И. А. Егерев

Методическое обеспечение оптимального управления нечеткими многостадийными процессами

Аннотация. Сформулирована задача синтеза оптимального управления абстрактным нечетким многостадийным процессом. Получено функциональное уравнение, позволяющее найти максимальную реализацию заданной нечеткой цели, при условии, что эволюция процесса характеризуется нечеткими отношениями. Решение функционального уравнения дает на каждой стадии закон управления с обратной связью на этой стадии.

Ключевые слова и фразы: нечеткий многостадийный процесс, нечеткие цели и отношения, максимальная реализация нечеткой цели, функциональное уравнение типа Беллмана, синтез оптимального управления, закон управления с обратной связью.

Введение

Применение понятия нечеткости при описании процессов различной природы объясняется тем, что данное понятие позволяет оперировать с качественной информацией, во многих случаях являющейся основной причиной неопределенности (см., например, [1]).

Изначально методы теории нечетких множеств были направлены на использование логических методов принятия решений, базирующихся на композиционном правиле вывода. В дальнейшем методы теории нечетких множеств и теории динамического программирования были использованы для разработки методов решения задач управления детерминированными и стохастическими системами с нечеткими целями и ограничениями (см., например, [1]). Это позволило сформировать общую теорию математического программирования

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 130700077 «Символьные вычисления в распределенной компьютерной среде для исследования решений дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью»).

© И. А. Егерева, 2015

© Тверской государственный технический университет, 2015

© Программные системы: теория и приложения, 2015

и теорию принятия решений с нечеткими целями и ограничениями (см., например, [2]).

Распространение основных результатов работы [1] на случай нечетких динамических систем оказалось затруднено. Объясняется это тем, что проблема построения моделей нечетких динамических систем, полностью пригодных для использования методов математического и динамического программирования, в настоящее время не решена (см., например, [3–5]). В результате сложилась ситуация, когда распространение идей работы [1] на нечеткие динамические системы фактически пошло по аналогии с распространением классических результатов динамического программирования на задачи управления стохастическими системами (см., например, [6–9]). В упомянутых работах в качестве нечетких моделей используются модели, типа моделей из работ [3–5]. В этом случае для моделирования динамики нечетких систем используются нечеткие аналоги дифференциальных и разностных уравнений, в настоящее время недостаточно совершенные для их использования в общих задачах управления. При этом задачи управления с классическими нечеткими моделями систем остались нерассмотренными.

Основная цель данной работы состоит в развитии основных результатов [1] применительно к задаче управления многостадийными процессами, эволюция состояний на стадиях которой характеризуется классическими нечеткими отношениями.

1. Композиция нечетких отношений

В дальнейшем при рассмотрении задачи управления нам понадобятся некоторые важные свойства композиций нечетких отношений. Пусть X , Y и Z — некоторые множества. Предположим, что на множестве $X \times Y$ задано нечеткое отношение A с функцией принадлежности μ_A , а на множестве $Z \times Y$ задано нечеткое отношение B с функцией принадлежности μ_B . Тогда композиция $A \circ B$ нечетких отношений A и B есть нечеткое отношение в пространстве $X \times Z$ с функцией принадлежности

$$(1) \quad \mu_{A \circ B}(x, z) = \sup_{y \in Y} \min[\mu_A(x, y), \mu_B(y, z)]$$

(см., например, [1]).

Предположим теперь, что в пространстве X задано нечеткое множество R с функцией принадлежности μ_R . Тогда нечеткое отношение

μ_A порождает в пространстве Y нечеткое множество $R \circ A$. Согласно (1) функция принадлежности $\mu_{R \circ A}$ множества $R \circ A$ задается равенством

$$(2) \quad \mu_{R \circ A}(y) = \sup_{x \in X} \min[\mu_R(x), \mu_A(x, y)].$$

Данные композиции нечетких отношений широко используются в теории нечетких множеств для построения композиционных правил вывода (см. [1]). Для исследования поведения нечетких динамических систем будем использовать дополнительное правило композиции нечетких множеств.

Предположим, что на множестве $X \times X$ задано нечеткое отношение S с функцией принадлежности μ_S . Далее, будем считать, что в пространстве X задано также множество G с функцией принадлежности μ_G . Тогда мы можем определить композицию $S \circ G$ нечетких множеств S и G ; при этом согласно (1) функция принадлежности имеет вид

$$(3) \quad \mu_{S \circ G}(x_1) = \sup_{x_2 \in X} \min[\mu_S(x_1, x_2), \mu_G(x_2)].$$

Легко видеть, что композиция $S \circ G$ позволяет определить степень принадлежности элементов множества X нечеткому множеству G при нечетком отношении S . Именно, для каждого $x_1 \in X$ степень принадлежности $\mu_{S \circ G}(x_1)$ этого x_1 нечеткому множеству G задается равенством (2).

2. Оптимальное управление нечеткими многостадийными процессами

Рассмотрим многостадийный процесс, состоящий из стадий $S_1, S_2, \dots, S_N$ (см. рис. 1). Состояние процесса на входе n -ой стадии обозначим через x_n , а на выходе через x_{n+1} . При этом выход n -ой стадии является входом $(n+1)$ -ой стадии. Управление на n -ой стадии будем обозначать через u_{n+1} .

Пусть $X_0, \dots, X_N$ — соответствующие пространства состояний, а $U_1, \dots, U_N$ — пространства управлений. Для определенности будем считать, что все пространства $X_0, \dots, X_N, U_1, \dots, U_N$ являются компактными метрическими пространствами.

Пусть вход $x_0 \in X$ на первую стадию задан. В результате использования управления $u_1 \in U_1$ на выходе первой стадии формируется состояние $x_1 \in X_1$, заранее не известное. Заранее известно только, что

Рис. 1. Нечеткий многостадийный процесс

переменные x_0 , u_1 , x_1 связаны между собой нечетким отношением S_1 с функцией принадлежности $\mu_{S_1}(x_0, u_1, x_1)$. При этом после окончания работы первой стадии реальное состояние x_1 процесса доступно наблюдению.

Аналогичным образом, если $x_{n-1} \in X_{n-1}$ — состояние процесса на входе n стадии, то в результате использования управления $u_n \in U_n$ на выходе стадии n формируется состояние $x_n \in X_n$. Переменные x_{n-1} , u_n , x_n связаны между собой нечетким отношением S_n с функцией принадлежности $\mu_{S_n}(x_{n-1}, u_n, x_n)$.

Будем считать, что цель управления характеризуется нечетким целевым множеством G в пространстве X_N с функцией принадлежности μ_G . Также предположим, что все функции μ_G , μ_{S_1} , $\dots$, μ_{S_N} непрерывны в их области определения. Задача управления заключается в отыскании последовательности управлений

$$(4) \quad u_1, u_2, \dots, u_N,$$

обеспечивающей наибольшее удовлетворение нечеткой цели G при условии, что начальное состояние x_0 задано.

Таким образом, нечеткое множество G представляет собой цель управления и задача состоит в отыскании последовательности управлений (4), обеспечивающей максимальную степень принадлежности состояния x_0 нечеткому множеству G при условии, что эволюция технологического процесса описывается композицией нечетких множеств $S_1, \dots, S_N$ и G (см. [10, 11]).

Другими словами, последовательность управлений (4) должна быть подобрана таким образом, чтобы при заданном начальном состоянии x_0 максимально удовлетворялась нечеткая цель G на выходе последней стадии.

Посредством равенства

$$(5) \quad D_{N-n} = S_{N-n} \circ \dots \circ S_N \circ G$$

введем в рассмотрение нечеткое множество D_{N-n} в пространстве X_{N-n} , условное по $u_{N-n+1}, \dots, u_N$. Функция принадлежности $\mu_{D_{N-n}}$ множества D_{N-n} согласно условию (3) удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \mu_{D_{N-n}}(x_{N-n} | u_{N-n+1}, \dots, u_N) &= \\ &= \max_{x_{N-n}, \dots, x_N} \min[\mu_S(x_{N-n}, u_{N-n+1}, x_{N-n+1}), \dots, \\ &\quad \mu_S(x_{N-1}, u_N, x_N), \mu_G(x_N)]. \end{aligned}$$

Тогда значения $\mu_{D_N}(x_0 | u_1, u_2, \dots, u_N)$ функции μ_{D_N} представляют собой степень принадлежности состояния x_0 множеству G при использовании какой-либо фиксированной последовательности управлений вида (5).

Положим

$$(6) \quad \mu_{N-n}(x_n) = \max_{u_{N-n+1}, \dots, u_N} \mu_{D_N}(x_{N-n} | u_{N-n+1}, \dots, u_N).$$

При этом, очевидно

$$(7) \quad \mu_N(x_N) = \mu_G(x_N).$$

Более того, легко видеть, что

$$\begin{aligned} \max_{u_{N-n+1}, \dots, u_N} \min \mu_{D_{N-n}}(x_{N-n} | u_{N-n+1}, \dots, u_N) &= \\ &= \max_{u_{N-n+1}, \dots, u_N} \min[\mu_S(x_{N-n}, u_{N-n+1}, \dots, u_n), \\ &\quad \max_{u_{N-n+2}, \dots, u_N} \mu_{D_{N-n+1}}(x_{N-n+1} | u_{N-n+2}, \dots, u_n)]. \end{aligned}$$

Тогда в силу (6) для произвольного N выполнено равенство

$$(8) \quad \mu_{N-1}(x_{N-n}) = \max_{u_{N-n}, x_n} \min[\mu_S(x_{N-n}, u_{N-n}, x_n), \mu_{N-n+1}(x_{N-n+1})],$$

где $\mu_{N-n}(x_{N-n})$ — максимальная степень принадлежности состояния x_{N-n} множеству G .

Управление (8) с граничным условием (7) представляет собой аналог уравнения Беллмана для рассматриваемой задачи. Рассмотрим методические аспекты решения полученного уравнения и его использования на практике.

Рис. 2. Процедура построения оптимального управления нечетким многостадийным процессом

3. Методологические аспекты оптимального управления нечеткими многостадийными процессами

С вычислительной точки зрения уравнение (8) с граничным условием (7) не имеет никаких особенностей по сравнению со стандартными уравнениями типа Беллмана (см., например, [12]). Поэтому описанная в данной работе вычислительная процедура в сочетании с методом аппроксимации в пространстве функций без труда переносится на уравнение (8).

Таким образом, процедура построения оптимального управления нечетким процессом распадается на два уровня (рис. 2).

Входными данными первого уровня являются функции принадлежности $\mu_{S_1}, \dots, \mu_{S_N}, \mu_G$. На данном уровне из решения уравнения (8) определяются оптимальные управления $u_1^*, \dots, u_N^*$. При этом согласно основным принципам теории динамического программирования управления $u_1^*, \dots, u_N^*$ всегда можно построить в виде законов управления с обратной связью, т.е.

$$(9) \quad u_n^* = u_n^*(x_{n-1}), \quad n = 1, \dots, N.$$

Рис. 3. Структура оптимального управления

На втором этапе должна осуществляться реализация найденных законов управления на рассматриваемом процессе. В результате получается замкнутая система управления процессом, представленная на рис. 3.

Моделирование нечетких многостадийных процессов при помощи нечетких отношений и правила композиции (3) позволяет осуществить синтез управления с обратной связью рассматриваемыми процессами.

Заключение

Таким образом, сформулирована задача синтеза оптимального управления абстрактными нечеткими многостадийными процессами. На каждой стадии процесса вход, выход и управление на данной стадии связаны между собой соответствующим нечетким отношением. Цель управления задается нечетким множеством, характеризующим качественные показатели выхода последней стадии. Задача заключается в отыскании последовательности управлений на каждой стадии, обеспечивающей максимальную реализацию нечеткой цели. Для решения данной задачи предложен метод, являющийся нечетким аналогом классического метода динамического программирования Р. Беллмана. В результате получено функциональное уравнение, являющееся нечетким аналогом функционального уравнения Беллмана. Решение нечеткого функционального уравнения дает искомую максимальную степень реализации заданной нечеткой цели. Кроме того решение данного уравнения позволяет найти оптимальное управление на каждой стадии. Данное оптимальное управление представляет собой управление с обратной связью. Рассмотрены методические аспекты решения сформулированной задачи и реализации решения на практике.

Список литературы

- [1] Л. Заде. *Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений*, Мир, М., 1973, 165 с. ↑ [11](#), [12](#), [13](#).
- [2] Р. Беллман, Л. Заде, «Принятие решений в расплывчатых условиях», *Вопросы анализа и процедуры принятия решений*, Мир, М., 1976, с. 172–216 ↑ [12](#).
- [3] С. А. Орловский. *Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации*, Наука, М., 1981, 208 с. ↑ [12](#).
- [4] B. Liu. “Fuzzy process, hybrid process and uncertain process”, *J. of Uncertain Systems*, **2**:1 (2008), pp. 3–16 ↑ [12](#).
- [5] M. N. Farahi, S. Barati. “Fuzzy time-delay dynamical systems”, *The J. of Mathematics and Computer Science*, **2**:1 (2011), pp. 44–53 ↑ [12](#).
- [6] Z. Qin, X. Li. “Option pricing formula for fuzzy financial market”, *Journal of Uncertain Systems*, **2** (2008), pp. 17–21 ↑ [12](#).
- [7] Y. Zhu. “A fuzzy optimal control model”, *Journal of Uncertain Systems*, **3** (2009), pp. 270–279 ↑ [12](#).
- [8] S. Ramezanzadeh, A. Heydari. “Optimal control with fuzzy chance constraint”, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **8** (2011), pp. 35–43 ↑ [12](#).
- [9] M. Najariyan, H. Farahi. “Optimal control of fuzzy linear controlled systems with fuzzy initial conditions”, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **10** (2013), pp. 21–35 ↑ [12](#).
- [10] С. М. Дзюба, Б. В. Палюх, И. А. Егерев, «Об оптимальном управлении нечеткими многостадийными процессами», *XII Всероссийское совещание по проблемам управления*, ИПУ РАН, М., 2014, с. 3968–3972 ↑ [14](#).
- [11] С. М. Дзюба, Б. В. Палюх, И. А. Егерев, «Простейшая задача терминального управления нечеткими динамическими системами», *Обобщенные постановки и решения задач управления*, Сборник трудов международного симпозиума GSSCP-2014, АНО «Издательство физико-математической литературы», М., 2014, с. 72–80 ↑ [14](#).
- [12] Р. Беллман. *Процессы регулирования с адаптацией*, Наука, М., 1964, 359 с. ↑ [16](#).

Об авторе:

Ирина Александровна Егерова

К.т.н., доцент кафедры информационных системы, Тверской государственный технический университет

e-mail:

irina.egereva@gmail.com

Пример ссылки на эту публикацию:

И. А. Егерова. «Методическое обеспечение оптимального управления нечеткими многостадийными процессами», *Программные системы: теория и приложения*, 2015, **6:1(24)**, с. 11–19.

URL http://psta.psiras.ru/read/psta2015_1_11-19.pdf

Irina Egereva. *Methodological support of optimal control of fuzzy multistage processes.*

ABSTRACT. The paper defines a problem of abstract, indistinct sequential process optimal control synthesis. The obtained functional equation makes it possible to find out the maximum implementation of the defined indistinct goal objective provided that evolution of process is characterized by fuzzy relations. The functional equation solution gives at each stage feedback control law at this point. (*In Russian*).

Key Words and Phrases: fuzzy multistage processes, fuzzy goal and fuzzy relations, maximum degree of implementation of fuzzy goal, the functional Bellman equation, design of optimal control, feedback control law.

Sample citation of this publication

Irina Egereva “Methodological support of optimal control of fuzzy multistage processes”, *Program systems: theory and applications*, 2015, **6:1(24)**, pp. 11–19. (*In Russian*.)

URL http://psta.psiras.ru/read/psta2015_1_11-19.pdf