Ю. М. Сметанин

Верификация логического следования с использованием исчисления конституентных множеств и соответствий Галуа

Аннотация. В работе обосновывается, что, в случае, когда постановка задач верификации рассуждений использует понятие соответствия, можно проверять логическое следование, не применяя логический вывод. При этом удобно использовать исчисление конституентных множеств и постановку задач в логике L_{s_2} [1]. На примерах показано, что для логики предикатов, верификацию логического следования можно проводить с использованием простых рассуждений с на основе соответствия Галуа.

Ключевые слова и фразы: логические уравнения, силлогистика, алгебраическая онтология, алгебраическая система, непарадоксальное логическое следование, булева алгебра, соответствие Галуа.

Введение

Рассматриваются вопросы верификации логического следования в семантическом смысле между ППФ неклассической пропозициональной многозначной логики L_{s_2} [1, 2], атомарные суждения которой представлены (1).

$$(1) \quad \langle A(X, Y), Eq(X, Y), IO(X, Y), X \subset U, X = U \rangle,$$

где U -универсум. При этом равносильности (2-4) выражают семантику трех первых атомарных суждений.

$$(2) \quad A(X, Y) \equiv (X \subset Y) \cdot (X \subset U) \cdot (X' \subset U) \cdot (Y \subset U) \cdot (Y' \subset U),$$

$$(3) \quad Eq(X, Y) \equiv (X = Y) \cdot (X \subset U) \cdot (X' \subset U) \cdot (Y \subset U) \cdot (Y' \subset U),$$

$$(4) \quad IO(X, Y) \equiv (X \cdot Y \subset U) \cdot (X \cdot Y' \subset U) \cdot (X' \cdot Y \subset U) \cdot (X' \cdot Y' \subset U).$$

Здесь множество $X \cdot Y'$ — пересечение X и дополнения Y' до универсума. Вместо X и Y можно подставить любые ППФ $F_1(\tilde{X}_n), F_2(\tilde{X}_n)$ алгебры множеств.

В работе обосновывается, что для некоторых случаев, когда постановка задач верификации рассуждений на естественном языке использует понятие соответствия, можно проверять логическое следование, без логического вывода в формальных исчислениях. При этом удобно использовать исчисление конституентных множеств и постановку задач в логике L_{s_2} [4]. На примерах показано, что для логики предикатов с предикатами местности не менее чем два верификацию логического следования можно проводить с использованием простых рассуждений в терминах соответствий Галуа.

Введено новое понятие — непарадоксальное логическое следование в семантическом смысле (НЛССС), позволяющее построить логику (силлогистику) на основе нового базиса силлогистики

$$(5) \quad NOB_S = \langle A(X, Y), Eq(X, Y), IO(X, Y), X = U, X \subset U \rangle$$

с интерпретацией в алгебре множеств. Ортогональный базис силлогистики

$$(6) \quad OB_S = \langle A(X, Y), Eq(X, Y), IO(X, Y) \rangle$$

введен автором в работах [2, 3] как альтернатива базису Аристотеля для традиционной силлогистики (ТС)

$$A_S = \langle AXY, EXY, IXY, OXY \rangle,$$

состоящему из четырех категорических суждений [5] и имеющему неоднозначную интерпретацию даже в семи расширенных Жергонновых отношениях, входящих в состав 15 модельных схем, введенных в работе [5] и представленных на рисунке 1). Например, в OB_S утвердительное суждение $AXY \equiv$ «все X есть Y » имеет 2 смысла:

$$AXY \equiv \underbrace{Eq(X, Y)}_{G_9} + \underbrace{A(X, Y)}_{G_{13}}.$$

Рис. 1: Модельные схемы отражающие отношения между объемами терминов X, Y

Это же суждение в пятнадцати модельных схемах имеет семь смыслов которые выражаются в NOB_S следующим образом:

$$\begin{aligned}
 AXY \equiv & \underbrace{(X = Y) \cdot (X = U)}_{G_1} + \underbrace{(X' = U) \cdot (Y = U)}_{G_4} \\
 & + \underbrace{(X = Y) \cdot (X' = U)}_{G_8} + \underbrace{(X \subset U) \cdot (X' \subset U) \cdot (Y = U)}_{G_5} \\
 & + \underbrace{(X' = U) \cdot (Y \subset U) \cdot (Y' \subset U)}_{G_{12}} + \underbrace{Eq(X, Y)}_{G_9} + \underbrace{A(X, Y)}_{G_{13}}.
 \end{aligned}$$

В новом базисе силлогистики NOB_S (5) можно выразить все пятнадцать модельных схем рисунка 1. Например, $G_{10}(X, Y) \equiv (X \subset U) \cdot (X' \subset U) \cdot (Y' = U)$. Суждения $A(X, Y)$ и $Eq(X, Y)$ выражают смысл Жергонновых отношений $G_{13}(X, Y)$ и $G_9(X, Y)$, а суждение $IO(X, Y)$ «некоторые X есть Y и некоторые не X есть Y и некоторые не X есть Y и некоторые не X есть не Y » выражает Жергонново отношение $G_{15}(X, Y)$.

Схемы с непустыми и неуниверсальными модельными множествами уместно назвать невырожденными, а остальные схемы — вырожденными Жергонновыми отношениями. Невырожденные отношения выражаются в OB_S , а вырожденные — в NOB_S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Непарадоксальным логическим следованием в семантическом смысле (НЛССС) называется отношение между высказываниями в виде формул G и B , отображающее тот факт, что если G и B выполнимые формулы (не законы и не противоречия), то в силу только их логической структуры нельзя приписать высказыванию G значение «истинно» (выполнено), не будучи быть*

вынужденным приписать значение «истинно» (выполнено) формуле B . Обозначим НЛССС как $\models_N$, его отсутствие как $\not\models$ ¹

Рассматривается семантическое следование между ППФ пропозициональной многозначной логики L_{s_2} (силлогистики) с атомарными суждениями (1).

В работе [4] предложено решение задачи верификации следствий МЛ-уравнений (нетождественных равенств) вида (7).

$$(7) \quad F(X_1, X_2, \dots, X_n) = U,$$

в которых левая часть есть ППФ алгебры множеств, построенная на модельных множествах, а правая есть универсум. К виду (7) также сводится нетождественное равенство вида (8)

$$(8) \quad F_1(\tilde{X}_n) = F_2(\tilde{X}_n), \quad \tilde{X}_n = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

К задаче поиска общего решения МЛ-уравнения сводится задача верификации НЛССС для посылок и следствия выраженных суждениями NOB_S и задача решения логических уравнений

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1.$$

Переменные x_n в логическом уравнении являются характеристическими функциями для множеств X_n из уравнения (7).

1. Исчисление конституентных множеств

Посредством конъюнкции ($\cdot$), дизъюнкции ($+$) и отрицания ($'$) из атомов логики L_{s_2} можно построить ППФ двух типов — конъюнктивные и неконъюнктивные. Конъюнктивные ППФ являются конъюнкциями атомов. Неконъюнктивные ППФ включают дизъюнцию конъюнктивных и их отрицание. Они могут быть приведены к дизъюнкции конъюнктивных.

Область интерпретации ППФ построена из образов n -арных модельных схем вида $M_S = \langle \Omega, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_n \rangle$, где Ω — универсум, $\aleph_i \subseteq \Omega$ — модельные множества [5]. Число таких схем не более $2^{(2^n)}$. Множество непустых конституент модельной схемы назовем характеристическим. Каждой конъюнктивной ППФ логики L_{s_2} ставится в соответствие множество номеров непустых конституент, которое

¹Из девяти возможных комбинаций (закон T , противоречие F , выполнимость P) между посылкой и следствием в отношении НЛССС может находиться только одна комбинация $P \models_N P$.

Рис. 2: Преобразование модельной схемы в А-онтологию

называется семантическим значением этой ППФ. Каждому множеству конститuentных номеров соответствует одна модельная схема. Бинарные схемы обозначим $G_1(N_1, N_2), \dots, G_{15}(N_1, N_2)$. По единицам в двоичном изображении номера схемы восстанавливаются номера конститuent, которые являются непустыми в данной схеме, и сама схема.

Например, для G_{15} имеем $15_{(10)} = 1111_{(2)}$, поэтому $N_1 \cdot N_2 \neq \emptyset$, $N_1 \cdot N_2' \neq \emptyset$, $N_1' \cdot N_2 \neq \emptyset$, $N_1' \cdot N_2' \neq \emptyset$ и $G_{15} = IO(N_1, N_2)$. В схемах $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_{81}, G_{10}, G_{12}$ одно или оба модельных множеств либо совпадают с универсумом, либо пустые. В остальных схемах модельные множества непусты и неуниверсальны. При этом $G_9 = Eq(N_1, N_2)$ и $G_{13} = A(N_1, N_2)$.

Если занумеровать надлежащим образом конститuentы, то универсум можно рассматривать как множество номеров конститuent. Нумерацию конститuent

$$X_1^{\sigma_1} \cdot X_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot X_n^{\sigma_n}, \quad X_i^{\sigma_i} = \begin{cases} X_i, & \sigma_i = 1 \\ X_i', & \sigma_i = 0. \end{cases}$$

удобно производить, зафиксировав порядок индексов модельных множеств. При заданном порядке каждой конститuentе (полной конъюнкции) можно сопоставить набор из нулей и единиц $\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \rangle$ и соответствующее ему десятичное число, которое будем называть индикатором (номером) конститuent.

Характеристическому множеству n -арной модельной схемы и самой модельной схеме однозначно сопоставим универсум U и кортеж $\langle U, X_1, X_2, \dots, X_n \rangle$, в котором все множества называются конститuentными и составлены из номеров непустых конститuent. Будем называть его алгебраической онтологией (А-онтологией). Формальное определение приводится ниже (определение 3).

На рисунке 2 показана А-онтология

$$I_{M_S} = \langle U = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}, X_1 = \{4, 6\}, X_2 = \{2, 3, 6\}, X_3 = \{1, 3\} \rangle.$$

Рис. 3: Контекст понятия «тигры» $T \subset X \cap M \cap B' \cap C'$

Обозначим $K(i)$ конституенту с номером $i \in U$. К примеру, $K(4) = K(4_{10}) = K(100_2) = \aleph_1 \cdot \aleph'_2 \cdot \aleph'_3$.

А-онтология является неаристотелевой моделью понятия [6]. Например, понятие «все тигры хищные млекопитающие, не живущие в воде и не приспособленные к жизни в условиях Крайнего Севера» моделируется $A(T, X \cdot M \cdot B' \cdot C')$. А-онтология на рисунке 3 иллюстрирует неаристотелевское строение понятия [6]. Достоинством такой модели понятия является то, что оно содержит контекст (хотя и ограниченный); ему можно сопоставить алгоритм вычисления объема по логическому содержанию. Контекст можно изменять.

Рассмотрим модель для представления n -арного логического отношения между модельными множествами. Обозначим через $B(\tilde{X}_n)$ семейство из всех конституентных подмножеств универсума, которые могут быть построены из конечной системы $\tilde{X}_n = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ образующих конституентных множеств, являющихся подмножествами универсума, посредством операций объединения, пересечения и дополнения до универсума. Семейство $B(\tilde{X}_n)$ включает также универсум и пустое множество. Всего можно составить не более чем 2^n конституентных номеров. Конституентные номера являются элементарными «кирпичиками», из которых составляются подмножества основы. Рассмотрим алгебраическую систему (9)

$$(9) \quad \langle B(\tilde{X}_n), \quad W_F, \quad W_R \rangle,$$

где $W_F = \{+, \cdot, '\}$, $W_R = \{=, \subset\}$ ². В алгебре логики конституенты

$$x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}, \quad x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, & \sigma_i = 1 \\ x_i', & \sigma_i = 0, \end{cases}$$

² $W_F = \{+, \cdot, '\}$ -операции объединение, пересечение, дополнение до универсума алгебры множеств

принято называть полными конъюнкциями. Операции $\{+, \cdot, '\}$, в этом случае, есть логические операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Полным конъюнкциям можно сопоставить номера также, как конституентам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Единицей M алгебраической системы (9), или характеристическим множеством, называется семейство непустых конституент данной системы.*

Базовой системой номеров $BSN(U)$ универсума называется множество номеров конституент единицы алгебраической системы. Базовую систему номеров также будем называть единицей, если это не приводит к путанице.

Нулем N алгебраической системы (9) или дополнением единицы, будем называть семейство ее пустых конституент.

Базовой системой номеров $BSN(X)$ любого непустого множества X из $B(\tilde{X}_n)$, будем называть множество номеров (индикаторов) непустых конституент из характеристического множества, таких, что объединение этих конституент совпадает с данным множеством.³

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Алгебраическая система (9) с фиксированным порядком индексов модельных множеств полностью определяется кортежем (10)*

$$(10) \quad I = \langle U, X_1, X_2, \dots, X_n \rangle, \quad M(I) = U,$$

который мы будем называть n -арным логическим отношением между модельными множествами или алгебраической онтологией (А-онтологией)⁴. А-онтология

$$I = \langle U, X_1, X_2, \dots, X_n \rangle$$

называется канонической, если $U = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$, то есть все конституенты соответствующей ей модельной схемы непусты (рисунк 4). Отношение, задаваемое канонической А-онтологией, будем называть отношением независимости в совокупности n -модельных множеств.

Очевидное равенство $M(I^0) = U^0 = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ иллюстрируется рисунком 4.

³Далее, если это специально не оговорено будем считать, что в алгебраической системе (9) все множества и универсум заданы в виде BSN , то есть как конституентные множества.

⁴Наглядно А-онтологию будем изображать в виде линейной диаграммы (рисунки 2, 3, 4, 5), которая является дискретным аналогом диаграммы Венна.

Рис. 4: Каноническая А-онтология для $n = 4$

ТЕОРЕМА 1. Для А-онтологии I с n модельными множествами X_i и универсумом $U(I)$ выполняются соотношения (11)

$$(11) \quad \begin{aligned} X_i &= U(I) \cdot X_i^0 = M(I) \cdot X_i^0, \quad i = 1, \dots, n; \\ D(i') &= K(i)', i' = 2^n - 1 - i \end{aligned}$$

здесь X_i^0 — модельные множества канонической А-онтологии, $D(i')$ — дизъюнкта двойственная i -ой конституенте⁵.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно заметить, что множество $D(i') = U \setminus \{i\}$. Здесь $U^0 = M(I^0)$ -единица канонической А-онтологии. $\square$

Из соотношения (11) теоремы 1 следует, что объемы модельных множеств А-онтологии I полностью определяются ее единицей $M(I)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Полный набор (множество всех) бинарных отношений между модельными множествами для заданной А-онтологии I будем называть полным бинарным инвариантом $BIN(I)$, определяемого А-онтологией n -арного логического отношения. Если набор неполный (входящие в него бинарные отношения заданы не для всех возможных сочетаний модельных множеств), то такой набор называется неполным бинарным инвариантом $nBIN(I)$.

Доказано, что в каждый BIN , входит максимальная по числу конституент А-онтология, при этом добавление к ее единице любой непустой конституенты выводит максимальную А-онтологию из данного BIN .

⁵Принцип нумерации дизъюнкта такой же как у конституент. $K(2)' = (X_1' \cdot X_2' \cdot X_3')' = D(5) = X_1 + X_2' + X_3$

Рис. 5: Иллюстрация понятия бинарный инвариант

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Логическое содержание максимальной А-онтологии выражается ее *BIN*. Логическое содержание не максимальной А-онтологии с данным *BIN* выражается конъюнкцией суждений ее *BIN* в совокупности с суждениями NOB_S , выражающими пустоту конститuent, которые не входят в данную А-онтологию по сравнению с максимальной.

На рисунке 5 представлены обе А-онтологии, определяемые бинарным инвариантом $BIN = \{A(X'_1, X_2); IO(X_1, X_2); A(X'_1, X_4); A(X'_2, X'_3); IO(X_2, X_4); A(X_3, X_4)\}$. Одна из них максимальная.

А-онтология I позволяет выразить n -арное логическое отношение в виде суждения NOB_S

$$F(X_n) = M(I),$$

называемого далее МЛ-уравнением, где $F(\tilde{X}_n)$ -ППФ алгебры множеств.

Модельные множества, выраженные номерами конститuent, и вся А-онтология могут быть представлены совершенной нормальной формой Кантора (*SNFK*). Например, левая А-онтология рисунка 5 представляется как МЛ-уравнение (12) с левой частью в форме *SNFK*

$$(12) \quad \begin{aligned} &X_1' \cdot X_2 \cdot X_3' \cdot X_4 + X_1' \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + X_1 \cdot X_2' \cdot X_3' \cdot X_4' + \\ &X_1 \cdot X_2' \cdot X_3' \cdot X_4 + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3' \cdot X_4' + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3' \cdot X_4 + \\ &X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 = U, \end{aligned}$$

либо через равносильную левой части этого равенства ППФ, например, $X_1 \cdot X_3' + X_2 \cdot X_4 = U$.

Для того, чтобы доказать функциональную полноту NOB_S и иметь возможность построения А-онтологии с наперед заданными свойствами, построено исчисление конститuentных множеств. Теорема 2 позволяет последовательно вводить в исходную А-онтологию бинарные отношения (суждения NOB_S).

ТЕОРЕМА 2.

- (1) Чтобы ввести в n -арную A -онтологию отношение $X \subset U$, достаточно добавить к ее единице хотя бы одну конституенту с номером из множества номеров конституент, образующих множество $X' = U^0 \setminus X$, где U^0 -универсум n -арной канонической A -онтологии.
- (2) Чтобы ввести в A -онтологию отношение $X = U$, необходимо и достаточно убрать из нее все конституенты с номерами из множества конституент образующих множество $X' = U \setminus X$.
- (3) Чтобы ввести в A -онтологию отношение $X \subset Y$ необходимо и достаточно убрать из нее все конституенты с номерами из множества конституент образующих множество $X \cdot Y'$.
- (4) Чтобы ввести в A -онтологию отношение $X = Y$, необходимо и достаточно убрать из нее все конституенты с номерами из множества конституент образующих множество $X' \cdot Y + X \cdot Y'$.
- (5) Чтобы ввести в A -онтологию отношение $IO(X, Y)$, достаточно добавить в нее хотя бы по одной конституенте с номерами из тех множеств $X' \cdot Y'$, $X' \cdot Y$, $X \cdot Y'$, $X \cdot Y$, которые являются в ней пустыми.

На основе теорем исчисления конституентных множеств разработан M -алгоритм вычисления A -онтологии I и ее универсума (единицы $M(I)$) для конъюнкции суждений NOB_S [3].

СЛЕДСТВИЕ 1. Доказано, что модифицированная онтология, получаемая в результате удаления необходимого и достаточного числа конституент, посредством M -алгоритма, для выполнения требуемого логического отношения, является **максимальной** из возможных по числу непустых конституент.

ТЕОРЕМА 3. Имеет место функциональная полнота простых суждений **нового базиса силлогистики**, то есть любая A -онтология может быть выражена конъюнкцией суждений NOB_S .

На рисунке 5 левая A -онтология — максимальная (добавление к ее единице нового конституентного номера изменяет BIN). M -алгоритм строит максимальную A -онтологию по конъюнкции суждений NOB_S , поэтому ее логическое содержание может быть выражено конъюнкцией суждений BIN вида

$$A(X'_1, X_2) \cdot IO(X_1, X_3) \cdot A(X'_1, X_3) \cdot A(X'_2, X'_3) \cdot IO(X_2, X_4) \cdot A(X_3, X_4).$$

$Ur =$	0	2	4	6	7
$X_1 =$	=====				
$X_2 =$	=====				
$X_3 =$	=====				

Рис. 6: А-онтология соответствующая суждению (14)

Для того, чтобы выразить логическое содержание правой А-онтологии в NOB_S , нужно добавить к данной конъюнкции еще один множитель $D(2) = U$, который утверждает пустоту конstituенты с номером 13, $13' = 2^4 - 13 - 1 = 2$, $D(2) = (X'_1 + X'_2 + X_3 + X'_4) = U$.

Рассмотрим совершенную нормальную форму Кантора (СНФК), представленную объединением семейства конstituент

$$(13) \quad X_1 \cdot X'_2 \cdot X'_3 + X'_1 \cdot X'_2 \cdot X'_3 + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 + X'_1 \cdot X_2 \cdot X'_3 + X_1 \cdot X_2 \cdot X'_3.$$

Если число составляющих ее конstituент меньше 2^n , то ей можно сопоставить нетождественное равенство (МЛ-уравнение)

$$(14) \quad \underbrace{X_1 \cdot X'_2 \cdot X'_3}_4 + \underbrace{X'_1 \cdot X'_2 \cdot X'_3}_0 + \underbrace{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3}_7 + \underbrace{X'_1 \cdot X_2 \cdot X'_3}_2 + \underbrace{X_1 \cdot X_2 \cdot X'_3}_6 = U,$$

в котором левую часть нельзя тождественно привести к правой. МЛ-уравнение как суждение NOB_S характеризуется сопоставленной ему посредством М-алгоритма единицей $M = U = \{0, 2, 4, 6, 7\}$. Этой единице соответствует А-онтология изображенная на рисунке 6.

Рассмотрим СНФК

$$SNFK = \bigcup_{i \in M(I) \subset \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}} \mathbf{K}(i),$$

построенную по единице $M(I)$ неканонической А-онтологии I . Все ППФ алгебры множеств $F_i(\tilde{X}_n)$ такие, что $F_i(\tilde{X}_n) \equiv SNFK$, $i = \overline{1, m}$ образуют класс эквивалентности. Из них можно составить m МЛ-уравнений вида (15)

$$(15) \quad F_i(\tilde{X}_n) = U, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Каждое утверждение из NOB_S (15) выполняется тогда и только тогда, когда $M(F_i(\tilde{X}_n) = U) = M(I)$.

Класс эквивалентности (15) называется общим решением, определяющим все равносильные следствия исходного МЛ-уравнения.

Частным решением называются его нетождественные следствия (МЛ-уравнения), которые не равносильны исходному и несут только нетождественную часть логического содержания исходного.⁶ А-онтологии I можно сопоставить МЛ-уравнение $SNFK(I) = U$. Выразим равносильное ему МЛ-уравнение через нуль $N(I)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. $N(I) = U^0 \setminus M(I)$ можно представить в виде конъюнкции утверждений (16) из суждений NOB_S .

$$(16) \quad (D(i'_1) = U) \cdot (D(i'_2) = U) \cdot \dots \cdot (D(i'_k) = U),$$

где $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} = N(I)$, $i_j = 2^n - 1 - i'_j$; $j = \overline{1, k}$. Каждый «множитель» этой конъюнкции выражает пустоту одной из конституент, входящих в $N(I)$. Будем называть конъюнкцию (16) канонической формой логического содержания А-онтологии I .

Конъюнкция утверждений NOB_S (16) равносильна одному утверждению (17).

$$(17) \quad \left(\bigcap_{i \in N(I)} D(i') \right) = U;$$

где $i' = 2^n - i - 1$. Левая часть этого равенства выражает единицу А-онтологии I .

$$(18) \quad M(I) = \bigcap_{i \in N(I)} D(i').$$

ТЕОРЕМА 4. Логическое содержание А-онтологии I_2 - $Log(I_2)$ является частью логического содержания А-онтологии I_1 - $Log(I_1)$ тогда и только тогда, когда их единицы (объемы универсумов) находятся в соотношении $M(I_1) \subseteq M(I_2)$. При этом строгое включение выполняется только тогда, когда

$$(Log(I_1) \models_N Log(I_2)) \cdot (Log(I_2) \not\models Log(I_1)).$$

⁶Логическое содержание можно выразить различными способами, например на основе $BIN(I)$.

Теорема 4 позволяет находить частные решения для МЛ-уравнения с набором n переменных $\tilde{X}_n$ в виде МЛ-уравнения тоже с набором n переменных, а также проверять, является ли данное МЛ-уравнение частным решением МЛ-уравнения с таким же числом переменных. Для проверки является ли МЛ-уравнение $F_2(\tilde{X}_m) = U$ следствием МЛ-уравнения $F_1(\tilde{X}_n)$ в случае, когда $(\tilde{X}_n)$ и $(\tilde{X}_m)$ являются несовпадающими, их приводят к одной системе образующих множеств.

2. Решение логического уравнения путем вычисления единицы соответственного МЛ-уравнения

МЛ-уравнению $F(X_1, X_2, \dots, X_n) = U$ можно однозначно сопоставить логическое уравнение $F(\tilde{x}_n) = 1$. Здесь булевы переменные $x_i, i = 1, \dots, n$ являются характеристическими функциями модельных множеств X_i . Разработан М-алгоритм поиска поиска всех выполняющих подстановок для $F(\tilde{x}_n) = 1$ посредством применения М-алгоритма для вычисления единицы $M(F(\tilde{X}_n) = U)$ МЛ-уравнения $F(\tilde{X}_n) = U$. М-алгоритм можно эффективно распараллелить. При этом доказано, что

$$(19) \quad M(F(X_1, X_2, \dots, X_n) = U) = F(X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0),$$

где $X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0$ модельные множества канонической n -арной А-онтологии [4].

3. Примеры верификации логического следования в логике предикатов

В работе развивается подход П. С. Порецкого из [7]. В качестве ППФ в своей силлогистике, Порецкий использовал конъюнкции утверждений трех типов

$$F_1(\tilde{\mathfrak{N}}_n) \subseteq F_2(\tilde{\mathfrak{N}}_n), \quad F_1(\tilde{\mathfrak{N}}_n) \subseteq F_2(\tilde{\mathfrak{N}}_n)', \quad K(i) = \emptyset;$$

(2) первые два соответствуют категорическим сужениям Аристотеля $F_1(\tilde{\mathfrak{N}}_n) a F_2(\tilde{\mathfrak{N}}_n)$ и $F_1(\tilde{\mathfrak{N}}_n) e F_2(\tilde{\mathfrak{N}}_n)$ [5], а третье утверждает пустоту конститuenty с номером i . Полученные результаты позволяют строить и рассчитывать логико-семантические модели для решения прикладных задач, заменяя логический вывод верификацией НЛССС, которая сводится к проверке отношения включения конститuentных множеств. Алгоритм вычисления семантического значения ППФ обладает высоким уровнем параллелизма [4]. Каждое непустое конститuentное

множество является семантическим значением для множества равносильных ППФ логики L_{s_2} , пустое конституентное множество есть семантическое значение ППФ являющихся противоречиями в L_{s_2} полное конституентное множество моделирует универсум и является семантическим значением закона в L_{s_2} . В качестве примеров верификации логического следования заключения из посылок (смотри примеры 1, 2, 3, 4). В примере 4 явно используется соответствие Галуа.

3.1. Соответствие Галуа

Рассмотрим соответствие Галуа, следуя математической энциклопедии. Соответствие R между множествами $X \subseteq U_X$ и $Y \subseteq U_Y$ есть любое подмножество их декартова произведения, обозначается как (R, X, Y) или $R(X, Y)$. Для конечных множеств соответствия задаются также, как бинарные отношения, посредством матриц и ориентированных графов. Все соответствия между X и Y образуют алгебру Буля с нулем в виде пустого множества и единицей в виде полного соответствия - декартова произведения $X \times Y$. Множество $D_R(X) = \{x \in X \mid \exists y \in Y \langle x, y \rangle \in R\}$ называется областью определения соответствия R , а множество $B_R(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \langle x, y \rangle \in R\}$ — областью значений для соответствия R . Также R называется полностью определенным, если $D_R(X) = X$, иначе частично определенным. $R(X, Y)$ называется сюръективным (полнозначным), если $B_R(X) = Y$. Для каждого элемента множество

$$\text{Im}_R x = \begin{cases} \{y \in Y \mid \langle x, y \rangle \in R\} \\ \emptyset, \quad \forall y \in Y \langle x, y \rangle \notin R \end{cases}$$

называется образом элемента x относительно R .

Для каждого $y \in Y$ множество

$$\text{Coim}_R y = \begin{cases} \{x \in X \mid \langle x, y \rangle \in R\} \\ \emptyset, \quad \forall x \in X \langle x, y \rangle \notin R \end{cases}$$

называется прообразом элемента y относительно R .

Выполняются соотношения

$$\begin{aligned} D_R(X) &= \bigcup_{y \in Y} \text{Coim}_R y = \bigcup_{y \in B_R(X)} \text{Coim}_R y, \\ B_R(X) &= \bigcup_{x \in X} \text{Im}_R x = \bigcup_{x \in D_R(X)} \text{Im}_R x \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} D_R(X) &= X \setminus \{x \mid \forall y \in Y \quad \langle x, y \rangle \notin R\}, \\ B_R(X) &= Y \setminus \{y \mid \forall x \in X \quad \langle x, y \rangle \notin R\}. \end{aligned}$$

Каждое соответствие $R(X, Y)$ определяет соответствие Галуа между подмножествами множества X и множества Y . Соответствие Галуа каждому подмножеству $A \subseteq X$ сопоставляет множество

$$B = \bigcup_{x \in A} \text{Im}_R x \subseteq Y,$$

если $A = \emptyset$, то $B = \emptyset$. Обозначим соответствие Галуа как

$$G(R, X, Y) = \left\{ \langle A, B \rangle \mid A \subseteq X, B = \bigcup_{x \in A} \text{Im}_R x \subseteq Y \right\}$$

Вместе с дуальным соответствием, которое каждому подмножеству $B \subseteq Y$ сопоставляет множество

$$A = \bigcup_{y \in B} \text{Coim}_R y \subseteq X,$$

соответствие Галуа задает на каждом из множеств X и Y оператор замыкания.

Инволюция $R - R^{-1}$ — это соответствие $R^{-1}(Y, X)$ определяемое как

$$R^{-1}(Y, X) = \{\langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R\}.$$

Инволюция устанавливает биекцию между $R(X, Y)$ и $R^{-1}(Y, X)$, которая является изоморфизмом булевых алгебр. Для $R(X, Y)$ и $S(Y, Z)$ их произведение (композиция) $R \cdot S$ определяется следующим образом

$$R \cdot S(X, Z) = \{\langle x, z \rangle \mid \exists y \in Y (\langle x, y \rangle \in R) \wedge (\langle y, z \rangle \in S)\}.$$

Умножение ассоциативно. Единицами для него служат диагональные соответствия в узком смысле (бинарные отношения) ($U_X = U_Y$). Кроме того $(R \cdot S)^{-1} = S^{-1} \cdot R^{-1}$ и из $R_1 \subseteq R_2$ следует $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$.

Полностью определенное и сюръективное соответствие $R(X, Y)$, для которого $D_R(X) = X$, $B_R(X) = Y$ будем обозначать как $R_B^D(X, Y)$. Каждая пара непустых множеств $\langle A, B \rangle$, $A \subseteq X$ из соответствия Галуа $G(R_B^D, X, Y)$ определяет сужение соответствия $R_B^D(X, Y) \subseteq X \times Y$ обозначаемое как $\hat{R}_B^D(A, B)$. При этом $\hat{R}_B^D(A, B) \subseteq R_B^D(X, Y)$.

Любое соответствие $\check{R}(X_1, Y_1)$, такое, что $\langle X_1, Y_1 \rangle \in G(R_B^D, X, Y)$ и $\hat{R}(A, B) \subset \check{R}(X_1, Y_1) \models (A \subset X_1)$ называется расширением для $\hat{R}(A, B)$ относительно соответствия $R_B^D(X, Y)$. При этом данное расширение будет полностью определенным и сюръективным. Сужением для соответствия $\check{R}(X_1, Y_1)$ относительно $R_B^D(X, Y)$ называется полностью определенное и сюръективное соответствие

$$\hat{R}_B^D(A, B) \subset \check{R}(X_1, Y_1), \langle X_1, Y_1 \rangle \in G(R_B^D, X, Y).$$

Последнее назовем максимальным расширением любого элемента соответствия Галуа $G(R_B^D, X, Y)$.

Понятие соответствия Галуа и его свойства позволяют вычислять непарадоксальное логическое следование в семантическом смысле, не используя логический вывод, посредством исчисления конститuentных множеств и интерпретации рассуждений логики предикатов в терминах соответствий.

3.2. Примеры верификации рассуждений

ПРИМЕР 1 (Задача о паровом катке [9, 10] для испытания метода резолюций). *Волки (V), лисицы (L), птицы (P), гусеницы (G) и улитки (U) являются животными и существует хотя бы один экземпляр каждого из них. Также, существует злак (Z), и злаки являются растениями (R). Каждое животное любит есть либо все растения, либо всех травоядных животных, которые намного меньше его. Гусеницы и улитки намного меньше птиц, которые намного меньше лисиц, которые, в свою очередь, намного меньше волков. Волки не любят есть лисиц или злаки, а птицы любят есть гусениц, но не любят улиток. Гусеницы и улитки любят есть некоторые растения. Доказать, что существует животное, которое любит есть животных, поедающих злаки.*

Обозначим: $X_0 = Ur$ — универсум (растения и животные), $X_1 = A$ — животные, $X_2 = V$ — волки, $X_3 = L$ — лисицы, $X_4 = P$ — птицы, $X_5 = G$ — гусеницы, $X_6 = U$ — улитки, $X_7 = R$ — растения, $X_8 = Z$ — злаки.

По условиям задачи, некоторые из которых явно не сформулированы, $X_i X_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $i, j = 2, \dots, 6, 7$; $X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = X_1$; $A(X_8, X_7)$. Доказываем, что существует животное, которое любит есть животных, поедающих злаки:

$$\exists(x)\exists(y)\exists(z)\exists(t)(x, y, z \in X_1) \cdot (t \in X_8) \cdot (LE(x, y)) \cdot (LE(y, z)) \cdot (LE(z, t))$$

Таблица 1: Отношения «много больше» (MG) и «любит есть» (LE)

(a) «много больше»						(b) «любит есть»							
MG	V	L	P	G	U	LE	V	L	P	G	U	R	Z
V	0	1	1	1	1	V	0	0	1	1	1	1	0
L	0	0	1	1	1	L	0	0	1	1	1	1	1
P	0	0	0	1	1	P	0	0	0	1	0	1	1
G	0	0	0	0	0	G	0	0	0	0	0	1	1
U	0	0	0	0	0	U	0	0	0	0	0	1	1

Строим А-онтологию, удовлетворяющую логическим отношениям:

$$\begin{aligned}
 X_1 + X_7 &= X_0, & \text{животные и растения составляют универсум} \\
 Eq(X_1, X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6) & & \text{животные — это волки или лисицы или птицы или гусеницы или улитки} \\
 A(X_8, X_7) & & \text{злаки являются растениями} \\
 X_5 \cdot X_6 &= X_0', & \\
 X_2 \cdot (X_3 + X_4 + X_5 + X_6) &= X_0', & \text{виды животных не пересекаются} \\
 X_3 \cdot (X_4 + X_5 + X_6) &= X_0', & \\
 X_4 \cdot (X_5 + X_6) &= X_0' & \\
 X_7 \cdot X_1 &= X_0' & \text{растения не бывают животными}
 \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение множества $X_9 - X_{15}$, построенные исходя из условий задачи.

$$\begin{aligned}
 X_9 &= X_1 \cdot X_2' & \text{множество животных, много меньших волков} \\
 X_{10} &= X_1 \cdot X_3' & \text{— животных, много меньших лис} \\
 X_{11} &= X_1 \cdot X_2' \cdot X_3' \cdot X_4' & \text{— животных, много меньших птиц} \\
 X_{12} &= (X_1 + X_7) \cdot X_2' \cdot X_3' \cdot X_8' & \text{любимая еда волков} \\
 X_{13} &= (X_1 + X_7) \cdot X_2' \cdot X_3' & \text{любимая еда лисиц} \\
 X_{14} &= (X_1 + X_7) \cdot X_2' \cdot X_3' \cdot X_4' \cdot X_6' & \text{любимая еда птиц} \\
 X_{15} &= X_7' & \text{любимая еда улиток и гусениц}
 \end{aligned}$$

Каждое животное любит есть либо все растения, либо всех травоядных животных, которые намного меньше его. Отношение «любит есть» отчасти повторяет отношение «много больше» (смотри таблицы 1a, 1b) дополнено парами $\langle G, R \rangle$, $\langle G, Z \rangle$, $\langle U, R \rangle$, $\langle U, Z \rangle$ и убраны исключения-пары $\langle V, L \rangle$, $\langle V, Z \rangle$, $\langle P, U \rangle$.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	
	:	:	:	:	:	:	R		:	:	:	R	R	R	R	271
	:	:	:	:	:	:		Z	:	:	:	Z	Z	Z	Z	391
		:	:	:	:	U			U	U	U	U	U	:	:	17020
		:	:	:	G		:	:	G	G	G	G	G	:	:	17534
		:	:	P	:	:	:	:	P	P	:	P	P	:	:	18540
		:	:	:	:	:	:	:	L	:	:	:	:	:	:	20544
	V		:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	24576
Животные																
Волки																
Лисицы																
Птицы																
Гусеницы																
Улитки																
Растения																
Злаки																
Меньше Волков																
Меньше лисц																
Меньше птиц																
Любят есть волки																
Любят есть лисы																
Любят есть птицы																
Любят улитки и гусеницы																

Рис. 7: А-онтология для решения задачи «паровой каток»

Добавим равенства, определяющие множества $X_9 - X_{15}$ в А-онтологию (рисунок 7).

$Eq(X_9, X_1 \cdot X_2)'$	множество животных, которые меньше волков
$Eq(X_{10}, X_1 \cdot X' \cdot X_3)'$	— животных, которые меньше лисы
$Eq(X_{11}, X_1 \cdot X'_2 \cdot X'_3 \cdot X_4)'$	— животных, которые меньше птиц
$Eq(X_{12}, (X_1 + X_7) \cdot X'_2 \cdot X'_3 \cdot X'_8)$	любимая еда волков
$Eq(X_{13}, (X_1 + X_7) \cdot X'_2 \cdot X'_3)$	любимая еда лисиц
$Eq(X_{14}, (X_1 + X_7) \cdot X'_2 \cdot X'_3 \cdot X'_4 \cdot X'_6)$	любимая еда птиц
$Eq(X_{15}, X_7)$	любимая еда улиток и гусениц

Для решения задачи нужно перебрать всех животных, конструируя на А-онтологии с рисунка 7 допустимые пищевые цепочки из трех звеньев « x любит есть y » и « y любит есть z » и « z любит есть t », где x, y, z —животные, t -растение.

Если найдется хотя бы одна трехзвенная цепочка, то будет доказана возможность выполнения целевого утверждения задачи. Например, «волки (x) любят кушать птиц (y)» и «птицы (y) любят кушать гусениц (z)», и «гусеницы (z) любят кушать все растения (t)».

Поскольку растения включают злаки, то нами доказана возможность существования животного, которое любит есть животных, которые любят есть злаки.

Для того, чтобы с необходимостью выполнялось доказываемое утверждений, достаточно найти хотя бы одну трехзвенную цепочку, в которой предметная переменная t должна принадлежать множеству злаков. Для этого достаточно изменить условие задачи, указав, например, что гусеницы любят есть только злаки.

ПРИМЕР 2 (из работы [8]). Пусть требуется доказать, что справедлива импликация

$$A \equiv p \cdot (p \Rightarrow q) \cdot (s \Rightarrow t) \cdot (t \Rightarrow w) \Rightarrow w.$$

Через U обозначим, универсум моделируемый конституентным множеством. Пусть

$$B \equiv p \cdot (p \Rightarrow q) \cdot (s \Rightarrow t) \cdot (t \Rightarrow w)$$

есть посылка. Заключение есть $C \equiv w$. Верифицировать следствие.

Исключим импликацию из посылки

$$B \equiv p \cdot (p \Rightarrow q) \cdot (s \Rightarrow t) \cdot (t \Rightarrow w) \equiv D = p \cdot (p' + q) \cdot (s' + t) \cdot (t' + w).$$

Проверим, согласно Теореме 4, имеет ли место непарадоксальное логическое следование

$$D \models_N C.$$

Для этого перейдем к соответственным МЛ-уравнениям, которые являются ППФ логики L_{S_2} , и найдем единицы $C : (W = U)$ и $D : P \cdot (P' + Q) \cdot (S' + T) \cdot (T' + W) = U$. Для верификации НЛССС достаточно вычислить единицы (семантические значения) этих базовых конъюнктов (логических отношений) и проверить выполнение отношения включения для соответствующих им конституентных множеств

$$\begin{aligned} M(P \cdot (P' + Q) \cdot (S' + T) \cdot (T' + W) = U) &= \{24, 25, 27, 31\} \\ \not\subset \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31\} &= (W = U). \end{aligned}$$

Соотношение включения не имеет места, следовательно импликация A не является тавтологией. Единица для $EQ(P \cdot (P' + Q) \cdot (S' + T) \cdot (T' + W), U)$ изображена на Рисунке 8. При этом единица

$$M(W = U) = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31\}$$

Из этого следует, что логического следования нет. Для того, чтобы заключение имело место, достаточно добавить к посылке утверждение о пустоте конституенты с номером 24 или утверждение о полноте disjointной к ней дизъюнкты с номером $7 = 2^5 - 24 - 1$.

$$K(24) = P \cdot Q \cdot S' \cdot T' \cdot W' = \emptyset \equiv D(7) = P' + Q' + S + T + W = U$$

Рис. 8: Логические объемы A-онтологий для D и C

Таким образом, мы доказали, что

$$A \equiv p \cdot (p \Rightarrow q) \cdot (s \Rightarrow t) \cdot (t \Rightarrow w) \cdot (p' + q' + s + t + w) \Rightarrow w$$

ПРИМЕР 3 (Чень). *Верифицировать следствие. Некоторые пациенты любят всех докторов. Ни один пациент не любит знахаря. Следовательно, никакой доктор не является знахарем.*

Формализация этого текста (Васильев С.Н. [10])

$$A_1 \cdot A_2 \rightarrow B,$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \exists x (P(x) \cdot \forall y (D(y) \rightarrow L(x, y))), \\ A_2 &= \forall x (P(x) \rightarrow \forall y Q(y) \rightarrow L(x, y)'), \\ B &= \forall x (D(x) \rightarrow Q(x)'). \end{aligned}$$

Наиболее компактное формальное доказательство предложено в [10] с использованием по-формул.

Рассмотрим верификацию логического следования. Введем в рассмотрение множества P , D , Q -одноименные с одноместными предикатами $P(x)$, $D(x)$, $Q(x)$ и множество V , которое образует вместе с множеством P пару $\langle P, V \rangle \in G(L, X, Y)$, где соотношение Галуа построено на соответствии $L(X, Y)$, которое определяется предикатом $L(x, y)$ -«любит x y -ка».

$$V = \{y \mid \forall x (x \in P) \wedge (L(x, y))\}.$$

Таким образом, множество V в данной нотации обозначает множество людей, которых любят пациенты. Очевидно, что вследствие условия A_1 выполняется утверждение $D \subseteq V$ - «все доктора входят в множество тех кого любят пациенты» (A_1 и $D \subseteq V$ равносильны).

Условие A_2 переформулируем в равносильное $V \subseteq Q'$ - «Множество тех, кого любят пациенты не включают знахарей».

$Ur =$	0	1	2	5	8	9	10	13	
$X_1 =$									P
$X_2 =$									D
$X_3 =$									Q
$X_4 =$									V

Рис. 9: Семантический смысл посылок задачи о пациентах

С помощью Теоремы 4 формально из утверждений $D \subseteq V$ и $V \subseteq Q'$ следует $D \subseteq Q'$ -«Все врачи не знахари» равносильное B .

А-онтология, выражающая семантику посылки

$$(D \subset V) \cdot (V \subset Q'),$$

изображена на рисунке 9.

Полисиллогизм, соответствующий данной задаче, выраженный в ортогональном базисе силлогистики, имеет вид

$$[(D \subset V) + (D = V)] \cdot [(V \subset Q') + (V = Q')] \models_N [(D \subset Q') + (D = Q')]$$

ПРИМЕР 4 (взят из работы [11]). Пусть имеется общий универсум U для всех предметных переменных. Доказать, что имеет место следствие из трех посылок

$$\begin{aligned}
 & \forall x \exists y F(x, y), \\
 & \forall x \exists y G(x, y), \\
 & \forall x \exists y (F(x, y) + G(x, y) \rightarrow \forall z (F(y, z) + G(y, z) \rightarrow H(x, z))) \\
 (20) \quad & \models_N \\
 & \forall x \exists y H(x, y).
 \end{aligned}$$

Перепишем в терминах соответствий. Множества Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 , являются непустыми подмножествами универсума U .

$$\begin{aligned}
 & \exists Y_1 (F(U, Y_1) \neq \emptyset) \cdot (D_F(U) = U), \\
 & \exists Y_2 (G(U, Y_2) \neq \emptyset) \cdot (D_G(U) = U), \\
 & \exists Y_3 \underbrace{F(U, Y_3) + G(U, Y_3) \neq \emptyset}_A \rightarrow \left(\underbrace{F(Y_3, U) + G(Y_3, U) \neq \emptyset}_B \rightarrow \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. (H(U, U) \neq \emptyset) \cdot (D_H(U) = U) \right) \\
 (21) \quad & \models_N \\
 & \exists Y_4 (H(U, Y_4) \neq \emptyset) \cdot (D_H(U) = U).
 \end{aligned}$$

Избавимся от одной импликации в третьей посылке

$$\begin{aligned}
 & \exists Y_1 (F(U, Y_1) \neq \emptyset) \cdot (D_F(U) = U), \\
 & \exists Y_2 (G(U, Y_2) \neq \emptyset) \cdot (D_G(U) = U), \\
 & \exists Y_3 \underbrace{(F(U, Y_3) + G(U, Y_3) \neq \emptyset)}_A \cdot \underbrace{(F(Y_3, U) + G(Y_3, U) \neq \emptyset)}_B \rightarrow \\
 & \quad (H(U, U) \neq \emptyset) \cdot (D_H(U) = U) \\
 (22) \quad & \models_N \\
 & \exists Y_4 (H(U, Y_4) \neq \emptyset) \cdot (D_H(U) = U).
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть посылки рассуждения (21) выполняются. Выполнение третьей посылки возможно в случае, когда $Y_3 = U$, либо в случае $Y_3 \subset U$. Если $Y_3 = U$, то из выполнения первых двух посылок следует выполнение утверждений A и B третьей посылки и, следовательно, истинность суждения (выполнение условия) $(H(U, U) \neq \emptyset)$. В данном случае в качестве Y_4 в соответствии H можно взять $Y_3 = U$.

Если $\emptyset \subset Y_3 \subset U$, то в этом случае вид множества Y_3 зависит от того, в каком из семи невырожденных Жергонновых отношениях $G_6, G_7, G_9, G_{11}, G_{13}, G_{14}, G_{15}$, изображенных на рисунке 1, находятся непустые множества Y_1 и Y_2 . Их существование гарантируется первыми двумя посылками.

Выполнение суждений A и B для G_6, G_{14} будет иметь место, если в качестве Y_3 взять множество $\tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2$, где $\emptyset \subset \tilde{Y}_1 \subseteq Y_1, \emptyset \subset \tilde{Y}_2 \subseteq Y_2$. Для случая $G_9, G_{13}, Y_3 = Y_1$ гарантирует выполнение A и B . Для G_{11} достаточно взять $Y_3 = Y_2$, для G_7, G_{15} достаточно, чтобы $Y_3 = Y_1 \cdot Y_2$.

Выполнение условий A и B гарантирует, что $H(U, U) \neq \emptyset$, что, в свою очередь, обеспечивает выполнимость заключения

$$\exists Y_4 H(U, Y_4) \neq \emptyset.$$

□

4. Заключение

В работе на примерах показано, что верификация логического следования посредством исчисления конституентных множеств и соответствий Галуа может служить альтернативой методу резолюций и методу аналитических таблиц.

Список литературы

- [1] Yu. Smetanin. «Syllogistical system on the basis of the propositional multivalued logic», *Proceedings of the 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V. I. Zubov* (St. Petersburg, Russia, 5–9 Oct. 2015), IEEE, 2015, с. 596–599. ↑ ^{69,92}
- [2] Ю. М. Сметанин. «Многозначная пропозициональная логика с непарадоксальным логическим следованием», *Девятые Смирновские чтения по логике*, Материалы Международной научной конференции (Москва, 19–21 июня 2015 г.), ред. Маркин В. И., Герасимова И. А., Зайцев Д. В., Карпенко А. С., Григорьев О. М., Томова Н. Е., «Современные тетради», 2015, с. 36–38. ↑ ^{69,70,92}
- [3] Ю. М. Сметанин. «Алгоритм решения полисиллогизмов в ортогональном базисе посредством исчисления конституентных множеств», *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 2010, №4, с. 172–185. ↑ ^{70,78}
- [4] Ю. М. Сметанин. «Непарадоксальное логическое следование и проблема решения МЛ-уравнений», *Программные системы: теория и приложения*, 7:1(28) (2016), с. 99–115, URL: http://psta.psisras.ru/read/psta2016_1_99-115.pdf ↑ ^{70,72,81}
- [5] В. А. Бочаров, В. И. Маркин. *Силлогистические теории*, Прогресс-Традиция, М., 2010, 336 с. ↑ ^{70,72,81}
- [6] В. К. Финн. «О неаристотелевском строении понятий», *Логические исследования*, 21:1 (2015), с. 9–48. ↑ ⁷⁴
- [7] П. С. Порецкий, *О способах решения логических равенств и об одном обратном способе математической логики*, Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете, 1884, 170 с. ↑ ⁸¹
- [8] С. Н. Васильев. «Метод синтеза условий выводимости хорновских и некоторых других формул», *Сиб. матем. журн.*, 38:5 (1997), с. 1034–1042. ↑ ⁸⁷
- [9] C. Walther. «A mechanical solution of Schubert’s steamroller by many-sorted resolution», *Artificial Intelligence*, 26:2 (1985), с. 217–224. ↑ ⁸⁴
- [10] С. Н. Васильев, Ф. Л. Жерлов, Е. А. Федосов, Б. Е. Федунев. *Интеллектуальное управление динамическими системами*, Физматлит, М., 2000, 352 с. ↑ ^{84,88}
- [11] В. Н. Вагин, Зо Мью Хтет. «Параллельный вывод в методе аналитических таблиц», *Программные продукты и системы*, 2011, №3, с. 8–13. ↑ ⁸⁹

Пример ссылки на эту публикацию:

Ю. М. Сметанин. «Верификация логического следования с использованием исчисления конститuentных множеств и соответствий Галуа», *Программные системы: теория и приложения*, 2017, 8:2(33), с. 69–93.

URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2017_2_69-93.pdf

Об авторе:

Юрий Михайлович Сметанин

Область научных интересов: прикладная логика, силлогистика. Разработал исчисление конститuentных множеств, которое позволяет алгоритмически верифицировать логическое следование в неклассической пропозициональной логике, сводя его к проверке включения одного множества в другое.

e-mail:

gms1234gms@rambler.ru

Iurii Smetanin. *Verification of logical consequence, using the calculus of constituent sets and correspondences of Galois.*

ABSTRACT. Abstract. The paper substantiates that, in the case where staged argument uses the concept of verification tasks of conformity can be checked logical consequence, without applying the logical conclusion. It is convenient to use the calculus of constituent sets and tasking logic L_{s2} [1, 2]. The example shows that the predicate logic, logical consequence verification can be performed using a simple reasoning based on Galois correspondence. (In Russian).

Key words and phrases: logical equations, syllogistic, algebraic ontology, algebraic system, nonparadoxical logical consequence, Boolean algebra, Galois correspondence.

References

- [1] Yu. Smetanin. “Syllogistical system on the basis of the propositional multivalued logic”, *Proceedings of the 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V. I. Zubov* (St. Petersburg, Russia, 5–9 Oct. 2015), IEEE, 2015, pp. 596–599.
- [2] Yu. M. Smetanin. “Polysemantic propositional logic with not paradoxical logical implication”, *Devyatyye Smirnovskiye chteniya po logike*, Materialy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii (Moskva, 19–21 iyunya 2015 g.), eds. Markin V. I., Gerasimova I. A., Zaytsev D. V., Karpenko A. S., Grigor'yev O. M., Tomova N. Ye., “Sovremennyye tetradi”, 2015, pp. 36–38 (in Russian).

- [3] Yu. M. Smetanin. “Algorithm for Solving Polisilogizm in the Orthogonal Basis by Calculating the Constituent Sets”, *Vestnik Udmurt-skogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternyye nauki*, 2010, no.4, pp. 172–185 (in Russian).
- [4] Yu. M. Smetanin. “Non-paradoxical Logical Consequence and the Problem of Solving ML-Equations”, *Programmnyye sistemy: teoriya i prilozheniya*, **7**:1(28) (2016), pp. 99–115 (in Russian), URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2016_1_99-115.pdf
- [5] V. A. Bocharov, V. I. Markin. *Sylogistic theories*, Progress-Traditsiya, M., 2010 (in Russian), 336 p.
- [6] V. K. Finn. “On the Non-Aristotelian Concept Structure”, *Logicheskoye issledovaniya*, **21**:1 (2015), pp. 9–48 (in Russian).
- [7] P. S. Poretskiy, *On the ways to solve logical equation and one return method in mathematical logic*, Sobraniye protokolov zasedaniy seksii fiziko-matematicheskikh nauk obshchestva yestestvoispytateley pri Kazanskom universitete, 1884 (in Russian), 170 p.
- [8] S. N. Vasil'yev. “A Method for the Synthesis of Deducibility Conditions for Horn and some other Formulas”, *Siberian Math. J.*, **38**:5 (1997), pp. 896–906.
- [9] C. Walther. “A mechanical solution of Schubert’s steamroller by many-sorted resolution”, *Artificial Intelligence*, **26**:2 (1985), pp. 217–224.
- [10] S. N. Vasil'yev, F. L. Zherlov, Ye. A. Fedosov, B. Ye. Fedunov. *Intellectual control of dynamic systems*, Fizmatlit, M., 2000 (in Russian), 352 p.
- [11] V. N. Vagin, Zo M'o Khtet. “Parallel Inference in the Method of Analytical Tables”, *Programmnyye produkty i sistemy*, 2011, no.3, pp. 8–13 (in Russian).

Sample citation of this publication:

Iurii Smetanin. “Verification of logical consequence, using the calculus of constituent sets and correspondences of Galois”, *Program systems: Theory and applications*, 2017, **8**:2(33), pp. 69–93. (In Russian).

URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2017_2_69-93.pdf