0,325 \leq Nu_2 \leq 4,894$.

2 – $\overline{Nu}_1 = 2,504$; $\overline{Nu}_2 = 5,804$; $-1,729 \leq Nu_1 \leq 5,304$;
 $0,974 \leq Nu_2 \leq 11,856$.

3 – $\overline{Nu}_1 = 3,255$; $\overline{Nu}_2 = 7,577$; $-1,872 \leq Nu_1 \leq 7,486$;
 $0,819 \leq Nu_2 \leq 14,507$.

4 – $\overline{Nu}_1 = 3,279$; $\overline{Nu}_2 = 7,732$; $-1,936 \leq Nu_1 \leq 7,804$;
 $0,857 \leq Nu_2 \leq 14,504$.

5; 6 – $\overline{Nu}_1 = 3,275$; $\overline{Nu}_2 = 7,733$;

$-1,940 \leq Nu_1 \leq 7,804$; $0,852 \leq Nu_2 \leq 14,504$

(наступает стационарное состояние).

Для $\tau = 0,2-1$ теплообмен на внутренней поверхности слоя интенсивнее, чем на внешней. С течением времени происходит изменение интенсивности теплообмена на поверхностях слоя жидкости. Для $\tau = 2-4$ теплообмен на внешней поверхности слоя становится интенсивнее, чем на внутренней поверхности. Числа Нуссельта на внутренней поверхности слоя при $\tau = 0,5-4$ принимают отрицательные значения (рис. 4е, 2-6). Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 7,10 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 0,2-1$); $|\Psi_{max}| = 7,09 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 2-4$); $|\omega_{max}| = 3,01 \cdot 10$ ($\tau = 0,2-1$); $|\omega_{max}| = 3,00 \cdot 10$ ($\tau = 2-4$).

На рис. 5 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^{-5}$.

Рис. 5. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), распределение чисел Нуссельта (е)

Уменьшение Re_m приводит к кардинальным изменениям поля температуры, функции тока, вихря и распределений чисел Нуссельта (рис. 5) по сравнению с результатами, приведенными на рис. 1-4. В поле температуры образуется крупномасштабная тепловая каверна (рис. 5а). Максимальные значения температуры в слое жидкости увеличиваются: $\vartheta_{max} = 4,210$ ($\tau = 0,2-1$); $\vartheta_{max} = 4,248$ ($\tau = 2-4$). В поле функции тока и вихря (рис. 5б, в) образуются две крупномасштабные конвективные ячейки и два крупномасштабных вихря. В конвективной ячейке и вихре северного полушария жидкость движется по часовой стрелке, а в южном полушарии – против часовой стрелки. Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 1,51$ ($\tau = 0,2-1$); $|\Psi_{max}| = 1,35$ ($\tau = 2-4$); $|\omega_{max}| = 7,64 \cdot 10$ ($\tau = 0,2-1$); $|\omega_{max}| = 7,71 \cdot 10$ ($\tau = 2-4$). Распределение локальных чисел Нуссельта (рис. 5е) на внутренней поверхности имеет один минимум, а на внешней – один максимум. Числа Нуссельта на внутренней поверхности слоя принимают положительные и отрицательные значения (рис. 5е). Локальные и осредненные числа Нуссельта принимают следующие значения:

1 – $\overline{Nu}_1 = -2,801$; $\overline{Nu}_2 = 32,644$;

$-16,425 \leq Nu_1 \leq 9,429$; $0,110 \leq Nu_2 \leq 57,742$.

2 – $\overline{Nu}_1 = -7,028$; $\overline{Nu}_2 = 47,713$;

$-20,076 \leq Nu_1 \leq 16,202$; $0,468 \leq Nu_2 \leq 68,024$.

3 – $\overline{Nu}_1 = -9,137$; $\overline{Nu}_2 = 48,310$;

$-21,538 \leq Nu_1 \leq 16,514$; $0,723 \leq Nu_2 \leq 71,586$.

4 – $\overline{Nu}_1 = -9,406$; $\overline{Nu}_2 = 48,740$;

$-21,722 \leq Nu_1 \leq 16,555$; $0,757 \leq Nu_2 \leq 72,014$.

5; 6 – $\overline{Nu}_1 = -9,409$; $\overline{Nu}_2 = 48,746$;

$-21,724 \leq Nu_1 \leq 16,556$; $0,757 \leq Nu_2 \leq 72,019$.

Интенсивность теплообмена на внешней поверхности слоя выше, чем на внутренней.

На рис. 6 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^{-6}$.

Рис. 6. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), распределение чисел Нуссельта (г)

С уменьшением на порядок значения Re_m происходят дальнейшие изменения поля температуры, функции тока, вихря и распределений чисел Нуссельта (рис. 6) по сравнению с соответствующими результатами, приведенными на рис. 5. Форма тепловой каверны изменяется, масштаб ее увеличивается (рис. 6а) по сравнению с результатом, приведенным на рис. 5а. С течением времени максимальные значения температуры в сферическом слое жидкости продолжают увеличиваться: $\vartheta_{max} = 27,086$ ($\tau = 0,2-1$); $\vartheta_{max} = 27,219$ ($\tau = 2-4$). Распределение чисел Нуссельта (рис. 6г, 2-6) на внутренней поверхности слоя имеет два максимума и три минимума, а на внешней – один максимум. Локальные и осредненные числа Нуссельта принимают следующие значения:

- 1 – $\overline{Nu}_1 = -96,685$; $\overline{Nu}_2 = 325,336$;
 $-135,101 \leq Nu_1 \leq 2,738$; $9,109 \leq Nu_2 \leq 447,852$.
- 2 – $\overline{Nu}_1 = -141,911$; $\overline{Nu}_2 = 423,200$;
 $-164,844 \leq Nu_1 \leq -26,179$; $18,235 \leq Nu_2 \leq 557,572$.
- 3 – $\overline{Nu}_1 = -152,440$; $\overline{Nu}_2 = 445,491$;
 $-181,616 \leq Nu_1 \leq -34,904$; $20,952 \leq Nu_2 \leq 582,428$.
- 4 – $\overline{Nu}_1 = -153,291$; $\overline{Nu}_2 = 447,306$;
 $-183,410 \leq Nu_1 \leq -35,640$; $21,181 \leq Nu_2 \leq 584,456$.
- 5; 6 – $\overline{Nu}_1 = -153,296$; $\overline{Nu}_2 = 447,316$;
 $-183,419 \leq Nu_1 \leq -35,644$; $21,183 \leq Nu_2 \leq 584,467$.

Интенсивность теплообмена на внешней поверхности слоя выше, чем на внутренней поверхности. Форма конвективных ячеек поля функции тока (рис. 6б) отличается от результата, приведенного на рис. 5б. Поле вихря (рис. 6в) по форме, расположению и масштабу вихрей отлична от

результата, приведенного на рис. 5в. Максимальные значения функции тока и вихря принимают следующие значения: $|\psi_{max}| = 3,08$ ($\tau = 0,2-4$); $|\omega_{max}| = 5,27 \cdot 10^2$ ($\tau = 0,2-1$); $|\omega_{max}| = 5,30 \cdot 10^2$ ($\tau = 2-4$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. При $Re_m = 10^{-5}$; 10^{-6} происходят значительные изменения полей температуры, функции тока, вихря и распределений чисел Нуссельта по сравнению с соответствующими результатами для $Re_m = 10^{-1}-10^{-4}$;

2. При $Re_m = 10^{-1}-10^{-3}$ теплообмен на внутренней поверхности слоя интенсивнее, чем на внешней. При $Re_m = 10^{-4}-10^{-6}$ происходит изменение интенсивности теплообмена на поверхностях слоя жидкости: теплообмен на внешней поверхности становится значительнее, чем на внутренней поверхности;

3. Для $Re_m = 10^{-1}-10^{-6}$ значения Nu_2 положительные; для $Re_m = 10^{-1}-10^{-3}$ значения Nu_1 положительные; для $Re_m = 10^{-4}$; 10^{-5} значения Nu_1 положительные и отрицательные; для $Re_m = 10^{-6}$ – значения Nu_1 отрицательные (исключение Nu_1 при $\tau = 0,2$).

4. Распределения локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней поверхности сферического слоя имеют: $Re_m = 10^{-1}$ – две точки пересечения ($\tau = 2$); четыре точки ($\tau = 3-7$); $Re_m = 10^{-2}$ – четыре точки ($\tau = 2-5$); $Re_m = 10^{-3}$ – четыре точки ($\tau = 1-5$); $Re_m = 10^{-4}$ – две точки ($\tau = 0,2$; $0,5$); четыре точки ($\tau = 1-4$); $Re_m = 10^{-5}$ – две точки ($\tau = 0,2-4$); $Re_m = 10^{-6}$ – две точки ($\tau = 0,2$). Точки пересечения характеризуется равенством локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней поверхностях сферического слоя;

5. Для диапазона значений $Re_m = 10^{-1}-10^{-6}$ поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции для всех рассмотренных моментов времени ни качественно, ни количественно, не изменяются;

6. Полученные нестационарные результаты позволяют оценить влияние магнитного числа Рейнольдса на теплообмен и магнитную гидродинамику электропроводной жидкости в сферическом концентрическом слое.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Соколов, Д.Д. Динамо: на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту / Д.Д. Соколов, Р.А. Степанов, П.Г. Фрик П.Г. // Успехи физических наук. –2014. – Т.184. – № 3. – С.313-335.
2. Соколов, Д.Д. Современное состояние и перспективы лабораторного динамо-эксперимента / Д.Д. Соколов // МГУ. Соросовский образовательный журнал. –2001. Т.7. – №4. – С. 111-115.

3. Соколов, Д.Д. Космический магнетизм приходит в лабораторию / Д.Д. Соколов, Р.А. Степанов, П.Г. Фрик П.Г. // Екатеринбург: РИО УрО РАН, ЭТЮДЫ О МЕХАНИКЕ. –2017. – С. 7-16.

4. Пономаренко, Ю.Б. К теории гидродинамического динамо / Ю.Б. Пономаренко // ПМТФ. – 1973. – № 6. – С. 47-51.

5. Steenbeck M, Krause F, Rädler K-H Z. Naturforsch. – 1966. – A 21 369.

6. Соловьев, С.В. Моделирование нестационарного теплообмена электропроводной жидкости в сферическом слое. Часть I / С.В. Соловьев // Южно-Сибирский научный вестник. – 2018. – № 3(23). – С. 54-59.

7. Соловьев, С.В. Моделирование нестационарного теплообмена электропроводной жидкости в сферическом слое. Часть II / С.В. Соловьев, Е.А. Глазкова // Южно-Сибирский научный вестник. – 2018. – № 4. – С. 73-78.

8. Соловьев, С.В. Моделирование теплообмена жидкости в сферическом слое / С.В. Соловьев, А.В. Чернышев // Южно-Сибирский научный вестник. – 2019. – № 1. – С. 114-122.

9. Соловьев, С.В. Моделирование теплообмена жидкости в сферической прослойке / С.В. Соловьев // Южно-Сибирский научный вестник. – 2019. – № 4. – С. 3-9.

10. Соловьев, С.В. Моделирование теплообмена и магнитной гидродинамики жидкости в замкнутом объеме / С. В. Соловьев, Е.Н. Ломакина // Вестник Тихоокеанского государственного университета. – 2017. – № 3(46). – С. 41-50.

11. Соловьев, С. В. Влияние внутренних источников и стоков тепла на теплообмен электропроводной жидкости в сферическом слое / С.В. Соловьев, Т.С. Соловьева // Южно-Сибирский научный вестник. – 2020. – № 1(29). – С. 15-23.

Соловьев Сергей Викторович – д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики Тихоокеанского государственного университета ФГБОУ ВПО ТОГУ, г. Хабаровск, тел. (4212)375188, e-mail: solovjovsv@rambler.ru.

Соловьева Татьяна Сергеевна – ст. преподаватель кафедры лингвистической подготовки института атомной энергетики НИЯУ МИФИ, г. Обнинск, e-mail: tatjanasolovjova@rambler.ru.

HEAT EXCHANGE OF ELECTRIC CONDUCTIVE LIQUID FOR SMALL REYNOLD'S MAGNETIC NUMBER

S.V. Solovjov¹, T.S. Solovjova²

1 Pacific national university, Khabarovsk

2 Institute for nuclear power engineering, Obninsk

Abstract – The results of numerical simulation of unsteady convective heat transfer and magneto hydrodynamics of an electrically conductive fluid in a spherical layer are presented. The influence of the magnetic Reynolds number on the evolution of the structure of the fluid flow, the temperature field, magnetic induction, and the distribution of the Nusselt numbers is investigated.

Index terms: mathematical modeling, unsteady heat transfer, magneto hydrodynamics, magnetic Reynolds number, spherical layer.

REFERENCES

1. Sokolov D.D., Stepanov R.A., Friks P.G. "Dinamo: ot astrofizicheskix modelej k laboratornomu eksperimentu," *uspexi fizicheskix nauk*, vol. 184, no. 3, pp. 313-335, 2014.
2. Sokolov D.D. "Sovremennoe sostoyanie i perspektivy laboratornogo dynamo-eksperimenta," *MGU. Sorovskij obrazovatel'nyj zhurnal*, vol. 7, no. 4, pp. 111-115, 2014.
3. Sokolov D.D., Stepanov R.A., Friks P.G. "Koamicheskij magnetizm prixodit v laboratoriyu," *Ekaterinburg: RIO UrO RAN, ETYUDY O MEXANIKE*, pp. 7-16, 2017.
4. Ponomarenko Yu.B. "K teorii gidrodinamicheskogo dynamo," *PMTF*, no. 6, pp.47-51, 1973.
5. Steenbeck M, Krause F, Rädler K-H Z. *Naturforsch*, A **21** 369, 1966.
6. Solov'yov S.V. "Simulation of non-stationary heat exchange of electrically conductive fluid in a spherical layer. Part I," *yuzhno-sibirskij nauchnyj vestnik*, no. 3(23), pp. 54-59, 2018.
7. Solov'yov S.V., Glazkova E.A. "Simulation of non-stationary heat exchange of electrically conductive fluid in a spherical layer. Part II," *yuzhno-sibirskij nauchnyj vestnik*, no. 4(24), pp. 73-78, 2018.
8. Solovjov S. V., Chernyshev A.V. "Simulation of heat transfer in a spherical layer," *Yuzhno-sibirskij nauchnyj vestnik*, no.1, pp.114-122, 2019.
9. Solov'yov S.V., Kuchma A.V. "Simulation heat exchange of liquid in the spherical interlay," *yuzhno-sibirskij nauchnyj vestnik*, no. 3, pp. 3-9, 2019.
10. Solov'yov S.V., Lomakina E.N. "Modelirovanie teploobmena i magnitnoj gidrodinamiki zhidkosti v zamknutom obeme" / S.V. Solovjov, E.N. Lomakina // *Vestnik Tixookeanskogo gosudarstvennogo universiteta*. – 2017. – № 3(46). – С. 41-50.
11. Solov'ev S.V., Solov'eva T. S. "Influence of internal sources and sinks of heat on heat exchange of electrically conductive liquid in the spherical layer," *Yuzhno-sibirskij nauchnyj vestnik*, no.1(29), pp. 15-23, 2020.

Solov'yov Sergey Viktorovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Pacific State University, Khabarovsk, tel. (4212) 375188, e-mail: solovjovsv@rambler.ru.

Solov'yova Tat'yana Sergeevna – Senior Lecturer of the Department of Linguistic Training of the Institute for nuclear power engineering, Obninsk, e-mail: tatjanasolovjova@rambler.ru.