УДК 330.36.012.4
JEL C62, D83, E10
DOI 10.25205/2542-0429-2020-20-1-128-153

Экономическая динамика при неоднородном адаптивном обучении: условия стабильности в терминах агрегированной экономики

А. С. Богомолова¹, Д. В. Колюжнов^{1,2}

¹ Новосибирский национальный исследовательский государственный университет
Новосибирск, Россия

² Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН
Новосибирск, Россия

Аннотация

Авторы приводят достаточные условия стабильности линейной структурно-неоднородной экономики при неоднородном адаптивном обучении агентов, расширяя результаты Хонкапойи и Митры (2006), Колюжнова (2011) и Богомоловой и Колюжнова (2019). Достаточные условия стабильности при смешанном неоднородном RLS/SG обучении для четырех классов моделей: моделей без лагов и с лагами эндогенной переменной и с t - или $(t - 1)$ -датировкой ожиданий для случаев диагональной структуры процесса для шоков или неоднородного RLS-обучения, приведены в терминах структурной неоднородности и не зависят от неоднородности в обучении. Результаты основываются на подходе отрицательной доминантной диагонали и представлены сначала в терминах существования соответствующим образом взаимосвязанных весов агрегирования эндогенных переменных и ожиданий по типам агентов, а затем и в терминах E -стабильности подходящим образом определенной агрегированной экономики. Фундаментальность применяемого подхода позволяет применить его результаты к большинству существующих и перспективных линейных и линеаризованных экономических моделей (включая оцененные DSGE-модели) с адаптивным обучением экономических агентов

Ключевые слова

адаптивное обучение, стабильность равновесия, неоднородные агенты

Источник финансирования

Работа выполнена по плану НИР ИЭОПП СО РАН, проект XI.170.1.1 «Инновационные и экологические аспекты структурной трансформации российской экономики в условиях новой геополитической реальности», № AAAA-A17-117022250127-8

Для цитирования

Богомолова А. С., Колюжнов Д. В. Экономическая динамика при неоднородном адаптивном обучении: условия стабильности в терминах агрегированной экономики // Мир экономики и управления. 2020. Т. 20, № 1. С. 128–153. DOI 10.25205/2542-0429-2020-20-1-128-153

© А. С. Богомолова, Д. В. Колюжнов, 2020

Economic Dynamics under Heterogeneous Adaptive Learning: Aggregate Economy Sufficient Conditions for Stability

A. S. Bogomolova¹, D. V. Kolyuzhnov^{1,2}

¹ Novosibirsk State University
Novosibirsk, Russian Federation

² Institute of Economics and Industrial Engineering SB RAS
Novosibirsk, Russian Federation

Abstract

We provide sufficient conditions for stability of a linear structurally heterogeneous economy under heterogeneous learning of agents, extending the results of Honkapohja and Mitra (2006), Kolyuzhnov (2011), and Bogomolova and Kolyuzhnov (2019). Sufficient conditions for stability under heterogeneous mixed RLS/SG learning for four classes of models: models without lags and with lags of the endogenous variable and with t - or $(t-1)$ -dating of expectations, are provided for the cases of the diagonal structure of the shock process behaviour or the heterogeneous RLS learning and are presented in terms of structural heterogeneity and are independent of heterogeneity in learning. The results are based on the negative diagonal dominance approach and are provided, first, in terms of the existence of the weights for aggregation of endogenous variables and of expectations across agents, interrelated in a special way, and then in terms of the E -stability of a suitably defined aggregate economy. The fundamental nature of the approach adopted in the paper allows one to apply its results to a vast majority of the existing and prospective linear and linearized economic models (including estimated DSGE models) with adaptive learning of agents.

Keywords

adaptive learning, stability of equilibrium, heterogeneous agents

Funding

The publication is prepared within the project No. XI.170.1.1 “Innovative and environmental aspects of the structural transformation of the Russian economy in the new geopolitical reality”, No. № AAAA-A17-117022250127-8 according to the research plan of the IEIE SB RAS”

For citation

Bogomolova A. S., Kolyuzhnov D. V. Economic Dynamics under Heterogeneous Adaptive Learning: Aggregate Economy Sufficient Conditions for Stability. *World of Economics and Management*, 2020, vol. 20, no. 1, p. 128–153. (in Russ.) DOI 10.25205/2542-0429-2020-20-1-128-153

Введение

Данная статья является второй в ряду наших работ, посвященных поискам условий стабильности равновесий линейных структурно-неоднородных моделей различных классов при неоднородном адаптивном обучении¹, которые позволяют решить задачу, поставленную Хонкапойей и Митрой [2]: найти условия стабиль-

¹ Основные идеи этого исследования, легшие в основу наших PhD диссертаций, и первые результаты появились в то время, когда оба автора были приглашенными аспирантами в Кембридже. Авторы выражают особую благодарность своему руководителю в Кембридже Сеппо Хонкапойе за постоянную поддержку этого исследования и неоценимую помощь. Авторы сами несут ответственность за возможные ошибки. Авторы благодарят участников международных конференций, на которых были представлены различные варианты результатов этого исследования начиная с 2006 г., за ценное обсуждение.

Определение адаптивного обучения, общую постановку проблемы поиска условий стабильности при неоднородном адаптивном обучении и терминологию, связанную с моделями с неоднородным адаптивным обучением, см. в [1].

ности структурно-неоднородной экономики при смешанном RLS/SG-обучении с (возможно) различными степенями инерции в терминах только самой структурной неоднородности, не зависящие от неоднородности в обучении.

В первой работе [1] мы получили общие критерии стабильности при неоднородном смешанном RLS/SG-обучении для четырех классов моделей: моделей без лагов и с лагами эндогенной переменной и с t - или $(t - 1)$ -датировкой ожиданий, и достаточные условия для некоторых более простых случаев, где упрощения включают в себя либо диагональную структуру процесса шоков, либо RLS-обучение. Эти критерии и достаточные условия δ -стабильности записаны в терминах стабильности соответствующих якобианов для всех четырех классов моделей и представлены в смешанных терминах как структурной неоднородности, так и неоднородности при обучении.

В данной статье мы получаем необходимые условия стабильности в терминах структурной неоднородности, не зависящие от неоднородности в обучении, представленные сначала в терминах существования соответствующим образом взаимосвязанных весов агрегирования эндогенных переменных и ожиданий по типам агентов, а затем и в терминах E -стабильности агрегированной экономики, основанные на подходе отрицательной доминантной диагонали в определении Маккензи. По сути, оказывается, что все условия устойчивости, записанные в терминах матриц Якоби, требуют D -стабильности некоторой матрицы (матриц) Ω . Таким образом, все матрицы Якоби выглядят как $D\Omega$, где D – положительно-диагональная матрица.

Среди математических подходов к стабильности (рассмотренных, например, Джонсоном [3]) Колужнов [4] выделяет подход, основанный на теореме Ляпунова; подход, основанный на отрицательной доминантной диагонали; подход, основанный на альтернативном определении D -стабильности; подход, основанный на характеристическом уравнении и подход, основанный на условиях Раута – Гурвица. В работе Колужнова [4] подход отрицательной доминантной диагонали, основанный на теореме Маккензи, оказывается полезным для получения достаточных условий устойчивости для вперёдсмотрящей модели с ожиданием будущих значений на один период вперёд, без лагов эндогенной переменной и с диагональной структурой поведения шоков, независимо от неоднородности при обучении.

Мы также следуем этому подходу в данной статье, и это также позволяет нам получить достаточные условия стабильности независимо от неоднородности при обучении в терминах агрегированной экономики, но для всех рассматриваемых классов моделей. В этой статье, используя подход отрицательной доминантной диагонали, мы выводим достаточные условия для δ -стабильности (сильной и/или слабой в определении Богомоловой и Колужнова [1]) для некоторых более простых случаев, где упрощения включают в себя либо диагональную структуру поведения шоков, либо неоднородное RLS-обучение для всех типов рассматриваемых моделей. Эти результаты записываются сначала в терминах существования соответствующим образом взаимосвязанных весов агрегирования эндогенных переменных и ожиданий по типам агентов, а затем и в терминах E -стабильности подходящим образом определяемых агрегированных экономик. Результаты, основанные на альтернативном определении D -стабильности, необходимые условия, основанные на подходе характеристического уравнения, записанные в терминах

условий «одинакового» знака и E -стабильности подходящим образом определяемых средней экономики и ее подэкономик рассматриваются в нашей отдельной статье.

Для удобства мы прописываем алгоритм агрегирования экономики, задаваемой классами моделей с указанием применяемых операторов агрегирования на каждом этапе, который позволяет получить агрегированные экономики, определяющие δ -стабильность исходных экономик, сводя анализ стабильности равновесия при рациональных ожиданиях при неоднородном обучении при различных (любых) степенях инерции к получению условия D -стабильности соответствующих матриц в якобианах в утверждениях 1–6 Богомоловой и Колужнова [1]².

Фундаментальность применяемого подхода позволяет применить его результаты к большинству существующих и перспективных линейных и линеаризованных экономических моделей (включая оцененные DSGE-модели³) с адаптивным обучением экономических агентов.

Постановка классов моделей. PLM, T -отображение и MSV REE

Как и в работе [1], мы рассматриваем **общий класс структурно неоднородных линейных моделей с S типами агентов с различными прогнозами в виде**

$$y_t = \alpha + \sum_{i=1}^d L_i y_{t-i} + \sum_{h=1}^S \sum_{b=0}^m \sum_{f=b}^n A_{bf}^h \hat{E}_{t-b}^h y_{t-b+f} + B w_t + \zeta \varepsilon_t, A_{00}^h \equiv 0, \quad (1)$$

$$w_t = F w_{t-1} + v_t, \quad (2)$$

где y_t – $n \times 1$ -вектор эндогенных переменных, w_t – $k \times 1$ -вектор экзогенных переменных; v_t и ε_t – векторы (независимых) шоков белого шума; $\hat{E}_{t-b}^h y_{t-b+f}$ есть (в общем случае, нерациональные) ожидания эндогенных переменных агентом h ; а L_i, A_{bf}^h, B, ζ – подходящего размера матрицы. Также предполагается, что F ($k \times k$ -матрица) такова, что w_t следует VAR (1) стационарному процессу с $M_w = \lim_{t \rightarrow \infty} E w_t w_t'$ – положительно-определенной матрицей ковариаций.

Модель, представленная выше, является линейной (или линеаризованной) моделью, описывающей экономику, записанную в сокращенной форме, т. е. она задает временное равновесие динамической модели. В этой модели ожидания эндогенных переменных, формируемые различными типами агентов, линейно влияют

² Вид и форму якобианов см. в утверждениях 1–6 Богомоловой и Колужнова [1].

³ Краткий обзор DSGE-моделирования представлен в [5]. Типичная DSGE-модель в структурной форме выглядит как

$$A_0 \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ w_{t-1} \end{bmatrix} + A_1 \begin{bmatrix} y_t \\ w_t \end{bmatrix} + A_2 E_t y_{t+1} + B_0 \varepsilon_t = \text{const.}$$

После оценивания (например, при помощи DYNARE [6]) решение модели при рациональных ожиданиях имеет вид

$$\begin{bmatrix} y_t \\ w_t \end{bmatrix} = \mu + T \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ w_{t-1} \end{bmatrix} + R \varepsilon_t.$$

См., например, статью Слободяна и Ваутерса [7].

на текущие значения этих переменных. Структурная неоднородность модели выражается через матрицы A_{bf}^h , которые включают в себя массу ζ_h каждого типа агента h , $\sum \zeta_h = 1$. Иначе говоря, $A_{bf}^h = \zeta_h \cdot \tilde{A}_{bf}^h$, где $\tilde{A}_{bf}^h$ определены как матрицы, показывающие, как агенты типа h реагируют на свои собственные прогнозы. Таким образом, $\tilde{A}_{bf}^h$ содержат структурные параметры, характеризующие данную экономику, основные характеристики агентов, которые описывают их предпочтения, технологии и запасы. Структурная неоднородность означает, что все $\tilde{A}_{bf}^h$ разные для различных типов агентов.

Для упрощения изложения (без потери общности) мы ограничиваемся анализом примеров, наиболее часто используемых в литературе: ($d = 0$, $m = 1$, n – любое, $A_{0f}^h \equiv 1$) (Модель I); ($d = 1$, $m = 1$, $n = 2$, $A_{0f}^h \equiv 0$) (Модель II), ($d = 0$, $m = 0$, n – любое) (Модель III); ($d = 1$, $m = 0$, $n = 1$) (Модель IV).

Соответствующие классы моделей задаются как (2) и

Модель I:

$$y_t = \alpha + \sum_{h=1}^S A_0^h \hat{E}_{t-1}^h y_t + \sum_{h=1}^S A_1^h \hat{E}_{t-1}^h y_{t+1} + \dots + \sum_{h=1}^S A_\tau^h \hat{E}_{t-1}^h y_{t+\tau} + Bw_t + \zeta \varepsilon_t, \quad (3)$$

Модель II:

$$y_t = \alpha + Ly_{t-1} + \sum_{h=1}^S A_0^h \hat{E}_{t-1}^h y_t + \sum_{h=1}^S A_1^h \hat{E}_{t-1}^h y_{t+1} + Bw_t + \zeta \varepsilon_t, \quad (4)$$

Модель III:

$$y_t = \alpha + \sum_{h=1}^S A_1^h \hat{E}_t^h y_{t+1} + \dots + \sum_{h=1}^S A_\tau^h \hat{E}_t^h y_{t+\tau} + Bw_t + \zeta \varepsilon_t, \quad (5)$$

Модель IV:

$$y_t = \alpha + Ly_{t-1} + \sum_{h=1}^S A_1^h \hat{E}_t^h y_{t+1} + Bw_t + \zeta \varepsilon_t, \quad (6)$$

(с информационным множеством $(1, y'_{t-1}, w'_t)$)⁴, где определения переменных и матриц такие же, как для общей постановки (1) и (2), приведенной выше.

Также предполагается, что агенты каждого типа h формируют свои ожидания об эндогенных переменных, веря (воспринимая), что экономическая система следует модели, называемой воспринимаемым законом движения агентов (PLM): $y_t = a_{h,t-1} + b_{h,t-1} w_{t-1}$ (для Модели I), $y_t = a_{h,t-1} + b_{h,t-1} y_{t-1} + c_{h,t-1} w_{t-1}$ (для Модели II), $y_t = a_{h,t} + b_{h,t} w_t$ (для Модели III), $y_t = a_{h,t} + b_{h,t} y_{t-1} + c_{h,t} w_t$ (для Модели IV). Мы рассматриваем только такие PLM, которые соответствуют так называемому фундаментальному REE, или REE с минимальным числом переменных состояния (MSV REE).

⁴ Нерассмотренный случай впередсмотрящей модели с лагом, когда информационное множество включает текущее значение эндогенной переменной, которое используется для прогнозирования будущего значения этой переменной, явным образом подпадает под технические конструкции данной статьи с некоторыми модификациями и является вопросом нашего будущего исследования.

После подстановки прогнозов каждого агента на основе PLM в сокращенную форму модели получаем действительный закон движения (ALM) модели, соответствующий заданному PLM. Соответствующее отображение из параметров PLM, называемых убеждениями,

$$\Phi_{h,t} \ (\Phi'_{h,t-1} = (a_{h,t-1}, b_{h,t-1}) \text{ для Модели I,}$$

$$\Phi'_{h,t-1} = (a_{h,t-1}, b_{h,t-1}, c_{h,t-1}) \text{ для Модели II,}$$

$$\Phi'_{h,t-1} = (a_{h,t-1}, b_{h,t-1}) \text{ для Модели III,}$$

$$\Phi'_{h,t} = (a_{h,t}, b_{h,t}, c_{h,t}) \text{ для Модели IV}$$

в параметры ALM называется T -отображением, $T(\Phi_t)$, $\Phi'_t = (\Phi'_{1,t}, \dots, \Phi'_{S,t})$. Таким образом, решение MSV REE может быть найдено как $T(\Phi) = \Phi_h$.

Неоднородное смешанное RLS/SG-обучение, SRA и ассоциированное ОДУ

Во всех классах моделей, рассмотренных выше, предполагается, что агенты используют так называемое неоднородное смешанное RLS/SG-обучение, когда часть агентов, $h = 1, \dots, S_0$ использует RLS алгоритм обучения, в то время как другие, $h = S_0 + 1, \dots, S$ используют обучение по методу SG, представленное следующим образом.

Для моделей с $(t-1)$ -датировкой ожиданий (Модели I и II):

$$\begin{aligned} \text{(RLS)} \ h = 1, \dots, S_0 \quad \Phi_{h,t+1} &= \Phi_{h,t} + \alpha_{h,t+1} R_{h,t+1}^{-1} z_t (y_{t+1} - \Phi'_{h,t} z_t)', \\ R_{h,t+1} &= R_{h,t} + \alpha_{h,t+1} (z_t z_t' - R_{h,t}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{(SG)} \ h = S_0 + 1, \dots, S \quad \Phi_{h,t+1} = \Phi_{h,t} + \alpha_{h,t+1} z_t (y_{t+1} - \Phi'_{h,t} z_t)', \quad (8)$$

где $z_t' = (1, w_t')$.

Для моделей с t -датировкой ожиданий (Модели III и IV):

$$\begin{aligned} \text{(RLS)} \ h = 1, \dots, S_0 \quad \Phi_{h,t+1} &= \Phi_{h,t} + \alpha_{h,t+1} R_{h,t+1}^{-1} z_t (y_t - \Phi'_{h,t} z_t)', \\ R_{h,t+1} &= R_{h,t} + \alpha_{h,t+1} (z_t z_t' - R_{h,t}) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{(SG)} \ h = S_0 + 1, \dots, S \quad \Phi_{h,t+1} = \Phi_{h,t} + \alpha_{h,t+1} z_t (y_t - \Phi'_{h,t} z_t)' \quad (10)$$

где $z_t' = (1, y_t', w_t')$ (Модель III), $z_t' = (1, y_{t-1}', w_t')$ (Модель IV).

Неоднородность в обучении проявляется в виде разных типов алгоритмов обучения, используемых агентами (RLS и SG), различного начального восприятия (представленного начальными значениями для алгоритмов обучения для каждого агента) и разных долей агентов, использующих алгоритм обучения определенного типа. Разные скорости реагирования на новую информацию (или разные степени реагирования на функцию обновления) представлены виде разных степеней инер-

ции $\delta_h > 0$, которые в формулировке Гианнитсару [8] являются постоянными коэффициентами перед детерминистической убывающей положительной последовательностью коэффициентов приращения в алгоритме обучения α_t , которая является общей для всех агентов, $\delta_h : \alpha_{h,t} = \delta_h \alpha_t, \forall h$, и удовлетворяет обычным условиям (детали см. в [1]).

Предполагается, что эти условия на α_t всегда выполняются, чтобы гарантировать сходимость к REE-модели при адаптивном обучении, записанной в форме стохастического рекурсивного алгоритма (SRA), свойства сходимости которого можно изучить при помощи методов теории стохастической аппроксимации (детали см. в [1]). Стабильность MSV REE при смешанном RLS/SG-обучении для всех классов моделей определяется стабильностью соответствующего ассоциированного ОДУ (детали см. в [1]) – мы определяем его как **HE-стабильность**:

$$\frac{d\Phi_h}{d\tau} = \delta_h (T(\Phi) - \Phi_h), h = 1, \dots, S_0 \quad (11)$$

$$\frac{d\Phi_h}{d\tau} = \delta_h M_z (T(\Phi) - \Phi_h), h = S_0 + 1, \dots, S \quad (12)$$

где $T(\Phi)$ – отображение из параметров PLM в параметры ALM; $M_z = \lim_{t \rightarrow \infty} E z_t z_t'$ – матрица вторых моментов z_t . Этот результат есть расширение результата Хонкапойи и Митры [2] на все классы моделей⁵.

Достаточные условия δ -стабильности в терминах агрегированной экономики при общем (возможно не диагональном) процессе для шоков

Условия стабильности соответствующего ассоциированного ОДУ позволили нам [1] получить общие критерии и достаточные условия HE- и δ -стабильности при неоднородном обучении для всех классов рассматриваемых моделей в терминах стабильности соответствующих якобианов, представленные в смешанных терминах как структурной неоднородности, так и неоднородности при обучении. В данной статье мы получаем необходимые условия стабильности, не зависящие от неоднородности в обучении, представленные сначала в терминах существования соответствующим образом взаимосвязанных весов агрегирования эндогенных переменных и ожиданий по типам агентов, а затем и в терминах E-стабильности агрегированной экономики, основанные на подходе отрицательной доминантной диагонали в определении Маккензи⁶. Мы используем понятие сильной и слабой δ -стабильности и определение HE-стабильности как стабильности при неоднородном обучении, задаваемые Богомоловой и Колужновым [1].

Мы прописываем алгоритм агрегирования экономики, задаваемой классами моделей с указанием применяемых операторов агрегирования на каждом этапе, который позволяет получить агрегированные экономики, определяющие δ -ста-

⁵ Формальное доказательство результата см. в [9. Прилож. А.7.1, А.7.2.].

⁶ Формальное описание подхода, основанного на отрицательной доминантной диагонали, см. в [9. Прилож. А4].

бильность исходных экономик, сводя анализ стабильности MSV REE при неоднородном обучении при различных (любых) степенях инерции к получению условия D -стабильности соответствующих матриц в якобианах в утверждениях 1–6 Богомоловой и Колужнова [1].

Поскольку подход отрицательной доминантной диагонали оказался продуктивным для получения достаточных условий δ -стабильности в терминах агрегированной экономики при применении к моделям без лагов у Колужнова [4], мы сводим все модели к виду Модели I, без лагов и с $(t-1)$ -датировкой ожиданий, чтобы применить к ним общую схему получения подобных достаточных условий δ -стабильности через построение предельной агрегированной экономики. Общая схема получения достаточных условий δ -стабильности в случае не обязательно диагональной структуры процесса движения шоков представлена на рис. 1.

Сначала ко всем моделям I, II, III, IV применяется оператор сопоставления каждой модели ассоциированной «безлаговой» модели с $(t-1)$ -датировкой ожиданий, которая имеет такие же условия сходимости к MSV REE (и такое же MSV REE), что и исходная модель.

Определение 1. Ассоциированная «безлаговая» модель с $(t-1)$ -датировкой ожиданий, соответствующая Модели I (II, III, IV) (т. е. модель, которая имеет такое же асимптотическое поведение, как и Модель I (II, III, IV) соответственно), где коэффициент при лаговой переменной зафиксирован в значении MSV REE (для Моделей II, IV) и записывается как (2) и

для Модели I, она сама:

$$y_t = \alpha + \sum_{h=1}^S A_0^h \hat{E}_{t-1}^h y_t + \sum_{h=1}^S A_1^h \hat{E}_{t-1}^h y_{t+1} + \dots + \sum_{h=1}^S A_\tau^h \hat{E}_{t-1}^h y_{t+\tau} + Bw_t + \zeta \varepsilon_t,$$

для Модели II:

$$y_t = \alpha + \sum_{h=1}^S (A_0^h + A_1^h \bar{b}) \hat{E}_{t-1}^h y_t + \sum_{h=1}^S A_1^h \hat{E}_{t-1}^h y_{t+1} + Bw_t + \zeta \varepsilon_t,$$

для Модели III:

$$y_t = \alpha + \sum_{h=1}^S A_1^h \hat{E}_{t-1}^h y_{t+1} + \dots + \sum_{h=1}^S A_\tau^h \hat{E}_{t-1}^h y_{t+\tau} + BF^{-1}w_t + \zeta \varepsilon_t,$$

для Модели IV:

$$y_t = \alpha + \sum_{h=1}^S (A_1^h \bar{b}) \hat{E}_{t-1}^h y_t + \sum_{h=1}^S A_1^h \hat{E}_{t-1}^h y_{t+1} + BF^{-1}w_t + \zeta \varepsilon_t.$$

Доказательство следует из сравнения соответствующих ОДУ (якобианов в критериях 1 и 2 и определений коэффициентов MSV REE в [1. С. 94–96]). □

Затем применяется оператор агрегирования в предельную агрегированную экономику для каждой ассоциированной безлаговой модели с $(t-1)$ -датировкой ожиданий аналогично агрегированию, которое использовал Колужнов [4]. Мы агрегируем экономику, взяв веса агрегирования эндогенных переменных

$$\psi_i > 0, \quad \sum_{i=1}^n \psi_i = 1, \quad (13)$$

и веса агрегирования по типам агентов

$$\phi_h > 0, \sum_{h=1}^S \phi_h = 1, \quad (14)$$

обозначая через a_{ij}^h элемент в i -й строки и j -го столбца матрицы A_h). Мы также рассматриваем экономику, которая ограничивает сверху все возможные экономики с различными знаками a_{ij}^h , агрегированные с помощью весов ψ и ϕ . Это исходная агрегированная модель, записанная в абсолютных значениях. Когда все элементы в модели, a_{ij}^h , эндогенные переменные и их ожидания положительны, эта предельная экономика точно совпадает с рассматриваемой моделью, т. е. это достижимый супремум. Таким образом, соответствующая предельная агрегированная экономика задается следующим определением.

Определение 2. Для данных весов агрегирования (13) и (14) предельная агрегированная экономика для ассоциированной «безлаговой» модели с $(t-1)$ -датировкой ожиданий, соответствующей Модели I (II, III, IV), записывается как для Моделей I и II:

$$y_t^{AG\text{mod}} = \sum_i \psi_i |\alpha_i| + \sum_{r=0}^{\tau} \beta_r^{AG\text{mod}}(\psi, \phi) \hat{E}_{t-1}^{AG\text{mod}} y_{t+r}^{AG\text{mod}} + \left| \sum_i (\psi_i B^i) w_i \right| + \left| \sum_i (\psi_i \zeta^i) \varepsilon_i \right|,$$

для Моделей III и IV:

$$y_t^{AG\text{mod}} = \sum_i \psi_i |\alpha_i| + \sum_{r=0}^{\tau} \beta_r^{AG\text{mod}}(\psi, \phi) \hat{E}_{t-1}^{AG\text{mod}} y_{t+r}^{AG\text{mod}} + \left| \sum_i \left(\psi_i (BF^{-1})^i \right) w_i \right| + \left| \sum_i (\psi_i \zeta^i) \varepsilon_i \right|,$$

для Моделей I и III (с $a_{0ij}^h \equiv 0$):

$$\beta_r^{AG\text{mod}}(\psi, \phi) = S \sum_h \phi_h \sum_i \psi_i \sum_j |a_{rj}^h|, \quad r = 0, 1, \dots, \tau,$$

$$\hat{E}_{t-1}^{AG\text{mod}} y_{t+r}^{AG\text{mod}} = \left(\beta_r^{AG\text{mod}}(\psi, \phi) \right)^{-1} \sum_h S \phi_h \sum_i \psi_i \sum_j |a_{rj}^h| \hat{E}_{t-1}^h |y_{jt+r}|, \quad r = 0, 1, \dots, \tau,$$

для Моделей II и IV (с $a_{0ij}^h \equiv 0$): $\tau = 1$,

$$\beta_0^{AG\text{mod}}(\psi, \phi) = S \sum_h \phi_h \sum_i \psi_i \sum_j |a_{0ij}^h + (A^h \bar{b})_{ij}|, \quad \beta_1^{AG\text{mod}}(\psi, \phi) = S \sum_h \phi_h \sum_i \psi_i \sum_j |a_{1ij}^h|,$$

$$\hat{E}_{t-1}^{AG\text{mod}} y_t^{AG\text{mod}} = \left(\beta_0^{AG\text{mod}}(\psi, \phi) \right)^{-1} \sum_h S \phi_h \sum_i \psi_i \sum_j |a_{0ij}^h + (A^h \bar{b})_{ij}| \hat{E}_{t-1}^h |y_{jt}|,$$

$$\hat{E}_{t-1}^{AG\text{mod}} y_{t+1}^{AG\text{mod}} = \left(\beta_1^{AG\text{mod}}(\psi, \phi) \right)^{-1} \sum_h S \phi_h \sum_i \psi_i \sum_j |a_{1ij}^h| \hat{E}_{t-1}^h |y_{jt+1}|,$$

Поскольку результаты, полученные Колужновым [4] с использованием подхода отрицательной доминантной диагонали, предполагают экономику с одним ожиданием, к построенным предельным агрегированным экономикам для ассоциированных «безлаговых» моделей с $(t-1)$ -датировкой ожиданий, соответствующих Моделям I (II, III, IV), применяется оператор агрегирования в экономику с одним ожиданием текущего значения эндогенной переменной. Все впередсмотрящие ожидания при этом агрегируются в одно ожидание текущего значения эндогенной переменной.

Агрегирование ожиданий естественным образом учитывает матрицу авторегрессионного процесса для шоков F и для моделей с лагом (II и IV) матрицу $\bar{b}$ [1. С. 96, формула (20)], которая показывает, как y_t зависит от y_{t-1} в MSV REE. Межвременную связь ожиданий эндогенной переменной при недиагональной структуре матриц F и $\bar{b}$ можно учитывать, агрегируя как по строкам матриц F и $\bar{b}$, так и по столбцам, что отражено в следующем определении.

Определение 3. Для данных весов агрегирования (13) и (14) соответствующее множество экономик с ожиданием текущего значения эндогенной переменной для предельной агрегированной экономики для ассоциированной «безлаговой» модели с $(t-1)$ -датировкой ожиданий, соответствующей Модели I (II, III, IV), записывается как

для Моделей I и II (далее также AM I (II)):

$$y_t^{AG\text{ mod}} = \sum_i \psi_i |\alpha_i| + \beta_{\text{weighted } l}^{AG\text{ mod}}(\psi, \phi) \hat{E}_{\text{weighted } l, t-1}^{AG\text{ mod}} y_t^{AG\text{ mod}} + \left| \sum_i (\psi_i B^i) w_i \right| + \left| \sum_i (\psi_i \zeta^i) \varepsilon_i \right|,$$

для Моделей III и IV (далее также AM III (IV)):

$$y_t^{AG\text{ mod}} = \sum_i \psi_i |\alpha_i| + \beta_{\text{weighted } l}^{AG\text{ mod}}(\psi, \phi) \hat{E}_{\text{weighted } l, t-1}^{AG\text{ mod}} y_t^{AG\text{ mod}} + \left| \sum_i \left(\psi_i (BF^{-1})^i \right) w_i \right| + \left| \sum_i (\psi_i \zeta^i) \varepsilon_i \right|,$$

$$\beta_{\text{weighted } l}^{AG}(\psi, \phi) = \beta_0^{AG\text{ mod}}(\psi, \phi) + \rho_l^1 \beta_1^{AG\text{ mod}}(\psi, \phi) + \dots + \rho_l^\tau \beta_\tau^{AG\text{ mod}}(\psi, \phi),$$

где агрегированное взвешивание ожиданий задано как

$$\rho_l^r = \sum_{m=1}^k |f_{lm}^r| \quad (\text{по строкам } F) \quad (\text{для всех Моделей})$$

или

$$\rho_l^r = \sum_{m=1}^k |f_{ml}^r|, \quad (\text{по столбцам } F) \quad (\text{для всех Моделей}),$$

или

$$\rho_l^1 = \sum_{m=1}^n |\bar{b}_{lm}| \quad (\text{по строкам } \bar{b}) \quad (\text{для Моделей II, IV}),$$

или

$$\rho_l^1 = \sum_{m=1}^n |\bar{b}_{ml}| \quad (\text{по столбцам } \bar{b}) \quad (\text{для Моделей II, IV}),$$

$$\hat{E}_{\text{weighted } l, t-1}^{AG\text{ mod}} y_t^{AG\text{ mod}} = \left(\beta_{\text{weighted } l}^{AG\text{ mod}}(\psi, \phi) \right)^{-1} \sum_{r=0}^{\tau} \beta_r^{AG\text{ mod}}(\psi, \phi) \hat{E}_{t-1}^{AG\text{ mod}} y_{t+r}^{AG\text{ mod}},$$

где $\tau = 1$ для Моделей II и IV.

Структура этого предельного агрегированного коэффициента $\beta_{\text{weighted } l}^{AG}(\psi, \phi)$ следующая. $\sum_i \psi_i |a_{0ij}^h| + \rho_l^1 \sum_i \psi_i |a_{1ij}^h| + \dots + \rho_l^\tau \sum_i \psi_i |a_{\tau ij}^h|$ (для Моделей I и III (с $a_{0ij}^h \equiv 0$)) и $\sum_i \psi_i \left(\rho_l^1 |a_{1ij}^h| + |a_{0ij}^h + (A_l^h \bar{b})_{ij}| \right)$ (для Моделей II и IV (с $a_{0ij}^h \equiv 0$)) – это коэффициент перед ожиданием эндогенной переменной j в агрегированной эконо-

мике, состоящей из единственного агента типа h . Заметим, что этот коэффициент посчитан для ожидания эндогенной переменной j , которая входит в агрегированный продукт с коэффициентом ψ_j . Таким образом, для кадего l , следуя Колужнову (2008), мы можем назвать отношение

$$\left(\sum_i \psi_i |a_{0ij}^h| + \rho_l^1 \sum_i \psi_i |a_{1ij}^h| + \dots + \rho_l^\tau \sum_i \psi_i |a_{\tau ij}^h| \right) / \psi_j \quad \forall j, \forall l$$

и

$$\sum_i \psi_i \left(\rho_l^1 |a_{1ij}^h| + |a_{0ij}^h| + (A^h \bar{b})_{ij} \right) / \psi_j \quad \forall j, \forall l$$

«собственным относительным коэффициентом ожиданий эндогенной переменной j » для соответствующих моделей. Глядя на значения этих коэффициентов, можно судить о весе, который данный тип агента имеет в экономике с точки зрения агрегированного β -коэффициента.

Следующее утверждение расширяет результат, полученный Колужновым [4] для вперёдсмотрящей модели без лагов, с одним вперёдсмотрящим ожиданием и с диагональной структурой процесса для шоков на все рассматриваемые классы моделей для общего случая возможно не диагонального процесса для шоков.

Оно говорит о том, что для δ -стабильности экономики должны существовать веса агрегирования эндогенных переменных и веса агентов, которые при расчете агрегированных ожиданий привязываются к значениям «собственных относительных коэффициентов ожиданий эндогенных переменных».

Утверждение 1. Для общего (возможно не диагонального) процесса для шоков, если для каждой экономики из соответствующего множества АМ I (III), полученного при агрегированном взвешивании ожиданий по строкам F , существует по крайней мере одна пара весов агрегирования (13) и (14), такая что для каждого агента «собственный относительный коэффициент ожидания эндогенной переменной» меньше, чем вес агента, используемого в расчете агрегированных ожиданий, т. е.

$$\left(\sum_i \psi_i |a_{0ij}^h| + \rho_l^1 \sum_i \psi_i |a_{1ij}^h| + \dots + \rho_l^\tau \sum_i \psi_i |a_{\tau ij}^h| \right) / \psi_j < \phi_h, \quad \forall j, \forall h, \forall l,$$

причем $a_{0ij}^h \equiv 0$ для АМ III, тогда экономика, задаваемая (3) и (2) (Модель I) ((5) и (2) (Модель III)), (слабо) δ -стабильна при неоднородном RLS -обучении.

Доказательство. Применяем условие отрицательной доминантной диагонали к матрицам Ω и Ω_F из критерия 1 [1. С. 94–95], которое является достаточным для D -стабильности⁷. $\square$

Утверждение 2. Для общего (возможно не диагонального) процесса для шоков, если для каждой экономики из соответствующего множества АМ II (IV), полученного при агрегированном взвешивании ожиданий по строкам F , и для каждой экономики из соответствующего множества АМ II (IV), полученного при агрегированном взвешивании ожиданий по строкам $\bar{b}$, существует по крайней мере одна пара весов агрегирования (13) и (14), такая что для каждого агента «собственный относительный коэффициент ожидания эндогенной переменной»

⁷ Детали см. в [9. Прилож. А.7.15].

меньше, чем вес агента, используемого в расчете агрегированных ожиданий, т. е. $\exists(\psi, \phi)$ – веса, такие что

$$\sum_i \psi_i \left(\rho_i^1 |a_{ij}^h| + |a_{0ij}^h + (A_1^h \bar{b})_{ij}| \right) / \psi_j < \phi_h, \forall j, \forall h, \forall l, \text{ где } \rho_i^1 = \sum_{m=1}^k |f_{lm}|$$

и $\exists(\psi, \phi)$ – веса, такие что

$$\sum_i \psi_i \left(\rho_i^1 |a_{ij}^h| + |a_{0ij}^h + (A_1^h \bar{b})_{ij}| \right) / \psi_j < \phi_h, \forall j, \forall h, \forall l, \text{ где } \rho_i^1 = \sum_{m=1}^n |\bar{b}_{lm}|,$$

причем $a_{0ij}^h \equiv 0$ для АМ IV, тогда экономика, задаваемая (4) и (2) (Модель II) ((6) и (2) (Модель IV)), в которой все корни $\bar{b}$ [1. С. 96, формула (20)] лежат внутри единичного круга, (слабо) δ -стабильна при неоднородном *RLS*-обучении.

Доказательство. Применяем условие отрицательной доминантной диагонали к матрицам Ω , Ω_F и Ω_b из критерия 2 [1. С. 95–96], которое является достаточным для *D*-стабильности⁸. $\square$

Однако эти утверждения не дают простого практического правила (так как они подразумевают поиск системы весов) определения того, что данная экономика стабильна при неоднородном обучении. Чтобы найти такое правило, мы конструируем верхние границы для агрегированных экономик и β -коэффициентов, учитывая уже не только возможные различные знаки элементов a_{ij} , но также различные значения весов ψ и ϕ . Эти границы могут быть получены для четырех различных подмножеств множеств АМ I, II, III, IV из определения 3 (выше) в зависимости от значений весов ψ и ϕ . На рис. 1 этот шаг соответствует применению оператора агрегирования в максимальную агрегированную экономику, задаваемую следующим определением.

Определение 4. Для данных весов агрегирования (13) и (14) каждая экономика из соответствующего множества экономик АМ I, II, III, IV, ограничена сверху следующей максимальной агрегированной экономикой:

для Моделей I и II (далее также АМmax I (II)):

$$\begin{aligned} y_t^{AG} &= \sum_i \psi_i y_{it} \leq y_t^{AG \text{ mod}} = \sum_i \psi_i |y_{it}| \leq y_t^{AG \text{ max}} = \\ &= \sum_i \psi_i |\alpha_i| + \beta_{\text{weighted } s}^{AG \text{ max}} \hat{E}_{\text{weighted } l \text{ } t-1}^{AG \text{ max}} y_t^{AG \text{ max}} + \left| \sum_i (\psi_i B^i) w_t \right| + \left| \sum_i (\psi_i \zeta^i) \varepsilon_t \right| \end{aligned}$$

и (2);

для Моделей III и IV (далее также АМmax III (IV)):

$$\begin{aligned} y_t^{AG} &= \sum_i \psi_i y_{it} \leq y_t^{AG \text{ mod}} = \sum_i \psi_i |y_{it}| \leq y_t^{AG \text{ max}} = \\ &= \sum_i \psi_i |\alpha_i| + \beta_{\text{weighted } s}^{AG \text{ max}} \hat{E}_{\text{weighted } l \text{ } t-1}^{AG \text{ max}} y_t^{AG \text{ max}} + \left| \sum_i \left(\psi_i (BF^{-1})^i \right) w_t \right| + \left| \sum_i (\psi_i \zeta^i) \varepsilon_t \right| \end{aligned}$$

и (2),

где $\beta_{\text{weighted } s}^{AG \text{ max}}$ задан в табл. 1 (для Моделей I, III) и в табл. 2 (для Моделей II, IV).

⁸ Детали см. в [9. Прилож. А.7.16].

Рис. 1. Общая схема получения достаточных условий δ -стабильности в случае не обязательно диагональной структуры процесса движения шоков

Fig. 1. General scheme for obtaining sufficient stability conditions in the case of a non-necessarily diagonal structure of the shock movement process

Таблица 1

Максимальные агрегированные β -коэффициенты для AMmax I (III (с $a_{0ij}^h \equiv 0$))

Table 1

Maximal aggregate β -coefficients for AMmax I (III (with (с $a_{0ij}^h \equiv 0$))

	Подмножество	Тип агрегированного взвешивания ожиданий	$\beta_{weighted\ s}^{AG\ max} =$
$s = 1$	$\forall \psi, \forall \phi$	по строкам F	$\max_l S \sum_j \max_{h,i} \left(a_{0ij}^h + \sum_{m=1}^k f_{lm}^l a_{ij}^h + \dots + \sum_{m=1}^k f_{lm}^\tau a_{ij}^h \right)$
$s = 2$	$\forall \psi, \phi = \frac{1}{S}$	по столбцам F	$\max_l \max_i \sum_h \sum_j \left(a_{0ij}^h + \sum_{m=1}^k f_{ml}^l a_{ij}^h + \dots + \sum_{m=1}^k f_{ml}^\tau a_{ij}^h \right)$
$s = 3$	$\psi = \frac{1}{n}, \forall \phi$	по столбцам F	$\max_l S \sum_i \max_{h,j} \left(a_{0ij}^h + \sum_{m=1}^k f_{ml}^l a_{ij}^h + \dots + \sum_{m=1}^k f_{ml}^\tau a_{ij}^h \right)$
$s = 4$	$\psi = \frac{1}{n}, \phi = \frac{1}{S}$	по строкам F	$\max_l \sum_h \max_j \sum_i \left(a_{0ij}^h + \sum_{m=1}^k f_{lm}^l a_{ij}^h + \dots + \sum_{m=1}^k f_{lm}^\tau a_{ij}^h \right)$

Таблица 2

Максимальные агрегированные β -коэффициенты для АМmax II (IV (с $a_{0ij}^h \equiv 0$))

Table 2

Maximal aggregate β -coefficients for АМmax II (IV (with $a_{0ij}^h \equiv 0$))

	Подмножество	Тип агрегированного взвешивания ожиданий	$\beta_{weighted\ s}^{AG\ max} =$
$s = 1$	$\forall \psi, \forall \phi$	по строкам F	$\max_l S \sum_j \max_{h,i} \left(\left a_{0ij}^h + (A_1^h \bar{b})_{ij} \right + \sum_{m=1}^k f_{lm} a_{lij}^h \right)$
		по строкам $\bar{b}$	$\max_l S \sum_j \max_{h,i} \left(\left a_{0ij}^h + (A_1^h \bar{b})_{ij} \right + \sum_{m=1}^n \bar{b}_{lm} a_{lij}^h \right)$
$s = 2$	$\forall \psi, \phi = \frac{1}{S}$	по столбцам F	$\max_l \max_i \sum_h \sum_j \left(\left a_{0ij}^h + (A_1^h \bar{b})_{ij} \right + \sum_{m=1}^k f_{ml} a_{lij}^h \right)$
		по столбцам $\bar{b}$	$\max_l \max_i \sum_h \sum_j \left(\left a_{0ij}^h + (A_1^h \bar{b})_{ij} \right + \sum_{m=1}^n \bar{b}_{ml} a_{lij}^h \right)$
$s = 3$	$\psi = \frac{1}{n}, \forall \phi$	по столбцам F	$\max_l S \sum_i \max_{h,j} \left(\left a_{0ij}^h + (A_1^h \bar{b})_{ij} \right + \sum_{m=1}^k f_{ml} a_{lij}^h \right)$
		по столбцам $\bar{b}$	$\max_l S \sum_i \max_{h,j} \left(\left a_{0ij}^h + (A_1^h \bar{b})_{ij} \right + \sum_{m=1}^n \bar{b}_{ml} a_{lij}^h \right)$
$s=4$	$\psi = \frac{1}{n}, \phi = \frac{1}{S}$	по строкам F	$\max_l \sum_h \max_j \sum_i \left(\left a_{0ij}^h + (A_1^h \bar{b})_{ij} \right + \sum_{m=1}^k f_{lm} a_{lij}^h \right)$
		по строкам $\bar{b}$	$\max_l \sum_h \max_j \sum_i \left(\left a_{0ij}^h + (A_1^h \bar{b})_{ij} \right + \sum_{m=1}^n \bar{b}_{lm} a_{lij}^h \right)$

Эти максимальные агрегированные β -коэффициенты являются верхними границами соответствующих $\beta_{weighted\ l}^{AG\ mod}(\psi, \phi)$ для разных подмножеств экономик АМ I, II, III, IV, что формализуется следующим утверждением.

Утверждение 3. Максимальные агрегированные β -коэффициенты, определенные в табл. 1, 2, являются верхними границами для $\beta_{weighted\ l}^{AG\ mod}(\psi, \phi)$ для соответствующих разных подмножеств экономик АМ I, II, III, IV.

Доказательство основано на прямом применении сравнений, когда элементы в сумме, по-разному группируясь, заменяются на большее число⁹. □

Таким образом, нам удалось агрегировать экономику в одномерную и найти максимальные агрегированные экономики, которые ограничивают все такие агрегированные экономики в рамках конкретных подмножеств. Теперь можно сформулировать результат в форме двух утверждений для модели без лагов и с лагами соответственно, который подчеркивает ключевую роль E -стабильности агрегированной экономики для стабильности исходной структурно неоднородной экономики с возможно различными степенями инерции (вспомните утверждения 2, 3 Хонкапойи и Митры [2]). Ключевые утверждения выглядят следующим образом.

Утверждение 4. Если хотя бы одна из максимальных агрегированных экономик (АМmax I (III)) для соответствующего множества АМ I (III) E -стабильна (т. е. хотя бы один соответствующий максимальный агрегированный β -коэффициент, определенный в табл. 1, меньше единицы), тогда экономика, описываемая исходной Моделью I (III), является (слабо) δ -стабильной при неоднородном RLS-обучении и общем (возможно не диагональном) процессе поведения шоков.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 5 в [4. С. 79]¹⁰. □

Утверждение 5. Если хотя бы одна из максимальных агрегированных экономик (АМmax II (IV)) каждого типа (F -типа и $\bar{b}$ -типа) для соответствующего множества АМ II (IV) E -стабильна (т. е. хотя бы один соответствующий максимальный агрегированный β -коэффициент каждого типа, определенный в табл. 2, меньше единицы), тогда экономика, описываемая исходной Моделью II (IV), в которой все корни $\bar{b}$ [1. С. 96, формула (20)] лежат внутри единичного круга, является (слабо) δ -стабильной при неоднородном RLS-обучении и общем (возможно не диагональном) процессе поведения шоков.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 5 в [4. С. 79]¹¹. □

Достаточные условия δ -стабильности в терминах агрегированной экономики при диагональном процессе для шоков

В случае диагонального процесса поведения шоков, задаваемого

$$w_t = Fw_{t-1} + v_t, \quad F = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_k), \quad M_w = \lim_{t \rightarrow \infty} Ew_t w_t' = \text{diag}\left(\frac{\sigma_1^2}{1 - \rho_1^2}, \dots, \frac{\sigma_k^2}{1 - \rho_k^2}\right), \quad (15)$$

⁹ Детали см. в [9. Прилож. А.7.17].

¹⁰ Детали см. в [9. Прилож. А.7.19].

¹¹ Детали см. в [9. Прилож. А.7.20].

Рис. 2. Общая схема получения достаточных условий δ -стабильности в случае диагональной структуры процесса движения шоков
 Fig. 2. General scheme for obtaining sufficient stability conditions in the case of a diagonal structure of the shock movement process

можно получить более слабые условия δ -стабильности при неоднородном RLS-обучении для Моделей II, IV и при неоднородном смешанном RLS/SG-обучении для Моделей I, III.

Общая схема получения достаточных условий δ -стабильности в случае диагональной структуры процесса движения шоков представлена на рис. 2.

В случае диагональной структуры процесса шоков удобно и возможно сразу свести экономику, представленную Моделями I, II, III, IV, к одномерной экономике без лагов с одним ожиданием текущего значения эндогенной переменной. Это осуществляется при помощи оператора сопоставления каждой модели множества «безлаговых» экономик с ожиданием текущего значения с $(t-1)$ -датировкой ожиданий, которое имеет такие же условия сходимости к MSV REE (и такое же MSV REE), что и исходная модель в случае диагональной структуры процесса шоков.

Определение 5. Множество ассоциированных «безлаговых» моделей с ожиданием текущего значения эндогенной переменной с $(t-1)$ -датировкой ожиданий, соответствующее Модели I (II, III, IV) (т. е. множество моделей, которое имеет такое же асимптотическое поведение, как и Модель I (II, III, IV) соответственно), где коэффициент при лаговой переменной зафиксирован в значении MSV REE (для Моделей II, IV), записывается как (15) и

для Модели I:

$$y_t = \alpha + \sum_{h=1}^S (A_0^h + \rho_l A_1^h + \dots + \rho_l^\tau A_\tau^h) \hat{E}_{t-1}^h y_t + B w_t + \zeta \varepsilon_t$$

для Модели II:

$$y_t = \alpha + \sum_{h=1}^S (A_0^h + A_1^h \bar{b} + \rho_l A_1^h) \hat{E}_{t-1}^h y_t + B w_t + \zeta \varepsilon_t$$

для Модели III:

$$y_t = \alpha + \sum_{h=1}^S A_1^h \hat{E}_{t-1}^h y_{t+1} + \dots + \sum_{h=1}^S A_\tau^h \hat{E}_{t-1}^h y_{t+\tau} + B F^{-1} w_t + \zeta \varepsilon_t$$

для Модели IV:

$$y_t = \alpha + \sum_{h=1}^S (A_1^h \bar{b} + \rho_l A_1^h) \hat{E}_{t-1}^h y_t + B F^{-1} w_t + \zeta \varepsilon_t$$

Доказательство следует из сравнения соответствующих ОДУ (якобианов в критерии 4 и утверждении 5 и определений коэффициентов MSV REE в [1. С. 97–98]). $\square$

Затем применяется оператор агрегирования в предельную агрегированную экономику для каждой экономики из множества ассоциированных «безлаговых» моделей с ожиданием текущего значения эндогенной переменной с $(t-1)$ -датировкой ожиданий, соответствующего Модели I (II, III, IV).

Определение 6. Для данных весов агрегирования (13) и (14) предельная агрегированная экономика для каждой экономики из множества ассоциированных «безлаговых» моделей с ожиданием текущего значения эндогенной переменной с $(t-1)$ -датировкой ожиданий, соответствующего Модели I (II, III, IV), записывается как (15) и

для Моделей I и II (далее также AMD I (II)):

$$y_t^{AG\text{mod}} = \sum_i \psi_i |\alpha_i| + \beta_l^{AG\text{mod}}(\psi, \phi) \hat{E}_{l\ t-1}^{AG\text{mod}} y_t^{AG\text{mod}} + \left| \sum_i (\psi_i B^i) w_t \right| + \left| \sum_i (\psi_i \zeta^i) \varepsilon_t \right|,$$

для Моделей III и IV (далее также AMD II (IV)):

$$y_t^{AG\text{mod}} = \sum_i \psi_i |\alpha_i| + \beta_l^{AG\text{mod}}(\psi, \phi) \hat{E}_{l\ t-1}^{AG\text{mod}} y_t^{AG\text{mod}} + \left| \sum_i \left(\psi_i (BF^{-1})^i \right) w_t \right| + \left| \sum_i (\psi_i \zeta^i) \varepsilon_t \right|,$$

для Модели I и Модели III ((с $a_{0ij}^h \equiv 0$)):

$$\beta_l^{AG\text{mod}}(\psi, \phi) = S \sum_h \phi_h \sum_i \psi_i \sum_j \left| a_{0ij}^h + \rho_l a_{1ij}^h + \dots + \rho_l^\tau a_{\tau ij}^h \right|, \quad r = 0, 1, \dots, \tau,$$

$$\hat{E}_{l\ t-1}^{AG\text{mod}} y_t^{AG\text{mod}} =$$

$$= \left(\beta_l^{AG\text{mod}}(\psi, \phi) \right)^{-1} \sum_h S \phi_h \sum_i \psi_i \sum_j \left| a_{0ij}^h + \rho_l a_{1ij}^h + \dots + \rho_l^\tau a_{\tau ij}^h \right| \hat{E}_{l\ t-1}^h |y_{jt}|, \quad r = 0, 1, \dots, \tau,$$

для Модели II и Модели IV ((с $a_{0ij}^h \equiv 0$)):

$$\beta_l^{AG\text{mod}}(\psi, \phi) = S \sum_h \phi_h \sum_i \psi_i \sum_j \left| a_{0ij}^h + (A_1^h \bar{b})_{ij} + \rho_l a_{1ij}^h \right|, \quad r = 0, 1, \dots, \tau,$$

$$\hat{E}_{l\ t-1}^{AG\text{mod}} y_t^{AG\text{mod}} =$$

$$= \left(\beta_l^{AG\text{mod}}(\psi, \phi) \right)^{-1} \sum_h S \phi_h \sum_i \psi_i \sum_j \left| a_{0ij}^h + (A_1^h \bar{b})_{ij} + \rho_l a_{1ij}^h \right| \hat{E}_{l\ t-1}^h |y_{jt}|, \quad r = 0, 1, \dots, \tau.$$

Опять структура этого предельного агрегированного коэффициента $\beta_l^{AG}(\psi, \phi)$ следующая. $\sum_i \psi_i \left| a_{0ij}^h + \rho_l a_{1ij}^h + \dots + \rho_l^\tau a_{\tau ij}^h \right|$ (для Моделей I и III (с $a_{0ij}^h \equiv 0$)) и $\sum_i \psi_i \left| a_{0ij}^h + (A_1^h \bar{b})_{ij} + \rho_l a_{1ij}^h \right|$ (для Моделей II и IV (с $a_{0ij}^h \equiv 0$)) – это коэффициент перед ожиданием эндогенной переменной j в агрегированной экономике, состоящей из единственного агента типа h . Заметим, что этот коэффициент посчитан для ожидания эндогенной переменной j , которая входит в агрегированный продукт с коэффициентом ψ_j . Таким образом, для каждого l , следуя Колужнову [4], мы можем назвать отношение

$$\left(\sum_i \psi_i \left| a_{0ij}^h + \rho_l a_{1ij}^h + \dots + \rho_l^\tau a_{\tau ij}^h \right| \right) / \psi_j \quad \forall j, \forall l$$

и

$$\sum_i \psi_i \left| a_{0ij}^h + (A_1^h \bar{b})_{ij} + \rho_l a_{1ij}^h \right| / \psi_j \quad \forall j, \forall l$$

«собственным относительным коэффициентом ожиданий эндогенной переменной j » для соответствующих моделей. Глядя на значения этих коэффициентов, можно судить о весе, который данный тип агента имеет в экономике с точки зрения агрегированного β -коэффициента.

Следующие утверждения, которые следуют из критериев δ -стабильности моделей без лагов и с лагами в случае диагональной структуры процесса шоков и теоремы МакКензи, формулируются в терминах этих относительных коэффициентов и говорят о том, что для δ -стабильности экономики должны существовать веса агрегирования эндогенных переменных и веса агентов, которые при расчете агре-

гированных ожиданий привязываются к значениям «собственных относительных коэффициентов ожиданий эндогенных переменных».

Утверждение 6. В случае диагонального процесса для шоков, если для каждой экономики из множества AMD I (III) существует по крайней мере одна пара весов агрегирования (13) и (14), такая что для каждого агента «собственный относительный коэффициент ожидания эндогенной переменной» меньше, чем вес агента, используемого в расчете агрегированных ожиданий, т. е.

$$\left(\sum_i \psi_i \left| a_{0ij}^h + \rho_l a_{lij}^h + \dots + \rho_l^i a_{lij}^h \right| \right) / \psi_j < \phi_h, \forall j, \forall h, \forall l,$$

причем $a_{0ij}^h \equiv 0$ для AMD III, тогда экономика, задаваемая (3) и (15) (Модель I) ((5) и (15) (Модель III)), (сильно) δ -стабильна при неоднородном смешанном RLS/SG-обучении.

Доказательство. Применяем условие отрицательной доминантной диагонали к матрице Ω_{ρ_l} из критерия 4 [1. С. 97], которое является достаточным для D -стабильности¹². □

Утверждение 7. В случае диагонального процесса для шоков, если для каждой экономики из множества AMD II (IV) и для каждой экономики из соответствующего множества AM II (IV), полученного при агрегированном взвешивании ожиданий по строкам $\bar{b}$ (из определения 3), существует по крайней мере одна пара весов агрегирования (13) и (14), такая что для каждого агента «собственный относительный коэффициент ожидания эндогенной переменной» меньше, чем вес агента, используемого в расчете агрегированных ожиданий, т. е.

$\exists(\psi, \phi)$ – веса, такие что

$$\sum_i \psi_i \left| a_{0ij}^h + \left(A_l^h \bar{b} \right)_{ij} + \rho_l a_{lij}^h \right| / \psi_j < \phi_h, \forall j, \forall h, \forall l \text{ и}$$

$\exists(\psi, \phi)$ – веса, такие что

$$\sum_i \psi_i \left(\rho_l^1 \left| a_{lij}^h \right| + \left| a_{0ij}^h + \left(A_l^h \bar{b} \right)_{ij} \right| \right) / \psi_j < \phi_h, \forall j, \forall h, \forall l, \text{ где } \rho_l^1 = \sum_{m=1}^n \left| \bar{b}_{lm} \right|$$

причем $a_{0ij}^h \equiv 0$ для Модели IV, тогда экономика, задаваемая (4) и (15) (Модель II) ((6) и (15) (Модель IV)), в которой все корни $\bar{b}$ [1. С. 96, формула (20)] лежат внутри единичного круга, (слабо) δ -стабильна при неоднородном RLS-обучении.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 6 через переобозначение переменных. □

Как и в общем (возможно не диагональном) случае, эти утверждения не дают простого практического правила (поскольку подразумевают поиск системы весов) определения того, что данная экономика стабильна при неоднородном обучении. Чтобы найти такое правило, мы конструируем верхние границы для агрегированных экономик и β -коэффициентов, учитывая уже не только возможные различные знаки элементов a_{ij} , но также различные значения весов ψ и ϕ . Эти границы могут быть получены для четырех различных подмножеств множества AMD I, II, III, IV

¹² Детали см. в [9. Прилож. А.7.14].

из Определения 6 (выше) в зависимости от значений весов ψ и φ . На рис. 2 этот шаг соответствует применению оператора агрегирования в максимальную агрегированную экономику, задаваемую следующим определением.

Определение 7. Для данных весов агрегирования (13) и (14) каждая экономика из соответствующего подмножества AMD I, II, III, IV ограничена сверху следующей максимальной агрегированной экономикой:

для Моделей I и II (далее также AMDmax I (II)):

$$\begin{aligned} y_t^{AG} &= \sum_i \psi_i y_{it} \leq y_t^{AG \text{ mod}} = \sum_i \psi_i |y_{it}| \leq y_t^{AG \text{ max}} = \\ &= \sum_i \psi_i |\alpha_i| + \beta_s^{AG \text{ max}} \hat{E}_{t-1}^{AG \text{ max}} y_t^{AG \text{ max}} + \left| \sum_i (\psi_i B^i) w_i \right| + \left| \sum_i (\psi_i \zeta^i) \varepsilon_i \right| \quad \text{и (15)} \end{aligned}$$

для Моделей III и IV (далее также AMDmax III (IV)):

$$\begin{aligned} y_t^{AG} &= \sum_i \psi_i y_{it} \leq y_t^{AG \text{ mod}} = \sum_i \psi_i |y_{it}| \leq y_t^{AG \text{ max}} = \\ &= \sum_i \psi_i |\alpha_i| + \beta_s^{AG \text{ max}} \hat{E}_{t-1}^{AG \text{ max}} y_t^{AG \text{ max}} + \left| \sum_i \left(\psi_i (BF^{-1})^i \right) w_i \right| + \left| \sum_i (\psi_i \zeta^i) \varepsilon_i \right| \quad \text{и (15)}, \end{aligned}$$

где $\beta_s^{AG \text{ max}}$ задан в табл. 3 (для Моделей I и III) и в табл. 4 (для Моделей II и IV).

Аналогично общему недиагональному случаю, нам удалось агрегировать экономику в одномерную и найти максимальные агрегированные экономики, которые ограничивают все такие агрегированные экономики в рамках конкретных подмножеств. Аналогичные утверждения, подчеркивающие ключевую роль E -стабильности агрегированной экономики для стабильности исходной структурно неоднородной экономики с возможно различными степенями инерции для случая диагональной структуры процесса шоков, выглядят следующим образом.

Утверждение 8. Если хотя бы одна из максимальных агрегированных экономик AMDmax I (III) для соответствующего подмножества AM I (III) E -стабильна (т. е. хотя бы один соответствующий максимальный агрегированный β -коэффициент, определенный в табл. 3, меньше единицы), тогда экономика, описываемая исходной Моделью I (III), является (сильно) δ -стабильной при неоднородном смешанном RLS/SG-обучении и диагональном процессе поведения шоков.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 5 в [4. С. 79]¹³. $\square$

Утверждение 9. Если хотя бы одна из максимальных агрегированных экономик AMDmax II (IV) для соответствующего подмножества AMD II (IV) E -стабильна (т. е. хотя бы один соответствующий максимальный агрегированный β -коэффициент, определенный в табл. 4, меньше единицы) и если хотя бы одна из максимальных агрегированных экономик AMD II (IV) $\bar{b}$ -типа E -стабильна (т. е. хотя бы один соответствующий максимальный агрегированный β -коэффициент каждого типа, определенный в табл. 2, меньше единицы), тогда экономика, описываемая исходной Моделью II (IV), в которой все корни $\bar{b}$ [1. С. 96, формула (20)] лежат внутри единичного круга, является (слабо) δ -стабильной при неоднородном RLS-обучении и диагональном процессе поведения шоков.

Доказательство следует из доказательств утверждений 5 и 8¹⁴. $\square$

¹³ Детали см. в [9. Прилож. А.7.18].

¹⁴ Детали см. в [9. Прилож. А.7.18, А.7.20].

Таблица 3

Максимальные агрегированные β -коэффициенты для AMDmax I (III (с $a_{0ij}^h \equiv 0$))

Table 3

Maximal aggregate β -coefficients for AMDmax I (III (with $a_{0ij}^h \equiv 0$))

	Подмножество	Тип агрегированного взвешивания ожиданий	$\beta_s^{AG \max} =$
$s = 1$	$\forall \psi, \forall \phi$	по строкам F	$\max_l S \sum_j \max_{h,i} a_{0ij}^h + \rho_l a_{lij}^h + \dots + \rho_l^\tau a_{tj}^h $
$s = 2$	$\forall \psi, \phi = \frac{1}{S}$	по столбцам F	$\max_l \max_i \sum_h \sum_j a_{0ij}^h + \rho_l a_{lij}^h + \dots + \rho_l^\tau a_{tj}^h $
$s = 3$	$\psi = \frac{1}{n}, \forall \phi$	по столбцам F	$\max_l S \sum_i \max_{h,j} a_{0ij}^h + \rho_l a_{lij}^h + \dots + \rho_l^\tau a_{tj}^h $
$s = 4$	$\psi = \frac{1}{n}, \phi = \frac{1}{S}$	по строкам F	$\max_l \sum_h \max_j \sum_i a_{0ij}^h + \rho_l a_{lij}^h + \dots + \rho_l^\tau a_{tj}^h $

Таблица 4

Максимальные агрегированные β -коэффициенты для AMDmax II (IV (с $a_{0ij}^h \equiv 0$))

Table 4

Maximal aggregate β -coefficients for AMDmax II (IV (with $a_{0ij}^h \equiv 0$))

	Подмножество	Тип агрегированного взвешивания ожиданий	$\beta_s^{AG\max} =$
$s = 1$	$\forall \psi, \forall \phi$	по строкам F	$\max_l S \sum_j \max_{h,i} \left a_{0ij}^h + \left(A_1^h \bar{b} \right)_{ij} + \rho_l a_{lij}^h \right $
$s = 2$	$\forall \psi, \phi = \frac{1}{S}$	по столбцам F	$\max_l \max_i \sum_h \sum_j \left a_{0ij}^h + \left(A_1^h \bar{b} \right)_{ij} + \rho_l a_{lij}^h \right $
$s = 3$	$\psi = \frac{1}{n}, \forall \phi$	по столбцам F	$\max_l S \sum_i \max_{h,j} \left a_{0ij}^h + \left(A_1^h \bar{b} \right)_{ij} + \rho_l a_{lij}^h \right $
$s = 4$	$\psi = \frac{1}{n}, \phi = \frac{1}{S}$	по строкам F	$\max_l \sum_h \max_j \sum_i \left a_{0ij}^h + \left(A_1^h \bar{b} \right)_{ij} + \rho_l a_{lij}^h \right $

Заключение

В нашей статье мы расширяем результаты Хонкапойи и Митры [2], Колужнова [4] и Богомоловой и Колужнова [1]. Используя общие критерии стабильности при неоднородном обучении для четырех классов рассматриваемых моделей: моделей без лагов и с лагами эндогенной переменной и с t - или $(t - 1)$ -датировкой ожиданий, полученные Богомоловой и Колужновым [1], мы получаем необходимые условия стабильности, не зависящие от неоднородности в обучении, представленные сначала в терминах существования соответствующим образом взаимосвязанных весов агрегирования эндогенных переменных и ожиданий по типам агентов, а затем и в терминах E -стабильности агрегированной экономики, основанные на подходе отрицательной доминантной диагонали. Мы используем понятие сильной и слабой δ -стабильности и определение HE -стабильности как стабильности при неоднородном обучении, задаваемые в [1].

Если в статье [1] нами получены критерии и достаточные условия δ -стабильности в терминах стабильности соответствующих якобианов для всех четырех классов моделей, представленные в смешанных терминах как структурной неоднородности, так и неоднородности при обучении, то полученные нами условия в данной работе записываются только в терминах структурной неоднородности и не зависят от неоднородности при обучении. Достаточные и необходимые условия стабильности, не зависящие от неоднородности в обучении, полученные с использованием альтернативного определения D -стабильности, и необходимые условия стабильности, основанные на подходе характеристического уравнения, в терминах условий «одинакового знака» и E -стабильности подходящим образом определенной средней экономики и ее подэкономик, будут представлены нами в отдельной статье.

Все результаты этой статьи могут быть обобщены следующим образом. Мы прописываем алгоритм агрегирования экономики, задаваемой классами моделей с указанием применяемых операторов агрегирования на каждом этапе, который позволяет получить агрегированные экономики, определяющие δ -стабильность исходных экономик. Для общего (возможно не диагонального) процесса для шоков для всех типов моделей мы получаем сначала в терминах существования соответствующим образом взаимосвязанных весов агрегирования эндогенных переменных и ожиданий по типам агентов, а затем и в терминах E -стабильности подходящим образом определенной агрегированной экономики достаточные условия слабой δ -стабильности при неоднородном RLS-обучении. Для случая диагонального процесса шоков для моделей без лагов (Модели I, III) мы получаем достаточные условия (сильной) δ -стабильности при смешанном RLS/SG-обучении и достаточные условия для (слабой) δ -стабильности для моделей с лагами (Модели II, IV) при неоднородном RLS-обучении.

Фундаментальность применяемого подхода позволяет применить его результаты к большинству существующих и перспективных линейных и линеаризованных экономических моделей (включая оцененные DSGE модели) с адаптивным обучением экономических агентов.

Список литературы

1. **Богомолова А. С., Колюжнов Д. В.** Экономическая динамика при неоднородном адаптивном обучении: общие критерии и достаточные условия стабильности // Мир экономики и управления. 2019. Т. 19, № 4. С. 87–103.
2. **Honkapohja S., Mitra K.** Learning stability in economies with heterogeneous agents. *Review of Economic Dynamics*, 2006, vol. 9 (2), p. 284–309.
3. **Johnson C. R.** Sufficient conditions for D-stability. *Journal of Economic Theory*, 1974, vol. 9, p. 53–62.
4. **Колюжнов Д. В.** Условия стабильности экономической динамики при неоднородном обучении экономических агентов // Вестник НГУ. Серия: Социально-экономические науки. 2011. Т. 11, № 1. С. 70–81.
5. **Колюжнов Д. В., Богомолова А. С.** Краткий обзор DSGE-моделирования // Инновационный потенциал экономики России: состояние и перспективы: Сб. науч. тр. / Отв. ред. А. В. Алексеев, Л. К. Казанцева; ИЭОПП СО РАН. Новосибирск, 2013. С. 298–318.
6. **Juillard M.** Dynare: A program for the resolution and simulation of dynamic models with forward variables through the use of relaxation algorithm. CEPREMAP, Couverture Orange, 9602, 1996.
7. **Slobodyan S., Wouters R.** Learning in an estimated medium-scale DSGE model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2012, vol. 36, p. 26–46.
8. **Giannitsarou Ch.** Heterogeneous learning. *Review of Economic Dynamics*, 2003, vol. 6, p. 885–906.
9. **Bogomolova A.** Essays in Heterogeneous Learning. Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy. Center for Economic Research and Graduate Education (CERGE-EI), 2014. URL: <http://www.cerge-ei.cz/pdf/dissertations/2014-bogomolova.pdf>

References

1. **Bogomolova A. S., Kolyuzhnov D. V.** Economic Dynamics under Heterogeneous learning: General Criteria and Sufficient Conditions for Stability. *World of Economics and management*, 2019, vol. 19, no. 4, p. 87–103. (in Russ.)
2. **Honkapohja S., Mitra K.** Learning stability in economies with heterogeneous agents. *Review of Economic Dynamics*, 2006, vol. 9 (2), p. 284–309.
3. **Johnson C. R.** Sufficient conditions for D-stability. *Journal of Economic Theory*, 1974, vol. 9, p. 53–62.
4. **Kolyuzhnov D. V.** Conditions for stability of economic dynamics under heterogeneous learning of economic agents. *Vestnik NSU. Series: Social and Economics Sciences*, 2011, vol. 11, no. 1, p. 70–81. (in Russ.)
5. **Kolyuzhnov D. V., Bogomolova A. S.** Short review of DSGE modeling. In: Alekseev A. V., Kazantseva L. K. (eds.) *Innovatsionnyj potentsial ekonomiki Rossii: sostoyanie i perspektivy* [Innovative potential of economy of Russia: state and prospects]. Novosibirsk, IEIE SB RAS Publ., 2013, p. 298–318. (in Russ.)
6. **Juillard M.** Dynare: A program for the resolution and simulation of dynamic models with forward variables through the use of relaxation algorithm. CEPREMAP, Couverture Orange, 9602, 1996.

7. **Slobodyan S., Wouters R.** Learning in an estimated medium-scale DSGE model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2012, vol. 36, p. 26–46.
8. **Giannitsarou Ch.** Heterogeneous learning. *Review of Economic Dynamics*, 2003, vol. 6, p. 885–906.
9. **Bogomolova A.** Essays in Heterogeneous Learning. Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy. Center for Economic Research and Graduate Education (CERGE-EI), 2014. URL: <http://www.cerge-ei.cz/pdf/dissertations/2014-bogomolova.pdf>

Материал поступил в редколлегию 21.01.2020

Принят к печати 14.02.2020

Сведения об авторах

Богомолова Анна Сергеевна, PhD, доцент, экономический факультет, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090, Россия)

anna.bogomolova@cerge-ei.cz

ORCID 0000-0002-3413-4061

Scopus ID 56377538500

Колужнов Дмитрий Васильевич, PhD, доцент, экономический факультет, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090, Россия); научный сотрудник, Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН (пр. Академика Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090, Россия)

dima.kolyuzhnov@mail.ru

ORCID 0000-0003-4390-7289

Scopus ID 55940049500

Information about Authors

Anna S. Bogomolova, PhD (Economics), Associate Professor, Novosibirsk State University (1 Pirogov Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation)

anna.bogomolova@cerge-ei.cz

ORCID 0000-0002-3413-4061

Scopus ID 56377538500

Dmitriy V. Kolyuzhnov, PhD (Economics), Associate Professor, Novosibirsk State University (1 Pirogov Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation); Researcher, Institute of Economics and Industrial Engineering SB RAS (17 Academician Lavrentiev Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation)

dima.kolyuzhnov@mail.ru

ORCID 0000-0003-4390-7289

Scopus ID 55940049500