И. В. Расина, О. В. Фесько, А. О. Блинов

Сети аффинных операторов

Аннотация. Рассматриваются сети аффинных операторов как частный случай двухуровневой модели сетей с обыкновенными дифференциальными системами, для которых ставится задача оптимального управления. Приводятся достаточные условия оптимальности. Их работоспособность иллюстрируется на содержательном примере.

Ключевые слова и фразы: сети операторов, двухуровневые системы, оптимальное управление.

Введение

Еще в 1975 году академик Н. Н. Моисеев [1] указывал на необходимость использования иерархических моделей для решения сложных задач управления. Однако активные интерес и исследования систем неоднородной структуры начались лишь в 80-х годах прошлого столетия. Авторы представляли их под разнообразными названиями: системы переменной структуры [2], дискретно-непрерывные системы [3], логико-динамические системы [4, 5], импульсные системы [6], гибридные системы [7, 8]. При этом системы сетевой структуры практически не рассматривались. Понятие сети операторов было впервые введено В. И. Гурманом в работе [9] и там же сформулированы достаточные условия оптимальности, как обобщение и развитие достаточных условий оптимальности Кротова, а в [10] предложено применить это понятие для моделирования систем неоднородной структуры. В работе [10] построена двухуровневая модель сети операторов, нижний уровень которой представлен управляемыми дифференциальными системами. На этой модели поставлена задача оптимального управления и получены достаточные условия оптимальности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-01915 А, 15-01-01923 А, 15-07-09091 А).

© И. В. Расина⁽¹⁾, О. В. Фесько⁽²⁾, А. О. Блинов⁽³⁾ 2017

© Институт программных систем имени А. К. Айламазяна РАН^(1, 2) 2017

© 2017

© Программные системы: теория и приложения, 2017

DOI: 10.25209/2079-3316-2017-8-4-117-131

Рис. 1: Сеть операторов

В данной работе рассматривается частный случай, когда все зависимости верхнего и нижнего уровней линейны по переменным состояния и управления. Выводятся линейные соотношения для нахождения коэффициентов разрешающих функций типа Кротова обоих уровней. Применение полученных условий продемонстрировано на примере решения задачи оптимизации водоохранных мероприятий в бассейне реки.

1. Сеть операторов и достаточные условия оптимальности

Пусть имеется N операторов произвольной природы $f_k : \mathbb{X}_k \times \mathbb{U}_k \rightarrow \mathbb{Y}_k$,

$$(1) \quad y_k = f(k, x_k, u_k).$$

Вводятся подмножества $\mathbb{X}_{kq}$, такие что $\prod_{q=1}^{n_k} \mathbb{X}_{kq} = \mathbb{X}_k$.

Говорят, что выход оператора l *подается на вход* оператора k , если для некоторого q имеет место равенство $\chi(k, q, x_k) = y_l$, где $\chi(k, q, x_k)$ — оператор проектирования на подмножество $\mathbb{X}_{kq}$.

Пусть рассматриваемые операторы соединены указанным образом по некоторой схеме, представляемой ориентированным графом (рис. 1).

Предполагается, что для данного k между номерами q и l имеет место взаимно-однозначное соответствие.

Иными словами, $\mathbb{X}_k$ олицетворяет множество входов k -го оператора, занятых в соединениях, а $\mathbb{U}_k$ — множество свободных входов. Такая модель называется *сетью операторов*. Специальный случай сети — цепочка произвольных операторов — может рассматриваться как общая модель динамической системы с переменной структурой.

Рассматривается задача о минимуме функционала

$$(2) \quad I = \sum_1^N I_k(y_k) = \sum_1^N I_k(f(k, x_k, u_k)) = \sum_1^N f^0(k, x_k, u_k)$$

на множестве $\mathbf{D}$ наборов $m = \{(x_k, u_k)\}$, $k = 1, \dots, N$, связанных указанными соотношениями сети и возможными дополнительными ограничениями вида $(x_k, u_k) \in \mathbf{B}(k)$, где $\mathbf{B}(k)$ — заданное при каждом k множество. Требуется найти минимизирующую последовательность $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$, т.е. такую, что $I(m_s) \rightarrow \inf_{\mathbf{D}} I$.

Вводится множество $\mathbf{E}$ элементов m , не связанных сетевыми условиями — равенствами $\chi(k, j, x_k) = y_l$. Строится обобщенный лагранжиан:

$$(3) \quad L = - \sum_{k=1}^N R(k, x_k, u_k),$$

$$R(k, x, u) = \sum_{l=1}^N (\varphi(k, l, f(k, x, u)) - \varphi(l, k, \chi(k, l, x))) - f^0(k, x, u),$$

где $\varphi(k, l, y_k)$, $k, l = 1, \dots, N$ — произвольные функционалы, такие что $\varphi(k, l, y_k) \equiv 0$, если равенство $\chi(k, j, x_k) = y_l$ отсутствует (отсутствует связь $l \rightarrow k$).

Известно [9, 10], что $L(m) = I(m)$ при $m \in \mathbf{D}$, т.е. при выполнении сетевых связей (когда равенства $\chi(k, j, x_k) = y_l$ соблюдаются). Отсюда вытекает следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть имеются последовательность $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ и функционалы $\varphi(k, l, y_k)$ такие, что $R(k, x_{ks}, u_{ks}) \rightarrow \mu(k)$, $k = 1, \dots, N$. Тогда $\{m_s\}$ минимизирует функционал I на $\mathbf{D}$.

Доказательство теоремы дано в [9, 10].

2. Двухуровневая модель с обыкновенными дифференциальными системами

Предлагается следующая конкретизация абстрактной сети операторов (рис. 2).

Представим условие $(x_k, u_k) \in \mathbf{B}(k)$ в форме $x_k \in \mathbf{X}(k)$, $u_k \in \mathbf{U}(k, x_k)$, где $\mathbf{X}(k)$ — проекция на $\mathbb{X}_k$, $\mathbf{U}(k, x_k)$ — сечение $\mathbf{B}(k)$ при данных k, x_k . Пусть на некотором подмножестве $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K} = \{1, \dots, N\}$

Рис. 2: Двухуровневая модель

имеем $u = (u^d, m^c)$, где u^d — произвольной природы, а m^c — некоторый непрерывный управляемый процесс, так что сечение множества $\mathbf{U}(k, x)$ при фиксированных x и u^d есть допустимое множество $\mathbf{D}^c(k, x, u^d)$ с соответствующей дифференциальной системой

(4)

$$\dot{x}^c = \frac{dx^c}{dt} = f^c(z, t, x^c, u), \quad t \in \mathbf{T}(z),$$

$$x^c \in \mathbf{X}^c(z, t) \subset \mathbb{R}^{n(k)}, \quad u^c \in \mathbf{U}^c, \quad (z, t, x^c) \subset \mathbb{R}^{p(k)}, \quad z = (k, x, u^d),$$

$$\gamma^c = (t_I, x_I^c, t_F, x_F^c) \in \{\gamma^c: t_I = \tau(z), x_I^c = \xi(z), t_F = \vartheta(z), x_F^c \in \Gamma^c(z)\}.$$

Решением этой комбинированной системы будем считать набор $m = (x(k), u(k)) \in \mathbf{D}$, где при $k \in \mathbf{K}'$

$$u(k) = (u^d(k), m^c(k)), \quad m^c \in \mathbf{D}^c(t, x(k), u^d(k)).$$

Задача оптимизации формулируется для верхнего уровня.

Рассматривается множество $\mathbf{E}$ элементов m , не связанных сетевыми условиями — равенствами $\chi(k, j, x_k) = y_l$ и дифференциальными связями нижнего уровня. Вводятся произвольные функционалы $\varphi(k, l, y_k)$, $k, l = 1, \dots, N$, такие что $\varphi(k, l, y_k) \equiv 0$, если равенство $\chi(k, j, x_k) = y_l$ отсутствует (отсутствует связь $l \rightarrow k$).

Для номеров $k \in \mathbf{K}'$ вводится также функционал $\varphi^c(z, t, x^c)$. Его можно рассматривать как параметрическое семейство функций от аргументов t, x^c с параметром z , которые считаются непрерывно дифференцируемыми по этим аргументам; $\varphi^c: \mathbb{R}^{m(k)+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Строится соответствующая модификация обобщенного лагранжиана:

$$L = - \sum_{\mathbf{K} \setminus \mathbf{K}'} R_k - \sum_{\mathbf{K}'} R'_k,$$

где

$$\begin{aligned}
 R' &= G(z, \gamma^c) + \int_{\mathbf{T}(z)} (R^c(z, t, x^c(z, t), u^c(z, t)) - \mu^c(z, t)) dt, \\
 G(z, \gamma^c) &= \sum_{l=1}^N (\varphi(k, l, y_k) - \varphi(l, k, \chi(k, j, x_k))) + \\
 &+ \varphi^c(z, t_I, x_I^c) - \varphi^c(z, t_F, x_F^c) + \int_{\mathbf{T}(z)} \mu^c(z, t) dt - I_k(\theta(z, \gamma^c)), \\
 R^c(z, t, x^c, u^c) &= \varphi_{x^c}^{\mathbf{T}} f^c(z, t, x^c, u^c) + \varphi_t^c(z, t, x^c), \\
 \mu^c(z, t) &= \sup \{R^c : x^c \in \mathbf{X}^c(z, t), u \in \mathbf{U}^c(z, t, x^c)\},
 \end{aligned}$$

где $y_k = \theta(z, \gamma^c)$ при $k \in \mathbf{K}'$, $y_k = f(k, x, u)$ при $k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}'$. Обозначим

$$\begin{aligned}
 \mu'(k) &= \sup \{G(z, \gamma^c) : \gamma^c \in \Gamma^c(z), x_I^c \in \mathbf{X}^c(z, t_I), \\
 x_F^c &\in \mathbf{X}^c(z, t_F), u^d \in \mathbf{U}^d(k), x \in \mathbf{X}(k)\}.
 \end{aligned}$$

Легко убедиться [10], что $L(m) = I(m)$ при $m \in \mathbf{D}$, т. е. при выполнении отброшенных связей. Отсюда непосредственно вытекают следующие общие утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Для любых φ , φ^c и $m \in \mathbf{D}$ имеет место оценка

$$(5) \quad I(m) - I_* \leq \Delta = L(m) - L_*, \quad I_* = \inf_{\mathbf{D}} I, \quad L_* = \inf_{\mathbf{E}} L.$$

Пусть имеются два элемента $m^I \in \mathbf{D}$ и $m^{II} \in \mathbf{E}$ и функционалы φ и φ^c , такие что $L(m^{II}) < L(m^I) = I(m^I)$, и $m^{II} \in \mathbf{D}$.

Тогда $I(m^{II}) < I(m^I)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть имеются последовательность дискретно-непрерывных элементов $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ и пара (φ, φ^c) , такие что:

- 1) $\mu^c(z, t)$ — кусочно-непрерывна при каждом z ;
- 2) $R(k, x_s(k), u_s(k)) \rightarrow \mu(k)$;
- 3) $\int_{\mathbf{T}_s(k)} (R^c(z_s(k), t, x_s^c(k, t), u_s(k, t)) - \mu^c(z_s(k), t)) dt \rightarrow 0, \quad k \in \mathbf{K}'$;
- 4) $G(z_s(k), \gamma_s^c(k)) - \mu'(k) \rightarrow 0, \quad k \in \mathbf{K}'$.

Тогда последовательность $\{m_s\}$ — минимизирующая для I на $\mathbf{D}$.

Доказательства теорем даны в [10].

3. Двухуровневая модель с аффинными дифференциальными системами

Предположим, что $X(k) = \mathbb{R}^{n1(k)}$, $X^c(k, t) = \mathbb{R}^{n(k)}$, $u \in \mathbf{U}(k) \subset \mathbb{R}^{p1(k)}$ и рассмотрим частный случай представленной выше модели, конструкции которой аффинно зависят от переменных управления и состояния, и на нижнем уровне отсутствует зависимость от управления u^d . Имеем:

$$\begin{aligned} y_k &= A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad f^0 = A^0(k)x(k) + B^0(k)u(k), \\ \dot{x}^c &= A^c(z, t)x^c + B^c(t, z)u^c, \\ y_l &= \chi(k, q)x(k), \quad x_l^c = \xi(k)x(k). \end{aligned}$$

Здесь $A(k)$, $B(k)$, $A^0(k)$, $B^0(k)$, A^c , B^c , $\chi(k, q)$, $\xi(k)$ — матрицы соответствующих размеров. Функционалы φ и φ^c имеют вид:

$$\varphi(k, l, y_k) = (\psi(k, l))^T x(k), \quad \varphi^c(z, t, x^c) = (\psi^c)^T x^c,$$

где $\psi(k, l)$, ψ^c — векторы. Тогда

$$\begin{aligned} R(k, x, u) &= \sum_{l=1}^N (\psi(k, l)(A(k)x(k) + B(k)u(k)) - \psi(l, k)\chi(k, q)x(k)) - \\ &\quad - A^0(k)x(k) - B^0(k)u(k), \\ G(z, \gamma^c) &= \sum_{l=1}^N (\psi(k, l)(A(k)x(k) + B(k)u(k)) - \psi(l, k)\chi(k, q)x(k)) + \\ &+ \psi^c(z, t_I)x_I^c - \psi^c(z, t_F)x_F^c + \int_{\mathbf{T}(z)} \mu^c(z, t) dt - A^0(k)x(k) - B^0(k)u(k), \\ R^c(z, t, x^c, u^c) &= \psi^c{}^T(A^c(z, t)x^c + B^c(t, z)u^c) + \dot{\psi}^c(z, t)x^c. \end{aligned}$$

Зададим функционалы φ и φ^c таким образом, чтобы основные конструкции $R(k, x, u)$, $G(z, \gamma^c)$, $R^c(z, t, x^c, u^c)$ не зависели от x , x^c , x_F^c . Тогда условия теоремы 3 сводятся к выполнению следующих

соотношений:

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}^c(k, t) &= -A^{cT} \psi^c(k, t), \quad \psi^c(k, t_F) = \sum_{l=1}^N \theta_k^T \psi(k, l), \\
 \sum_{l=1}^N \chi(k, q) \psi(l, k) &= \xi(k) \psi^c(k, t_I), \quad k \in \mathbf{K}', \\
 \sum_{l=1}^N (A_k^T \psi(k, l) - \chi(k, q)^T \psi(l, k)) - A^0(k) &= 0, \quad k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}', \\
 u(k) &= \arg \max (B^T \psi(k, l) - B^0(k)), \quad u \in \mathbf{U}, \\
 u^c(k, t) &= \arg \max (B^{cT} \psi^c(z, t)), \quad u^c \in \mathbf{U}^c.
 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что первые три условия представляют собой системы уравнений для определения коэффициентов $\psi(k, l)$, $\psi^c(z, t)$ функционалов φ и φ^c .

И таким образом, решение задачи сводится к нахождению решений для системы дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разрешающих функций нижнего уровня $\psi^c(z, t)$, системы конечных соотношений относительно коэффициентов разрешающей функции верхнего уровня $\psi(k, l)$ и поиска экстремума двух конструкций по переменным управления.

Применим полученные условия для решения следующей задачи [11].

4. Пример. Оптимизация водоохранных мероприятий в бассейне реки

Речные бассейны — типичные объекты интенсивной антропогенной нагрузки. Помимо регламентации хозяйственной деятельности посредством установления определенных норм и требований, необходимы регулярные природоохранные мероприятия по экологическому мониторингу и очистке скапливающихся загрязнений в водной среде и донных отложениях, бытового мусора, паразитической биоты и т.п. Такие мероприятия требуют больших затрат, поэтому актуальна задача их минимизации с использованием естественной самоочищающей способности природной среды. Рассмотрим эту задачу в упрощенной постановке на примере условного речного бассейна: главная река с двумя притоками (рис. 3).

Рис. 3: Камерная схема реки и ее представление сетью операторов

Можно построить камерную модель этого бассейна, разделив его на 5 камер, как показано на рис. 3. В каждой камере распределение концентрации загрязнений вдоль русла описывается некоторой дифференциальной системой, которую примем аффинной

$$(6) \quad \frac{dp}{dt} = A(t)p + B(t)r + s(t), \quad t \in [0, t_F], \quad 0 \leq r \leq r_{\max},$$

где t имеет смысл расстояния от начала соответствующей камеры, p — вектора концентраций загрязнений, r — вектора интенсивностей природоохранных мероприятий, s — вектора потоков поступающих загрязнений. Здесь все величины имеют номер соответствующей камеры $k = 1, \dots, 5$: $t_k, p_k, \dots$, который для краткости опущен. Задача состоит в обеспечении допустимых концентраций в устьях рек, $p_k(t_F) \leq p_{k\max}$, с минимумом суммарных затрат, определяемых величиной

$$Q = \sum_{k=1}^5 q_{kF}, \quad q_{kF} = \int_0^{t_{kF}} c_k(t)r_k(t)dt.$$

Размерности векторов концентраций в разных камерах могут быть разными в зависимости от формы и размеров поперечного сечения русла, условий перемешивания и т.п.

Примем для простоты p и r одномерными, $B = -1$, A , c , s — постоянными для каждой камеры. При естественном предположении $p \geq 0$ для любых управлений в указанных границах, ограничение $p(t_F) \leq p_{\max}$ можно заменить штрафом и минимизировать взвешенную сумму

$$I = \sum_1^5 I_k, \quad I_k = (\beta_k q_{kF} + (1 - \beta_k)p_{kF}), \quad 0 < \beta_k < 1.$$

Представим рассматриваемую модель как ДНС, на верхнем уровне которой находится сеть (дерево) операторов (рис. 3), а на нижнем — система из уравнения (6) и уравнения

$$(7) \quad \frac{dq}{dt} = cr, \quad q(0) = 0,$$

где cr имеет смысл природоохранных затрат на единицу длины соответствующей камеры (здесь номер k также не указан).

Положим при $k = 1, 2, 4$ (операторы только со свободными входами):

$$x_k = (x_k^1, x_k^2) = \text{const}, \quad p(0) = p_{kI} = x_{k1}^1;$$

при $k = 3, 5$:

$$x_k = (x_{k1}^1, x_{k1}^2, x_{k2}^1, x_{k2}^2), \quad p_{kI} = x_{k1}^1 + x_{k2}^1.$$

Сетевые связи выражаются следующим образом:

$$x_{31} = y_1, \quad x_{32} = y_2, \quad x_{51} = y_3, \quad x_{52} = y_4.$$

Обозначим $x^c = (p, q)^T$, $y = x^c(t_F)$, $k = 1, \dots, 5$. Тогда рассматриваемая дифференциальная система и функционал I_k для каждой камеры запишутся в виде

$$(8) \quad \frac{dx^c}{dt} = A^c x^c + B^c u^c + s^c, \quad 0 \leq u^c = r \in [0, p_{\max}],$$

$$I_k = C_k^0 x_{kF}^c,$$

$$\text{где } A^c = \begin{bmatrix} -A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^c = \begin{bmatrix} -1 \\ c \end{bmatrix}, \quad s^c = (s, 0)^T, \quad C_k^0 = [(1 - \beta_k) \quad \beta_k].$$

Здесь

$$\theta(z, \gamma^c) = y_k = x_{kF}^c,$$

$$\Gamma^c(z) = \{\gamma^c: t_{kI} = 0, \quad t_{kF} = \text{const}, \quad x_{kI}^c = \kappa_k x_k\},$$

$$\kappa_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = 3, 5.$$

Оператор проектирования $\chi(k, j, x)x$ в данном случае — линейная функция: $\chi(k, j, x) = \lambda(k, j)x$, $\lambda(k, j)$ — блочная матрица: $\lambda(k, 1) = \begin{bmatrix} E & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda(k, 2) = \begin{bmatrix} 0 & E \end{bmatrix}$.

Функции φ и φ^c зададим линейными (с учетом того, что модель линейна):

$$\varphi(k, l, y_k) = \psi^T(k, l) y_k), \quad \varphi^c(k, t, x^c) = \nu^c(k, t) + \psi^{cT}(k, t) x^c.$$

Выпишем соответствующие выражения для G и R^c , полагая $\mu^c = 0$:

$$\begin{aligned} R^c &= \psi^{cT} (A^c(t)x^c + B^c(t)u^c + s^c(t)) + \dot{\psi}^{cT} x^c + \dot{\nu}^c, \\ G &= \sum_l (\psi^T(k, l) x_{kF}^c - \psi^T(l, k) \lambda(k, l)x) + \\ &+ \psi^{cT}(k, 0) \kappa_k x - \psi^{cT}(k, t_{kF}) x_{kF}^c - C_k^0 x_{kF}^c, \\ \mu^c(k, t) &= \sup \{R^c : u^c \in \mathbf{U}^c(k, t)\} = 0. \end{aligned}$$

Согласно рассматриваемому графу, будем иметь 5 функций φ^c нижнего уровня, по числу дифференциальных операторов, и 4 ненулевые функции φ верхнего уровня, соответствующие имеющимся сетевым связям, т.е. все $\psi(k, l)$ равны нулю, за исключением $\psi(1, 3)$, $\psi(2, 3)$, $\psi(3, 5)$, $\psi(4, 5)$.

Из условий максимума R^c по x^c , u^c и G по x_{kF}^c , x и равенства $\mu^c = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \dot{\nu}^c &= -\sup \{\psi^{cT} (B^c(k, t) u^c + s^c) : u^c \in \mathbf{U}^c\}, \\ (9) \quad \dot{\psi}^c &= -A^{cT}(k, t) \psi^c, \quad \left(\dot{\psi}^{c1} = -A(k, t) \psi^{c1}, \quad \dot{\psi}^{c2} = 0 \right) \\ \psi^c(k, t_F) &= \sum_l \psi(k, l) - C_k^{0T}, \quad \kappa_k^T \psi^c(k, t_I) = \sum_l \lambda^T(k, l) \psi(l, k). \end{aligned}$$

Последнее равенство должно выполняться для операторов с занятыми входами (номера $k = 3, 5$). Конкретно для ненулевых значений $\psi(k, l)$:

$$\begin{aligned} \psi^c(1, t_{1F}) &= \psi(1, 3) - C_1^{0T}, & \psi^c(2, t_{2F}) &= \psi(2, 3) - C_2^{0T}, \\ \psi^c(3, t_{3F}) &= \psi(3, 5) - C_3^{0T}, & \psi^c(4, t_{4F}) &= \psi(4, 5) - C_4^{0T}, \\ \psi^c(5, t_{5F}) &= -C_5^{0T}, \\ \kappa_3^T \psi^c(3, t_{3I}) &= \lambda^T(3, 1) \psi(1, 3) + \lambda^T(3, 2) \psi(2, 3), \\ \kappa_5^T \psi^c(5, t_{5I}) &= \lambda^T(5, 1) \psi(1, 3) + \lambda^T(5, 2) \psi(2, 3) + \lambda^T(5, 3) \psi(3, 5) + \lambda^T(5, 4) \psi(4, 5), \end{aligned}$$

где κ_k и $\lambda^T(k, j)$ выписаны выше. После подстановки значений этих матриц, получим

$$\begin{aligned} \psi(1, 3) &= \psi(2, 3) = (\psi^{c1}(3, 0), 0)^T, \\ \psi(3, 5) &= \psi(4, 5) = (\psi^{c1}(5, 0), 0)^T. \end{aligned}$$

Из уравнений (9) получаем

$$\begin{aligned} \psi^{c1} &= \psi^{c1}(t_{kF}) e^{A(t_{kF}-t)}, & \psi^{c1}(k, 0) &= \psi^{c1}(t_{kF}) e^{At_{kF}}, \\ \psi^{c2} &= \text{const} = -C^{02T} = -\beta_k, \end{aligned}$$

Таблица 1: Характеристики условного бассейна

№	t_F км	A млн руб.	c км ⁴ /т	s т/км ³	pI т/км ³	$r_{\max}$ т/км ⁴
1	20	2.5×10^{-3}	4×10^2	0.5×10^{-2}	0.4	0.6×10^{-2}
2	30	3×10^{-3}	10^3	0.2×10^{-2}	0.3×10^{-1}	0.25×10^{-2}
3	30	2.5×10^{-3}	7×10^2	0.3×10^{-2}	-	0.35×10^{-2}
4	20	3×10^{-3}	10^3	0.2×10^{-2}	0.4×10^{-1}	0.25×10^{-2}
5	150	2.5×10^{-3}	4×10^2	0.5×10^{-2}	-	0.6×10^{-2}

где

$$\begin{aligned}\psi^{c1}(t_{5F}) &= -(1 - \beta_5), \\ \psi^{c1}(t_{kF}) &= -(1 - \beta_5)e^{At_{5F}} - (1 - \beta_k), \quad k = 3, 4, \\ \psi^{c1}(t_{kF}) &= -((1 - \beta_5)e^{At_{5F}} + (1 - \beta_3))e^{At_{3F}} - (1 - \beta_k), \quad k = 1, 2.\end{aligned}$$

В итоге получаются конкретные значения $\psi(k, l)$ и зависимости $\psi^c(t)$. Оптимальные управления находятся из условия максимума R^c , которое, очевидно, сводится к следующему:

$$(10) \quad (\psi^{c2}(k, t)c_k - \psi^{c1}(k, t))r \rightarrow \max_{0 \leq r \leq r_{k \max}},$$

т.е. управления будет кусочно-постоянным со значениями 0 либо $r_{k \max}$ в зависимости от знака функции переключения $\psi^{c2}(k, t)c_k - \psi^{c1}(k, t)$, которая, как видно, зависит от весов β_k . Последние подбираются так, чтобы для соответствующих распределений загрязнений по руслам выполнялись заданные ограничения. При этом получаются следующие конкретные выражения для функций переключения $M_k(t_k)$:

$$\begin{aligned}M_5(t_5) &= (1 - \beta_5)e^{A(t_{5F} - t_5)} - \beta_5 c_5, \\ M_k(t_k) &= (1 - \beta_k)e^{A(t_{5F} + t_{kF} - t_k)} - \beta_k c_k, \quad k = 3, 4, \\ M_k(t_k) &= (1 - \beta_k)e^{A(t_{5F} + t_{3F} + t_{kF} - t_k)} - \beta_k c_k, \quad k = 1, 2.\end{aligned}$$

Были проведены расчеты для условного бассейна, близкого по характеристикам к нижней части бассейна р. Селенги — главного притока оз. Байкал. Данные для расчетов содержатся в таблице 1.

Значения весов β_k задавались равными: $\beta_k = \beta$. В этом случае непосредственно видно, что всюду $r_k = 0$, $Q = 0$ при $\beta = 1$, т.е. затраты отсутствуют, а загрязнение максимально, а при $\beta = 0$ $r_k =$

Рис. 4: Результаты расчетов для условного бассейна

$r_{k \max}$, т.е. интенсивность очистки всюду максимальна. Результаты расчетов для промежуточных значений β представлены на рисунке 4.

Зависимость $p_{5F}(Q)$ (рис. 4а) служит для выбора варианта стратегии природоохранной деятельности с учетом располагаемых ресурсов.

На рис. 4б и 4с показаны распределения управляющих воздействий $r_k(t)$ и соответствующих концентраций загрязнений $p(t)$ в камерах при заданном значении суммарных затрат $Q = 300$ млн. руб. Видно характерное свойство оптимального решения при рассматриваемом критерии: экономия ресурсов производится в первую очередь за счет прекращения природоохранной деятельности на конечных участках бассейна (в данном случае — во всей камере 4) и на последних 50 километрах в камере 5, что по смыслу означает рациональное использование самоочищающей способности, представленной коэффициентом A .

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрена сеть аффинных операторов как частный случай двухуровневой модели сетей с обыкновенными дифференциальными системами. Поставлена задача оптимального управления и для исследуемой модели конкретизированы достаточные условия оптимальности. На основе полученных условий решена задача оптимизации водоохранных мероприятий в бассейне реки.

Список литературы

- [1] Н. Н. Моисеев. *Элементы теории оптимальных систем*, Наука, М., 1975, 528 с. ^{↑ 117}
- [2] С. В. Емельянов (ред.). *Теория систем с переменной структурой*, Наука, М., 1970, 592 с. ^{↑ 117}
- [3] В. И. Гурман. «К теории оптимальных дискретных процессов», *Автоматика и телемеханика*, 1973, №6, с. 53–58. ^{↑ 117}
- [4] С. Н. Васильев. «Теория и применение логико-управляемых систем», *Труды 2-ой Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления»*, SICPRO'03 (Москва, Россия, 29–31 января 2003), с. 23–52. ^{↑ 117}
- [5] А. С. Бортаковский. «Достаточные условия оптимальности управления детерминированными логико-динамическими системами», *Информатика. Сер. Автоматизация проектирования*, 1992, №2–3, с. 72–79. ^{↑ 117}
- [6] Б. М. Миллер, Е. Я. Рубинович. *Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями*, Наука, М., 2005, 429 с. ^{↑ 117}
- [7] J. Lygeros. *Lecture notes on hybrid systems*, University of Cambridge, Cambridge, 2003, 82 p. ^{↑ 117}
- [8] A. J. Van der Shaft, H. Schumacher, *An introduction to hybrid dynamical systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. **251**, Springer-Verlag, London, 2000, 174+xiv p. ^{↑ 117}
- [9] В. И. Гурман, *Оптимизация дискретных систем*, Учебное пособие, Изд-во Иркут. ун-та, Иркутск, 1976, 121 с. ^{↑ 117, 119}
- [10] В. И. Гурман, И. В. Расина. «Достаточные условия оптимальности в иерархических моделях неоднородных систем», *Автоматика и телемеханика*, 2013, №12, с. 15–30. ^{↑ 117, 119, 121}
- [11] В. И. Гурман, О. В. Фесько, И. В. Расина. «Моделирование водоохранных мероприятий в бассейне реки», *Вестник БГУ. Математика и информатика*, 2013, №1, с. 4–15. ^{↑ 123}

Рекомендовал к публикации

д.т.н. А.М. Цирлин

Пример ссылки на эту публикацию:

И. В. Расина, О. В. Фесько, А. О. Блинов. «Сети аффинных операторов», *Программные системы: теория и приложения*, 2017, **8:4(35)**, с. 117–131.

URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2017_4_117-131.pdf

Об авторах:

Ирина Викторовна Расина

д.ф.-м.н., г.н.с. Исследовательского центра системного анализа Института программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, специалист в области моделирования и управления гибридными системами, автор и соавтор более 100 статей и 5 монографий

e-mail:

irinarasina@gmail.com

Олесь Владимирович Фесько

к.т.н., н.с. ИЦСА Института программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

e-mail:

oles.fesko@hotmail.com

Александр Олегович Блинов

к.т.н., доцент Российского государственного социального университета

e-mail:

aleblinov@yandex.ru

Irina Rasina, Oles Fesko, Aleksandr Blinov. *Affine operator networks*.

ABSTRACT. In this paper, we consider affine operator networks as a special case of two-level model of networks described by ordinary differential systems. For this kind of networks an optimal control problem is formulated. Sufficient optimality conditions are given. The efficiency is demonstrated through an example. (*In Russian*).

Key words and phrases: operator networks, two-level systems, optimal control.

References

- [1] N. N. Moiseyev. *Elements of the theory of optimal systems*, Nauka, M., 1975 (in Russian), 528 p.
- [2] S. V. Yemel'yanov (red.). *Theory of Systems with Variable Structures*, Nauka, M., 1970 (in Russian), 592 p.
- [3] V. I. Gurman. "Theory of optimum discrete processes", *Autom. Remote Control*, **34**:7 (1973), pp. 1082–1087.
- [4] S. N. Vasil'yev. "Theory and application of logical-dynamical systems", *Trudy 2-oy Mezhdunarodnoy konferentsii "Identifikatsiya sistem i zadachi upravleniya"*, SICPRO'03 (Moskva, Rossiya, 29–31 yanvarya 2003), pp. 23–52 (in Russian).
- [5] A. S. Bortakovskiy. "Sufficient conditions for optimal control of deterministic logical-dynamical systems", *Informatika. Ser. Avtomatizatsiya proyektirovaniya*, 1992, no.2–3, pp. 72–79 (in Russian).
- [6] B. M. Miller, Ye. Ya. Rubinovich. *Optimization of the Dynamic Systems with Pulse Controls*, Nauka, M., 2005 (in Russian), 429 p.
- [7] J. Lygeros. *Lecture notes on hybrid systems*, University of Cambridge, Cambridge, 2003, 82 p.
- [8] A. J. Van der Shaft, H. Schumacher, *An introduction to hybrid dynamical systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. **251**, Springer-Verlag, London, 2000, 174+xiv p.
- [9] V. I. Gurman, *Optimization of discrete systems*, Uchebnoye posobiye, Izd-vo Irkut. un-ta, Irkut-sk, 1976 (in Russian), 121 p.
- [10] V. I. Gurman, I. V. Rasina. "Sufficient optimality conditions in hierarchical models of nonuniform systems", *Autom. Remote Control*, **74**:12 (2013), pp. 1935–1947.
- [11] V. I. Gurman, O. V. Fes'ko, I. V. Rasina. "Modeling and optimization of water protection measures in the river basin", *Vestnik BGU. Matematika i informatika*, 2013, no.1, pp. 4–15 (in Russian).

Sample citation of this publication:

Irina Rasina, Oles Fesko, Aleksandr Blinov. "Affine operator networks", *Program systems: Theory and applications*, 2017, **8**:4(35), pp. 117–131. (*In Russian*). URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2017_4_117-131.pdf