МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СОПРЯЖЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕНОСА И ГИДРОДИНАМИКИ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ В ТЕХНОЛОГИЯХ ЭНЕРГОСБЕРЕЖЕНИЯ И ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

А. Р. Аветисян, Р. В. Арутюнян, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, А. М. Шведов

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2018 г.

В настоящей работе представлены комплексная математическая и физическая модели сопряженных процессов теплообмена и гидродинамики с плавлением-отвердеванием неоднородных сред с учетом их теплопроводности и движущегося за счет гравитации источника тепла. Модели основаны на применении непрерывной функции-индикатора фаз. Приведены результаты расчетов и сопоставление их с экспериментальными данными и аналитическими решениями.

Ключевые слова: радиоактивные отходы, самопогружение, математические модели, функция-индикатор фаз.

Введение

В последние годы активно ведутся работы по разработке технологии аккумулирования энергии на основе материалов с обратимыми фазами для создания высокоэффективных теплоаккумулирующих систем. Для решения задач проектирования соответствующего оборудования необходимо изучение сопряженных процессов теплообмена и гидродинамики в широком диапазоне изменения теплофизических свойств материалов, режимных и конструктивных параметров с учетом фазовых превращений. Математические модели указанных процессов и соответствующий программный комплекс являются ключевыми инструментами для достижения требуемых целей.

Аналогичные задачи возникают при захоронении РАО методом самопогружения. Идея метода самопогружения РАО довольно проста и

известна давно [1–6]. В предварительно подготовленную скважину опускаются капсулы с РАО. В результате тепловыделения капсулы будут разогревать и расплавлять окружающую породу и под действием собственного веса опускаться вглубь, вытесняя образующийся расплав. Проблемы реализации этого способа захоронения состоят в следующем. Характерный размер капсул не должен быть слишком велик, так как создание скважины большого диаметра, а также транспортировка тепловыделяющих капсул к месту захоронения потребует слишком больших расходов. С другой стороны, при маленьких размерах капсул интенсивность их тепловыделения, которая определяется скоростью распада радионуклидов и энергией, выделяемой при одном акте деления, будет недостаточна, чтобы проплавливать окружающую породу [7–10].

В связи с этим в настоящей работе представлены разработанные комплексные математические и физические модели сопряженных процессов теплообмена и гидродинамики с учетом плавления-отвердевания неоднородных сред и их теплопроводности в условиях движущегося за счет гравитации источника тепла. Разработанные модели реализованы в соответствующем программном комплексе. Это позволило создать инструмент как для решения задач создания эффективных теплоаккумулирующих систем, так и задач, возникающих при самозахоронении тепловыделяющих капсул с РАО в неоднородные геологические среды за счет силы тяжести.

В настоящей работе представлены результаты расчетов в сравнении с аналитическими решениями и экспериментальными данными [13, 14].

Постановка задачи. Основные уравнения

Математическая модель описанных выше процессов сводится к совместному решению нестационарных уравнений Навье-Стокса, уравнения теплопроводности с учетом фазовых превращений и уравнения движения распределенного неоднородного источника тепла за счет силы тяжести.

Основной трудностью численной реализации математических моделей процессов теплообмена с учетом плавления-отвердевания является подвижная граница раздела фаз, а также движущийся источник тепла. Для преодоления этих трудностей в настоящей работе предлагаются: метод «сквозного» счета для определения этой границы без итераций и подвижные сетки для учета движения теплового источника. Идея основана на методах, предложенных ранее [11, 12]. Существенным различием является наличие движущегося источника тепла, что обуславливает необходимость применения подвижных сеток.

В предположении, что расплав несжимаем и справедлива аппроксимация Буссинеска для сил плавучести, уравнения сохранения массы и импульса расплава, соответственно, можно записать в неподвижной системе координат с началом в центре масс источника в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + S_{mi} + S_b \delta_{2i}, \quad (2)$$

где ρ — плотность, u_i — компонента скорости, η — вязкость, p — давление, δ_{2i} — символ Кронекера, S_{mi} — источниковый член типа Дарси [11]. Этот

член задает течение в зоне между средой и расплавом, рассматриваемой как пористая среда, и имеет вид:

$$S_{mi} = -C \frac{(1-\gamma)^2}{\gamma^3 + \varepsilon} u_i. \quad (3)$$

Здесь γ — доля расплава, C — большая константа, задающая проницаемость пористой среды, а ε — малое число, чтобы избежать деления на ноль в (3) для твердой фазы.

Другой источниковый член в (2) отражает аппроксимацию Буссинеска:

$$S_b = \rho g [1 - \max(\beta(T - T_s), 0)], \quad (4)$$

где β — коэффициент объемного расширения, g — ускорение свободного падения, T_s — температура твердой среды.

Уравнение сохранения энергии в терминах энтальпии можно записать в виде:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j h)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + Q, \quad (5)$$

где λ — теплопроводность, Q — объемное тепловыделение, h — энтальпия с учетом энергии фазовых переходов, и определяется как функция температуры

$$h = h_s + L(T) = \int_{T_{ref}}^T c dT + \gamma L, \quad (6)$$

где c — теплоемкость, γ — доля расплава, а L — скрытая теплота фазовых переходов. Доля расплава γ в традиционном подходе [11] определяется как

$$\gamma = \begin{cases} 0, & T < T_s \\ \frac{T - T_s}{T_l - T_s}, & T_s < T < T_l \\ 1, & T > T_l \end{cases}$$

где T_s и T_l — температуры солидуса и ликвидуса соответственно.

В настоящей работе использовано выражение для γ в виде непрерывной функции ошибок

$$\gamma = 0,5 \operatorname{erf} \left(\frac{4(T - T_m)}{(T_l - T_s)} \right) + 0,5, \quad (7)$$

T_m — среднеарифметическое T_s и T_l .

Используя соотношения (6) и (7), уравнение (5) преобразуется к виду

$$\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j c T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + S_h + Q, \quad (8)$$

$$S_h = -4\rho L A(T) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right),$$

$$A(T) = \exp \left(\left(\frac{4(T - T_m)}{(T_l - T_s)} \right)^2 \right) (\pi(T_l - T_s))^{-1}. \quad (9)$$

Как следует из (8) и (9), уравнение энергии (8) не является функцией доли расплава, следовательно, не требуются дополнительные итерации для его решения.

Уравнение движения погружающегося теплового источника записывается в виде:

$$m \frac{dU}{dt} = F_{fr} - F_g, \quad (10)$$

$$F_g = (\rho_s - \rho_l) g V, \quad F_{fri} = \int p \delta_{ij} - \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) ds,$$

где ρ_s, ρ_l — плотности окружающей породы и расплава соответственно, $u_1 = U$ на границе источник-расплав. При установившемся процессе погружения скорость U постоянна и уравнение (10) переходит в равенство $F_{fr} = F_g$.

Уравнения (1), (2), (8) и (10) с учетом соотношений (3), (4), (7) и (9) составляют математическую модель сопряженных процессов теплообмена и гидродинамики с учетом плавления-отвердевания, теплопроводности и движущегося за счет гравитации источника тепла.

Особенностью такой формулировки является отсутствие необходимости дополнительных итерационных процедур для определения положения границы раздела фаз.

Аналитические решения этих уравнений получены при сильных упрощениях и для простых геометрий [7, 10, 13, 14]. На рис. 1 изображена схема погружения тепловыделяющего шара или длинного цилиндра. Основное упрощение модели для получения аналитических решений сводится к замене уравнений Навье-Стокса уравнениями теории смазки, а также к линейной или параболической аппроксимации профиля температуры в расплаве вместо решения уравнения теплопроводности. Аналитические решения использованы для верификации представленной модели и программного комплекса.

Численная реализация и результаты расчетов

Пространственная дискретизация уравнений математической модели основана на алгоритмах второго порядка на подвижных сетках. Применены неявные по времени алгоритмы второго порядка. Использована схема расщепления PISO. Алгоритм решения представляет собой

Рис. 1. Схематическое изображение погружения тепловыделяющего шара или длинного цилиндра

На рис. 1: U — скорость погружения, R — радиус шара, T_m — температура плавления.

итерационный процесс, критерием окончания которого является выполнение условия $F_{fr} = F_g$, т. е. равенство силы Архимеда и гидродинамических сил. Соответствующий программный комплекс реализован в рамках открытой программной среды OPENFOAM.

Для апробации модели и верификации программы были выбраны две тестовые задачи. Первая задача — о погружении тепловыделяющего шара в грунт. Эта задача в разных приближениях аналитически решена в [7] и [14]. Получены решения, мало отличающиеся друг от друга. Второй тест взят из работы [13], в которой приведены результаты экспериментальных исследований погружения цилиндра в парафин.

Расчетная область и деформированная до достижения стационарной скорости погружения подвижная сетка для первого теста представлены на рис. 2. Результаты расчетов скорости погружения шара U при физических свойствах материала шара и окружающего грунта, взятого из [7], дали [м/с]:

- по вышеприведенной модели — $U_{н.р.} = 1,2e-5$,
- по работе [14] — $U_{[14]} = 1,6e-5$.

Небольшое расхождение может быть объяснено тем, что в упрощенной модели процесса погружения в [14] не учитывалась сила вязкого трения.

На рис. 3. изображена расчетная область для тестовой задачи погружения нагретого цилиндра в парафин и доля расплава при установившейся скорости погружения. Для сравнения

Рис. 2. Расчетная область и подвижная сетка погружения тепловыделяющего шара в грунт

Рис. 3. Величина скорости расплава вокруг погружающегося источника

результата расчетов с данными эксперимента [13] был выбран случай, когда температура на стенке цилиндра была $T_w = 32^\circ\text{C}$, а температура в парафине $T_\infty = 10^\circ\text{C}$. Теплофизические свойства материалов взяты из [13]. Расчетное значение скорости погружения цилиндра получилось $U_{н.р.} = 2,8e-5$ м/с. При этом экспериментальное значение, полученное в [13], было $U_{[13]} = 3e-5$ м/с.

Следует отметить, что все расчеты проводились для нестационарного процесса погружения до достижения стационарного режима.

Заключение

Разработана математическая модель сопряженных процессов теплообмена и гидродинамики с учетом плавления-отвердевания, теплопроводности и движущегося за счет гравитации источника тепла. Представлен метод сквозного счета, не требующий итераций для определения положения границы раздела фаз.

Проведены расчеты с сопоставлением результатов и экспериментальных данных, а также

аналитических решений. Сопоставление показывает их хорошее совпадение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-08-01491).

Литература

1. National Research Council (NRC). The Disposal of Radioactive Waste on Land. National Academy Press, Washington, D. C., 1957.
2. Cohen J. J., Lewis A. E., Braun R. L. In-Situ Incorporation of Nuclear Waste in Deep Molten Silicate Rock // Nuclear Technology. 1972. Vol. 14, 76.
3. Cohen J. J., Schwartz L. L., Tewes H. A. Economic and environmental evaluation of nuclear waste disposal by underground in situ melting // Transactions of the American Nuclear Society. 1974. V. 18. P. 194–195.
4. Logan S. E. Deep Self-Burial of Radioactive Wastes by Rock-Melting Capsules // Nuclear Technology. 1973. Vol. 21. P. 111–124.
5. Logan S. E. Deeper geological disposal: A new look at self-burial // Proc. WM'99 Conference. 1999. 10-51 pdf. 10 p.
6. Кащеев В. А., Никифоров А. С., Полуэктов П. П., Поляков А. С. К теории самозахоронения радиоактивных отходов // Атомная энергия. 1992. Т. 73, вып. 3. С. 215–221.
7. Emmerman S. H., Turcotte D. L. Stokes's Problem With Melting // Int. J. Heat Mass Transfer 1983. Vol. 26. No 11. P. 1625–1630.
8. Аренс В. Ж., Вертман А. А., Кедровский О. Л., Полуэктов П. П., Поляков А. С., Хаврошкин О. Б. Патент 2127003, кл. G21F9/24 (1999).
9. Бялко А. В., Вертман А. А., Ефремов Е. Ю., Кедровский О. Л., Полуэктов П. П., Поляков А. С., Хаврошкин О. Б. Патент 2152093, кл. G21F9/24 (2000).
10. Косачевский Л. Я., Сюю Л. С. К вопросу о «самозахоронении» радиоактивных отходов // Журнал технической физики. 1999. Т. 69, вып. 11. С. 123–127.
11. Voller, Prakash C. A fixed grid numerical modeling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems // Int. J. Heat Mass Transfer. 1987. Vol. 30, no. 8. P. 1709–1719.
12. Rosler F., Bruggeman D. Shell-and-tube latent heat thermal energy storage: numerical analysis and comparison with experiments // Heat Mass Transfer. 2011. Vol. 47. Pp. 1027–1033.
13. Moallemi M. K., Viskanta R. Melting Around a Migrating Heat Source // ASME Journal of Heat Transfer. 1985. Vol. 107. Pp. 451–458.
14. Chen W., Bo Zh., Chen Zh., Li H., Sun F. New Analysis of contact of phase change material around a hot sphere // Heat Mass Transfer. 2008. Vol. 44. P. 281–286.

Информация об авторах

Аветисян Артур Робертович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН (115191, Москва, Б. Тульская ул., д. 52), e-mail: avetis@ibrae.ac.ru.

Арутюнян Рафаэль Варназович, доктор физико-математических наук, заместитель директора, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН (115191, Москва, Б. Тульская ул., д. 52), e-mail: arut@ibrae.ac.ru.

Кондратенко Петр Сергеевич, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Института проблем безопасного развития атомной энергетики РАН (115191, Москва, Б. Тульская ул., д. 52), e-mail: kondrat@ibrae.ac.ru.

Матвеев Леонид Владимирович, доктор физико-математических наук, директор, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН (115191, Москва, Б. Тульская ул., д. 52), e-mail: matweev@ibrae.ac.ru.

Шведов Антон Максимович, научный сотрудник, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН (115191, Москва, Б. Тульская ул., д. 52), e-mail: sham@ibrae.ac.ru.

Библиографическое описание статьи

Аветисян А. Р., Арутюнян Р. В., Кондратенко П. С., Матвеев Л. В., Шведов А. М. Математические модели сопряженных процессов теплопереноса и гидродинамики с фазовыми переходами в технологиях энергосбережения и экологической безопасности // Радиоактивные отходы. 2019. № 3(8). С. 74–79. DOI: 10.25283/2587-9707-2019-3-74-79.

MATHEMATICAL MODELS OF COUPLED HEAT TRANSFER AND HYDRODYNAMIC PROCESSES WITH PHASE TRANSITIONS IN ENERGY-SAVING TECHNOLOGIES AND ENVIRONMENTAL SAFETY

Avetisyan A. R., Arutunyan R. V., Kondratenko P. S., Matveev L. V., Shvedov A. M.

Nuclear Safety Institute of RAS, Moscow, Russia

Article received on December 25, 2018

The paper presents a comprehensive mathematical and physical model of coupled heat transfer processes and hydrodynamics suggesting melting and solidification of inhomogeneous media with due account of medium's thermal conductivity and presence of a gravity-driven moving heat source. Models are based on the application of continuous indicator-function of phases. The paper provides the results of the calculations and their comparison with experimental data and analytical solutions..

Keywords: radioactive waste, self-burial, mathematical models, function-indicator of phases.

References

1. National Research Council (NRC), *The Disposal of Radioactive Waste on Land*, National Academy Press, Washington, D.C., 1957.
2. Cohen J. J., Lewis A. E. and Braun R. L. In-Situ Incorporation of Nuclear Waste in Deep Molten Silicate Rock. *Nuclear Technology*, 1972, vol. 14, 76.
3. Cohen J. J., Schwartz L. L., Tewes H. A. Economic and environmental evaluation of nuclear waste disposal by underground in situ melting. *Transactions of the American Nuclear Society*, 1974, v. 18, p. 194–195.
4. Logan S. E. Deep Self-Burial of Radioactive Wastes by Rock-Melting Capsules. *Nuclear Technology*, 1973, vol. 21, p. 111–124.
5. Logan S. E. Deeper geological disposal: A new look at self-burial. *Proc. WM'99 Conference*, 1999, 10-51 pdf, 10 p.
6. Kashcheev V. A., Nikiforov A. S., Poluektov P. P., Polyakov A. S. About the Theory of Self-Disposal of High Level Radioactive Wastes. *Atomnaya Energiya*, 1992, v. 73, no. 3, p. 215–221. (In Russian).
7. Emmerman S. H., Turcotte D. L. Stokes's Problem With Melting. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1983, Vol. 26, no. 11, pp. 1625–1630.
8. Arens V. J., Vertman A. A., Kedrovskiy O. L., Poluektov P. P., Polyakov A. S., Khavroshkin O. B. Patent 2127003, kl. G21F9/24 (1999). (In Russian).
9. Byalko A. V., Vertman A. A., Efremov E. Yu., Kedrovskiy O. L., Poluektov P. P., Polyakov A. S., Khavroshkin O. B. Patent 2152093, kl. G21F9/24 (2000). (In Russian).
10. Kosachevsky L. Ya., Sui L. S. On the problem of "self-burial" of radioactive waste. *Journal of Technical Physics*, 1999, vol. 69, no. 11, p. 123–127. (In Russian).
11. Voller, Prakash C. A fixed grid numerical modeling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1987, vol. 30, no. 8, pp. 1709–1719.
12. Rosler F., Bruggeman D. Shell-and-tube latent heat thermal energy storage: numerical analysis and comparison with experiments. *Heat Mass Transfer*, 2011, vol. 47, pp. 1027–1033.
13. Moallemi M. K., Viskanta R. Melting Around a Migrating Heat Source, *ASME Journal of Heat Transfer*, 1985, vol. 107, pp. 451–458.
14. Chen W., Bo Zhu, Chen Zh., Li H., Sun F. New Analysis of contact melting of phase change material around a hot sphere. // *Heat Mass Transfer*, 2008, vol. 44, pp. 281–286.

Information about the authors

Avetisyan Artur Robertovich, PhD, Senior Researcher, Nuclear Safety Institute of RAS (52, Bolshaya Tulkaya, Moscow, 115191, Russia), e-mail: avetis@ibrae.ac.ru.

Arutunyan Rafael Varnazovich, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Deputy Director, Nuclear Safety Institute of RAS (52, Bolshaya Tulkaya, Moscow, 115191, Russia), e-mail: arut@ibrae.ac.ru.

Kondratenko Peter Sergeevich, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Head of Laboratory, Nuclear Safety Institute of RAS (52, Bolshaya Tulkaya, Moscow, 115191, Russia), e-mail: kondrat@ibrae.ac.ru.

Matveev Leonid Vladimirovich, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Director, Nuclear Safety Institute of RAS (52, Bolshaya Tulkaya, Moscow, 115191, Russia), e-mail: matveev@ibrae.ac.ru.

Shvedov Anton Maksimovich, Researcher, Nuclear Safety Institute of RAS (52, Bolshaya Tulkaya, Moscow, 115191, Russia), e-mail: sham@ibrae.ac.ru.

Bibliographic description

Avetisyan A. R., Arutunyan R. V., Kondratenko P. S., Matveev L. V., Shvedov A. M. Mathematical Models of Coupled Heat Transfer and Hydrodynamic Processes with Phase Transitions in Energy-Saving Technologies and Environmental Safety. *Radioactive Waste*, 2019, no. 3(8), pp. 74–79. DOI: 10.25283/2587-9707-2019-3-74-79. (In Russian).