УДК 330.36.012.4
JEL C62, D83, E10
DOI 10.25205/2542-0429-2019-19-4-87-103

Экономическая динамика при неоднородном адаптивном обучении: общие критерии и достаточные условия стабильности*

А. С. Богомолова¹, Д. В. Колюжнов^{1,2}

¹ Новосибирский государственный университет
Новосибирск, Россия

² Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН
Новосибирск, Россия

Аннотация

Приводятся критерии и достаточные условия стабильности линейной структурно-неоднородной экономики при неоднородном адаптивном обучении агентов, расширяя результаты Хонкапойи, Митры (2006) и Колюжнова (2011). Критерии стабильности при смешанном неоднородном RLS/SG обучении для четырех классов моделей: моделей без лагов и с лагами эндогенной переменной и с t или $t - 1$ датировкой ожиданий, достаточные условия стабильности для случаев диагональной структуры процесса для шоков или неоднородного RLS обучения представлены в терминах стабильности соответствующих Якобианов. Приводится полезный критерий стабильности для всех типов моделей при смешанном RLS/SG обучении с равными степенями инерции для каждого типа алгоритма обучения в терминах стабильности подходящим образом определенной средней экономики с двумя агентами. Полученные критерии и достаточные условия стабильности основываются на результатах общей теории стохастической аппроксимации и представлены в смешанных терминах как структурной неоднородности, так и неоднородности при обучении. Они необходимы нам в сопутствующих статьях для получения достаточных и необходимых условий стабильности, не зависящих от неоднородности в обучении, представленных в терминах E -стабильности агрегированной экономики, условий «одинакового знака» и E -стабильности подходящим образом определенной средней экономики и ее подэкономик. Фундаментальный характер подхода, принятого в статье, позволяет применить его результаты к подавляющему большинству существующих и перспективных линейных и линеаризованных экономических моделей (включая оцененные DSGE-модели) с адаптивным обучением агентов.

Ключевые слова

адаптивное обучение, стабильность равновесия, неоднородные агенты

Источник финансирования

Работа выполнена по плану НИР ИЭОПП СО РАН, проект XI.170.1.1 «Инновационные и экологические аспекты структурной трансформации российской экономики в условиях новой геополитической реальности», № AAAA-A17-117022250127-8.

Для цитирования

Богомолова А. С., Колюжнов Д. В. Экономическая динамика при неоднородном адаптивном обучении: общие критерии и достаточные условия стабильности // Мир экономики и управления. 2019. Т. 19, № 4. С. 87–103. DOI 10.25205/2542-0429-2019-19-4-87-103

* Основные идеи этого исследования, легшие в основу наших PhD диссертаций, и первые результаты появились в то время, когда оба автора были приглашенными аспирантами в Кембридже. Авторы выражают особую благодарность своему руководителю в Кембридже Сеппо Хонкапойе за постоянную поддержку этого исследования и неоценимую помощь. Авторы сами несут ответственность за возможные ошибки. Авторы благодарят участников международных конференций, на которых были представлены различные варианты результатов этого исследования начиная с 2006 г., за ценное обсуждение.

Economic Dynamics under Heterogeneous Adaptive Learning: General Criteria and Sufficient Conditions for Stability

A. S. Bogomolova¹, D. V. Kolyuzhnov^{1,2}

¹ Novosibirsk State University
Novosibirsk, Russian Federation

² Institute of Economics and Industrial Engineering SB RAS
Novosibirsk, Russian Federation

Abstract

The article extends the results of Honkapohja and Mitra (2006) and Kolyuzhnov (2011) and provides criteria and sufficient conditions for stability in a structurally heterogeneous economy under heterogeneous adaptive learning of agents. The criteria for stability under heterogeneous mixed RLS/SG learning for four classes of models – without lags and with lags of the endogenous variable and with t or $t - 1$ – dating of expectations – and sufficient conditions for stability for the cases of the diagonal structure of the shock process behavior or the heterogeneous RLS learning are presented in terms of the corresponding Jacobian matrices. In addition, the study presents a very useful criterion for the stability for all types of models under mixed RLS/SG learning with equal degrees of inertia for each type of learning algorithm in terms of stability of a suitably defined average economy with two agents. The derived criteria and sufficient conditions for stability are based on the results of the theory of stochastic approximation and are presented in terms of mixture of structural and learning heterogeneity, which are essential to get sufficient and necessary conditions for stability irrespective of heterogeneity in learning presented in terms of E-stability of suitably defined aggregate economies, the “same sign” conditions and the E-stability of a suitably defined average economy and its sub-economies. The fundamental nature of the approach adopted in the paper makes it possible to apply the results to a vast majority of the existing and prospective linear and linearized economic models (including estimated DSGE models) with adaptive learning of agents.

Keywords

adaptive learning, stability of equilibrium, heterogeneous agents

Funding

The publication is prepared within the project No. XI.170.1.1 “Project/Program Approach in State Regional Policy and in Regional Strategic Planning and Management: Methodology, Practice, Institutions”, no. AAAA-A17-117022250125-4 according to the research plan of the IEIE SB RAS

For citation

Bogomolova A. S., Kolyuzhnov D. V. Economic Dynamics under Heterogeneous Adaptive Learning: General Criteria and Sufficient Conditions for Stability. *World of Economics and Management*, 2019, vol. 19, no. 4, p. 87–103. (in Russ.) DOI 10.25205/2542-0429-2019-19-4-87-103

Введение

Современные макроэкономические модели содержат ожидания, которые оказывают влияние на динамику эндогенных переменных. Главный вопрос, который возникает в этой связи, – как моделировать эти ожидания? Исторически, пройдя путь от наивных (статических) и адаптивных ожиданий к рациональным ожиданиям, наиболее широко используемой моделью формирования ожиданий до недавнего времени были рациональные ожидания (RE) агентов. Однако было замечено, что это предположение не всегда позволяет получить подходящие результаты с точки зрения поведения данных, генерируемых моделью. Одной из причин этого является то, что при таком предположении на агентов накладываются серьезные ограничения. Один из аргументов против предположения о RE был выдвинут Сарджентом [1]: если экономисты (которые, как предполагается, знают экономику лучше других агентов) сами не знают точных экономических моделей и им приходится оценивать параметры модели эконометрически, тогда мы можем думать, что экономические агенты ведут себя не лучше. Таким образом, имеет смысл рассматривать агентов как эконометристов или статистиков, которые обновляют свои убеждения (грубо говоря, коэффициенты регрессии) по мере поступления новых данных, таким образом пытаясь выучить истинную экономическую модель все лучше и лучше по мере поступления новой информации. Этот подход является спе-

цифической формой ограниченной рациональности и представляет собой адаптивное обучение, а именно адаптивное эконометрическое обучение.

Несмотря на растущую популярность, этот подход к моделированию ожиданий имеет, тем не менее, некоторые «подводные камни». Обычно, когда применяется адаптивная схема обучения в качестве модели формирования ожиданий, предполагается однородный тип обучения, т. е. существует некоторый репрезентативный агент, который использует какой-то конкретный алгоритм обучения. Наиболее широко используемыми алгоритмами обучения являются рекурсивный метод наименьших квадратов (RLS) и метод стохастического градиента (SG). Они отличаются только в одном отношении: алгоритм RLS обновляет матрицу вторых моментов, а алгоритм SG сохраняет ее постоянной. Структура алгоритма обучения предполагает, что предыдущий параметр убеждения (грубо говоря, коэффициент регрессии) равен предыдущему значению этого параметра плюс коэффициент приращения из некоторой убывающей последовательности, умноженный на функцию исправления ошибок, которая зависит от самой последней ошибки прогноза. Главный вопрос, который возникает в связи с однородным обучением, – является ли эта стабильность следствием этой однородности, т. е. сохранится ли эта стабильность, если вместо однородного обучения использовать, например, обучение, состоящее из некоторой смеси различных алгоритмов или содержащее различные скорости обновления информации, различные начальные значения, верна ли гипотеза о существовании репрезентативного агента?

Среди исследователей, рассматривающих этот вопрос, Гианнитсару [2], которая предполагает, что агенты являются однородными во всем, кроме способа обучения, Хонкапойя и Митра [3], которые рассматривают структурно-неоднородную экономику, имея в виду, что помимо неоднородности в обучении агенты могут также различаться в структурных параметрах, таких как технологии, предпочтения и т. д., и Колужнов [4], который рассматривает условия стабильности независимо от неоднородности при обучении в структурно неоднородной вперед смотрящей модели с ожиданием будущих значений на один период вперед и диагональной структурой поведения шоков.

Неоднородность обучения в этих работах возникает из-за различных типов алгоритмов обучения, используемых агентами: RLS или SG, из-за различных скоростей реакции на новую информацию различными агентами, из-за различного начального восприятия и различных долей агентов, использующих определенный тип алгоритма обучения. Использование алгоритма RLS вместо SG позволяет моделировать «более изощренных» агентов. Различные скорости реакции на новую информацию различными агентами обычно выражаются в виде положительных множителей перед коэффициентом приращения из убывающей последовательности, общим для всех агентов в механизме обновления убеждений, называемых степенями инерции. Различное начальное восприятие агентов представлено в виде различающихся начальных значений для алгоритмов обучения. Все вышеупомянутые характеристики неоднородности обучения могут быть отражены в виде адаптивного обучения, когда один тип агентов использует RLS, а другой – SG, это так называемое неоднородное смешанное RLS/SG обучение.

В нашей статье мы, следуя за Колужновым [4], решаем задачу, поставленную Хонкапойей и Митра [3]: найти условия стабильности структурно неоднородной экономики при смешанном RLS/SG обучении с (возможно) различными степенями инерции в терминах только самой структурной неоднородности, не зависящие от неоднородности в обучении.

Хотя Хонкапойя и Митра [3] сформулировали общий критерий такой стабильности и смогли получить достаточные условия стабильности для случая одномерной модели (модели с одной эндогенной переменной), они не получили условия (необходимые и / или достаточные), представленные в терминах только самой структуры модели, независимо от характеристик обучения, для общего случая вперед смотрящей модели с многими переменными. В свою очередь, Колужнов [4] рассматривает условия стабильности независимо от неоднородности в обучении. Однако он рассматривает только вперед смотрящую модель с ожиданием будущих значений на один период вперед, без лагов эндогенной переменной и диаго-

нальной структурой поведения шоков, которая подразумевает диагональную структуру AR(1) коэффициентов матрицы процесса для шоков. Это оставляет в стороне многие экономические модели. Например, в стороне остаются модели DSGE с лагом эндогенной переменной. Мы решаем эту проблему в нашей статье.

Мы расширяем результаты Хонкапойи и Митры [3] и Колужнова [4] и предоставляем общие критерии стабильности при неоднородном смешанном обучении RLS/SG для четырех классов моделей: моделей без лагов и с лагами эндогенной переменной и с t - или $t-1$ -датировкой ожиданий и достаточные условия для некоторых более простых случаев, где упрощения включают в себя либо диагональную структуру процесса шоков, либо RLS обучение. Мы также хотим подчеркнуть получение нами очень полезного критерия устойчивости всех типов моделей для общего (недиагонального) случая процесса для шоков при смешанном обучении RLS/SG с равными степенями инерции для каждого типа алгоритма обучения, представленного в терминах стабильности соответствующей средней экономики с двумя агентами.

По сути, оказывается, что все условия стабильности, записанные в терминах Якобианов, требуют D -стабильности некоторой матрицы (матриц) Ω . Таким образом, все Якобианы выглядят как $D\Omega$, где D – положительно-диагональная матрица, что позволяет формулировать условия стабильности, не зависящие от параметров матрицы D , что означает стабильность, не зависящую от неоднородности в обучении. Среди математических подходов к устойчивости (рассмотренных, например, Джонсоном [5]) Колужнов [4] выделяет подходы, основанные на теореме Ляпунова, на отрицательной доминантной диагонали, на альтернативном определении D -стабильности, на характеристическом уравнении и на условиях Раута – Гурвица. Мы применяем эти подходы для получения условий стабильности, не зависящих от неоднородности при обучении, в наших двух сопутствующих статьях, используя результаты по Якобианам, полученные в данной статье.

Мы также пересматриваем определение связанного с D -стабильностью понятия δ -стабильности, введенного Колужновым [4]. Значение понятия δ -стабильности для неоднородного обучения подобно понятию E -стабильности, которое является условием асимптотической устойчивости равновесия при рациональных ожиданиях (REE) при однородном RLS обучении. В нашем определении δ -стабильность, по Колужнову [4], является **сильной δ -стабильностью**, т. е. стабильностью структурно неоднородной экономики, независимой от всех типов характеристик обучения: различного начального восприятия, структуры обучения и степеней инерции. Одновременно мы определяем **слабую δ -стабильность** как стабильность структурно неоднородной экономики, не зависящую от различного начального восприятия и степеней инерции, т. е. зависящую от структуры обучения. Это позволяет получить более точные условия в моделях с фиксированной структурой обучения.

Фундаментальный характер принятого в статье подхода позволяет применять его результаты к большинству существующих и перспективных линейных и линеаризованных экономических моделей с адаптивным обучением агентов. Например, его можно применить по отношению к (оцененным) DSGE-моделям ¹ с включенными в рассмотрение адаптивно обучающимися агентами. В этом смысле полученные результаты могут быть очень полезны с точки зрения проверки устойчивости конкретной DSGE-модели ² к гипотезе о модели формирования ожиданий, за которую обычно берется гипотеза о рациональных ожиданиях и проверки обоснованности предположения о репрезентативном агенте.

¹ Краткий обзор DSGE-моделирования представлен в [6].

² Типичная DSGE-модель в структурной форме выглядит как $A_0 \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ w_{t-1} \end{bmatrix} + A_1 \begin{bmatrix} y_t \\ w_t \end{bmatrix} + A_2 E_t y_{t+1} + B_0 \varepsilon_t = \text{const}$. После оценивания (например, при помощи DYNARE [7]) решение модели при рациональных ожиданиях имеет вид $\begin{bmatrix} y_t \\ w_t \end{bmatrix} = \mu + T \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ w_{t-1} \end{bmatrix} + R \varepsilon_t$. См., например, статью Слободяна и Ваутерса [8].

В следующем разделе мы представляем четыре класса структурно неоднородных моделей с ожиданиями агентов. В третьем разделе последовательно применяем предположение о неоднородном адаптивном обучении к модели каждого класса и применяем общие результаты литературы по теории стохастической аппроксимации по сходимости моделей при обучении, записанных в форме стохастических рекурсивных алгоритмов к каждой модели, для того чтобы получить соответствующее ассоциированное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ), отвечающее за стабильность REE. В четвертом разделе мы даем критерии и достаточные условия стабильности REE в общем и более простых случаях. В пятом разделе приводим полезный критерий стабильности для всех рассматриваемых типов моделей для общего (недиагонального) процесса для шока при смешанном RLS/SG обучении с равными степенями инерции для каждого типа алгоритма обучения в терминах стабильности подходящим образом определяемой средней экономики с двумя агентами.

Постановка классов моделей. PLM, T -отображение и MSV REE

Мы рассматриваем модели в общей постановке Эванса и Хонкапойи [9. Гл. 8, с. 173, уравнение (8.1)], расширенной, чтобы учесть неоднородную структуру и ожидания, сформированные в момент времени t . **Общий класс структурно неоднородных линейных моделей с S типами агентов с различными прогнозами** может быть представлен в виде

$$y_t = \alpha + \sum_{i=1}^d L_i y_{t-i} + \sum_{h=1}^S \sum_{b=0}^m \sum_{f=b}^n A_{bf}^h \hat{E}_{t-b}^h y_{t-b+f} + B w_t + \zeta \varepsilon_t, A_{00}^h \equiv 0, \quad (1)$$

$$w_t = F w_{t-1} + v_t, \quad (2)$$

где y_{t-1} — $n \times 1$ -вектор эндогенных переменных, w_{t-1} — $k \times 1$ -вектор экзогенных переменных; v_t и ε_t — вектора (независимых) шоков белого шума; $\hat{E}_{t-b}^h y_{t-b+f}$ есть (в общем случае неарациональные) ожидания эндогенных переменных агентом h ; а L_i, A_{bf}^h, B, ζ — подходящего размера матрицы. Также предполагается, что F ($k \times k$ -матрица) такова, что w_t следует VAR (1) стационарному процессу с $M_w = \lim_{t \rightarrow \infty} E w_t w_t'$ — положительно определенной матрицей ковариаций.

Модель, представленная выше, является линейной (или линеаризованной) моделью, описывающей экономику, записанную в сокращенной форме, т. е. она задает временное равновесие динамической модели. В этой модели ожидания эндогенных переменных, формируемые различными типами агентов, линейно влияют на текущие значения этих переменных. Структурная неоднородность модели, аналогично исходной постановке Хонкапойи и Митры [3], выражается через матрицы A_{bf}^h , которые, как предполагается, включают в себя массу ζ_h каждого типа агента h , $\sum \zeta_h = 1$. Иначе говоря, $A_{bf}^h = \zeta_h \cdot \tilde{A}_{bf}^h$, где $\tilde{A}_{bf}^h$ определены как матрицы, показывающие, как агенты типа h реагируют на свои собственные прогнозы. Таким образом, $\tilde{A}_{bf}^h$ содержат структурные параметры, характеризующие данную экономику, основные характеристики агентов, которые описывают их предпочтения, технологии и запасы. Структурная неоднородность означает, что все $\tilde{A}_{bf}^h$ разные для различных типов агентов. Когда $\tilde{A}_{bf}^h = A_{bf}$ для всех h , тогда экономика является структурно однородной.

Хотя наше обсуждение легко распространить на общую постановку (1) и (2), для облегчения изложения результатов, мы ограничимся анализом примеров, наиболее часто используе-

мых в литературе: $(d = 0, m = 1, n - \text{любое}, A_{0f}^h \equiv 0)$ (Модель I); $(d = 1, m = 1, n = 2, A_{0f}^h \equiv 0)$ (Модель II), $(d = 0, m = 0, n - \text{любое})$ (Модель III); $(d = 1, m = 0, n = 1)$ (Модель IV).

Первый класс рассматриваемых моделей – это **класс структурно неоднородных моделей без лагов эндогенной переменной и с $t - 1$ -датировкой ожиданий**. Здесь и далее мы будем называть эту формулировку **Моделью I**.

$$y_t = \alpha + \sum_{h=1}^S A_0^h \hat{E}_{t-1}^h y_t + \sum_{h=1}^S A_1^h \hat{E}_{t-1}^h y_{t+1} + \dots + \sum_{h=1}^S A_\tau^h \hat{E}_{t-1}^h y_{t+\tau} + Bw_t + \zeta \varepsilon_t, \quad (3)$$

и (2), где определения переменных и матриц такие же, как для общей постановки (1) и (2), приведенной выше.

Второй класс рассматриваемых моделей (далее **Модель II**) – это **класс структурно неоднородных моделей с одним лагом эндогенной переменной, $t - 1$ -датировкой ожиданий и с ожиданием будущих значений на один период вперед**:

$$y_t = \alpha + Ly_{t-1} + \sum_{h=1}^S A_0^h \hat{E}_{t-1}^h y_t + \sum_{h=1}^S A_1^h \hat{E}_{t-1}^h y_{t+1} + Bw_t + \zeta \varepsilon_t, \quad (4)$$

и (2), где определения переменных и матриц такие же, как для общей постановки (1) и (2), приведенной выше.

Третий класс рассматриваемых моделей (далее **Модель III**) является **классом структурно неоднородных моделей без лагов эндогенной переменной и с t -датировкой ожиданий**:

$$y_t = \alpha + \sum_{h=1}^S A_1^h \hat{E}_t^h y_{t+1} + \dots + \sum_{h=1}^S A_\tau^h \hat{E}_t^h y_{t+\tau} + Bw_t + \zeta \varepsilon_t, \quad (5)$$

и (2), где переменные и матрицы определены как прежде.

Четвертый (последний в этой статье) класс рассматриваемых моделей (далее **Модель IV**) представляет собой **класс структурно неоднородных моделей с лагом эндогенной переменной, t -датировкой ожиданий, информационным множеством $(1, y'_{t-1}, w'_t)$ и ожиданием будущих значений на один период вперед**:

$$y_t = \alpha + Ly_{t-1} + \sum_{h=1}^S A_1^h \hat{E}_t^h y_{t+1} + Bw_t + \zeta \varepsilon_t, \quad (6)$$

и (2); с тем же определением для переменных и матриц, что и выше.

Также предполагается, что агенты каждого типа h формируют свои ожидания об эндогенных переменных, веря (воспринимая), что экономическая система следует модели, называемой **воспринимаемым законом движения агентов (PLM)**: $y_t = a_{h,t-1} + b_{h,t-1} w_{t-1}$ (для Модели I), $y_t = a_{h,t-1} + b_{h,t-1} y_{t-1} + c_{h,t-1} w_{t-1}$ (для Модели II), $y_t = a_{h,t} + b_{h,t} w_t$ (для Модели III), $y_t = a_{h,t} + b_{h,t} y_{t-1} + c_{h,t} w_t$ (для Модели IV). Обратите внимание, что здесь и далее мы рассматриваем только такие PLM, которые соответствуют так называемому **фундаментальному REE** или **REE с минимальным числом переменных состояния (MSV REE)**.

После подстановки прогнозов каждого агента на основе PLM в сокращенную форму модели получаем **действительный закон движения (ALM)** модели, соответствующий заданному PLM. Соответствующее отображение из параметров PLM, называемых убеждениями $\Phi_{h,t}$ ($\Phi'_{h,t-1} = (a_{h,t-1}, b_{h,t-1})$ для Модели I, $\Phi'_{h,t-1} = (a_{h,t-1}, b_{h,t-1}, c_{h,t-1})$ для Модели II, $\Phi'_{h,t-1} = (a_{h,t}, b_{h,t})$ для Модели III, $\Phi'_{h,t} = (a_{h,t}, b_{h,t}, c_{h,t})$ для Модели IV), в параметры ALM

называется ***T*-отображением**, $T(\Phi_t)$, $\Phi'_t = (\Phi'_{1,t}, \dots, \Phi'_{S_t,t})$. Таким образом, решение MSV REE может быть найдено как $T(\Phi) = \Phi_h$.

Неоднородное адаптивное обучение, SRA, ассоциированное ОДУ

Во всех классах структурно неоднородных линейных моделей с ожиданиями, рассмотренными выше, предполагается, что агенты используют адаптивную процедуру обучения для формирования и обновления своих функций прогноза. Они используют так называемое неоднородное смешанное RLS/SG обучение, когда часть агентов $h = 1, \dots, S_0$ использует RLS алгоритм обучения, в то время как другие $h = S_0 + 1, \dots, S$ используют обучение по методу SG.

Из-за разной датировки времени формирования ожиданий и соответствующих различий в алгоритмах обновления параметров убеждений, удобно рассмотреть адаптивное обучение и соответствующие SRA для классов моделей, сгруппированных по датировке ожиданий: для моделей с $t-1$ -датировкой ожиданий (Модель I и Модель II) и для моделей с t -датировкой ожиданий (Модель III и Модель IV). Формальная запись алгоритмов обучения в этих классах моделей может быть представлена следующим образом.

Для моделей с $t-1$ -датировкой ожиданий (Модели I и II):

$$\begin{aligned} \text{(RLS)} \quad h = 1, \dots, S_0 \quad \Phi_{h,t+1} &= \Phi_{h,t} + \alpha_{h,t+1} R_{h,t+1}^{-1} z_t (y_{t+1} - \Phi'_{h,t} z_t), \\ R_{h,t+1} &= R_{h,t} + \alpha_{h,t+1} (z_t z'_t - R_{h,t}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{(SG)} \quad h = S_0 + 1, \dots, S \quad \Phi_{h,t+1} = \Phi_{h,t} + \alpha_{h,t+1} z_t (y_{t+1} - \Phi'_{h,t} z_t), \quad (8)$$

где $z'_t = (1, w'_t)$.

Для моделей с t -датировкой ожиданий (Модели III и IV):

$$\begin{aligned} \text{(RLS)} \quad h = 1, \dots, S_0 \quad \Phi_{h,t+1} &= \Phi_{h,t} + \alpha_{h,t+1} R_{h,t+1}^{-1} z_t (y_t - \Phi'_{h,t} z_t), \\ R_{h,t+1} &= R_{h,t} + \alpha_{h,t+1} (z_t z'_t - R_{h,t}) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{(SG)} \quad h = S_0 + 1, \dots, S \quad \Phi_{h,t+1} = \Phi_{h,t} + \alpha_{h,t+1} z_t (y_t - \Phi'_{h,t} z_t) \quad (10)$$

где $z'_t = (1, y'_t, w'_t)$ (Модель III), $z'_t = (1, y'_{t-1}, w'_t)$ (Модель IV).

Неоднородность в обучении проявляется в виде разных типов алгоритмов обучения, используемых агентами (RLS и SG), различного начального восприятия (представленного начальными значениями для алгоритмов обучения для каждого агента) и разных долей агентов, использующих алгоритм обучения определенного типа. Разные скорости реагирования на новую информацию (или разные степени реагирования на функцию обновления) представлены в виде разных степеней инерции $\delta_h > 0$, которые в формулировке Гианитсару [2] являются постоянными коэффициентами перед детерминистической убывающей положительной последовательностью коэффициентов приращения в алгоритме обучения α_t , которая является общей для всех агентов, $\delta_h: \alpha_{h,t} = \delta_h \alpha_t, \forall h$, и удовлетворяет следующим обычным условиям.

Предположение А $\sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t = \infty$ и $\sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t^2 < \infty$ и $\limsup_{t \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{\alpha_{t+1}} \right) - \left(\frac{1}{\alpha_t} \right) \right] < \infty$

Предполагается, что эти условия на α_t всегда выполняются, чтобы гарантировать сходимость к REE модели при адаптивном обучении, записанной в форме стохастического рекур-

сивного алгоритма (SRA). Все классы моделей, рассматриваемых в данной статье (также как и большинство экономических моделей с адаптивным обучением), можно записать в стандартной форме SRA, свойства сходимости которого можно изучить при помощи методов теории стохастической аппроксимации, представленных в работе [10] и адаптированных для экономических (в частности, линейных) моделей с адаптивным обучением, как, например, у Эванса и Хонкапойи [9; 11]. Согласно этому подходу большинство линейных экономических моделей с адаптивным обучением может быть записано в форме SRA, которая имеет следующее представление:

$$\theta_t = \theta_{t-1} + \alpha_t H(\theta_{t-1}, X_t) + \alpha_t^2 \rho_t(\theta_{t-1}, X_t), \quad (11)$$

$$X_t = A(\theta_{t-1})X_{t-1} + B(\theta_{t-1})W_t, \quad (12)$$

где θ_t – вектор рекурсивно обновляемых параметров (называемых убеждениями), который в типичных алгоритмах адаптивного обучения (RLS, SG) включает в себя коэффициенты регрессии и элементы матрицы вторых моментов. Второе уравнение (12) дает закон движения переменной состояния в модели, W_t – случайная переменная шока.

При определенных условиях регулярности на $H(\theta_{t-1}, X_t)$ и $\rho_t(\theta_{t-1}, X_t)$, при выполнении Предположения А для α_t и предположений о свойствах закона движения переменной состояния (11) (описываемых у Эванса и Хонкапойи [9. С. 124–125] и у Эванса и Хонкапойи [11. С. 26–27], условия сходимости θ_t к равновесию $\bar{\theta}$ (в качестве которого в этом случае рассматривается MSV REE) определяются условиями стабильности ассоциированного ОДУ:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = h(\theta), \quad (13)$$

где $h(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} EH(\theta_t, X_t(\theta))$.

После записывания модели в стандартной форме SRA и получения ассоциированного ОДУ (13) можно начинать использовать свойства локальной стабильности этого ОДУ в качестве свойства локальной стабильности при обучении равновесия модели (в данном случае MSV REE).

Стабильность MSV REE при смешанном RLS/SG обучении для всех классов моделей определяется стабильностью соответствующего ассоциированного ОДУ – мы определяем его как **HE-стабильность**:

$$\frac{d\Phi_h}{d\tau} = \delta_h (T(\Phi) - \Phi_h), \quad h = 1, \dots, S_0 \quad (14)$$

$$\frac{d\Phi_h}{d\tau} = \delta_h M_z (T(\Phi) - \Phi_h), \quad h = S_0 + 1, \dots, S \quad (15)$$

где $T(\Phi)$ – отображение из параметров PLM в параметры ALM; $M_z = \lim_{t \rightarrow \infty} E z_t z_t'$ – матрица вторых моментов z_t . Этот результат есть распространение результата Хонкапойи и Митры [3] на все классы моделей³.

Общие критерии и достаточные условия HE- и δ -стабильности.

Следующим шагом анализа является получение первых производных от T -отображений, чтобы составить Якобианы для правых частей ассоциированных ОДУ (14) и (15). Используя

³ Формальное доказательство результата см. в [12, Прил. А.7.1, А.7.2].

их, мы выводим общие критерии стабильности при смешанном RLS/SG обучении (аналогично Хонкапойе и Митре [3, глр. 5]) для всех классов моделей.

Критерий 1. Критерий *HE*-стабильности для моделей без лагов (Моделей I и III) при смешанном RLS/SG обучении. В экономиках (3) и (2) (Модель I) и (5) и (2) (Модель III) смешанное RLS/SG обучение (7), (8) (Модель I) и (9), (10) (Модель III) глобально сходится (почти наверное) к решению с минимальной переменной состояния (MSV REE), тогда и только тогда, когда действительные части собственных чисел соответствующих матриц $D_1\Omega$ и $D_w\Omega_F$ являются отрицательными, где

$$D_1 = \text{diag}(\delta_1 I_n, \dots, \delta_S I_n) \quad D_w = \text{diag}(D_{w1}, \dots, D_{wS}) \quad (16)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} A_0^1 + A_1^1 + \dots + A_\tau^1 - I_n & \dots & A_0^S + A_1^S + \dots + A_\tau^S \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_0^1 + A_1^1 + \dots + A_\tau^1 & \dots & A_0^S + A_1^S + \dots + A_\tau^S - I_n \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\Omega_F = \begin{pmatrix} F'^\tau \otimes A_\tau^1 + \dots + F' \otimes A_1^1 + I_k \otimes A_0^1 - I_{nk} & \dots & F'^\tau \otimes A_\tau^S + \dots + F' \otimes A_1^S + I_k \otimes A_0^S \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F'^\tau \otimes A_\tau^1 + \dots + F' \otimes A_1^1 + I_k \otimes A_0^1 & \dots & F'^\tau \otimes A_\tau^S + \dots + F' \otimes A_1^S + I_k \otimes A_0^S - I_{nk} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$D_{wh} = \delta_h I_{nk}, \quad \overline{h=1, S_0}, \quad D_{wh} = \delta_h (M_w \otimes I_n), \quad \overline{h=S_0+1, S}, \quad (19)$$

причем $A_0^h \equiv 0$ для Модели III.

Доказательство. Ассоциированное ОДУ для SRA Моделей I и III задается (14) и (15), где $T(\Phi)$, $\Phi'_t = (\Phi'_{1,t}, \dots, \Phi'_{S,t})$, $\Phi'_{h,t-1} = (a_{h,t-1}, b_{h,t-1})$ – отображение из параметров PLM в параметры ALM, имеет вид для Модели I

$$T(\Phi_t) = \begin{bmatrix} \left[\alpha + \sum_{h=1}^S A_0^h a_{h,t} + \sum_{h=1}^S A_1^h a_{h,t} + \dots + \sum_{h=1}^S A_\tau^h a_{h,t} \right]' \\ \left[\left(\sum_{h=1}^S A_0^h b_{h,t} \right) + \left(\sum_{h=1}^S A_1^h b_{h,t} \right) F + \dots + \left(\sum_{h=1}^S A_\tau^h b_{h,t} \right) F^\tau + BF \right]' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T_a(\Phi_t) \\ T_b(\Phi_t) \end{bmatrix},$$

для Модели III

$$T(\Phi_t) = \begin{bmatrix} \left[\alpha + \sum_{h=1}^S (A_1^h a_{h,t} + \dots + A_\tau^h a_{h,t}) \right]' \\ \left[\left(\sum_{h=1}^S A_1^h b_{h,t} \right) F + \dots + \left(\sum_{h=1}^S A_\tau^h b_{h,t} \right) F^\tau + B \right]' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T_a(\Phi_t) \\ T_b(\Phi_t) \end{bmatrix}.$$

Утверждение в критерии 1 следует из анализа блочной структуры Якобиана, соответствующего этому ассоциированному ОДУ, распадающегося на два несвязанных матричных блока⁴. □

Критерий 2. Критерий *HE*-стабильности для моделей с лагами эндогенной переменной (Модели II и IV) при смешанном RLS/SG обучении. В экономиках (4) и (2) (Модель II) и (6) и (2) (Модель IV), у которых все корни решения MSV REE $\bar{b}$, определяемой в (20) лежат внутри единичного круга, смешанное RLS/SG обучение (7), (8) (Модель II) и (9), (10) (Модель IV) глобально сходится (почти наверное) к решению с минимальной переменной со-

⁴ Детали см. в [12. Прилож. А.7.3., А.7.8].

стояния (MSV REE), тогда и только тогда, когда действительные части собственных чисел соответствующих матриц $D_{1zw}\Omega_{1bF}$ являются отрицательными, где

$$D_{1yw} = \text{diag}(D_{1yw1}, \dots, D_{1ywS}),$$

$$D_{1ywh} = \delta_h I_{n+n^2+nk}, \quad \overline{h=1, S_0}, \quad D_{1ywh} = \delta_h (M_{1yw} \otimes I_n), \quad \overline{h=S_0+1, S},$$

$$\Omega_{1bF} = \begin{pmatrix} R^1 - I_{n+n^2+nk} & R^1 & \cdots & R^1 \\ R^2 & R^2 - I_{n+n^2+nk} & \cdots & R^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R^S & R^S & \cdots & R^S - I_{n+n^2+nk} \end{pmatrix},$$

$$R^h = \begin{pmatrix} A_1^h + (A_0^h + A_1^h \bar{b}) & \bar{a}' \otimes A_1^h & 0 \\ 0 & \bar{b}' \otimes A_1^h + I_n \otimes (A_0^h + A_1^h \bar{b}) & 0 \\ 0 & \bar{c}' \otimes A_1^h & F' \otimes A_1^h + I_k \otimes (A_0^h + A_1^h \bar{b}) \end{pmatrix},$$

$$L + \left(\sum_{h=1}^S A_0^h \right) \bar{b} + \left(\sum_{h=1}^S A_1^h \right) \bar{b}^2 = \bar{b}, \quad (20)$$

причем $A_0^h \equiv 0$ для Модели IV.

Доказательство. Ассоциированное ОДУ для SRA Моделей II и IV задается (14) и (15), где $T(\Phi)$, $\Phi'_t = (\Phi'_{1,t}, \dots, \Phi'_{S,t})$, $\Phi'_{h,t-1} = (a_{h,t-1}, b_{h,t-1}, c_{h,t-1})$ - отображение из параметров PLM в параметры ALM, имеет вид для Модели II

$$T(\Phi_t) = \begin{bmatrix} \left[\alpha + \sum_{h=1}^S A_0^h a_{h,t} + \sum_{h=1}^S A_1^h a_{h,t} + \sum_{h=1}^S A_1^h b_{h,t} a_{h,t} \right]' \\ \left[L + \left(\sum_{h=1}^S A_0^h b_{h,t} \right) + \left(\sum_{h=1}^S A_1^h b_{h,t}^2 \right) \right]' \\ \left[\left(\sum_{h=1}^S A_0^h c_{h,t} \right) + \left(\sum_{h=1}^S A_1^h b_{h,t} c_{h,t} \right) + \left(\sum_{h=1}^S A_1^h c_{h,t} F \right) + BF \right]' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T_a(\Phi_t) \\ T_b(\Phi_t) \\ T_c(\Phi_t) \end{bmatrix},$$

для Модели IV

$$T(\Phi_t) = \begin{bmatrix} \left[\alpha + \sum_{h=1}^S A_1^h (I_n + b_{h,t}) a_{h,t} \right]' \\ \left[L + \left(\sum_{h=1}^S A_1^h b_{h,t}^2 \right) \right]' \\ \left[\left(\sum_{h=1}^S A_1^h b_{h,t} c_{h,t} \right) + \left(\sum_{h=1}^S A_1^h c_{h,t} F \right) + B \right]' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T_a(\Phi_t) \\ T_b(\Phi_t) \\ T_c(\Phi_t) \end{bmatrix}.$$

MSV REE Моделей II и IV может быть получено из системы уравнений (после приравнивания коэффициентов PLM и ALM), что дает выражение (20), причем $A_0^h \equiv 0$ для Моде-

ли IV. Якобиан, соответствующий этому ассоциированному ОДУ, совпадает с указанным в критерии 2⁵.

Заметьте, что необходимые и достаточные условия в критериях 1 и 2 записаны в виде смеси структурной неоднородности и неоднородности при обучении. Для того чтобы иметь возможность записать экономически значимые условия в терминах только структурной неоднородности, необходимо рассмотреть некоторые упрощения общей постановки. В качестве подобных упрощений рассматриваются Модели II и IV с только RLS неоднородным обучением и модели с диагональной структурой процесса для шоков (Модели I, III – при общем смешанном RLS/SG обучении, Модели II, IV – при неоднородном RLS обучении). Полученные нами условия стабильности можно сформулировать в виде следующих утверждений.

Следствие 3. Достаточные условия HE-стабильности для моделей с лагами (II, IV) при неоднородном RLS обучении. В экономиках (4) и (2) (Модель II) и (6) и (2) (Модель IV), у которых все корни решения MSV REE $\bar{b}$, определяемой в (20), лежат внутри единичного круга, неоднородное RLS обучение (7), (8) (Модель II) и (9), (10) (Модель IV) сходится (почти наверное) к решению с минимальным числом переменных состояния (MSV REE), если действительные части собственных чисел соответствующих матриц $D_1\Omega$, $D_y\Omega_b$, $D_w\Omega_F$ (ниже) являются отрицательными

$$D_1 = \text{diag}(\delta_1 I_n, \dots, \delta_S I_n) \quad D_y = \text{diag}(\delta_1 I_{n^2}, \dots, \delta_S I_{n^2}) \quad D_w = \text{diag}(\delta_1 I_{nk}, \dots, \delta_S I_{nk}) \quad (21)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} A_0^1 + A_1^1 + A_1^1 \bar{b} - I_n & \cdots & A_0^S + A_1^S + A_1^S \bar{b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_0^1 + A_1^1 + A_1^1 \bar{b} & \cdots & A_0^S + A_1^S + A_1^S \bar{b} - I_n \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\Omega_b = \begin{pmatrix} \bar{b}' \otimes A_1^1 + I_n \otimes (A_0^1 + A_1^1 \bar{b}) - I_{n^2} & \cdots & \bar{b}' \otimes A_1^S + I_n \otimes (A_0^S + A_1^S \bar{b}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{b}' \otimes A_1^1 + I_n \otimes (A_0^1 + A_1^1 \bar{b}) & \cdots & \bar{b}' \otimes A_1^S + I_n \otimes (A_0^S + A_1^S \bar{b}) - I_{n^2} \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\Omega_F = \begin{pmatrix} F' \otimes A_1^1 + I_k \otimes (A_0^h + A_1^h \bar{b}) - I_{nk} & \cdots & F' \otimes A_1^S + I_k \otimes (A_0^S + A_1^S \bar{b}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F' \otimes A_1^1 + I_k \otimes (A_0^h + A_1^h \bar{b}) & \cdots & F' \otimes A_1^S + I_k \otimes (A_0^S + A_1^S \bar{b}) - I_{nk} \end{pmatrix} \quad (24)$$

причем $A_0^h \equiv 0$ для Модели IV.

Доказательство. Из доказательства критерия 2 следует, что стабильность MSV REE Модели II и IV определяется стабильностью Якобиана в критерии 2. Ясно, что, поскольку часть, отвечающая за стабильность для b , не зависит от a и c , можно потребовать, чтобы эта часть была стабильной. Это будет означать, что b сходится к $\bar{b}$: и, учитывая эту сходимости, сходимости для a и c обеспечивается оставшимися «собственными» подсистемами Якобиана для a и c соответственно. Это дает достаточные условия следствия 3⁶. □

Еще одним упрощением, которое можно использовать для получения экономически значимых условий, представленных в терминах только структурной неоднородности, является предположение о диагональной структуре процесса для шоков, когда

$$F = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_k), \quad M_w = \lim_{t \rightarrow \infty} E w_t w_t' = \text{diag} \left(\frac{\sigma_1^2}{1 - \rho_1^2}, \dots, \frac{\sigma_k^2}{1 - \rho_k^2} \right) \quad (25)$$

⁵ Детали см. в [12, Прилож. А.7.4., А.7.9].

⁶ Детали см. в [12, Прилож. А.7.5, А.7.10].

Критерий 4. Критерий стабильности ((сильной) δ -стабильности) для моделей без лагов (Модели I, III) при смешанном RLS/SG обучении для случая диагональной среды при любых (возможно, различных) степенях инерции агентов, $\delta > 0$). В структурно неоднородных экономиках (3), (2) и (25) (Модель I) и (5), (2) и (25) (Модель III) смешанное RLS/SG обучение (7), (8) (Модель I) и (9), (10) (Модель III) сходится глобально (почти наверное) к решению MSV REE для любых (возможно различных) степеней инерции агентов, $\delta > 0$, тогда и только тогда когда матрицы $D_l \Omega_{\rho_l}$ стабильны для любого $\delta > 0$, где

$$D_l = \text{diag}(\delta_l I_n, \dots, \delta_S I_n),$$

$$\Omega_{\rho_l} = \begin{pmatrix} A_0^l + \rho_l A_1^l + \dots + \rho_l^T A_t^l - I_n & \cdots & A_0^S + \rho_l A_1^S + \dots + \rho_l^T A_t^S \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_0^l + \rho_l A_1^l + \dots + \rho_l^T A_t^l & \cdots & A_0^S + \rho_l A_1^S + \dots + \rho_l^T A_t^S - I_n \end{pmatrix},$$

$$\forall l = 0, \dots, k, (\rho_0 = 1),$$

причем $A_0^h \equiv 0$ для Модели III.

Доказательство. По критерию 1 нужно рассмотреть условия стабильности для любых положительных $\delta_1, \dots, \delta_S$ матриц $D_l \Omega$ и $D_w \Omega_F$, заданных в (16)–(19). Блочная диагональность матриц F и M_w в (25) приводит к тому, что анализ стабильности $D_w \Omega_F$ можно разбить на анализ стабильности несвязанных матричных блоков, что и дает утверждение критерия 4⁷. □

Добавление в Модели II и IV с неоднородным RLS-обучением «диагональной» среды для шоков позволяет далее упростить условия стабильности в виде следующего утверждения.

Утверждение 5. Достаточные условия ((слабой) δ -стабильности) стабильности моделей с лагами (II и IV) при неоднородном RLS-обучении для случая диагонального процесса для шоков при любых (возможно, различных) степенях инерции агентов, $\delta > 0$. В структурно неоднородных экономиках (4) (2) и (25) (Модель II) и (6) и (2) и (25) (Модель IV), у которых все корни решения MSV REE $\bar{b}$, определяемой в (20), лежат внутри единичного круга, неоднородное RLS обучение (7), (8) (Модель II) и (9), (10) (Модель IV) сходится (почти наверное) к решению MSV REE для любых (возможно различных) степеней инерции агентов, $\delta > 0$, если матрицы $D_l \Omega_{\rho_l}$, $D_y \Omega_b$ стабильны для любого $\delta > 0$, где

$$D_l = \text{diag}(\delta_l I_n, \dots, \delta_S I_n), D_y = \text{diag}(\delta_l I_{n^2}, \dots, \delta_S I_{n^2}),$$

$$\Omega_{\rho_l} = \begin{pmatrix} A_0^l + \rho_l A_1^l + A_1^l \bar{b} - I_n & \cdots & A_0^S + \rho_l A_1^S + A_1^S \bar{b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_0^l + \rho_l A_1^l + A_1^l \bar{b} & \cdots & A_0^S + \rho_l A_1^S + A_1^S \bar{b} - I_n \end{pmatrix},$$

$$\forall l = 0, \dots, k, (\rho_0 = 1),$$

$$\Omega_b = \begin{pmatrix} \bar{b}' \otimes A_1^l + I_n \otimes (A_0^l + A_1^l \bar{b}) - I_{n^2} & \cdots & \bar{b}' \otimes A_1^S + I_n \otimes (A_0^S + A_1^S \bar{b}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{b}' \otimes A_1^l + I_n \otimes (A_0^l + A_1^l \bar{b}) & \cdots & \bar{b}' \otimes A_1^S + I_n \otimes (A_0^S + A_1^S \bar{b}) - I_{n^2} \end{pmatrix},$$

причем $A_0^h \equiv 0$ для Модели IV.

Доказательство. По следствию 3 нужно рассмотреть условия стабильности для любых положительных $\delta_1, \dots, \delta_S$ матриц $D_l \Omega$, $D_y \Omega_b$ и $D_w \Omega_F$, заданных в (21), (22), (23), (24). Блоч-

⁷ Детали см. в [12. Прилож. А.7.6, А.7.11].

ная диагональность матриц F и M_w в (25) приводит к тому, что анализ стабильности $D_w \Omega_F$ можно разбить на анализ стабильности несвязанных матричных блоков, аналогично доказательству утверждения критерия 4, в котором нужно заменить A_0^h на $A_0^h + A_1^h \bar{b}$ и установить $A_i^h \equiv 0$, $i > 1$ (причем $A_0^h \equiv 0$ для Модели IV)⁸. $\square$

**Критерий HE-стабильности для всех классов моделей
при смешанном RLS/SG обучении с равными степенями инерции агентов
для каждого типа обучения**

Также можно заметить, что критерии 1 и 2 HE-стабильности всех типов рассматриваемых моделей имеют одинаковое алгебраическое представление в виде неотрицательности действительных частей собственных чисел Якобианов $D_{KR} \Omega_{KR}$, где

$$D_{KR} = \text{diag}(\delta_1 I, \dots, \delta_S I),$$

$$\Omega_{KR} = \begin{pmatrix} (R^1 - I) & \dots & R^{S_0} & R^{S_0+1} & \dots & R^S \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R^1 & \dots & (R^{S_0} - I) & R^{S_0+1} & \dots & R^S \\ KR^1 & \dots & KR^{S_0} & (KR^{S_0+1} - K) & \dots & KR^S \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ KR^1 & \dots & KR^{S_0} & KR^{S_0+1} & \dots & (KR^S - K) \end{pmatrix},$$

где для моделей без лагов (Моделей I и III):

($A_0^h \equiv 0$ для Модели III)

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_w \end{pmatrix} \otimes I_n, \quad R^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F'^\tau \end{pmatrix} \otimes A_t^h + \dots + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F' \end{pmatrix} \otimes A_1^h + I_{k+1} \otimes A_0^h,$$

для моделей с лагом (Моделей II и IV):

($A_0^h \equiv 0$ для Модели IV)

$$K = M_{1yw} \otimes I_n, \quad M_{1yw} = \begin{pmatrix} M_{1y} & 0 \\ 0 & M_w \end{pmatrix},$$

$$R^h = \begin{pmatrix} A_1^h + (A_0^h + A_1^h \bar{b}) & \bar{a}' \otimes A_1^h & 0 \\ 0 & \bar{b}' \otimes A_1^h + I_n \otimes (A_0^h + A_1^h \bar{b}) & 0 \\ 0 & \bar{c}' \otimes A_1^h & F' \otimes A_1^h + I_k \otimes (A_0^h + A_1^h \bar{b}) \end{pmatrix}.$$

Используя это представление, можно получить критерий HE-стабильности для всех типов моделей в терминах средней экономики в случае $\delta_h = \delta, \forall h$. Этот результат достаточно сильный, поскольку он означает, что вопрос стабильности для огромного класса структурно неоднородных моделей может быть заменен вопросом стабильности только одного типа структурно неоднородной экономики с неоднородным обучением двух агентов. Этот критерий служит первоначальной проверкой возможности δ -стабильности в экономике, поскольку

⁸ Детали см. в [12. Прилож. А.7.7, А.7.12].

задает для нее очень общее необходимое условие. Если экономика не стабильна при равных δ , то она δ -нестабильна.

Критерий 6. Критерий *HE*-стабильности для всех классов моделей при смешанном RLS/SG обучении с равными степенями инерции агентов для каждого типа обучения. В структурно неоднородных экономиках (3) и (2) (Модель I) ((5) и (2) (Модель III)) или (4) и (2) (Модель II) ((6) и (2) Модель IV), в которой все корни $\bar{b}$, определенные в (20), лежат внутри единичного круга, смешанное RLS/SG обучение (7), (8) (Модели I, II) и (9), (10) (Модели III, IV) с равными степенями инерции агентов для каждого типа алгоритма обучения, $\delta_h = \delta^{RLS}, \forall h = 1, \dots, S_0, \delta_h = \delta^{SG}, \forall h = S_0 + 1, \dots, S$, сходится глобально (для Моделей I и III) или локально (для Моделей II и IV) (почти наверное) к MSV REE тогда и только тогда, когда REE является точкой локально асимптотической сходимости для соответствующей средней экономики (26) при смешанном RLS/SG обучении двух агентов с равными степенями инерции для каждого типа алгоритма обучения, δ^{RLS} для RLS и δ^{SG} для SG.

$$y_t = \alpha + \sum_{i=1}^d L_i y_{t-i} + \sum_{b=0}^m \sum_{f=b}^n \left(\sum_{h=1}^{S_0} A_{bf}^h \right) \hat{E}_{t-b}^{RLS} y_{t-b+f} + \sum_{b=0}^m \sum_{f=b}^n \left(\sum_{h=S_0+1}^S A_{bf}^h \right) \hat{E}_{t-b}^{SG} y_{t-b+f} + Bw_t + \zeta \varepsilon_t, A_{00}^h \equiv 0, \quad (26)$$

где агент с коэффициентами $A^{RLS} = \sum_{h=1}^{S_0} A_{bf}^h$ обучается по RLS, а агент с коэффициентами

$$A^{SG} = \sum_{h=S_0+1}^S A_{bf}^h \text{ обучается по SG.}$$

Доказательство. Характеристическое уравнение для собственных значений

$$\det(D_{KR} \Omega_{KR} - \mu I) = 0$$

при $\delta_h = \delta^{RLS} \quad \forall h = 1, \dots, S_0, \delta_h = \delta^{SG} \quad \forall h = S_0 + 1, \dots, S$ сводится к уравнению

$$\begin{vmatrix} \sum_{h=1}^{S_0} R^h - I - \frac{\mu}{\delta^{RLS}} I & \sum_{h=S_0+1}^S R^h \\ K \sum_{h=1}^{S_0} R^h & K \sum_{h=S_0+1}^S R^h - K - \frac{\mu}{\delta^{SG}} I \end{vmatrix} = 0,$$

которое является характеристическим уравнением на собственные числа, задающие условия стабильности соответствующей средней экономики при смешанном RLS/SG обучении двух агентов с равными степенями инерции для каждого типа алгоритма обучения, δ^{RLS} для RLS и δ^{SG} для SG)⁹. □

Заключение

В нашей статье мы расширяем результаты Хонкапойи и Митры [3] и Колужнова [4] и предоставляем общие критерии стабильности при неоднородном смешанном RLS/SG обучении для четырех классов рассматриваемых моделей: моделей без лагов и с лагами эндогенной переменной и с t - или $t-1$ -датировкой ожиданий. Мы также предоставляем условия для *HE*-стабильности и δ -стабильности для некоторых более простых случаев, таких как диа-

⁹ Детали см. в [12. Прилож. А.7.13].

гональная структура процесса для шоков, неоднородное *RLS* обучение и равные степени инерции для каждого типа алгоритма обучения.

Критерии и достаточные условия стабильности, полученные в данной статье, основываются на результатах общей теории стохастической аппроксимации и представлены в смешанных терминах как структурной неоднородности, так и неоднородности при обучении. Они позволяют нам в наших сопутствующих статьях получить достаточные и необходимые условия стабильности, не зависящие от неоднородности в обучении, представленные в терминах *E*-стабильности агрегированной экономики, основанные, главным образом, на подходе отрицательной доминантной диагонали, и результаты, основанные на альтернативном определении *D*-стабильности, и необходимые условия стабильности, основанные на подходе характеристического уравнения, представленные в терминах условий «одинакового знака», и *E*-стабильности подходящим образом определенной средней экономики и ее подэкономик.

Все результаты этой статьи могут быть обобщены следующим образом. Мы уточняем понятие δ -стабильности, выделяя сильную и слабую δ -стабильность и определяем *HE*-стабильность как стабильность при неоднородном обучении. Нами получены в терминах стабильности Якобианов для общего (возможно, недиагонального) процесса для шоков критерии *HE*-стабильности для всех классов рассматриваемых моделей при смешанном *RLS/SG* обучении; достаточные условия *HE*-стабильности для моделей с лагами (Модели II, IV) при неоднородном *RLS* обучении; для случая диагонального процесса шоков критерии (сильной) δ -стабильности для моделей без лагов (Модели I, III) при смешанном *RLS/SG* обучении и достаточные условия для (слабой) δ -стабильности для моделей с лагами (Модели II, IV) при неоднородном *RLS* обучении.

Также нами получен для общего (возможно, недиагонального) процесса шоков критерии *HE*-стабильности для всех классов рассматриваемых моделей при смешанном *RLS/SG* обучении с равными степенями инерции агентов в каждом типе обучения, представленный в терминах *HE*-стабильности средней экономики при смешанном *RLS/SG* обучении двух агентов.

Хотя для удобства изложения моделей с лагами мы рассмотрели модели с одним лагом и с одним вперед смотрящим ожиданием эндогенной переменной, результаты статьи легко распространяются на случай моделей с большим количеством лагов и ожиданий. Нерассмотренный случай вперед смотрящей модели с лагом, когда информационное множество включает текущее значение эндогенной переменной, которое используется для прогнозирования будущего значения этой переменной, явным образом подпадает под технические конструкции данной статьи с некоторыми модификациями и является вопросом нашего будущего исследования.

Фундаментальный характер принятого в статье подхода позволяет применять его результаты в подавляющем большинстве существующих и перспективных линейных и линеаризованных экономических моделей (включая оцененные модели *DSGE*) с адаптивным обучением экономических агентов.

Список литературы

1. **Sargent T. J.** Bounded Rationality in Macroeconomics. Oxford, Oxford University Press; New York, Clarendon Press, 1993.
2. **Giannitsarou Ch.** Heterogeneous learning. *Review of Economic Dynamics*, 2003, vol. 6, p. 885–906.
3. **Honkapohja S., Mitra K.** Learning stability in economies with heterogeneous agents. *Review of Economic Dynamics*, 2006, vol. 9 (2), p. 284–309.
4. **Колужнов Д. В.** Условия стабильности экономической динамики при неоднородном обучении экономических агентов // Вестник НГУ. Серия: Социально-экономические науки. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 70–81.
5. **Johnson C. R.** Sufficient conditions for D-stability. *Journal of Economic Theory*, 1974, vol. 9, p. 53–62.

6. **Колюжнов Д. В., Богомолова А. С.** Краткий обзор DSGE-моделирования // Инновационный потенциал экономики России: состояние и перспективы: Сб. науч. тр. / Отв. ред. А. В. Алексеев, Л. К. Казанцева; ИЭОПП СО РАН. Новосибирск, 2013. С. 298–318.
7. **Juillard M.** Dynare: A program for the resolution and simulation of dynamic models with forward variables through the use of relaxation algorithm. CEPREMAP, Couverture Orange, 9602, 1996.
8. **Slobodyan S., Wouters R.** Learning in an estimated medium-scale DSGE model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2012, vol. 36, p. 26–46.
9. **Evans G. W., Honkapohja S.** Learning and Expectations in Macroeconomics. Princeton, NJ, Princeton University Press, 2001.
10. **Benveniste A., Metivier M., Priouret P.** Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations. New York, Springer-Verlag, 1990.
11. **Evans G. W., Honkapohja S.** Economic dynamics with learning: New stability results. *Review of Economic Studies*, 1998, vol. 65, p. 23–44.
12. **Bogomolova A.** Essays in Heterogeneous Learning. Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy. Center for Economic Research and Graduate Education (CERGE-EI), 2014, <http://www.cerge-ei.cz/pdf/dissertations/2014-bogomolova.pdf>

References

1. **Sargent T. J.** Bounded Rationality in Macroeconomics. Oxford, Oxford University Press; New York, Clarendon Press, 1993.
2. **Giannitsarou Ch.** Heterogeneous learning. *Review of Economic Dynamics*, 2003, vol. 6, p. 885–906.
3. **Honkapohja S., Mitra K.** Learning stability in economies with heterogeneous agents. *Review of Economic Dynamics*, 2006, vol. 9 (2), p. 284–309.
4. **Kolyuzhnov D. V.** Conditions for stability of economic dynamics under heterogeneous learning of economic agents. *Vestnik NSU. Series: Social and Economics Sciences*, 2011, vol. 11, no. 1, p. 70–81. (in Russ.)
5. **Johnson C. R.** Sufficient conditions for D-stability. *Journal of Economic Theory*, 1974, vol. 9, p. 53–62.
6. **Kolyuzhnov D. V., Bogomolova A. S.** Short review of DSGE modeling. In: Innovative potential of economy of Russia: state and prospects. Novosibirsk, IEIE SB RAS Publ., 2013, p. 298–318. (in Russ.)
7. **Juillard M.** Dynare: A program for the resolution and simulation of dynamic models with forward variables through the use of relaxation algorithm. CEPREMAP, Couverture Orange, 9602, 1996.
8. **Slobodyan S., Wouters R.** Learning in an estimated medium-scale DSGE model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2012, vol. 36, p. 26–46.
9. **Evans G. W., Honkapohja S.** Learning and Expectations in Macroeconomics. Princeton, NJ, Princeton University Press, 2001.
10. **Benveniste A., Metivier M., Priouret P.** Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations. New York, Springer-Verlag, 1990.
11. **Evans G. W., Honkapohja S.** Economic dynamics with learning: New stability results. *Review of Economic Studies*, 1998, vol. 65, p. 23–44.
12. **Bogomolova A.** Essays in Heterogeneous Learning. Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy. Center for Economic Research and Graduate Education (CERGE-EI), 2014, <http://www.cerge-ei.cz/pdf/dissertations/2014-bogomolova.pdf>

Материал поступил в редколлегию
Received
01.10.2019

Сведения об авторах

Богомолова Анна Сергеевна, PhD, доцент, экономический факультет, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090, Россия)
anna.bogomolova@cerge-ei.cz
ORCID 0000-0002-3413-4061
ScopusID 56377538500

Колюжнов Дмитрий Васильевич, PhD, доцент, экономический факультет, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090, Россия); научный сотрудник, Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН (пр. Акад. Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090, Россия)
dima.kolyuzhnov@mail.ru
ORCID 0000-0003-4390-7289
ScopusID 55940049500

Information about the Authors

Anna S. Bogomolova, PhD (Economics), Associate Professor, Novosibirsk State University (1 Pirogov Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation)
anna.bogomolova@cerge-ei.cz
ORCID 0000-0002-3413-4061
ScopusID 56377538500

Dmitriy V. Kolyuzhnov, PhD (Economics), Associate Professor, Novosibirsk State University (1 Pirogov Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation); Researcher, Institute of Economics and Industrial Engineering SB RAS (17 Academician Lavrentiev Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation)
dima.kolyuzhnov@mail.ru
ORCID 0000-0003-4390-7289
ScopusID 55940049500