А. Ю. Попов, Ю. Л. Сачков

Двусторонняя оценка корня одного уравнения, содержащего полные эллиптические интегралы

Аннотация. Доказана единственность корня уравнения, возникающего в одной задаче геометрической теории управления. Задача состоит в изучении особенности субримановой сферы на группе Энгеля вблизи аномальной кратчайшей.

В ходе доказательства получено несколько новых неравенств для полных эллиптических интегралов. Например, доказано возрастание функции $K(k)E(k)$ на промежутке $[0, 1)$, не встречавшееся ранее в справочниках.

Разработанный метод исследования и полученные результаты могут быть полезны как при исследовании эллиптических интегралов, так и при решении задач, в которых эти интегралы возникают (например, в задачах субримановой геометрии).

Ключевые слова и фразы: асимптотика, полный эллиптический интеграл, субриманова геометрия.

1. Введение

В последние десятилетия выяснилось, что многие задачи оптимального управления после их математической формализации сводятся к задачам отыскания кратчайшей кривой, соединяющей две точки какого-либо многообразия, наделенного субримановой метрикой. Центральное место среди таких многообразий занимают левоинвариантные субримановы структуры на нильпотентных группах Ли, т.к. они доставляют фундаментальную нильпотентную аппроксимацию общих субримановых структур [1].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

© А. Ю. Попов, Ю. Л. Сачков, 2018

© Институт программных систем имени А. К. Айламазяна РАН, 2018

© Программные системы: теория и приложения (дизайн), 2018

10.25209/2079-3316-2018-9-4-253-264

Левоинвариантная субриманова структура ранга 2 максимального роста на 4-мерной группе Ли единственна — это нильпотентная субриманова структура на группе Энгеля. Детальному исследованию этой структуры посвящен ряд работ [2–5]. В последней работе этого цикла построен оптимальный синтез и описана глобальная структура множества разреза.

Одной из важных задач, остающейся для нильпотентной субримановой структуры на группе Энгеля нерешенной, состоит в исследовании особенности сферы вблизи аномальной кратчайшей. В этой задаче возникает ряд нетривиальных вопросов теории эллиптических функций и интегралов. Данная работа посвящена ответу на один из таких вопросов.

А именно, исследуется структура трехмерной субримановой сферы S вблизи аномальной кратчайшей. Для доказательства того, что сфера S допускает однозначное проецирование на трехмерную гиперплоскость, потребовалось установить, что уравнение (4) (см. ниже раздел 2) имеет единственное решение на интервале $0 < x < 1$. Доказательство единственности решения уравнения (4) позволяет перейти к дальнейшему изучению сферы S вблизи аномальной траектории. Двусторонняя оценка корня этого уравнения задает диапазон, в котором лежит фрагмент сферы вблизи аномальной кратчайшей.

Отметим, что в ходе доказательства получено несколько новых неравенств для полных эллиптических интегралов. Например, доказано возрастание функции $K(k)E(k)$ на промежутке $[0, 1)$, не встречавшееся ранее в справочниках.

Разработанный метод исследования и полученные результаты могут быть полезны как при исследовании эллиптических интегралов, так и при решении задач, в которых эти интегралы возникают (например, в субримановых задачах в плоском случае Мартине [6], на группе Картана [7], а также субримановых задачах энгелева типа [8]).

2. Постановка задачи

Даны две функции

$$(1) \quad x_1(k) = \frac{2E(k)}{K(k)} - 1, \quad x_2(k) = \frac{2}{k^2} \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) - 1, \quad 0 \leq k \leq 1.$$

(Функция $1/K$ доопределяется в точке $k = 1$ нулём, после этого она становится непрерывной на отрезке $[0, 1]$). Функция x_1 убывает, поскольку функции E, K положительны, E убывает, K возрастает. Нас интересуют неотрицательные значения $x_1(k)$, поэтому рассмотрим эту функцию на отрезке $0 \leq k \leq k_0$, k_0 — единственный корень уравнения $2E(k) = K(k)$. Из таблиц [9] (с. 288–303) видно, что $0.9 < k_0 < 0.91$. Имеем $x_1(0) = 1$, $x_1(k_0) = 0$. Обозначим $y_1: [0, 1] \rightarrow [0, k_0]$ функцию, обратную к x_1 . Она, как и x_1 , непрерывна и убывает.

Из разложения в степенной ряд [10] (гл. 7, §44) функций E и K следуют асимптотики

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k^2}{4} + O(k^4) \right), \quad K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} + O(k^4) \right), \quad k \rightarrow 0+,$$

$$E(k)/K(k) = 1 - \frac{k^2}{2} + O(k^4), \quad k \rightarrow 0+,$$

из которых видно, что в результате доопределения $x_2(0) = 0$, функция $x_2(k)$ становится непрерывной на отрезке $0 \leq k \leq 1$. Ниже в лемме 3 доказано возрастание функции x_2 . Очевидно равенство $x_2(1) = 1$. Через $y_2: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ обозначим функцию, обратную к x_2 . Она также непрерывна и возрастает.

Рассматривается еще одна пара функций

$$(2) \quad A_1(k) = 4K(k) (E(k) - (1 - k^2)K(k)), \quad A_2(k) = E(k)K(k),$$

$$0 \leq k < 1.$$

Обе функции (2) положительны и, как доказано в лемме 2, возрастают. Положим

$$(3) \quad B_1(x) = A_1(y_1(x)), \quad B_2(x) = A_2(y_2(x)), \quad B(x) = B_2(x) - B_1(x).$$

Требуется доказать, что уравнение

$$(4) \quad B(x) = 0$$

имеет на интервале $0 < x < 1$ единственный корень, и этот корень на самом деле лежит на интервале $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$.

3. Монотонность функций (1) и (2)

Введём обозначение $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Производную по переменной k будем обозначать точкой. Справедливы следующие тождества [10] (гл.

7, §44) (для краткости опускаем аргумент k у всех функций):

$$(5) \quad \dot{E} = \frac{E - K}{k}, \quad k\dot{K} = Ek'^{-2} - K, \quad \dot{k}' = -\frac{k}{k'}.$$

ЛЕММА 1. При любом $k \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$E - k'K > 0.$$

Доказательство. Поскольку $E(0) = K(0) = \frac{\pi}{2}$, $k'(0) = 1$, то функция $E - k'K$ в точке $k = 0$ равна 0. Поэтому для доказательства её положительности на интервале $(0, 1)$ достаточно проверить положительность её производной. Согласно (5) имеем

$$\frac{d}{dk}(E - k'K) = \dot{E} - \dot{k}'K - k'\dot{K} = \frac{E - K}{k} + \frac{k}{k'}K - \frac{k'}{k}(Ek'^{-2} - K).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} kk' \frac{d}{dk}(E - k'K) &= k'(E - K) + k^2K - k'^2(Ek'^{-2} - K) = \\ &= k'E - E - k'K + (k^2 + k'^2)K = E(k' - 1) + K(1 - k') = \\ &= (1 - k')(K - E). \end{aligned}$$

Последнее равенство влечёт за собой положительность производной функции $(E - k'K)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Функции A_1, A_2 имеют на интервале $(0, 1)$ положительную производную и, в частности, возрастают на полуинтервале $[0, 1)$.

Доказательство. Согласно (5) имеем

$$\begin{aligned} \dot{A}_2 = \dot{E}K + E\dot{K} &= \frac{(E - K)K}{k} + \frac{E(Ek'^{-2} - K)}{k} = \frac{Ek'^{-2} - K^2}{k} = \\ &= \frac{(E - k'K)(E + k'K)}{kk'^2} > 0 \end{aligned}$$

по лемме 1.

Докажем положительность производной функции $A_3 = E - k'^2K$.

Имеем

$$\begin{aligned}\dot{A}_3 &= \dot{E} - k'^2 K - k'^2 \dot{K} = \frac{E - K}{k} + 2kK - k'^2 \left(\frac{Ek'^{-2} - K}{k} \right) = \\ &= \frac{E - K + 2k^2 K - E + k'^2 K}{k} = \frac{K}{k} (2k^2 + k'^2 - 1) = kK > 0.\end{aligned}$$

Таким образом, функция A_3 имеет положительную производную на интервале $0 < k < 1$ и сама положительна по лемме 1. А так как функция K обладает этими же свойствами, то их произведение $A_1 = 4KA_3$ также положительно и имеет на интервале $(0, 1)$ положительную производную. Лемма полностью доказана.

ЛЕММА 3. *Функция x_2 имеет положительную производную на интервале $(0, 1)$, в частности, возрастает на отрезке $[0, 1]$.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \dot{x}_2 &= -\frac{2}{k^3} \left(1 - \frac{E}{K} \right) - \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} \right)' = -\frac{2}{k^2} \cdot \frac{K - E}{kK} + \frac{\dot{K}E - \dot{E}K}{k^2 K^2} = \\ &= \frac{\dot{K}E - \dot{E}K}{k^2 K^2} + \frac{2}{k^2} \frac{\dot{E}}{K} = \frac{\dot{K}E + \dot{E}K}{k^2 K^2} = \frac{\dot{A}_2}{k^2 K^2} > 0\end{aligned}$$

по лемме 2. Лемма доказана.

4. Существование и единственность корня уравнения (4). Двусторонняя оценка корня

Функция y_1 непрерывна и убывает на $[0, 1]$, множеством её значений является отрезок $[0, k_0] \subset [0, 1)$. Функция A_1 непрерывна и возрастает на $[0, 1)$. Следовательно, функция $B_1(x) = A_1(y_1(x))$ непрерывна и убывает на $[0, 1]$. Согласно (3) имеем

(6)

$$\begin{aligned}B_1(0) &= A_1(y_1(0)) = A_1(k_0) = 4K(k_0) \left(E(k_0) - (1 - k_0^2)K(k_0) \right) = \\ &= 8E(k_0) \left(E(k_0) - 2(1 - k_0^2)E(k_0) \right) = 8(2k_0^2 - 1)E^2(k_0),\end{aligned}$$

(7)

$$B_1(1) = A_1(y_1(1)) = A_1(0) = 0.$$

Функция y_2 непрерывна и возрастает на $[0, 1]$, $y_2(0) = 0$, $y_2(1) = 1$. Функция A_2 возрастает и непрерывна на $[0, 1]$. Следовательно, функция B_2 возрастает и непрерывна на $[0, 1]$. Имеем также

$$(8) \quad \begin{aligned} B_2(0) &= A_2(y_2(0)) = A_2(0) = \frac{\pi^2}{4}, \\ \lim_{x \rightarrow 1-} B_2(x) &= \lim_{k \rightarrow 1-} A_2(k) = +\infty. \end{aligned}$$

Из сказанного заключаем, что функция $B(x) = B_2(x) - B_1(x)$ непрерывна и возрастает на полуинтервале $[0, 1)$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} B(x) &= +\infty, \\ B(0) &= \frac{\pi^2}{4} - (16k_0^2 - 8)E^2(k_0) < \frac{10}{4} - (16k_0^2 - 8) = \\ &= 10.5 - 16k_0^2 < 10.5 - 16 \cdot 0.9^2 = -2.46. \end{aligned}$$

Отсюда следует существование и единственность корня уравнения (4) на интервале $0 < x < 1$. Для доказательства наличия этого корня на интервале $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ достаточно проверить справедливость неравенств

$$\begin{aligned} B\left(\frac{1}{3}\right) &< 0 \Leftrightarrow B_2\left(\frac{1}{3}\right) < B_1\left(\frac{1}{3}\right), \\ B\left(\frac{1}{2}\right) &> 0 \Leftrightarrow B_1\left(\frac{1}{2}\right) < B_2\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Докажем лемму, которая даст требуемые неравенства.

ЛЕММА 4. *Справедливы численные неравенства*

$$\begin{aligned} B_2\left(\frac{1}{3}\right) &= A_2\left(y_2\left(\frac{1}{3}\right)\right) < \pi < A_1\left(y_1\left(\frac{1}{3}\right)\right) = B_1\left(\frac{1}{3}\right), \\ B_1\left(\frac{1}{2}\right) &= A_1\left(y_1\left(\frac{1}{2}\right)\right) < \pi < A_2\left(y_2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = B_2\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Доказательство леммы проведём в следующем порядке. Сначала докажем двойное неравенство

$$(9) \quad A_1\left(y_1\left(\frac{1}{2}\right)\right) < \pi < A_1\left(y_1\left(\frac{1}{3}\right)\right).$$

Из тождества Лежандра [10] (гл. 7, §44) при $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ следует равенство

$$(10) \quad 2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - K^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi.$$

В силу возрастания A_1 это означает, что (9) будет вытекать из двойного неравенства

$$(11) \quad y_1\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}} < y_1\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < \frac{1}{2}$$

(мы воспользовались убыванием x_1 и тем, что y_1 — функция, обратная к x_1). Разделив обе части левого равенства в (10) на $K^2(\frac{1}{\sqrt{2}})$, находим

$$2 \frac{E(1/\sqrt{2})}{K(1/\sqrt{2})} - 1 = \frac{\pi}{2K^2(1/\sqrt{2})} \Rightarrow x_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2K^2(1/\sqrt{2})}.$$

Известно также значение $K(1/\sqrt{2}) = 4\Gamma^2(5/4)/\sqrt{\pi}$ [11] (стр. 337). Отсюда находим

$$(12) \quad x_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi^2}{32\Gamma^4(5/4)}.$$

Из двойного неравенства

$$\Gamma^2\left(\frac{5}{4}\right) < \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} < \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$$

и (12) выводим оценки

$$\begin{aligned} \Gamma^{-4}\left(\frac{5}{4}\right) < \Gamma^{-4}\left(\frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{-4} = \frac{16}{\pi^2} \Rightarrow x_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < \frac{\pi^2}{32} \cdot \frac{16}{\pi^2} = \frac{1}{2}, \\ \Gamma^{-4}\left(\frac{5}{4}\right) > \Gamma^{-2}\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{4}{\pi} \Rightarrow x_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > \frac{\pi^2}{32} \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{\pi}{8} > \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Второе двойное неравенство в (11) доказано, и доказательство неравенства (9) завершено.

Перейдем к доказательству двойного неравенства

$$(13) \quad A_2\left(y_2\left(\frac{1}{3}\right)\right) < \pi < A_2\left(y_2\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

Левое неравенство (13) доказывается с помощью двусторонних оценок значений полных эллиптических интегралов $E(0.975)$ и $K(0.975)$,

взятых из таблиц [9]

$$(14) \quad 1.05 < E(0.975) < 1.06, \quad 2.91 < K(0.975) < 2.92.$$

Из (14) находим

$$(15) \quad A_2(0.975) < 1.06 \cdot 2.92 = 3.0952, \quad \frac{E(0.975)}{K(0.975)} < \frac{1.06}{2.91} < 0.365.$$

Покажем, что верно неравенство

$$y_2 \left(\frac{1}{3} \right) < 0.975 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x_2(0.975) = \frac{2}{0.975^2} \left(1 - \frac{E(0.975)}{K(0.975)} \right) - 1.$$

Действительно, последнее неравенство равносильно такому:

$$\frac{2 \cdot 0.975^2}{3} < 1 - \frac{E(0.975)}{K(0.975)} \Leftrightarrow \frac{E(0.975)}{K(0.975)} < 1 - \frac{2 \cdot 0.975^2}{3} = 0.36625,$$

а это, как видно из (15), верно. Таким образом,

$$A_2 \left(y_2 \left(\frac{1}{3} \right) \right) < A_2(0.975) < 3.1 < \pi.$$

Левое неравенство (13) доказано. Докажем правое неравенство (13) с помощью двусторонних оценок значений полных эллиптических интегралов $E(0.99)$ и $K(0.99)$, взятых из тех же таблиц:

$$(16) \quad 1.02 < E(0.99) < 1.03, \quad 3.35 < K(0.99) < 3.36.$$

Отсюда сразу же видно, что $A_2(0.99) > \pi$ и осталось убедиться в том, что $0.99 < y_2(1/2)$: тогда в силу возрастания A_2 правое неравенство (13) будет доказано. В силу возрастания функции x_2 имеем

$$(17) \quad 0.99 < y_2 \left(\frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow x_2(0.99) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{0.99^2} \left(1 - \frac{E(0.99)}{K(0.99)} \right) < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{0.99^2 \cdot 3}{4} = 0.264925 < \frac{E(0.99)}{K(0.99)}.$$

Из упомянутых таблиц находим

$$\frac{E(0.99)}{K(0.99)} > \frac{1.02}{3.36} > 0.3,$$

что и требовалось доказать. Правое неравенство (13) доказано, и доказательство леммы 4 завершено.

Список литературы

- [1] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain. *Introduction to Riemannian and sub-Riemannian geometry*, Preprint SISSA 09/2012/M, 2017, 525 pp. [↑]₂₅₃
- [2] А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков. «Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля», *Матем. сб.*, **202**:11 (2011), с. 31–54. [↑]₂₅₄
- [3] A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov. “Conjugate points in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group”, *Journal of Mathematical Sciences*, **195**:3 (2013), pp. 369–390. [↑]₂₅₄
- [4] A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov. “Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group”, *ESAIM: COCV*, **21**:4 (2015), pp. 958–988. [↑]₂₅₄
- [5] A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov. “Maxwell strata and cut locus in sub-Riemannian problem on Engel group”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **22**:8 (December 2017), pp. 909–936. [↑]₂₅₄
- [6] A. A. Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, I. Kupka. “Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case”, *J. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **2** (1997), pp. 377–448. [↑]₂₅₄
- [7] Ю. Л. Сачков. «Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны», *Матем. сб.*, **197**:6 (2006), с. 111–160. [↑]₂₅₄
- [8] I. Beschastnyi, A. Medvedev. *Left-invariant Sub-Riemannian Engel structures: abnormal geodesics and integrability*. [↑]₂₅₄
- [9] P. F. Byrd, M. D. Friedman, *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. **67**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1971. [↑]_{255, 260}
- [10] Н. И. Ахиезер. *Элементы теории эллиптических функций*, 2-е издание, Наука, М., 1970. [↑]_{255, 259}
- [11] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. *Интегралы и ряды*. Т. 1, Физматлит, М., 2003. [↑]₂₅₉

Поступила в редакцию	26.10.2018
Переработана	02.12.2018
Опубликована	05.12.2018

Пример ссылки на эту публикацию:

А. Ю. Попов, Ю. Л. Сачков. «Двусторонняя оценка корня одного уравнения, содержащего полные эллиптические интегралы». *Программные системы: теория и приложения*, 2018, **9**:4(39), с. 253–264.

10.25209/2079-3316-2018-9-4-253-264

http://psta.psir.ru/read/psta2018_4_253-264.pdf

Об авторах:

Антон Юрьевич Попов

ведущий научный сотрудник механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, ведущий научный сотрудник (работа по совместительству) ИЦПУ ИПС им. А.К. Айламазяна РАН, д.ф-м.н. Основные научные интересы: теория функций.

0000-0001-8761-1450

e-mail: yusachkov@gmail.com

Юрий Леонидович Сачков

Руководитель ИЦПУ ИПС им. А.К. Айламазяна РАН, д.ф-м.н. Основные научные интересы: математическая теория управления.

0000-0002-3998-3177

e-mail: yusachkov@gmail.com

CSCSTI 27.37.17

UDC 517.977

Anton Popov, Yuri Sachkov. *Two-side bound of a root of an equation containing complete elliptic integrals.*

ABSTRACT. We prove uniqueness of root of an equation arising in a problem of geometric control theory. The problem consists of description of singularity of the sub-Riemannian sphere on the Engel group near abnormal length minimizer.

During the proof, several new inequalities for complete elliptic integrals were obtained. For example, we proved that the function $K(k)E(k)$ is increasing at the segment $[0, 1]$; this fact was not noticed before in literature.

The method of investigation developed and the results obtained can be useful both for the study of elliptic integrals and for solving problems where such integrals arise (e.g. in problems of sub-Riemannian geometry). (*In Russian*).

Key words and phrases: asymptotics, complete elliptic integral, sub-Riemannian geometry.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 49J20; 11J89

References

- [1] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain. *Introduction to Riemannian and sub-Riemannian geometry*, Preprint SISSA 09/2012/M, 2017, 525 pp. ²⁵³
- [2] A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov. "Extremal trajectories in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group", *Sbornik: Mathematics*, **202**:11 (2011), pp. 1593–1615. ²⁵⁴
- [3] A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov. "Conjugate points in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group", *Journal of Mathematical Sciences*, **195**:3 (2013), pp. 369–390. ²⁵⁴
- [4] A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov. "Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group", *ESAIM: COCV*, **21**:4 (2015), pp. 958–988. ²⁵⁴
- [5] A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov. "Maxwell strata and cut locus in sub-Riemannian problem on Engel group", *Regular and Chaotic Dynamics*, **22**:8 (December 2017), pp. 909–936. ²⁵⁴
- [6] A. A. Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, I. Kupka. "Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case", *J. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **2** (1997), pp. 377–448. ²⁵⁴
- [7] Yu. L. Sachkov. "Complete description of the Maxwell strata in the generalized Dido problem", *Sbornik: Mathematics*, **197**:6 (2006), pp. 901–950. ²⁵⁴

© A. Y. POPOV, Y. L. SACHKOV, 2018

© AILAMAZAN PROGRAM SYSTEMS INSTITUTE OF RAS, 2018

© PROGRAM SYSTEMS: THEORY AND APPLICATIONS (DESIGN), 2018

10.25209/2079-3316-2018-9-4-253-264

- [8] I. Beschastnyi, A. Medvedev. *Left-invariant Sub-Riemannian Engel structures: abnormal geodesics and integrability*. [↑](#)₂₅₄
- [9] P. F. Byrd, M. D. Friedman, *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. **67**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1971. [↑](#)_{255, 260}
- [10] N. I. Akhiezer. *Elements of elliptic functions theory*, 2-ye izdaniye, Nauka, M., 1970 (in Russian). [↑](#)_{255, 259}
- [11] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev. *Integrals and series*. V. 1, Fizmatlit, M., 2003 (in Russian). [↑](#)₂₅₉

Sample citation of this publication:

Anton Popov, Yuri Sachkov. “Two-side bound of a root of an equation containing complete elliptic integrals”. *Program Systems: Theory and Applications*, 2018, **9**:4(39), pp. 253–264. (*In Russian*). 10.25209/2079-3316-2018-9-4-253-264

http://psta.psiras.ru/read/psta2018_4_253-264.pdf