УДК 164.07

DOI 10.25205/2541-7517-2018-16-4-58-68

А. В. Бессонов

*Институт философии и права СО РАН
ул. Николаева, 8, Новосибирск, 630090, Россия*

trt@academ.org

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ АРИФМЕТИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕДИКАТА ОПРОВЕРЖИМОСТИ

Рассматриваются теоремы К. Гёделя о неполноте применительно к формальной арифметике Дедекинда – Пеано. С использованием предиката опровержимости строится формула, формально выражающая свою неопровержимость, и доказывается ее неразрешимость. Тем самым подтверждается истинность первой теоремы. В то же время, при подобном представлении недоказуемости заключение второй теоремы оказывается неверным. Это означает, что вторая теорема независима от первой, что дезавуирует общепринятое положение о неразрывной связи первой и второй теорем Гёделя о неполноте.

Ключевые слова: теоремы Гёделя, неразрешимость, предикат доказуемости, предикат опровержимости, программа Гильберта.

С момента опубликования знаменитых теорем К. Гёделя о неполноте [Gödel, 1931] не ослабевает интерес к ним со стороны ученых самых разных специальностей, от логики, математики и философии науки, до гносеологии, юриспруденции и даже теоретической социологии. В последнее особенно время интенсивно обсуждается вторая теорема о неполноте, прежде всего, в связи с вопросом о реализуемости выдвинутой Д. Гильбертом программы финитного обоснования математики (см. обзор: [Zach, 2006] и цитированная в нем литература ¹). В наших предыдущих работах мы дезавуировали основной вывод второй теоремы, что показало ошибочность до сих пор не изжитой ее оценки как неопровержимого

¹ Raatikainen P. Gödel's Incompleteness Theorems // The Stanford Encyclopedia of Philosophy. URL: <http://plato.stanford.edu/entries/goedel-incompleteness/> (дата обращения 20.01.2015).

свидетельства невозможности реализации гильбертовской программы (см.: [Бессонов, 2011; 2014; 2015а; 2016; 2017; Bessonov, 2015b; 2015c]).

Обе теоремы о неполноте обычно рассматриваются в неразрывной связи, поскольку Гёдель и практически все остальные исследователи доказывают вторую теорему как непосредственное следствие первой (см., например: [Gödel, 1931; Zach, 2006; Raatikainen, 2015; Мендельсон, 1976; Булос, Джеффри, 1994; Мадер, 1995]). Мы опровергнем это общепринятое положение. Для формального выражения рассуждений о (не) доказуемости, вместо предиката доказуемости мы используем предикат опровержимости, и в рамках такого аппарата докажем аналог первой теоремы о неполноте. При этом вывод второй теоремы о невозможности доказать в формальной арифметике ее собственную непротиворечивость окажется неверным.

Теоремы Гёделя мы рассматриваем относительно формальной арифметики Дедекинда – Пеано (РА) как наиболее интересной и популярной формальной системе (определение РА см., например: [Бессонов, 2014. С. 15–16]). Приведем необходимые определения и формулировки.

Теория *непротиворечива*, если в ней не может быть доказана какая-либо формула вместе со своим отрицанием или, что эквивалентно, если хотя бы одна формула теории недоказуема. Теория *ω -непротиворечива*, если в ней нет ни одной формулы $\Phi(x)$ с одной свободной переменной, для которой доказуемы все формулы из списка

$$\Phi(1), \Phi(2), \dots, \neg \forall x \Phi(x)$$

В *первой теореме Гёделя* о неполноте арифметики утверждается, что если РА ω -непротиворечива, то она неполна, т. е. в ней существует некоторая замкнутая формула («говорящая» о своей собственной недоказуемости) такая, что ни она, ни ее отрицание не доказуемы (такие формулы называются *неразрешимыми*). В соответствии со *второй теоремой Гёделя*, если РА непротиворечива, то в ней не доказуема формула, выражающая непротиворечивость РА.

Для доказательства своих теорем Гёдель кодирует язык РА и ее логику (гёделева нумерация), а также вводит понятие выразимости. Предикат $F(x_1, \dots, x_k)$, заданный на множестве натуральных чисел, называется *выразимым*, если в РА найдется формула $\Phi(x_1, \dots, x_k)$, такая что для любого набора натуральных чисел $(n_1, \dots, n_k)$ справедливы условия:

- I. Если $F(n_1, \dots, n_k)$ выполняется, то $\vdash \Phi(n_1, \dots, n_k)$.
- II. Если $F(n_1, \dots, n_k)$ не выполняется, то $\vdash \neg \Phi(n_1, \dots, n_k)$.

Здесь и далее $\vdash$ означает доказуемость в РА. Через n обозначается нумерал, соответствующий числу n . Чтобы избежать путаницы

с обычным словоупотреблением слова «выразимость», далее для введенного понятия будем использовать термин *G-выразимость*.

В доказательствах своих теорем Гёдель использует предикат *доказуемости* $\text{Prov}(x, y)$, который выполняется тогда и только тогда, когда x является гёделевым номером некоторой формулы, а y – гёделевым номером ее доказательства. Предикат $\text{Prov}(x, y)$ *G-выразим* в PA с помощью некоторой арифметической формулы $\text{Prov}(x, y)$. Для нас важно то, что Гёдель, как и другие исследователи, каких-либо иных, не использующих предикат доказуемости, способов *G-выражения* рассуждений о (не)доказуемости, вообще не рассматривают. А есть ли таковые? И если есть, что будет с теоремами о неполноте при альтернативных способах *G-выражения*?

Рассмотрим предикат *опровержимости* (*фальсифицируемости*) $\text{Fals}(x, y)$, который выполняется тогда и только тогда, когда x является гёделевым номером некоторой формулы $F(x)$ с одной свободной переменной, а y – гёделевым номером доказательства $\neg F(n)$, т. е. номером доказательства отрицания формулы, полученной из $F(x)$ подстановкой числа n на место переменной x .

Этот предикат разрешим. Опишем его разрешающий алгоритм. Выберем пару натуральных чисел (l, k) и проверим, является ли l гёделевым номером какой-либо формулы, а k – гёделевым номером какого-либо доказательства. Если это неверно, то предикатное выражение $\text{Fals}(l, k)$ ложно по определению предиката. Если это верно, то восстановим по номеру l формулу $F(x)$, сделаем подстановку числа n на место переменной x и возьмем отрицание полученной формулы. Затем по номеру k восстановим соответствующее доказательство. Доказательство представляет собой последовательность формул. Рассмотрим заключительную формулу этой последовательности и сравним ее с $\neg F(n)$. Если эти две формулы совпадают, то $\text{Fals}(l, k)$ истинно, а если нет – ложно.

Поскольку предикат $\text{Fals}(l, k)$ разрешим, он *G-выразим* в PA (см.: [Мендельсон, 1976. С. 158]) некоторой арифметической формулой $\text{Fals}(x, y)$. Рассмотрим формулу

$$\forall y \neg \text{Fals}(x, y),$$

G-выражающую факт неопровержимости формулы с номером x , и обозначим ее через (1). Учитывая эквивалентность $A \leftrightarrow \neg \neg A$, вместо формулы (1) возьмем эквивалентную ей формулу

$$\neg \neg \forall y \neg \text{Fals}(x, y).$$

Она является отрицанием формулы $\neg\forall y \neg Fals(x, y)$, которую обозначим через (2). Пусть гёделев номер формулы (2) равен n . Сделаем подстановку $x = n$ в (1) и обозначим полученную формулу

$$\forall y \neg Fals(n, y)$$

через G . Покажем, что G неразрешима в PA при тех же условиях, которые Гёдель накладывает на PA в доказательстве своей первой теоремы.

Предположим, что формула G доказуема. Тогда, с учетом эквивалентности $A \leftrightarrow \neg\neg A$, доказуемой будет и формула $\neg\neg\forall y \neg Fals(n, y)$. Пусть гёделев номер вывода последней формулы равен k . Рассмотрим предикатное выражение

$$Fals(n, k).$$

Оно будет истинным, поскольку n в этом случае будет номером формулы (2), а k – номером вывода формулы $\neg\neg\forall y \neg Fals(n, y)$, т. е. отрицания формулы, полученной из (2) подстановкой нумерала n на место переменной x . Значит, по условию I G -выразимости формула $Fals(n, k)$ доказуема. Из нее по закону экзистенциального обобщения $F(t) \rightarrow \exists x F(x)$ выводим

$$\exists y Fals(n, y),$$

что эквивалентно $\neg\forall y \neg Fals(n, y)$. Получаем, что доказуема формула $\neg G$. Противоречие с предположением о непротиворечивости PA .

Пусть теперь формула $\neg G$ доказуема, т. е., доказуемо $\neg\forall y \neg Fals(n, y)$. Как мы уже показали, G не доказуема, т. е. ни одно число не может быть гёделевым номером вывода формулы $\forall y \neg Fals(n, y)$. Значит, ни одно число не может быть номером вывода формулы $\neg\neg\forall y \neg Fals(n, y)$, т. е. отрицания формулы, полученной из (2) подстановкой нумерала n (номера формулы (2)) на место переменной x . Вспомнив определение предиката $Fals(x, y)$, приходим к выводу, что все предикатные выражения

$$Fals(n, 1), Fals(n, 2), Fals(n, 3), \dots$$

ложны. Тогда из условия II G -выразимости следует, что доказуемы все формулы

$$\neg Fals(n, 1), \neg Fals(n, 2), \neg Fals(n, 3), \dots$$

По условию первой теоремы Гёделя, PA ω -непротиворечива. Значит, одновременно все формулы

$$\neg Fals(n, 1), \neg Fals(n, 2), \neg Fals(n, 3), \dots, \neg \forall y \neg Fals(n, y)$$

не могут быть доказаны. Следовательно, формула $\neg \forall y \neg Fals(n, y)$ не доказуема, т. е. недоказуема формула $\neg G$. Противоречие.

Заметим, что формула $\forall y \neg Fals(n, y)$ G -выражает свою собственную неопровержимость точно в том же смысле, в котором гёделева неразрешимая формула G -выражает свою собственную недоказуемость. Таким образом, в нашей формализации рассуждений о (не) доказуемости, формула, «говорящая» о своей неопровержимости, недоказуема. В гёделева же формализации доказуема формула, «говорящая» о своей собственной доказуемости (см., например: [Булос, Джеффри, 1994. С. 249]). Нетрудно понять, что при условии непротиворечивости PA , такая формула G -выражает и свою собственную неопровержимость.

Мы доказали, что формула G неразрешима в PA , т. е. PA неполна. Конечно, приведенное нами доказательство математически банально и отличается от обычных «школьных» доказательств (см., например: [Мадер, 1995. С. 361–362]) лишь тем, что в нем вместо предиката доказуемости используется предикат опровержимости. Установить неразрешимость формулы G можно было бы еще проще. Нетрудно понять, что это прямо следует из первой теоремы о неполноте в гёделева формализации. Мы намеренно не допускали в нашем доказательстве какие-либо упоминания предиката доказуемости, как будто его вообще нет. Но точно так же поступает Гёдель, когда в своих доказательствах он вообще не рассматривает отличные от предиката доказуемости средства формализации рассуждений о (не)доказуемости, как будто их вообще нет. Это странно, поскольку факт выбора Гёделем для построения неразрешимой формулы предиката доказуемости, а не какого-нибудь иного предиката, в общем-то случаен. Как мы убедились, с тем же успехом вместо предиката доказуемости можно было выбрать предикат опровержимости. Выбор предиката опровержимости был бы даже более естественным.

Действительно, возьмем формулу $\exists y Fals(x, y)$, G -выражающую опровержимость формулы с номером x , и предположим, что ее гёделев номер равен m . Подставив в нее m на место x , получим формулу

$$\exists y Fals(m, y),$$

которую обозначим буквой g . Докажем, что g неразрешима, если PA удовлетворяет условиям, аналогичным гёделевым.

Пусть $\mathfrak{h} \rightarrow g$, т. е. $\mathfrak{h} \rightarrow \exists y \text{ Fals}(\mathbf{m}, y)$. Тогда, если k – номер доказательства последней формулы, то по определению $\text{Fals}(\mathbf{m}, k)$ истинно, значит, доказуемо $\mathfrak{h} \text{ Fals}(\mathbf{m}, k)$, откуда $\mathfrak{h} \exists y \text{ Fals}(\mathbf{m}, y)$, т. е. $\mathfrak{h} g$. Противоречие.

Пусть $\mathfrak{h} g$. Уже установлено, что формула $\neg \exists y \text{ Fals}(\mathbf{m}, y)$ недоказуема, т. е. никакое натуральное число не может быть номером доказательства отрицания формулы, полученной из формулы с номером m при подстановке $x = \mathbf{m}$. Значит, ложны все предикатные выражения из списка

$$\text{Fals}(\mathbf{m}, 1), \text{Fals}(\mathbf{m}, 2), \text{Fals}(\mathbf{m}, 3), \dots,$$

т. е. доказуемы все формулы из списка

$$\neg \text{Fals}(\mathbf{m}, 1), \neg \text{Fals}(\mathbf{m}, 2), \neg \text{Fals}(\mathbf{m}, 3), \dots$$

Тогда по условию ω -непротиворечивости не может быть доказуемой формула $\neg \forall y \neg \text{Fals}(\mathbf{m}, y)$, которая эквивалентна $\exists y \text{ Fals}(\mathbf{m}, y)$, т. е. эквивалентна g . Таким образом, формула g не может быть доказана. Противоречие.

В итоге g , т. е. формула $\exists y \text{ Fals}(\mathbf{m}, y)$, неразрешима. Она построена путем подстановки на место x в формулу $\exists y \text{ Fals}(x, y)$ номера самой этой формулы, и поэтому «говорит» о своей собственной опровержимости аналогично тому, как гёделева формула «говорит» о своей собственной недоказуемости.

Известно, что Гёдель, доказывая первую теорему о неполноте, был мотивирован парадоксом лжеца (см., например: [Мадер, 1995. С. 358]). Но формула, «говорящая» о своей собственной опровержимости, т. е. о доказуемости своего отрицания, гораздо ближе по смыслу к парадоксальному «я лгу», нежели гёделева неразрешимая формула, «говорящая» о своей недоказуемости. И как мы убедились, неразрешимость формулы $\exists y \text{ Fals}(\mathbf{m}, y)$ устанавливается ничуть не сложнее неразрешимости гёделева формулы, построенной с помощью предиката доказуемости.

Казалось бы, нет никакой разницы в том, какие средства G -выразимости выбраны, если достигнут желаемый результат. На самом деле выбор предиката опровержимости вместо гёделева предиката доказуемости имел бы весьма нетривиальные философские следствия. Если первая теорема неполноты, как мы убедились, осталась бы в силе, то для второй теоремы это имело бы катастрофические последствия, поскольку построенная с использованием предиката опровержимости формула, G -выражающая непротиворечивость PA , элементарно доказуема.

Действительно, рассмотрим предикат опровержимости $\text{Fals}(x, y)$, который выполняется тогда и только тогда, когда x является гёделевым номером некоторой формулы, а y – гёделевым номером доказательства отрицания этой формулы. Этот предикат G-выразим в PA некоторой арифметической формулой

$$\text{Fals}(x, y),$$

посредством которой существование в PA недоказуемой формулы (что означает непротиворечивость PA) G-выражается формулой

$$\exists x \exists y \text{Fals}(x, y).$$

Последнее читается как «имеется формула, отрицание которой доказуемо в PA», что, в предположении о непротиворечивости PA, означает недоказуемость такой формулы. И мы доказали, что формула $\exists x \exists y \text{Fals}(x, y)$ доказуема в PA (см., например: [Бессонов, 2011. С. 184]).

Теперь мы вправе сделать вывод о том, что в основе хрестоматийного, воспринимаемого как религиозная догма утверждения «арифметика, если она непротиворечива, не может доказать собственную непротиворечивость», лежит случайное событие. Выбери Гёдель для доказательства своей первой теоремы о неполноте вместо предиката доказуемости предикат опровержимости, и никаких оснований для безоглядной веры в данное утверждение не было бы. Как не было бы (и на самом деле нет) никаких оснований для необозримого множества философских спекуляций вокруг этого заклинания. Действительно, Ю. Л. Ершов и В. В. Целищев утверждают: «Основанием для всех философских заключений служит простой факт: для любой адекватной формальной дедуктивной системы T , если T непротиворечива, тогда эта непротиворечивость выражима в T , но не доказуема в ней» [2012. С. 390]. Мы показали, что с использованием предиката опровержимости непротиворечивость и выражима, и доказуема в T . Поэтому нет никаких оснований и для до сих пор широко распространенных утверждений, подобных следующему: «...программа Гильберта была остановлена на своем пути второй теоремой Гёделя о неполноте» [In Memoriam, 2016. Р. 299].

Зачастую первая и вторая теоремы рассматриваются чуть ли не как логически эквивалентные. Приведем свидетельства: «Вторая теорема действительно является следствием первой» [Berto, 2009. Р. 51]. «Для обычных первопорядковых теорий арифметики и теории множеств первая теорема является легким следствием второй» [Bagaria, 2003. Р. 6]. И уж совсем экзальтированно философское: «Первая и вторая (теоремы. – А. Б.) являются двумя едиными эта-

нами восхождения к *математической истине*» [Антипенко, 2017. С. 211]. Мы доказали, что в действительности вторая теорема о неполноте независима от первой. Обратная ситуация, т. е. случай, когда вторая теорема верна, а первая – нет, скорее всего, невозможна. Если некоторая формула A G -выражает существование недоказуемой формулы в PA , то ее отрицание будет G -выражать доказуемость любой формулы PA . И если вторая теорема верна, т. е. A недоказуема, то ее отрицание также должно быть недоказуемым, поскольку в противном случае мы вступим в противоречие с условием непротиворечивости PA .

Список литературы

Антипенко Л. Г. Полемический отзыв на статью А. В. Бессонова «Предикатная зависимость второй теоремы Гёделя о неполноте» // Сиб. филос. журн. 2017. Т. 15, № 3. С. 208–217.

Бессонов А. В. К интерпретации теорем Гёделя о неполноте арифметики // Вестн. Томск. гос. ун-та. Серия: Философия. Социология. Политология. 2011. № 4. С. 177–189.

Бессонов А. В. О двух неверных догмах, связанных со второй теоремой Гёделя о неполноте. II // Философия науки. 2016. № 2 (69). С. 42–61.

Бессонов А. В. Предикатная зависимость второй теоремы Гёделя о неполноте // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Философия. 2015а. Т. 13, вып. 4. С. 5–14.

Бессонов А. В. О двух неверных догмах, связанных со второй теоремой Гёделя о неполноте. I // Философия науки. 2014. № 4 (63). С. 12–31.

Бессонов А. В. Что доказано и что не доказано во второй теореме Гёделя о неполноте арифметики // Сиб. филос. журн. 2017. Т. 15, № 3. С. 218–233.

Булос Дж., Джефффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994. 396 с.

Еришов Ю. Л., Целищев В. В. Алгоритмы и вычислимость в человеческом познании. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2012. 504 с.

Мадер В. В. Введение в методологию математики. М.: Интерпракс, 1995. 457 с.

Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976. 320 с.

Bagaria J. A Short Guide to Gödel's Second Incompleteness Theorem // Teorema: Revista Internacional de Filosofia. 2003. Vol. 22. No. 3. P. 5–15.

Berto F. There's Something about Gödel!: The Complete Guide to the Incompleteness Theorem. Singapore: Wiley-Blackwell, 2009. 233 p.

Bessonov A. V. Peano Arithmetic Can Well Prove Its Own Consistency // 15th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, CLMPS 2015, Logic Colloquium 2015, LC 2015, Book of abstracts (University of Helsinki, 3–8 August 2015). Helsinki, 2015b. P. 705–706.

Bessonov A. V. Gödel's Second Incompleteness Theorem Is Predicate Dependent // 15th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, CLMPS 2015, Logic Colloquium 2015, LC 2015, Book of abstracts (University of Helsinki, 3–8 August 2015). Helsinki, 2015c. P. 419–420.

Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I // Monatshefte für Mathematik und Physik. 1931. Bd. 38. S. 173–198.

In Memoriam: Georg Kreisel // The Bulletin of Symbolic Logic. 2016. Vol. 22. No. 2. P. 298–299.

Zach R. Hilbert's Program then and Now // Handbook of Philosophy of Science. Amsterdam: Elsevier, 2006. Vol. 5: Philosophy of Logic. P. 411–447.

Материал поступил в редколлегию 24.09.2018

A. V. Bessonov

*Institute of Philosophy and Law SB RAS
8 Nikolaev Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation*

trt@academ.org

ANALOG OF GÖDEL'S INCOMPLETENESS THEOREM USING A FALSIFIABILITY PREDICATE

K. Gödel's incompleteness theorems are considered in relation to the formal Dedekind–Peano arithmetic. A falsifiability predicate is used to construct a formula that formally expresses its own nonfalsifiability. And unsolvability of that formula is proved. This proves the incompleteness of formal arithmetic, that is, the conclusion of the first theorem is confirmed. At the same time, with this representation of (un)provability, the main conclusion of the second theorem turns out to be false. It follows that the second theorem is independent of the first, which denies the generally accepted statement about the inseparable connection between Gödel's first and second incompleteness theorems.

Keywords: Gödel's theorems, unsolvability, provability predicate, falsifiability predicate, Hilbert's program.

References

Antipenko L. G. Polemicheskii otzyv na stat'yu A.V. Bessonova «Predikatnaya zavisimost' vtoroi teoremy Gyedelya o nepolnote» [A polemic review of A. V. Bessonov's article «Gödel's second incompleteness theorem is predicate dependent»]. *The Siberian Journal of Philosophy*, 2017, no. 3, p. 208–217. (In Russ.)

Bagaria J. A Short Guide to Gödel's Second Incompleteness Theorem. *Teorema: Revista Internacional de Filosofia*, 2003, vol. 22, no. 3, p. 5–15.

Berto F. *There's Something about Gödel!: The Complete Guide to the Incompleteness Theorem*. Singapore, Wiley-Blackwell, 2009.

Bessonov A. V. Chto dokazano, i chto ne dokazano vo vtoroi teoreme Gödelya o nepolnote [What is proved and what is not proved in Gödel's second incompleteness theorem]. *The Siberian Journal of Philosophy*. 2017, vol. 15, no. 3, p. 208–217. (In Russ.)

Bessonov A. V. K interpretatsii teorem Gedelya o nepolnote arifmetiki [Toward an interpretation of Gödel's incompleteness theorems]. *Vestnik of Tomsk State University. Series: Philosophy, Sociology and Political Science*, 2011, no. 4, p. 177–189. (In Russ.)

Bessonov A. V. O dvukh nevernykh dogmakh, svyazannykh so vtoroi teoremoi Gödelya o nepolnote. I [Two false dogmas related with Gödel's second incompleteness theorem. I]. *Philosophy of Science*, 2014, no. 4 (63), p. 12–31. (In Russ.)

Bessonov A. V. O dvukh nevernykh dogmakh, svyazannykh so vtoroi teoremoi Gödelya o nepolnote. II [Two false dogmas related with Gödel's second incompleteness theorem. II]. *Philosophy of Science*, 2016, no. 2 (69), p. 42–61. (In Russ.)

Bessonov A. V. Peano arithmetic can well prove its own consistency. *15th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, CLMPS 2015, Logic Colloquium 2015, LC 2015, Book of abstracts* (University of Helsinki, 3–8 August 2015). Helsinki, 2015b, p. 705–706.

Bessonov A. V. Predikatnaya zavisimost' vtoroi teoremy Gödelya o nepolnote [Gödel's second incompleteness theorem is predicate dependent]. *Vestnik of Novosibirsk State University. Series: Philosophy*, 2015a, vol. 13, no. 4, p. 5–14. (In Russ.)

Bessonov A. V. Gödel's second incompleteness theorem is predicate dependent. *15th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*,

CLMPS 2015, Logic Colloquium 2015, LC 2015, Book of abstracts (University of Helsinki, 3–8 August 2015). Helsinki, 2015c, p. 419–420.

Boolos G., Jeffrey R. *Vychislmost' i logika* [*Computability and Logic*]. Moscow, Mir Publ., 1994. (In Russ.)

Ershov Yu. L., Tselishchev V. V. *Algoritmy i vychislmost v chelovecheskom poznanii* [*Algorithms and Computability in Human Cognition*]. Novosibirsk, SB RAS Publ. House, 2012. 504 p. (In Russ.)

Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1931, Bd. 38, S. 173–198.

In Memoriam: Georg Kreisel. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 2016, vol. 22, no. 2, p. 298–299.

Mader V. V. *Vvedenie v metodologiyu matematiki* [*Introduction to Methodology of Mathematics*]. Moscow, Interpraks Publ., 1995. (In Russ.)

Mendelson E. *Vvedenie v matematicheskuyu logiku* [*Introduction to Mathematical Logic*]. Moscow, Nauka, 1976. (In Russ.)

Zach R. Hilbert's Program Then and Now. *Handbook of Philosophy of Science*, Amsterdam, Elsevier, 2006, vol. 5: Philosophy of Logic, p. 411–447.