И. В. Расина, И. С. Гусева

Метод улучшения управления для неоднородных дискретных систем с промежуточными критериями

Аннотация. Рассматривается класс неоднородных дискретных систем с промежуточными критериями, как широко распространенных на практике, так и получающихся при дискретизации непрерывных систем при решении задач оптимизации итерационными методами. Для указанного класса на основе аналога достаточных условий оптимальности Кротова в двух формах строится метод улучшения управления. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова и фразы: неоднородные дискретные системы, промежуточные критерии, оптимальное управление.

Введение

Многочисленные теоретические результаты, полученные в теории оптимального управления, включающие как необходимые, так и достаточные условия оптимальности, для самых разнообразных классов управляемых систем не предполагают их непосредственного использования. Проблема связана с непреодолимыми трудностями разрешимости в аналитическом виде тех или иных соотношений, следующих из теории, для любой практической задачи. Поэтому теоретические результаты всегда сопровождались построением и развитием разнообразных итерационных методов. Отследить огромное количество работ, представляющие различные научные школы и направления, вряд ли возможно. Поскольку далее будут существенно использоваться обобщения и аналоги достаточных условий оптимальности Кротова [1], то некоторое представление о работах в этом направлении дает обзор [2] и работы [3–5].

© И. В. Расина⁽¹⁾ И. С. Гусева⁽²⁾ 2018

© Институт программных систем имени А. К. Айламазяна РАН⁽¹⁾ 2018

© Бурятский государственный университет⁽²⁾ 2018

© Программные системы: теория и приложения (дизайн), 2018

Предложенный в [6] подход, основанный на интерпретации абстрактной модели многошаговых управляемых процессов [7] как дискретно-непрерывной системы (ДНС) и распространенный на неоднородные дискретные системы (НДС) [8], позволил по существу декомпозировать неоднородную систему на однородные подсистемы, построить двух уровневую иерархическую модель и обобщить естественным образом условия оптимальности и алгоритмы оптимизации, разработанные для однородных систем. Под этим понимаются системы с неизменной структурой, исследуемые в рамках классических представлений теории оптимального управления.

Заметим, что при таком подходе все однородные подсистемы связаны общей целью, представленной в модели функционалом. Однако это не исключает того факта, что каждая однородная подсистема может при этом иметь и свою собственную цель. Такое обобщение модели НДС ранее не рассматривалось.

В данной работе предлагается обобщение ранее полученных достаточных условий оптимальности управления в двух формах для НДС при условии наличия промежуточных критериев у однородных моделей нижнего уровня. На основе последних строится метод улучшения управления и рассматривается иллюстративный пример.

1. Неоднородные дискретные процессы с промежуточными критериями

Рассмотрим двухуровневую модель, в которой нижний уровень составляют дискретные динамические системы однородной структуры. На верхнем уровне фигурирует дискретная модель общего вида

$$(1) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= f(k, x(k), u(k)), \\ k \in \mathbf{K} &= \{k_I, k_I + 1, \dots, k_F\}, \quad u \in \mathbf{U}(k, x), \end{aligned}$$

где k — номер шага (этапа), x и u — соответственно переменные состояния и управления произвольной природы (возможно различной) для различных k , $\mathbf{U}(k, x)$ — заданное при каждом k и x множество.

На некотором подмножестве $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$, $k_F \notin \mathbf{K}'$, $u(k)$ интерпретируется как пара $(u^v(k), m^d(k))$, где $m^d(k)$ — процесс $(x^d(k, t), u^d(k, t))$, $t \in \mathbf{T}(k, z(k))$, $m^d(k) \in \mathbf{D}^d(k, z(k))$, а $\mathbf{D}^d$ — множество допустимых процессов m^d , удовлетворяющих системе

$$(2) \quad \begin{aligned} x^d(k, t+1) &= f^d(k, z, t, x^d(k, t), u^d(k, t)), \\ t \in \mathbf{T} &= \{t_I(z), t_I(z) + 1, \dots, t_F(z)\}, \end{aligned}$$

$$x^d \in \mathbf{X}^d(k, z, t), \quad u^d \in \mathbf{U}^d(k, z, t, x^d), \quad z = (k, x, u^v).$$

Для этой системы на множестве $\mathbf{T}$ задана промежуточная цель в виде функционала, который необходимо минимизировать:

$$I^k = \sum_{\mathbf{T}(z) \setminus t_F(z)} f^k(t, x^d(k, t), u^d(k, t)) \rightarrow \inf.$$

Здесь $\mathbf{X}^d(k, z, t)$, $\mathbf{U}^d(k, z, t, x^d)$ — заданные при каждом t , z и x^d множества. Оператор правой части (1) сводится к следующему:

$$\begin{aligned} f(k, x, u) &= \theta(z, \gamma^d(z)), \quad \gamma^d = (t_I, x_I^d, t_F, x_F^d) \in \mathbf{\Gamma}^d(k, z), \\ \mathbf{\Gamma}^d(z) &= \{\gamma^d: t_I = \tau(k, z), t_F = \vartheta(k, z), \\ &\quad x_I^d = \xi(k, z), \quad x_F^d \in \mathbf{\Gamma}_F^d(k, z)\}. \end{aligned}$$

На множестве $\mathbf{D}$ процессов

$$m = (x(k), u(k), x^d(k, t), u^d(k, t)),$$

удовлетворяющих (1), (2), рассматривается задача оптимального управления о минимизации конечного функционала $I = F(x(k_F))$ при фиксированных $k_I = 0$, k_F , $x(k_I)$ и дополнительных ограничениях $x(k) \in \mathbf{X}(k)$.

2. Достаточные условия оптимальности

Прежде чем получить достаточные условия оптимальности для рассматриваемой НДС введем в рассмотрение новые переменные x^{0k} и преобразуем подзадачу нижнего уровня к виду:

$$\begin{aligned} x^d(k, t+1) &= f^d(k, z, t, x^d(k, t), u^d(k, t)), \\ x^{0k}(k, t+1) &= x^{0k}(k, t) + f^k(t, x^d(k, t), u^d(k, t)), \quad x^{0k}(t_I(z)) = 0, \\ I^k &= x^{0k}, \quad \tilde{x}^d = (x^d, x^{0k}), \quad \tilde{f}^d = (f^d, f^k). \end{aligned}$$

Для решения этой задачи вводится множество $\mathbf{E}$ процессов m , где исключены дискретные цепочки, и обобщенный лагранжиан по аналогии с лагранжианом для НДС [4, 8]:

$$\begin{aligned} L &= G(x(k_F)) - \sum_{\mathbf{K} \setminus \mathbf{K}' \setminus k_F} R(k, x(k), u(k)) + \\ &+ \sum_{\mathbf{K}'} \left(G^d(z) - \sum_{\mathbf{T}(z) \setminus t_F} R^d(z, t, x^d(k, t), u^d(k, t)) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(x) &= F(x(k_F)) + \varphi(k_F, x) - \varphi(k_I, x(k_I)), \\
R(k, x, u) &= \varphi(k+1, f(k, x, u)) - \varphi(k, x), \\
G^d(k, z, \gamma^d) &= -\varphi(k+1, \theta(k, z, \gamma^d)) + \varphi(k, x(k)) - x^{0k}(k, t_F) + \\
&\quad + \tilde{\varphi}^d(k, z, t_F, x_F^d) - \tilde{\varphi}^d(k, z, t_I, x_I^d), \\
R^d(k, z, t, x^d, u^d) &= \tilde{\varphi}^d(k, z, t+1, f^d(k, z, t, x^d, u^d)) - \\
&\quad - f^k(t, x^d(k, t), u^d(k, t)) - \tilde{\varphi}^d(k, z, t, x^d), \\
\mu^d(k, z, t) &= \sup_{\substack{x^d \in \mathbf{X}^d(k, z, t), \\ u^d \in \mathbf{U}^d(k, z, t, x^d)}} R^d(k, z, t, x^d, u^d), \quad l^d(k, z) = \inf_{\substack{(\gamma^d) \in \mathbf{\Gamma}^d(k, z), \\ x^d \in \mathbf{X}^d(k, z, t_F)}} G^d(k, z, \gamma^d), \\
\mu(k) &= \begin{cases} \sup\{R(k, x, u) : x \in \mathbf{X}(k), u \in \mathbf{U}(k, x)\}, & t \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}', \\ -\inf\{l^d(z) : x \in \mathbf{X}(k), u^v \in \mathbf{U}^v(k, x)\}, & k \in \mathbf{K}', \end{cases} \\
l &= \inf\{G(x) : x \in \mathbf{\Gamma} \cap \mathbf{X}(k_F)\}.
\end{aligned}$$

Здесь $\varphi(k, x)$ — произвольный функционал, $\tilde{\varphi}^d(k, z, t, x^d, x^{0k}) = \varphi^d(k, z, t, x^d) - x^{0k}$ — произвольное параметрическое семейство функционалов (с параметрами k, z).

Легко убедиться, что $L(m) = I(m)$ при $m \in \mathbf{D}$, т. е. при выполнении отброшенных связей $L(m)$ совпадает с $I(m)$. Действительно, при $m \in \mathbf{D}$, как видно,

$$\begin{aligned}
R &= \varphi(k+1, x(k+1)) - \varphi(k, x), \\
R^d &= \varphi^d(k, z, t+1, x^d(t+1)) - f^k(t, x^d(k, t), u^d(k, t)) - \varphi^d(k, z, t, x^d), \\
G^d(k, z, \gamma^d) &= -\varphi(k+1, \theta(k, z, \gamma^d)) + \varphi(k, x(k)) + \\
&\quad + \varphi^d(k, z, t_F, x_F^d) - \varphi^d(k, z, t_I, x_I^d), \\
L &= F(x(k_F)) + \sum_{\mathbf{K} \setminus \mathbf{K}'} (\varphi(k, x) - \varphi(k, x)) + \\
&\quad + \sum_{\mathbf{K}'} \left(\sum_{\mathbf{T}(k, z)} (\varphi^d(k, z, t, x^d) - \varphi^d(k, z, t, x^d)) \right).
\end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следуют теоремы, аналогичные теоремам для НДС [4, 8].

ТЕОРЕМА 1. Для любого элемента $m \in \mathbf{D}$ и любых φ, φ^d имеет место оценка

$$I(m) - \inf_{\mathbf{D}} I \leq \Delta = I(m) - l.$$

Пусть имеются два процесса $m^I \in \mathbf{D}$ и $m^{II} \in \mathbf{E}$ и функции φ и φ^d такие, что $L(m^{II}) < L(m^I) = I(m^I)$, и $m^{II} \in \mathbf{D}$.

Тогда $I(m^{II}) < I(m^I)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть имеются последовательность процессов $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ и функционалы φ , φ^d , такие что:

- 1) $R(k, x_s(k), u_s(k)) \rightarrow \mu(k)$, $k \in \mathbf{K}$;
- 2) $R^d(z_s, t, x_s^d(t), u_s^d(t)) - \mu^d(z_s, t) \rightarrow 0$, $k \in \mathbf{K}'$, $t \in \mathbf{T}(z_s)$;
- 3) $G^d(z_s, \gamma_s^d) - l^d(z_s) \rightarrow 0$, $k \in \mathbf{K}'$;
- 4) $G(x_s(t_F)) \rightarrow l$.

Тогда последовательность $\{m_s\}$ — минимизирующая для I на $\mathbf{D}$.

3. Достаточные условия в форме Беллмана

Один из возможных способов задания пары $(\varphi, \tilde{\varphi}^d)$ — это потребовать выполнения условия $\inf_{\{m_u\}} L = 0$ тождественно при всех m_x .

Здесь $m_u = (u(k), u^v(k), u^d(k, t))$, т.е. совокупность управляющих функций, принимающих значения из $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^v$, $\mathbf{U}^d$ соответственно, $m_x = (x(k), \tilde{x}^d(k, t))$ — совокупность траекторий верхнего и нижнего уровня. Такое требование непосредственно ведет к конкретным условиям оптимальности типа Беллмана, которые также могут быть использованы для построения эффективных итераций улучшения процесса. Пусть $\Gamma_F^d(z) = \mathbb{R}^{n(k)}$, $\theta(z, \gamma^d) = \theta(z, x_F^d)$. Других ограничений на переменные состояния нет.

Получается следующая рекуррентная цепочка относительно функционалов Кротова-Беллмана двух уровней φ и $\varphi^d(z)$:

$$\varphi(k, x) = \sup_{u \in \mathbf{U}(k, x)} \varphi(k+1, f(k, x(k), u)), \quad k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}' \setminus k_F,$$

$$\varphi(k_F, x) = -F(x),$$

$$(3) \quad \varphi^d(k, t) = \sup_{u^d \in \mathbf{U}^d(z, t, x^d)} \left(\varphi^d(k, t+1, f^d(k, t, x^d(k, t), u^d)) - \right. \\ \left. - f^k(t, x^d(k, t), u^d(k, t)) \right),$$

$$\varphi^d(z, t_F, x_F^d) = \varphi(k+1, \theta(z, x_F^d)),$$

$$\varphi(k, x) = \sup_{u^v \in \mathbf{U}^v(t, x)} \varphi^d(z, \tau(z), \xi(z)), \quad k \in \mathbf{K}',$$

которая разрешается в порядке следования от k_F к k_I .

Предположим, что решение цепочки $(\varphi(k, x(k)), \varphi^d(z, t, x^d))$ существует и, кроме того, существуют соответствующие этому решению управления $\tilde{u}(k, x)$, $\tilde{u}^v(k, x)$, $\tilde{u}^d(z, t, x^d)$, получающиеся в результате операций максимума в (3). Подставляя найденные управления в правые части заданных дискретных соотношений, будем иметь:

$$x(k+1) = f(k, x(t), \tilde{u}(k, x(t))), \quad x(k_I) = x_I, \quad k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}' \setminus k_F,$$

$$x(k+1) = \theta(k, x(k), \tilde{u}^v(k, x(k)), \gamma^d(\tilde{z})),$$

$$x^d(k, t+1) = f^d(k, x(k), \tilde{u}^v(k, x(k)), t, x^d, \tilde{u}^d(\tilde{z}(k), t, x^d)),$$

$$t_I = \tau(\tilde{z}(k)), \quad x^d(t_I) = \xi(\tilde{z}(k)), \quad \tilde{z}(k) = (k, x(k), \tilde{u}^v(k, x(k)))$$

при $k \in \mathbf{K}'$. Тогда решение этой дискретно-дискретной цепочки

$$(x(k), u(k))_*, \quad k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}',$$

$$(x(k), \hat{u}(k), x^d(k, t), u^d(k, t))_*, \quad k \in \mathbf{K}', \quad t \in \mathbf{T}(z_*(k)),$$

если оно существует, задает в целом оптимальный неоднородный дискретный процесс m_* . Заметим, что функционал $\varphi^d(z, t, x^d)$ в данном случае можно считать фактически не зависящем от x , поскольку он, как синтезирующий, «обслуживает» семейство задач для различных начальных условий.

4. Метод улучшения управления

Предположим, что $\mathbf{X}(k) = \mathbb{R}^{m(k)}$, $\mathbf{X}^d(z, t) = \mathbb{R}^{n(k)}$, $x_I^d = \xi(z)$, k_I , x_I , k_F , $t_I(k)$, $t_F(k)$ — заданы, $x_F^d \in \mathbb{R}^{n(k)}$ и системы нижнего уровня не зависят от управления u^v . Рассматриваемая далее задача улучшения состоит, по существу, в построении оператора $\theta(m)$, $\theta: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$, такого что $I(\theta(m)) \leq I(m)$. При некотором заданном начальном элементе такой оператор генерирует улучшающую, в частности, минимизирующую последовательность $\{m_s\}: m_{s+1} = \theta(m_s)$.

Будем строить метод на основе принципов расширения [9] и локализации [10]. Согласно последнему, задача улучшения некоторого элемента m^1 сводится к задаче о минимуме вспомогательного функционала

$$(4) \quad I_\alpha(m) = \alpha I(m) + (1 - \alpha) J(m^1, m), \quad \alpha \in [0, 1],$$

где $J(m^I, m)$ — функционал типа метрики. Изменяя α от 0 к 1, можно достичь необходимой степени близости m_α к m^I и эффективно использовать аппроксимации конструкций достаточных условий в окрестности m^I . В итоге получается алгоритм с параметром α , играющим роль регулятора, настраиваемого при конкретном применении. Этот параметр выбирается так, чтобы разность $I(m^I) - I(m_\alpha)$ была наибольшей, тогда соответствующий элемент m_α принимается за m^{II} .

Вспомогательный функционал зададим в виде:

$$I_\alpha = \alpha I + (1 - \alpha) \left(\sum_{\mathbf{K} \setminus \mathbf{K}' \setminus k_F} \frac{1}{2} |\Delta u(k)|^2 + \sum_{\mathbf{K}'} \sum_{\mathbf{T}(z) \setminus t_F} \frac{1}{2} |\Delta u^d(k, t)|^2 \right),$$

где $\alpha \in [0, 1]$, $\Delta u = u - u^I$, $\Delta u^d = u^d - u^{dI}$.

Согласно указанному принципу расширения по заданному элементу $m^I \in \mathbf{D}$ требуется найти элемент $m^{\text{II}} \in \mathbf{D}$, на котором $I_\alpha(m^{\text{II}}) = L_\alpha(m^{\text{II}}) < I_\alpha(m^I) = L_\alpha(m^I)$, или $L_\alpha(m^{\text{II}}) - L_\alpha(m^I) < 0$. Рассмотрим приращение функционала $L_\alpha(m)$, имеем:

$$\begin{aligned} \Delta L_\alpha \approx & G_{x_F}^T \Delta x_F - \sum_{\mathbf{K} \setminus \mathbf{K}' \setminus k_F} \left(R_x^T \Delta x + R_u^T \Delta u + \frac{1}{2} \Delta u^T R_{uu} \Delta u \right) + \\ & + \sum_{\mathbf{K}' \setminus k_F} \left(G_{x_F^d}^{dT} \Delta x_F^d + G_x^{dT} \Delta x \right) - \\ & - \sum_{\mathbf{T}(z) \setminus t_F} \left(R_{x^d}^{dT} \Delta x^d + R_x^{dT} \Delta x + R_{u^d}^{dT} \Delta u^d + \frac{1}{2} \Delta u^{dT} R_{u^d u^d}^d \Delta u^d \right), \end{aligned}$$

где $\Delta u = u - u^I$, $\Delta x = x - x^I$, $\Delta u^d = u^d - u^{dI}$, $\Delta x^d = x^d - x^{dI}$, $\Delta x_F^d = x_F^d - x_F^{dI}$, $x_F = x(k_F)$. Здесь функции R , G , R^d , G^d определены для функционала I_α , а их первые и вторые производные подсчитаны при $u = u^I(k)$, $x = x^I(k)$, $x^d = x^{dI}(k, t)$, $u^d = u^{dI}(k, t)$.

Предположим, что матрицы R_{uu} и $R_{u^d u^d}^d$ отрицательно определены (этого всегда можно добиться за счет выбора параметра α [10]). Найдем Δu , Δu^d доставляющие максимум выражениям, стоящим под знаками сумм $\sum_{\mathbf{K} \setminus \mathbf{K}' \setminus k_F}$ и $\sum_{\mathbf{T}(z) \setminus t_F}$ соответственно. Нетрудно видеть, что

$$\Delta u = -(R_{uu})^{-1} R_u, \quad \Delta u^d = -(R_{u^d u^d}^d)^{-1} R_{u^d}^d.$$

Зададим функции φ и $\varphi^d(z)$ в виде:

$$\varphi = \psi^T(k) x(k), \quad \varphi^d = \lambda^T(k, t) x(k) + \psi^{dT}(k, t) x^d(k, t),$$

где ψ, ψ^d, λ — вектор-функции. Для выполнения неравенства $\Delta L < 0$ потребуем далее, чтобы остальные слагаемые под знаками выше указанных сумм не зависели от $\Delta x, \Delta x_F^d, \Delta x^d$. Последнее требование будет достигнуто, если:

$$G_{x_F} = 0, R_x = 0, G_{x_F^d}^d = 0, G_x^d = 0, R_{x^d}^d = 0, R_x^d = 0.$$

Расшифровка указанных условий приводит к задаче Коши для НДС относительно ψ, ψ^d, λ с начальными условиями на правом конце:

$$(5) \quad \psi(k_F) = -\alpha F_{x(k_F)}, \quad \psi(k) = H_x(\psi(k+1)),$$

$$H(k, \psi, x, u) = \psi^T f(k, x, u), \quad k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}' \setminus k_F,$$

$$(6) \quad \psi(k) = H_x(\psi(k+1)) + \lambda(t_I) + \xi_x^T \lambda(t_I) - \lambda(t_F),$$

$$H(k, \psi, x_I^d, x_F^d) = \psi^T \theta(z, x_I^d, x_F^d) \quad k \in \mathbf{K}'$$

$$(7) \quad \begin{aligned} \psi^d(k, t) &= H_{x^d}^d(\psi^d(k, t+1)), \\ \psi^d(k, t_F) &= H_{x_F^d}^d(z, \psi(k+1), x_I^d, x_F^d), \end{aligned}$$

$$(8) \quad \lambda(k, t) = H_x^d(\psi^d(k, t+1)), \quad \lambda(k, t_F) = H_{x_F}(\psi(k+1)),$$

$$H^d(z, t, \psi^d, x^d, u^d) = \psi^{dT} f^d(z, t, x^d, u^d) - f^k(t, x^d(k, t), u^d(k, t)), \quad k \in \mathbf{K}'.$$

Здесь для краткости в правых частях указаны лишь аргументы $\psi(k+1)$ и $\psi^d(k, t+1)$, необходимые для понимания соотношений. Отметим, что эта система линейна, т.е. заведомо разрешается.

При этом приращения управляющих воздействий имеют вид:

$$(9) \quad \begin{aligned} \Delta u &= -(H_{uu} - (1 - \alpha)E)^{-1} H_u, \\ \Delta u^d &= -(H_{u^d u^d}^d - (1 - \alpha)E)^{-1} H_{u^d}^d, \end{aligned}$$

где E — единичные матрицы соответствующих размеров.

5. Итерационная процедура

На основе полученных соотношений можно сформулировать следующую итерационную процедуру.

1. «Слева направо» просчитывается НДС (1), (2) при $u = u_s(k)$, $u^d = u_s^d(k, t)$ и заданных начальных условиях, получается соответствующая траектория $(x_s(k), x_s^d(k, t))$.

2. «Справа налево» разрешается НДС относительно $\psi(k)$, $\psi^d(k, t)$ и $\lambda(k, t)$.

3. Находятся Δu , Δu^d и новые управления $u = u_s(k) + \Delta u$, $u^d = u_s^d(k, t) + \Delta u^d$.

4. При найденных управлениях и начальном условии $x(k_I) = x_I$ просчитывается «слева направо» исходная НДС (1), (2). Тем самым определяется новый элемент m_{s+1} .

Процесс итераций заканчивается, когда $|I_{s+1} - I_s| \approx 0$ с заданной точностью.

Имеет место следующее утверждение о сходимости.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для НДС (1), (2) построена указанная итерационная процедура, и функционал I ограничен снизу. Тогда она генерирует улучшающую последовательность элементов $\{m_s\} \in \mathbf{D}$, сходящуюся по функционалу, т.е. существует число I^* , такое что $I^* \leq I(m_s)$, $I(m_s) \rightarrow I^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство следует непосредственно из свойства монотонности (по функционалу) рассмотренного оператора улучшения. Таким образом, получается монотонная числовая последовательность

$$\{I_s\} = \{I(m_s)\}, \quad I_{s+1} \leq I_s,$$

ограниченная снизу, которая по известной теореме анализа сходится к некоторому пределу: $I_s \rightarrow I_*$. $\square$

ПРИМЕР 1. Проиллюстрируем работу метода на примере, нелинейные уравнения для которого взяты из [11]. Динамика системы описывается следующим образом:

$$V(t+1) = q(N, S)V(t) - c(S)z - dw, \quad q(N, S) = a(S) - \frac{l}{N},$$

$$N(t+1) = N(t) + g(N(t) - \bar{N}) - b(S)V(t) + z, \quad S(t+1) = S(t) + w,$$

$$t = t_I, t_I + 1, \dots, t_F; \quad V(t_I) = V_I, \quad N(t_I) = N_I, \quad S(t_I) = S_I.$$

$$\text{Здесь } a(S) = \frac{a_1 S + a_2}{S + a_3}, \quad b(S) = \frac{b_1 S + b_2}{S + b_3}.$$

Заданное время функционирования системы разбито на два периода одинаковой продолжительности, обозначим момент окончания первого периода через t_1 . В первом периоде действуют два управления w , z , а

во втором лишь z , при этом w задается постоянным. Квадратические критерии периодов имеют соответственно вид:

$$f^0(0, t, V(0, t), N(0, t), S(0, t), w(0, t)) = \frac{1}{2}((\bar{w} - w)^2 + (z - \bar{z})^2),$$

$$f^1(1, t, V(1, t), N(1, t), S(1, t), z(1, t)) = \frac{1}{2}(z - \bar{z})^2,$$

где $\bar{w}$, $\bar{z}$ — заданные величины.

Требуется найти такие законы управления на каждом из периодов, чтобы показатель переменной состояния V в момент t_F был минимальным, т.е. $I = V(t_F) \rightarrow \min$.

Нетрудно видеть, что $K = 0, 1, 2$. Поскольку роль связующей переменной на двух рассматриваемых этапах играет $V(k, t)$, то в терминах этой переменной легко записать процесс верхнего уровня: $x(0) = V(0, 0)$, $x(1) = V(0, t_1)$, $x(2) = x_1^d(1, t_F)$, $x(1) = V(0, t_1) = \theta$, $\xi = x^d(0, t_1)$. Тогда $I = x(2)$.

Выпишем основные конструкции метода:

$$\begin{aligned} & H^d(0, t, \psi_1^d(0, t+1), \psi_2^d(0, t+1), \psi_3^d(0, t+1), V, N, S, w) = \\ & = \psi_1^d(0, t+1)(q(N, S)V(t) - c(S)z - dw) + \psi_2^d(0, t+1)(N(t) + g(N(t) - \bar{N}) - \\ & - b(S)V(t) + z) + \psi_3^d(0, t+1)(S(t) + w) - \frac{1}{2}((\bar{w} - w)^2 + (z - \bar{z})^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H^d(1, t, \psi_1^d(1, t+1), \psi_2^d(1, t+1), \psi_3^d(1, t+1), V, N, S, z) = \\ & = \psi_1^d(1, t+1)(q(N, S)V(t) - c(S)z - dw) + \psi_2^d(1, t+1)(N(t) + g(N(t) - \bar{N}) - \\ & - b(S)V(t) + z) + \psi_3^d(1, t+1)(S(t) + w) - \frac{1}{2}(z - \bar{z})^2, \end{aligned}$$

$$H(k, \psi(k+1), x) = \psi(k+1)x_1^d(k, t_F), \quad \psi(1) = 0, \quad \psi(2) = -\alpha,$$

$$\psi_1^d(0, t) = H_V^d = \psi_1^d(0, t+1)q - \psi_2^d(0, t+1)b,$$

$$\psi_2^d(0, t) = H_N^d = \psi_1^d(0, t+1)V \frac{l}{N^2} + \psi_2^d(0, t+1)(1+g),$$

$$\psi_3^d(0, t) = H_S^d = \psi_1^d(0, t+1)V \frac{da}{dS} - \psi_2^d(0, t+1)V \frac{db}{dS} + \psi_3^d(0, t+1),$$

$$\psi_1^d(0, t_1) = \psi(1), \quad \psi_2^d(0, t_1) = 0, \quad \psi_3^d(0, t_1) = 0,$$

$$\psi_1^d(1, t) = H_V^d = \psi_1^d(1, t+1)q - \psi_2^d(1, t+1)b,$$

$$\psi_2^d(1, t) = H_N^d = \psi_1^d(1, t+1)V \frac{l}{N^2} + \psi_2^d(1, t+1)(1+g),$$

ТАБЛИЦА 1. Числовые данные

$a_1 = 0.057$	$a_2 = 1.72$	$a_3 = 1.7$	$\alpha = 0.5$
$b_1 = 0.013$	$b_2 = 0.015$	$b_3 = 0.6$	$c = 0.3$
$d = 2$	$g = -0.007$	$l = 0.8$	$\bar{N} = 100$
$N_I = 72$	$S_I = 0$	$t_1 = 5$	$t_I = 0$
$t_F = 100$	$V_I = 14$	$\bar{w} = 3$	$\bar{z} = 8$

$$\psi_3^d(1, t) = H_S^d = \psi_1^d(1, t+1)V \frac{da}{dS} - \psi_2^d(1, t+1)V \frac{db}{dS} + \psi_3^d(1, t+1),$$

$$\psi_1^d(1, t_F) = \psi(2), \quad \psi_2^d(1, t_F) = 0, \quad \psi_3^d(1, t_F) = 0,$$

$$\text{где } \frac{da}{dS} = \frac{a_1 a_3 - a_2}{(S + a_3)^2}, \quad \frac{db}{dS} = \frac{b_1 b_3 - b_2}{(S + b_3)^2}.$$

Приращения управлений определяются по формулам:

$$\Delta w(0, t) = \frac{d\psi^1(0, t+1) - \psi^3(0, t+1) - (\bar{w} - w)}{\alpha - 2},$$

$$\Delta z(j, t) = \frac{c\psi^1(j, t+1) - \psi^2(j, t+1) + (z - \bar{z})}{\alpha - 2}, \quad j = 0, 1.$$

Поскольку уравнения нижнего уровня не зависят от переменной x верхнего уровня, то $\lambda(k, t) = 0$.

Расчеты проводились при числовых данных представленных в таблице 1.

Начальное управление было задано в виде:

$$w^I = \begin{cases} 0.1, & t \in \{0, 1, \dots, t_1\}, \\ 1, & t \in \{t_1 + 1, \dots, t_F\}; \end{cases} \quad z^I = \begin{cases} 0.1, & t \in \{0, 1, \dots, t_1\}, \\ 1, & t \in \{t_1 + 1, \dots, t_F\}. \end{cases}$$

Решение получено за 8 итераций, изменение функционала приведено в таблице 2. На рисунках 1, 2 показаны переменные управления и состояния на начальной и конечной итерациях. Хотя система уравнений нелинейная, квадратический характер промежуточных функционалов приводит к ожидаемому результату и подтверждает работоспособность алгоритма. Выбор параметра α не оказывает существенного влияния на результат. Так при $\alpha = 0.5$ конечное значение функционала $V(k_F) = -6.2569$, а при $\alpha = 0.9$ получаем $V(k_F) = -6.2967$.

Таблица 2. Значение функционала по итерациям

Номер итерации	Значение функционала	Номер итерации	Значение функционала
0	−3.2452	5	−6.2449
1	−5.2533	6	−6.2532
2	−5.9226	7	−6.2560
3	−6.1458	8	−6.2569
4	−6.2202

Рис. 1. Графики управлений w, z

Рис. 2. Графики состояний $V(t), N(t), S(t)$

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрены НДС, в которых однородные дискретные системы нижнего уровня имеют собственные цели (критерии

оптимальности) на подмножествах всего периода функционирования неоднородной дискретной системы. Для таких систем дано обобщение ранее полученных достаточных условий оптимальности управления [8]. На основе этих условий построен метод улучшения управления, сформулирован его алгоритм и приведен иллюстративный пример, демонстрирующий работоспособность предложенного метода.

Список литературы

- [1] В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. *Методы и задачи оптимального управления*, Наука, М., 1973. ₂₃
- [2] В. И. Гурман, И. В. Расина, А. О. Блинов. «Эволюция и перспективы приближенных методов оптимального управления», *Программные системы: теория и приложения*, **2:2** (2011), с. 11–29. ₂₃
- [3] И. В. Расина. «Итерационные алгоритмы оптимизации дискретно-непрерывных процессов», *Автоматика и телемеханика*, 2012, №10, с. 3–17. ₂₃
- [4] И. В. Расина. *Иерархические модели управления системами неоднородной структуры*, Физматлит, М., 2014. _{23, 25, 26}
- [5] В. И. Гурман, И. В. Расина. «Метод глобального улучшения управления для неоднородных дискретных систем», *Программные системы: теория и приложения*, 2016, №1, с. 171–186. ₂₃
- [6] В. И. Гурман. «К теории оптимальных дискретных процессов», *Автоматика и телемеханика*, 1973, №6, с. 53–58. ₂₄
- [7] В. Ф. Кротов. «Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем», *ДАН СССР*, **172:1** (1967), с. 18–21. ₂₄
- [8] И. В. Расина. «Дискретные неоднородные системы и достаточные условия оптимальности», *Известия ИГУ. Серия Математика*, **19:1** (2016), с. 62–73. _{24, 25, 26, 35}
- [9] В. И. Гурман. «Принцип расширения в задачах управления», 1985. ₂₈
- [10] В. И. Гурман, И. В. Расина. «О практических приложениях достаточных условий сильного относительного минимума», *Автоматика и телемеханика*, 1979, №10, с. 12–18. _{28, 29}
- [11] В. И. Гурман, Е. А. Трушкова. *Практические методы оптимизации*, Учебное пособие, Университет города Переславля, Переславль-Залесский, 2009. ₃₁

Пример ссылки на эту публикацию:

И. В. Расина, И. С. Гусева. «Метод улучшения управления для неоднородных дискретных систем с промежуточными критериями». *Программные системы: теория и приложения*, 2018, **9:2(37)**, с. 23–38.

10.25209/2079-3316-2018-9-2-23-38

http://psta.psir.ru//read/psta2018_2_23-38.pdf

Об авторах:

Ирина Викторовна Расина

д.ф.-м.н., г.н.с. Исследовательского центра системного анализа Института программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, специалист в области моделирования и управления гибридными системами, автор и соавтор более 100 статей и 5 монографий

0000-0001-8939-2968

e-mail: irinarasina@gmail.com

Ирина Сергеевна Гусева

к.ф.-м.н., ст. преп. кафедры прикладной математики Института математики и информатики Бурятского государственного университета

0000-0001-8720-3676

e-mail: gulina.ig@gmail.com

UDC 517.977

Irina Rasina, Irina Guseva. *Control improvement method for non-homogeneous discrete systems with intermediate criterions.*

ABSTRACT. The class of non-homogeneous discrete systems with intermediate criterions is considered. These systems are prevalent in practice and can be obtained via discretization of continuous systems, when solving optimization problems using iterative methods. For these systems improvement method is constructed on base of the Krotov type sufficient optimality conditions in two forms. An illustrative example is given.

Key words and phrases: non-homogeneous discrete systems, intermediate criterions, optimal control.

References

- [1] V. F. Krotov, V. I. Gurman. *Methods and problems of optimal control*, Nauka, M., 1973 (in Russian).^{↑₂₃}
- [2] V. I. Gurman, I. V. Rasina, A. O. Blinov. “Evolution and prospects of approximate methods of optimal control”, *Program Systems: Theory and Applications*, **2**:2 (2011), pp. 11–29 (in Russian). ^{↑₂₃}
- [3] I. V. Rasina. “Iterative optimization algorithms for discrete-continuous processes”, *Automation and Remote Control*, **73**:10 (2012), pp. 1591–1603. ^{↑₂₃}
- [4] I. V. Rasina. *Hierarchical models of control of heterogeneous structure systems*, Fizmatlit, M., 2014 (in Russian).^{↑_{23, 25, 26}}
- [5] V. I. Gurman, I. V. Rasina. “Global Control Improvement Method for Non-homogeneous Discrete Systems”, *Program Systems: Theory and Applications*, 2016, no.1, pp. 171–186 (in Russian). ^{↑₂₃}
- [6] V. I. Gurman. “Theory of optimum discrete processes”, *Automation and Remote Control*, **34**:7 (1973), pp. 1082–1087. ^{↑₂₄}
- [7] V. F. Krotov. “Sufficient conditions for the optimality of discrete control systems”, *DAN SSSR*, **172**:1 (1967), pp. 18–21. ^{↑₂₄}
- [8] I. V. Rasina. “Discrete nonuniform systems and sufficient conditions of optimality”, *Izvestiya IGU. Seriya Matematika*, **19**:1 (2016), pp. 62–73 (in Russian).
^{↑_{24, 25, 26, 35}}
- [9] V. I. Gurman. “The extension principle in control problems: General theory and learning examples”, 1985 (in Russian).^{↑₂₈}

© I. V. RASINA⁽¹⁾, I. S. GUSEVA⁽²⁾ 2018

© AILAMAZYAN PROGRAM SYSTEMS INSTITUTE OF RAS⁽¹⁾ 2018

© BURYAT STATE UNIVERSITY⁽²⁾ 2018

© PROGRAM SYSTEMS: THEORY AND APPLICATIONS (DESIGN), 2018

10.25209/2079-3316-2018-9-2-23-38

- [10] V. I. Gurman, I. V. Rasina. “On practical applications of conditions sufficient for a strong relative minimum”, *Automation and Remote Control*, **40**:10 (1980), pp. 1410–1415. [↑]_{28, 29}
- [11] V. I. Gurman, Ye. A. Trushkova. *Practical methods of optimization*, Uchebnoye posobiye, Universitet goroda Pereslavlya, Pereslavl-Zalesskiy, 2009 (in Russian). [↑]₃₁

Sample citation of this publication:

Irina Rasina, Irina Guseva. “Control improvement method for non-homogeneous discrete systems with intermediate criterions”. *Program Systems: Theory and Applications*, 2018, **9**:2(37), pp. 23–38. (*In Russian*).

10.25209/2079-3316-2018-9-2-23-38

http://psta.psir.ru/read/psta2018_2_23-38.pdf