Андрей РИНЧИНО

A vertical photograph on the left side of the cover showing a harbor scene at dusk. Several ships are docked, and city lights are visible in the background under a colorful sky.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКУМ

Дальневосточный федеральный университет

А. Л. Ринчино

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКУМ

*Учебное пособие
для бакалавриата и специалитета*

Владивосток

2021

© ФГАОУ ВО ДВФУ, 2021
ISBN 978-5-7444-5159-2

УДК 512.6(075.8)
ББК 22.143я73
Р51

Рецензенты:

Б. Б. Дамдинов, доктор физико-математических наук,
профессор, Сибирский федеральный университет;
Е. Л. Ефремов, кандидат физико-математических наук,
Дальневосточный федеральный университет

Ринчино, А. Л. Линейная алгебра: теория и практикум : учебное пособие для бакалавриата и специалитета / А. Л. Ринчино. – Владивосток : Издательство Дальневосточного федерального университета, 2021. – 1 CD-ROM ; [305 с.]. – Загл. с титул. экр. – ISBN 978-5-7444-5159-2. – DOI <https://doi.org/10.24866/7444-5159-2>. – Текст. Изображения : электронные.

Пособие состоит из 9 разделов, в которых изложены основы матричной алгебры, теории систем линейных уравнений, линейных пространств и линейных операторов, введение в комплексные числа и многочлены. Материал каждой темы соответствует содержанию лекционного занятия. Все темы снабжены соответствующими практикумами, материал которых, в свою очередь, соответствует практическим (семинарским) занятиям. Всего приведено более 400 задач.

Предназначено для студентов бакалавриата и специалитета инженерно-технических направлений высших учебных заведений с расширенной математической подготовкой. Книга, несомненно, будет полезна студентам очных, заочных и вечерних форм обучения, преподавателям высших учебных заведений.

Текстовое электронное издание

Минимальные системные требования:
процессор с частотой 1,3 ГГц (Intel, AMD); оперативная память 256 МБ,
свободное место на винчестере 335 МБ; Windows (XP; Vista; 7 и т.п.)

Программное обеспечение:
Acrobat Reader, Foxit Reader либо любой другой их аналог

Дальневосточный федеральный университет
690922, Приморский край, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.
Тел./факс: 8 (423) 226-54-43
E-mail: dvfutip@yandex.ru, prudkoglyad.sa@dvfu.ru

Изготовитель CD-ROM:
Дальневосточный федеральный университет,
690922, Приморский край, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.

Подписано к использованию 29.12.2021 г.
Объем 4,80 Мб. Тираж 50 экз.

© ФГАОУ ВО ДВФУ, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Краткие справочные сведения	11
Тема 1.1. Матричная алгебра	19
1.1.1. Основные понятия	91
1.1.2. Действия над матрицами	32
1.1.3. Элементарные преобразования матриц	13
1.1.4. Столбцы и строки. Линейная зависимость и линейная независимость столбцов и строк	32
Практикум 1.1.....	37
Тема 1.2. Определители	45
1.2.1. Понятие определителя матрицы	45
1.2.2. Общее правило вычисления определителей	49
1.2.3. Свойства определителей	51
1.2.4. Вычисление определителя через минор и алгебраическое дополнение	52
1.2.5. Некоторые методы вычисления определителей произвольного порядка	58
Практикум 1.2	68
Тема 1.3. Обратная матрица. Ранг матрицы.....	77
1.3.1. Обратная матрица	77
1.3.2. Ранг матрицы	81
Практикум 1.3.....	89
Тема 1.4. Системы линейных уравнений	101
1.4.1. Основные понятия	101
1.4.2. Метод Крамера	107
1.4.3. Метод Гаусса	111
1.4.4. Матричный метод решения систем	118
1.4.5. Однородные системы линейных уравнений	120
Практикум 1.4.....	126
Тема 1.5. Собственные значения и собственные векторы	157
1.5.1. Основные понятия	157
1.5.2. Свойства собственных значений и собственных векторов	165
1.5.3. Линейные модели обмена	166
1.5.4. Модель международной торговли	170
Практикум 1.5.....	174
Тема 1.6. Линейные пространства	179
1.6.1. Понятие линейного пространства	179
1.6.2. Базис линейного пространства	185
1.6.3. Размерность линейного пространства	193
1.6.4. Преобразование координат при замене базиса	197
Практикум 1.6.....	205

Тема 1.7. Линейные операторы	213
1.7.1. Понятие линейного оператора и линейного преобразования	213
1.7.2. Ядро и дефект, образ и ранг линейного оператора	217
1.7.3. Матрица линейного оператора	219
1.7.4. Примеры линейных операторов и их матрицы	228
1.7.5. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к другому базису	237
Практикум 1.7.	242
Тема 1.8. Комплексные числа	251
1.8.1. Понятие комплексного числа. Алгебраическая форма	251
1.8.2. Геометрическое изображение, тригонометрическая форма записи комплексных чисел	254
1.8.3. Показательная форма записи комплексных чисел. Формула Эйлера	256
1.8.4. Сложение, вычитание, умножение, деление комплексных чисел ...	261
1.8.5. Действия в тригонометрической форме. Возведение в степень, извлечение корня	262
1.8.6. Комплексная динамика. Множества Жюлиа и Мандельброта	265
Практикум 1.8.	269
Тема 1.9. Многочлены и их корни.....	285
1.9.1. Основные понятия. Теорема Безу. Схема Горнера	285
1.9.2. Деление многочлена на многочлен	291
1.9.3. Основная теорема алгебры	293
1.9.4. Формулы Виета	296
Практикум 1.9	298
Литература	304

ВВЕДЕНИЕ

Жизнь и деятельность современного общества характеризуется неумолимо нарастающей сложностью протекающих процессов. Количественные данные, статистические сводки, разнообразные потоки информации постоянно охватывают нас со всех сторон, обрушиваются непрерывной хаотической волной. В таких непростых условиях не обойтись без современных математических технологий анализа, позволяющих определять складывающиеся тенденции и причинно-следственные связи, отделять главное от второстепенного, строить прогнозы, разрабатывать сценарии, находить адекватные ответы на вызовы времени, принимать выверенные и обоснованные решения.

В любой сфере деятельности принятие решений – одна из основных сторон деятельности как руководителя, так и простого работника: им постоянно приходится сталкиваться с необходимостью выбора путей и способов достижения намеченных целей. В относительно простых ситуациях решения принимаются на основе опыта, интуиции и здравого смысла. Однако в сложных обстоятельствах, когда функционирование объекта управления зависит от множества факторов, а достичь намеченных целей можно различными путями, не обойтись без всестороннего анализа проблемы, подкрепленного количественными оценками эффективности либо неэффективности принимаемых решений.

В этой связи фундаментальную математическую подготовку можно рассматривать не как желательный, но как совершенно необходимый, определяющий атрибут современного высококлассного специалиста.

Математические знания и навыки нужны практически во всех профессиях, прежде всего, конечно, в тех, что связаны с техникой и экономикой. Математика является языком естествознания и техники, этим языком выражаются все основные экономические и физические законы.

Сегодня несомненна необходимость применения математических знаний и математического мышления врачу (доказательная медицина полностью основана на методах математической статистики), лингвисту, финансисту, историку, инженеру-строителю и трудно оборвать этот список, настолько важно математическое образование для профессиональной деятельности в наше время. «В природе существует много такого, что не может быть ни достаточно глубоко понято, ни достаточно убедительно доказано, ни достаточно умело и надежно использовано на практике без помощи и вмешательства математики» (Френсис Бэкон).

Математика необходима не только в профессиональной деятельности, но и в повседневной жизни, следовательно, определенные математические навыки нужны каждому человеку. Действительно, нам часто приходится считать (например, деньги), мы постоянно используем (часто не замечая этого) знания о величинах, характеризующих протяженности, площади, объемы, промежутки времени, скорости и многое другое.

Идея доказательства, на которой основана вся математическая наука и математическая культура, — одна из самых нравственных и демократических идей. Математически культурными людьми, понимающими, что такое доказательство, невозможно манипулировать. «Доказательства математики, как алмазы, тверды и прозрачны» (Дж. Локк).

Что же такое математика?

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Социальные, технические, экономические природно-экологические и другие системы, изучаемые современной наукой, зачастую не поддаются исследованию простыми общетеоретическими методами. В этой связи приметой нашего времени является математизация научного знания. Уровень развития той или иной науки сейчас характеризуется степенью использования в ней математического аппарата. Это положение отражается в известном афоризме: *«Во всяком знании столько науки, сколько в нем математики»*.

Для изучения различных реальных явлений необходимо провести их формальное описание, т.е. создать соответствующую математическую модель. При математическом моделировании имеют дело уже не с самим явлением, а с некоторой «теоретической копией» его, выражающей в математической форме основные закономерности, которым она подчиняется. Эти закономерности, как правило, записываются в виде уравнений, которые характеризуют основные причинно-следственные связи и законы развития изучаемого объекта или явления.

Возможность замены исходного объекта его математической копией и дальнейшего диалога с ней таит в себе огромные возможности в областях принятия правильных решений и получения качественных надежных прогнозов.

Математические модели служат уникальным инструментом, позволяющим устанавливать причинно-следственные связи и согласовывать информацию различного содержания.

МЕТОД АНАЛИЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Математика обладает свойством опережать экспериментальные знания и позволяет нам силой мысли проникать в те уголки Вселенной, куда мы физически проникнуть не можем. Классический пример такого рода – это знаменитое открытие Нептуна на кончике пера. Вскоре после открытия Урана в конце XVIII века в движении этой планеты стали выявляться непонятные аномалии — она то «отставала» от расчётного положения, то опережала его. Было высказано предположение о том, что имеющиеся нарушения в траектории Урана можно объяснить, если предположить, что есть еще одна планета, доселе неизвестная. Из видимых с помощью телескопа нарушений движений Урана, с помощью сложных математических расчетов длиной в несколько лет удалось узнать, где могло бы двигаться новое небесное тело. Вычисления массы и орбиты новой планеты проводил французский математик Урбен Леверье. В 1846 году астрономы обнаружили новую планету в указанной Леверье точке небесной сферы.

Математика помогает узнать недостающие куски реальности. Это ярко выразилось в истории с электричеством и радиосвязью. К моменту открытия никто не знал слова «радиосвязь». К середине XIX века имелись некоторые физические законы, полученные экспериментально. Был математически выраженный закон Кулона, который говорил о том, как электрические заряды притягиваются, был закон Ампера – закон о магнитных и электрических полях – о том, какие магнитные поля создаются токами, потом появился закон Фарадея. Это были математические утверждения, которые существовали изолировано и более или менее сами по себе. Джеймс Максвелл задался целью найти, нет ли единого математического формализма, в котором все эти законы записывались бы однотипно и в некотором смысле равномерно. Максвелл сформулировал систему уравнений в дифференциальной форме, описывающих электромагнитное поле и его связь с электрическими зарядами и токами в вакууме и сплошных средах. Эти уравнения сыграли ключевую роль в развитии представлений теоретической физики и оказали сильное, зачастую решающее влияние не только на все области физики, непосредственно связанные с электромагнетизмом, но и на многие возникшие впоследствии фундаментальные теории, предмет которых не сводился к электромагнетизму (одним из ярчайших примеров здесь может служить специальная теория относительности).

МЕТОД ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Как известно, каждое решение, будь то политическое, экономическое, управленческое, должно быть научно обоснованным, только тогда оно становится по настоящему эффективным.

Без адекватных технологий анализа данных субъект оказывается беспомощным в жесткой информационной среде и скорее напоминает броуновскую частицу, испытывающую жесткие удары со стороны и не имеющую возможности рационально принимать решения. Например, расширение выпуска продукции на предприятии требует одновременного и взаимосвязанного решения множества частных проблем: реконструкции предприятия, заказа оборудования, сырья и

материалов, исследования рынка сбыта, совершенствования технологии производства, изменения системы оперативно-производственного планирования и диспетчирования, организационной перестройки, перемещения рабочей силы и руководящих кадров и т.д.

Решения в транспортно-логистической сфере состоят в решении проблем минимизации транспортных и складских расходов, оптимального управления транспортными ресурсами, управления запасами и др.

Невозможно представить себе принятие решений в страховом деле без всестороннего математико-статистического анализа возможных рисков.

Математические методы позволяют анализировать информацию, прогнозировать развитие и минимизировать риски при принятии решений, что позволяет строить любую деятельность на строго научной доказательной основе.

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ЯЗЫК НАУКИ

Математика является универсальным языком науки. Математический язык абстрактный, это язык описания природы, реальных ситуаций, язык научного естествознания. Достоинства математики как языка в простоте, компактности, одновременной ёмкости и содержательности. Математика – это искусственный язык, и с точки зрения структуры и содержания – самый совершенный и возвышенный из всех языков.

МАТЕМАТИКА В БИЗНЕСЕ

Сегодня деятельность в любой области экономики (управлении, финансово-кредитной сфере, маркетинге, учете, аудите) требует от специалиста применения современных методов работы, знания достижений мировой экономической мысли и понимания научного языка. Большинство экономических законов обличено в математическую форму, а основная часть новых методов анализа и прогнозирования экономических процессов основано на математических моделях, концепциях и приемах.

В условиях переходного периода в экономике России, высокой степени неустойчивости и неопределенности ее функционирования, математическое моделирование можно рассматривать как метод, направленный на предвидение и расчет отдаленных последствий принимаемых решений, позволяющий уточнять количественные оценки их параметров, формировать и оценивать их различные варианты, способствовать построению целостной и эффективной экономической политики.

Чтение современной экономической и технической литературы также предполагает хорошую математическую подготовку.

МЕТОД РАЗВИТИЯ СИСТЕМНОГО МЫШЛЕНИЯ

Еще одной важнейшей функции математики является развитие в человеке способностей понимать смысл поставленной перед ним задачи, умений правильно и логично рассуждать, навыков алгоритмического мышления. Математика учит анализировать, отличать гипотезу от факта, критиковать, формализовывать и схематизировать, отчетливо выражать свои мысли, развивать интуицию и воображение, тренирует способность предвидеть результат и предугадывать пути решения задачи.

Математика развивает системное мышление, которое, в свою очередь, позволяет видеть логику любого процесса, дает умение разлагать сложные задачи на составляющие и находить адекватные пути их решения.

КРАТКИЕ СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел
$\mathbb{N}_0$ – множество всех неотрицательных целых чисел
$\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел
$\mathbb{Q}$ – множество всех рациональных чисел
$\mathbb{R}$ – множество всех действительных (вещественных) чисел
$\mathbb{R}^+$ – множество всех положительных действительных чисел
$\mathbb{R}^2$ – числовая плоскость $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^3$ – числовое пространство $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^n$ – арифметическое векторное пространство размерности n
$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел
$\Rightarrow$ – следует (импликация); например, $A \Rightarrow \Omega$ – из «альфа» следует «омега»
$\Leftrightarrow$ – равносильно, эквивалентно, тогда и только тогда, необходимо и достаточно
$\stackrel{\text{def}}{=}$ – равно по определению
$D(f)$ – область определения – область допустимых значений аргумента функции f
$E(f)$ – множество (область) значений функции f
$[a; b]$ – замкнутый промежуток (отрезок) с началом a и концом b
$(a; b)$ – открытый промежуток (интервал) с началом a и концом b
const – постоянная величина
$[a]$ – целая часть числа a
$\{a\}$ – дробная часть числа a
$ a $ – абсолютная величина (модуль) числа a
$\in$ – принадлежит, содержится; например $x \in \mathbb{R}$ – x принадлежит множеству действительных чисел, то есть x является действительным числом
$\subset$ – включено (для множеств); например $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ – множество натуральных чисел включено во множество целых чисел

$n:m$ (для $n, m \in \mathbb{Z}$) – число n делится нацело на число m
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ – факториал числа n
$\forall$ – любой, каждый, все (квантор общности)
$\exists$ – существует, найдется, один из ... (квантор существования)
Σ – сумма; например $\sum_{i=1}^3 i = 1 + 2 + 3$
Π – произведение; например $\prod_{i=1}^3 i = 1 \cdot 2 \cdot 3$
∞ – бесконечность
$^\circ$ – градус; $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \approx 0,017453 \text{ рад}$.
' – минута
" – секунда
рад – радиан; $1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$
$\text{НОД}(n, m)$ – наибольший общий делитель чисел n и m
$\text{НОК}(n, m)$ – наименьшее общее кратное чисел n и m
$\pi \approx 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793$
$e \approx 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045$
$\sqrt{2} \approx 1,414\ 213\ 562\ 373$
$\sqrt{3} \approx 1,732\ 050\ 807\ 569$
i – мнимая единица; $i^2 = -1$
$\aleph_0$ – алеф ноль – мощность множества $\mathbb{N}$
$\times$ – декартово произведение множеств

2. ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

	Буква	Название		Буква	Название
1	Α α	альфа	13	Ν ν	ню
2	Β β	бета	14	Ξ ξ	кси
3	Γ γ	гамма	15	Ο ο	омикрон
4	Δ δ	дельта	16	Π π	пи
5	Ε ε	эпсилон	17	Ρ ρ	ро
6	Ζ ζ	дзета	18	Σ σ	сигма
7	Η η	эта	19	Τ τ	тау
8	Θ θ	тета	20	Υ υ	ипсилон
9	Ι ι	йота	21	Φ φ	фи
10	Κ κ	каппа	22	Χ χ	хи
11	Λ λ	ламбда	23	Ψ ψ	пси
12	Μ μ	мю	24	Ω ω	омега

3. ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

	Буква	Название		Буква	Название
1	A a	а	14	N n	эн
2	B b	бэ	15	O o	о
3	C c	цэ	16	P p	пэ
4	D d	дэ	17	Q q	ку
5	E e	е	18	R r	эр
6	F f	эф	19	S s	эс
7	G g	жэ	20	T t	тэ
8	H h	аш	21	U u	у
9	I i	и	22	V v	вэ
10	J j	жи	23	W w	дубль-вэ
11	K k	ка	24	X x	икс
12	L l	эль	25	Y y	игрек
13	M m	эм	26	Z z	зэт

4. ИМЕННЫЕ НАЗВАНИЯ СТЕПЕНЕЙ ТЫСЯЧИ

Название	Значение
тысяча	$10^3 = 1 \underbrace{000}_{3 \text{ нуля}}$
миллион	$10^6 = 1 \underbrace{000\ 000}_{6 \text{ нулей}}$
миллиард (биллион)	10^9
триллион	10^{12}
квадриллион	10^{15}
квинтиллион	10^{18}
секстиллион	10^{21}
септиллион	10^{24}
октиллион	10^{27}
нониллион	10^{30}
дециллион	10^{33}
гугол	$10^{100} = 1 \underbrace{000 \dots 000}_{100 \text{ нулей}}$
центиллион	$10^{600} = (10^6)^{100} = 1 \underbrace{000 \dots 000}_{600 \text{ нулей}}$
гуголплекс	$10^{10^{100}} = 1 \underbrace{000 \dots 000}_{1000 \text{ нулей}}$

Замечание. В случае т.н. *короткой шкалы* все названия больших чисел строятся так: в начале идёт латинское числительное, а в конце к нему добавляется суффикс «-иллион». Исключение составляет название «миллион», которое образовано от латинского числительного mille «тысяча» при помощи увеличительного суффикса «-он» -one). Так получаются числа – миллион, биллион, триллион, квадриллион, квинтиллион, секстиллион и т. д. Система наименования чисел с короткой шкалой используется в России, Белоруссии, Украине, США, Канаде, Великобритании, Греции и Турции. Количество нулей в числе, записанном по этой системе, определяется по формуле $3x + 3$, где x – латинское числительное.

5. ПРИСТАВКИ КРАТНЫХ И ДОЛЬНЫХ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ СОГЛАСНО СИ

Приставка	Обозначение	Значение	Множитель
йокто-	y (лат.)	септильонная	$\times 10^{-24}$
цепто-	z (лат.)	секстильонная	$\times 10^{-21}$
атто-	a	квинтильонная	$\times 10^{-18}$
фемто-	f	квадриллионная	$\times 10^{-15}$
пико-	p	триллионная	$\times 10^{-12}$
нано-	n	миллиардная	$\times 10^{-9}$
микро-	μк	миллионная	$\times 10^{-6}$
милли-	m	тысячная	$\times 10^{-3}$
санти-	c	сотая	$\times 10^{-2}$
деци-	d	десятая	$\times 10^{-1}$
дека-	da	десятикратная	$\times 10$
гекто-	h	стократная	$\times 10^2$
кило-	k	тысячекратная	$\times 10^3$
мега-	M	миллионно- кратная	$\times 10^6$
гига-	G	миллиардо- кратная	$\times 10^9$
тера-	T	триллионно- кратная	$\times 10^{12}$
пета-	P	квадрильонно- кратная	$\times 10^{15}$
экса-	E	квинтильонно- кратная	$\times 10^{18}$
цетта-	Z (лат.)	секстильонно- кратная	$\times 10^{21}$
йота-	Y (лат.)	септильонно- кратная	$\times 10^{24}$

Замечание. Данные приставки традиционно (вместе с тем, ошибочно) используются для бинарных степеней, используемых при обработке и передаче данных (килобайт, мегабит и т.д.). Однако международный стандарт IEEE 1541–2002 рекомендует использовать специальные префиксы, например, киби- (1024) вместо кило- (1000) (см. www.ieee.org)

6. ОСНОВНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Основными числовыми множествами являются:

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots; \pm n; \dots\}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ – множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел;

$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

Между этими множествами существует соотношение

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Множество $\mathbb{R}$ содержит рациональные ($\mathbb{Q}$) и иррациональные числа ($\overline{\mathbb{Q}}$). Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью или бесконечной периодической дробью. Так, $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ – рациональные числа.

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными. Иррациональное число может быть выражено бесконечной непериодической десятичной дробью. Так $\sqrt{2} = 1,4142356\dots$, $\pi = 3,14159\dots$, $e = 2,71828\dots$ – часто употребляемые иррациональные числа.

Множество $\mathbb{C}$ содержит все действительные числа, а также комплексные вида $x + yi$, где $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$ – мнимая единица.

7. КАК ЗАПОМНИТЬ?

Как запомнить число $\pi = 3,14159\dots$?

Это я знаю и помню прекрасно – Пи!

Только знаки тут лишни, напрасны.

Для восстановления числа нужно подсчитать число символов в каждом из слов и записать по порядку.

Как запомнить число $e = 2,718281828459045\dots$?

Два и семь, далее два раза год рождения Льва Толстого (1828 1828), затем год Победы в Великой Отечественной Войне (45), год Победы, умноженный на два (90), снова год Победы (45).

8. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Степени суммы и разности	
1	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрат суммы двух выражений
2	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрат разности двух выражений
3	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – куб суммы двух выражений
4	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – куб разности двух выражений
5	$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ – четвертая степень суммы двух выражений
6	$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ – четвертая степень разности двух выражений
11	$(a + b)^n = a^n + \frac{n!}{1!(n-1)!}a^{n-1}b + \frac{n!}{2!(n-2)!}a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n!}{(n-1)!1!}ab^{n-1}$ – бином Ньютона

Сумма и разность степеней	
7	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ – разность квадратов двух выражений
8	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ – сумма кубов двух выражений
9	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ – разность кубов двух выражений
10	$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$
	$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
	$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$
	$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$

ТЕМА 1.1. МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА

В практической деятельности и в научной работе часто используются числовые данные, которые представляют собой несколько взаимосвязанных по содержанию списков, состоящих из одинакового количества чисел. Такие данные удобно представлять в виде прямоугольных таблиц, которые называются *матрицами*. Матричный язык и матричные вычисления используется не только в математике, но и в других областях – в экономике, технических науках и т.д.

1.1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица действительных чисел (или других математических выражений – функций, векторов и т.д.), содержащая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Числа (выражения) $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ составляющие таблицу, называются *элементами матрицы*.

Обычно матрицы обозначают заглавными латинскими буквами: $A, B, C, \dots, X, Y, Z$.

Часто используются более краткие формы записи матриц:

$$A = (a_{ij} \mid \text{где } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n); \quad (2)$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

Из (1) можно заметить, что место каждого элемента a_{ij} однозначно определяется *индексом* ij , т.е. номерами строки и столбца, на пересечении которых он находится: i – номер строки, а j – номер столбца.

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$ имеет размер 3×2 т.е. состоит из

3-х строк и 2-х столбцов. Здесь

$$a_{11} = -2, a_{12} = 1, a_{21} = 3, a_{22} = -5, a_{31} = 7, a_{32} = 11.$$

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу ее строк: $m = n$, то матрица называется *квадратной*. В этом случае n называется *порядком* матрицы.

Так, например $\begin{pmatrix} 1,5 & -3,7 \\ 0,8 & -9,4 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица второго порядка.

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы называются *диагональными элементами*, а диагональ, составляющая их, называется *главной диагональю*:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \boxed{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

Например в предыдущей матрице элементы $a_{11} = 1,5$ и $a_{22} = -9,4$ – диагональные (элементы главной диагонали).

Сумма элементов главной диагонали квадратной матрицы называется её *следом*:

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr } A.$$

Матрица, у которой все элементы, кроме диагональных, равны нулю, называется *диагональной*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \dots, a_{i(n-i+1)}, \dots, a_{m1}$ квадратной матрицы образуют *побочную диагональ*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} & \mathbf{a}_{1n} \\ a_{21} & \dots & \mathbf{a}_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{m1} & \dots & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение. Квадратная диагональная матрица n -го порядка вида

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

называется *единичной матрицей n -го порядка*.

Для обозначения её элементов также используется символ *Кroneckera*¹ δ_{ij} , определяемый как:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Тогда

$$E_n = (\delta_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Для каждой размерности есть своя единичная матрица. Напри-

мер, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица 3-го порядка.

¹ Леопольд Кронекер (нем. Leopold Kronecker; 1823–1891) – немецкий математик. Основные труды по алгебре и теории чисел, теории квадратичных форм и теории групп.

Матрицы – одна из наиболее распространенных форм представления количественной информации. Такое представление реализуемо, если изучаемая совокупность величин может быть упорядочена по двум признакам I и J , каждый из которых принимает конечное число значений: $I – m$ значений: $1, 2, \dots, m$, $J – n$ значений: $1, 2, \dots, n$.

Примеры

1. Имеется m отправителей груза и n его получателей, a_{ij} – количество груза, предоставляемого отправителем i получателю j ; аналогично a_{ij} может выражать затраты на доставку единицы груза от отправителя i получателю j .
2. Имеется m технологических процессов, используемых для переработки однородного сырья (например нефти); в результате переработки получается n видов продукции; a_{ij} – выход продукта j при использовании технологического процесса i в течение единицы времени.
3. В конфликтной ситуации с двумя участниками один располагает m альтернативами выбора – стратегиями, второй – n альтернативами; a_{ij} показывает, какой выигрыш (платеж) получит первый участник в случае, если он избирает стратегию i , в то время как второй участник – стратегию j .
4. Экономическая система выпускает n видов продуктов, a_{ij} характеризует удельные текущие прямые затраты продукта i на выпуск продукта j , т.е. количество продукта i , которое необходимо непосредственно затратить для производства единицы продукта j .
5. Рассматривается m типов семей и n видов потребительских продуктов и услуг, a_{ij} – средние годовые затраты семьи типа i на приобретение продуктов и оплату услуг вида j .

6. Любое вращение в трёхмерном пространстве может быть представлено как композиция поворотов вокруг осей декартовых координат. Например, поворот вокруг оси Ox на угол α может быть описан матрицей:

$$M_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Более подробно этот пример будет описан в соответствующем разделе.

1.1.2. ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Сложение и вычитание

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Основной особенностью этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера.

Определение. Суммой (разностью) двух матриц $A_{m \times n} = (a_{ij})$ и $B_{m \times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times n} = (c_{ij})$, элементами которой являются соответственно суммы (разности) соответствующих элементов исходных матриц:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \text{ где } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}; \quad (4)$$

$$C = A \pm B.$$

Например
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

Матрицы разных размерностей складывать и вычитать нельзя.

Сумма (разность) естественным образом определяется для любого конечного числа матриц $A_1, A_2, \dots, A_k$.

Пример 1. Имеется 2 завода (A и B), выпускающих 3 вида продукции. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 10 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

– матрицы объемов производства (в млн. долл.) в первом и во втором полугодии соответственно. Тогда

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 9 \\ 15 & 22 & 21 \end{pmatrix}$$

– аналогичная матрица для всего календарного года.

Умножение матрицы на число.

Линейная комбинация матриц

Операция умножения матрицы любого размера на произвольное число $\alpha \in \mathbb{R}$ сводится к умножению каждого элемента матрицы на это число:

$$\alpha \cdot A = A \cdot \alpha = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \dots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Можно дать такое определение.

Определение. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$

называется матрица того же размера что и A , все элементы которой определяются из соотношений

$$\alpha \cdot a_{ij}.$$

Из определения следует, что общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за матрицу.

Пример 2. Умножим матрицу $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ на число 2.

Решение:

Получим $D \cdot 2 = 2 \cdot D = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-5) \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -10 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$

Пример 3. Для матрицы $C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 9 \\ 15 & 22 & 21 \end{pmatrix}$ из примера 1 матрица

$$70 \cdot C = \begin{pmatrix} 350 & 700 & 630 \\ 1\,050 & 1\,540 & 1\,470 \end{pmatrix}$$

представляет собой матрицу объемов выпуска в рублях при расчетном курсе 70 руб. за долл.

Определение. *Линейной комбинацией* двух матриц A и B (одинакового размера) называется выражение вида

$$\alpha \cdot A + \beta \cdot B,$$

где α, β – некоторые числа.

Линейной комбинацией конечного числа матриц $A_1, A_2, \dots, A_k$ (одинакового размера) называется выражение вида

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i A_i$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}.$

Пример 4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -5 & -7 & 8 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

Найти линейную комбинацию $2A - 3B.$

Решение:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad 3B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 \\ -15 & -21 & 24 \\ 3 & -6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 \\ -15 & -21 & 24 \\ 3 & -6 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 18 \\ 19 & -19 & -16 \\ 3 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

Перемножение матриц

Операция перемножения матриц (умножения матрицы на матрицу) определена только для матриц, *число столбцов первой из которых равно числу строк второй*.

Определение. Произведением матриц A и B (размеров $m \times n$ и $n \times p$) называется матрица $C = A \cdot B$ (размера $m \times p$), элементы которой вычисляются по формулам:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}. \quad (6)$$

Например

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{21} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{21} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^2 a_{1j} \cdot b_{j1} & \sum_{j=1}^2 a_{1j} \cdot b_{j2} \\ \sum_{j=1}^2 a_{2j} \cdot b_{j1} & \sum_{j=1}^2 a_{2j} \cdot b_{j2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Перемножить матрицы если это возможно:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

а) Матрица A (первая матрица) имеет 2 столбца и 1 строку, а матрица B – 2 строки и 2 столбца. Следовательно произведение существует и будет имеет размерность 1×2 (1 строка, 2 столбца).

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \quad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6) = (13 \quad 16).$$

б) Перемножим матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot (-3) & 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 + (-3) \cdot (-3) & 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot (-3) & 4 \cdot 5 + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 10 & 7 \\ 25 & 31 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ одновременно определены, то, вообще говоря, эти произведения не равны. Это означает, что *перемножение матриц не коммутативно*. Продемонстрируем это на примерах.

Пример 6. Найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если это возможно, при

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, B = (2 \quad 4 \quad 1).$$

Решение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \quad 4 \quad 1) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = (2 \quad 4 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3) = (21).$$

Как видим, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пример 7. Цены на билеты в кинотеатр зависят от того, когда начинается сеанс – утром, днем или вечером. Цена билета на утренний сеанс равна 10 руб., на дневной – 15 руб., а на вечерний – 20 руб.

Пусть матрица

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 45 & 60 \\ 50 & 90 & 80 & 70 \\ 105 & 100 & 95 & 110 \end{pmatrix}$$

описывает число посетителей кинотеатра в первые четыре дня (столбцы) показа нового кинофильма; строки отражают посещения утром, днем и вечером соответственно. Тогда выручку по дням можно рассчитать так:

$$(10 \quad 15 \quad 20) \cdot \begin{pmatrix} 50 & 60 & 45 & 60 \\ 50 & 90 & 80 & 70 \\ 105 & 100 & 95 & 110 \end{pmatrix} = (3800 \quad 3950 \quad 3550 \quad 3850).$$

Пример 8. Предприятие производит n видов продукции, используя m видов ресурсов. Даны матрица $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$, в которой a_{ij} – норма затрат ресурса i -го вида на производство единицы продукции j -го вида, и матрица-столбец $X = (x_i)$, $i = 1, \dots, n$, где x_i – количество продукции i -го вида, произведенное предприятием за месяц. Тогда матрица $C = AX$ является матрицей-столбцом:

$$C = AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Транспонирование

Определение. Если в произвольной $m \times n$ матрице A произвести взаимную замену строк и столбцов, то полученная матрица A^T называется *транспонированной* и будет иметь размерность $n \times m$:

$$A^T = (a_{ji})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$$

Другими словами, строки матрицы A являются столбцами матрицы A^T , а столбцы матрицы A являются строками матрицы A^T .

Например

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Операция транспонирования обладает рядом свойств:

$$1) (A^T)^T = A;$$

$$2) (A + B)^T = A^T + B^T;$$

$$3) (\lambda A)^T = \lambda A^T;$$

$$4) (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Будем записывать матрицы–столбцы с помощью операции транспонирования:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n)^T.$$

Дадим также несколько определений, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Определение. Квадратная матрица $A_{n \times n}$ называется *симметричной*, если $A^T = A$, что означает $a_{ji} = a_{ij}$.

Например

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица называется *кососимметричной*, если $A^T = -A$, то есть $a_{ji} = -a_{ij}$.

Ортогональная матрица – квадратная матрица A с вещественными элементами, результат умножения которой на транспонированную матрицу A^T равен единичной матрице:

$$AA^T = A^T A = E$$

или, что эквивалентно, её обратная матрица² (которая обязательно существует) равна транспонированной матрице:

$$A^{-1} = A^T.$$

Например, матрицы

² Понятие обратной матрицы будет рассмотрено несколько позже в п. 1.3.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0,96 & -0,28 \\ 0,28 & 0,96 \end{pmatrix}$$

– ортогональные.

1.1.3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ

Определение. *Элементарными преобразованиями матрицы* назовем следующие преобразования:

- 1) умножение всех элементов строки (столбца) на число, отличное от нуля;
- 2) прибавление к элементам одной строке (столбцу) соответствующих элементов другой строки (другого столбца);
- 3) одновременная (согласованная) перестановка местами двух строк.

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Определение. Матрица B , полученная из матрицы A в результате конечного набора элементарных преобразований называются *эквивалентной* матрице A . Эквивалентные матрицы будем обозначать так:

$$A \sim B$$

Надо отметить, что *равные матрицы* и *эквивалентные матрицы* – понятия различные.

Более подробно об элементарных преобразованиях – в пункте 1.3.1.

1.1.4. СТОЛБЦЫ И СТРОКИ. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ СТОЛБЦОВ И СТРОК

Определение. Матрицу, имеющую всего одну строку, называют *строкой* (*матрицей–строкой* или *вектором–строкой*), а матрицу, имеющую всего один столбец, – *столбцом* (*матрицей–столбцом*, *вектором–столбцом*).

В дальнейшем определяющую роль будет играть понятие линейной зависимости и линейной независимости строк и столбцов. Введём это понятие для случая столбцов. Для строк оно вводится аналогично.

Пусть $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$ – столбцы высоты m :

$$p^{(1)} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{m1} \end{pmatrix}, \quad p^{(2)} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad p^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение. *Линейной комбинацией* столбцов $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$ называется выражение вида

$$\alpha_1 p^{(1)} + \alpha_2 p^{(2)} + \dots + \alpha_n p^{(n)}, \quad (7)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – действительные числа, которые называются коэффициентами линейной комбинации.

В силу определения операций умножения матрицы на число и сложения двух матриц линейная комбинация (7) представляет собой следующий столбец высоты m :

$$\begin{aligned} \alpha_1 p^{(1)} + \alpha_2 p^{(2)} + \dots + \alpha_n p^{(n)} &= \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 p_{11} \\ \alpha_1 p_{21} \\ \vdots \\ \alpha_1 p_{m1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 p_{12} \\ \alpha_2 p_{22} \\ \vdots \\ \alpha_2 p_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \alpha_n p_{1n} \\ \alpha_n p_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_n p_{mn} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 p_{11} + \alpha_2 p_{12} + \dots + \alpha_n p_{1n} \\ \alpha_1 p_{21} + \alpha_2 p_{22} + \dots + \alpha_n p_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_1 p_{m1} + \alpha_2 p_{m2} + \dots + \alpha_n p_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Линейная комбинация (7) называется *тривиальной*, если все её коэффициенты равны нулю: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. В противном случае, т. е. если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля, линейная комбинация называется *нетривиальной*.

Ясно, что тривиальная линейная комбинация (7) всегда (т. е независимо от столбцов, для которых она составлена) равна нулю (нулевому столбцу).

Определение. Совокупность столбцов $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$ называется *линейно независимой*, если только тривиальная линейная комбинация этих столбцов равна нулю, т. е. если равенство

$$\alpha_1 p^{(1)} + \alpha_2 p^{(2)} + \dots + \alpha_n p^{(n)} = 0$$

возможно лишь в случае, когда все числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ равны нулю.

Совокупность столбцов $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$ называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих столбцов, равна нулю.

Пример 9. Столбцы

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

линейно зависимы, поскольку их линейная комбинация равна нулевому столбцу, только если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, т. е. если она является тривиальной. Действительно, пусть

$$\alpha_1 e^{(1)} + \alpha_2 e^{(2)} + \alpha_3 e^{(3)} = 0;$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0; \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 = 0; \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0; \\ \alpha_2 = 0; \\ \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Пример 10. Столбцы

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

линейно зависимы, поскольку существует их нетривиальная линейная комбинация $2x + y$, равная нулевому столбцу:

$$2 \cdot x + 1 \cdot y = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4 \\ -2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 11. Исследовать линейную зависимость строк

$$a_1 = (1 \ 2 \ 3), a_2 = (2 \ 3 \ 4), a_3 = (3 \ 4 \ 5).$$

Решение:

Составим линейную комбинацию данных строк с неопределёнными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 &= \alpha_1 (1 \ 2 \ 3) + \alpha_2 (2 \ 3 \ 4) + \alpha_3 (3 \ 4 \ 5) = \\ &= (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \quad 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 \quad 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3). \end{aligned}$$

Приравняем её к нулевой строке:

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \quad 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 \quad 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3) = (0 \ 0 \ 0).$$

Согласно определению равенства, двух строк получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из второго и третьего уравнений первое, умноженное соответственно на числа 2 и 3, приходим к системе

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0, \\ -2\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Далее, вычитая из третьего уравнения второе, умноженное на число 2, получаем систему

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что эта система имеет ненулевые решения. Например, полагая $\alpha_3 = 1$, из второго и первого уравнений последовательно найдём

$$\alpha_2 = -2, \alpha_1 = 1.$$

Таким образом, существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$ строк a_1, a_2, a_3 , равная нулевой строке. По определению это означает, что строки a_1, a_2, a_3 являются линейно зависимыми.

Свойства линейно зависимых и линейно независимых совокупностей столбцов:

1. Совокупность из $n > 1$ столбцов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных.
2. Совокупность, содержащая нулевой столбец, является линейно зависимой.
3. Если в некоторой совокупности часть столбцов линейно зависима, то и вся эта совокупность линейно зависима.
4. Любая часть линейно независимой совокупности столбцов также линейно независима.

В качестве примера докажем свойство 1. Поскольку формулировка этого свойства представляет собой критерий (необходимое и достаточное условие), то доказательство должно состоять из двух частей. В первой части, называемой необходимостью, требуется доказать, что из линейной зависимости n столбцов $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$ вытекает, что хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных. В силу определения линейной зависимости столбцов $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$ существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому столбцу, т. е. существуют числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ такие, что среди них хотя бы одно отлично от нуля и, тем не менее, имеет место равенство

$$a_1 p^{(1)} + a_2 p^{(2)} + \dots + a_n p^{(n)} = 0 \quad (8)$$

Ради определённости предположим, что $a_1 \neq 0$. Тогда равенство (8) можно преобразовать к виду

$$p^{(1)} = -\frac{a_2}{a_1} p^{(2)} - \dots - \frac{a_n}{a_1} p^{(n)}.$$

Полученное равенство как раз и означает, что столбец $p^{(1)}$ является линейной комбинацией столбцов $p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$. Во второй части доказательства, называемой достаточностью, требуется доказать, что из предположения о том, что некоторый столбец совокупности $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$ является линейной комбинацией остальных столбцов, вытекает линейная зависимость этой совокупности. Ради определённости предположим, что первый столбец $p^{(1)}$ есть линейная комбинация остальных столбцов $p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$, т. е. существуют такие числа $\beta_2, \dots, \beta_n$, что имеет место равенство

$$p^{(1)} = \beta_2 p^{(2)} + \dots + \beta_n p^{(n)}.$$

Перепишем это равенство в виде

$$1 \cdot p^{(1)} - \beta_2 p^{(2)} - \dots - \beta_n p^{(n)} = 0$$

Первый коэффициент линейной комбинации, стоящей в левой части полученного равенства, отличен от нуля ($1 \neq 0$), следовательно, эта линейная комбинация является нетривиальной. Поскольку она равна нулевому столбцу, то совокупность столбцов $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$ линейно зависима, что и требовалось.

ПРАКТИКУМ 1.1. МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1.1.1. Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.2. Найти линейную комбинацию матриц $2A + 5B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} 2A &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad 5B = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow 2A + 5B &= \begin{pmatrix} 6+10 & 10+15 \\ 8+5 & 2+(-10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.1.3. Найти линейные комбинации заданных матриц:

а) $4A - 5B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

б) $3A + 4B$, $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 4 \\ 8 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $A - 2E$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1.1.4. Найти произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$ (если это возможно):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

То есть $A \cdot B \neq B \cdot A$ и матрицы не коммутируют.

1.1.5. Найдите произведения матриц, если это возможно:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$

Решение:

а) Первая матрица содержит 4 столбца, вторая – 4 строки. Произведение возможно.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot (-3) & 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 + (-3) \cdot (-3) & 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) \\ 4 \cdot 5 + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 4 \cdot 5 + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 10 & 7 \\ 25 & 31 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= (3 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \quad 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3)) = (8 \quad 4).$$

$$\text{в) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \quad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6) = (13 \quad 16).$$

1.1.6. Найти произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если это возможно:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1.1.7. Выяснить, является ли следующая совокупность столбцов (строк) линейно зависимой или линейно независимой:

$$\text{а) } p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } a_1 = (2 \ 3), \quad a_2 = (-10 \ -15)$$

$$\text{в) } a_1 = (1 \ -4 \ 3), \quad a_2 = (2 \ -3 \ 1), \quad a_3 = (3 \ -1 \ 5).$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1.8. Вычислить линейную комбинацию $2A - 5B = C$ матриц

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 13 & -19 \\ 14 & -5 \\ 22 & 9 \end{pmatrix}.$$

1.1.9. Найти строку x из уравнения $a + b - 3c + x = 0$, если

$$a = (4 \ 1 \ 3 \ -2), \quad b = (16 \ 9 \ 1 \ -3), \quad c = (1 \ -1 \ 15 \ 0).$$

1.1.10. Вычислить произведение матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{д)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{е)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{ж)} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{з)} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}. \quad \text{и)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.1.11. Выполнить действия:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2. \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^{5n}.$$

$$\text{д)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n. \quad \text{е)} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n.$$

$$\text{ж)} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n.$$

1.1.20. Доказать, что совокупность столбцов, содержащая два одинаковых столбца, линейно зависима.

1.1.21. Доказать, что если совокупность столбцов содержит два столбца, отличающиеся друг от друга только числовым множителем, то она линейно зависима.

1.1.22. Доказать, что если в совокупности столбцов какая-то часть столбцов является линейно зависимой, то и вся совокупность линейно зависима.

1.1.23. Доказать, что всякая часть столбцов, входящая в линейно независимую совокупность, является линейно независимой.

1.1.24. Пусть строки a , b , c линейно зависимы, но строка c не является линейной комбинацией строк a и b . Доказать, что строки a и b отличаются друг от друга лишь числовым множителем.

1.1.25. Доказать, что если совокупность строк $a_1, a_2, \dots, a_m$ линейно независима, а совокупность строк $a_1, a_2, \dots, a_m, b$ уже линейно зависима, то строка b является линейной комбинацией строк $a_1, a_2, \dots, a_m$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1.1.26. Продавец билетов на спортивные матчи может закупить эти билеты по цене 4 у.е. и продать перед матчем за 5 у.е. каждый. После матча нераспроданные билеты стоимости не имеют. Продавец может купить и, соответственно продать от 1 до 7 билетов. Составьте матрицу выручки продавца в зависимости от количества купленных им билетов (строка матрицы) и от результатов продажи (столбец матрицы).

1.1.27. Фирма, производящая товары пяти видов, продает их в трех магазинах. Известны матрицы A , B , C объемов продаж j -го товара

$(j = \overline{1, 5})$ за i -й квартал данного года $(i = \overline{1, 4})$ по каждому магазину:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 12 & 5 & 10 \\ 6 & 3 & 13 & 7 & 12 \\ 8 & 5 & 15 & 6 & 15 \\ 12 & 4 & 10 & 6 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 15 & 8 & 16 \\ 15 & 6 & 18 & 9 & 15 \\ 15 & 7 & 17 & 10 & 18 \\ 25 & 6 & 16 & 8 & 15 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 10 & 4 & 8 \\ 8 & 2 & 11 & 5 & 10 \\ 10 & 4 & 10 & 3 & 11 \\ 10 & 3 & 9 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

а) Каков смысл матриц $A + B + C$, $A + C - B$?

б) Известен вектор цен на товары $P = (5 \ 10 \ 7 \ 10 \ 6)$. Запишите в матрично-векторной форме данные о ежеквартальной выручке каждого магазина в отдельности и фирмы в целом.

в) Фирма решила снизить во втором и третьем кварталах цены на все товары на 1 у.е. Запишите вектор цен P в новых условиях.

г) Пусть $L = (1 \ 1 \ 1 \ 1)$. Каков смысл матриц $L \cdot A$, $L \cdot B$, $L \cdot C$, $L(A + B + C)$, $L(A + C - B)$?

д) Пусть $M = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$. Каков смысл матриц $A \cdot M^T$, $B \cdot M^T$, $C \cdot M^T$, $(A + B + C) \cdot M^T$, $(A + C - B) \cdot M^T$?

1.1.28. На ремонтный завод поступают тракторы, 70% которых требуют малого ремонта, 20% – среднего ремонта, 10% – капитального ремонта. Статистически установлено, что 10% тракторов, прошедших малый ремонт, через месяц вновь требуют малого ремонта, 60% – среднего ремонта и 30% капитального ремонта. Из тракторов, прошедших средний ремонт, 20% требуют через месяц малого ремонта, 50% – среднего ремонта и 30% – капитального ремонта. Из тракто-

ров, прошедших капитальный ремонт, через месяц 60% требуют малого ремонта, 40% – среднего ремонта. Найдите доли из отремонтированных в начале месяца тракторов, которые будут требовать того или иного вида ремонта через месяц, 2 месяца, 3 месяца.

ТЕМА 1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.2.1. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ МАТРИЦЫ

В линейной алгебре и других разделах математики широко применяется понятие *определителя (детерминанта)* квадратной матрицы. Большинство методов решения систем уравнений используют определители.

Любой квадратной матрице n -го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можно поставить в соответствие число (или, в общем случае, выражение), которое называется *определителем (детерминантом)* n -го порядка этой матрицы и обозначается:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Сформулируем правило вычисления определителя сначала для квадратных матриц первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Правило. *Определителем (детерминантом) 1-го порядка* матрицы $A = (a_{11})$ является само значение a_{11} :

$$\det A_1 = a_{11}.$$

Определитель 2-го порядка может быть вычислен по формуле:

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \quad (2)$$

Вычисление определителей 1-го и 2-го порядков затруднений, как правило, не представляет.

Пример 1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти $\det A$.

Решение:

По формуле (2) получаем

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

Определитель 3-го порядка может быть вычислен по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}. \quad (3)$$

Здесь элементы первой строки умножаются на определители второго порядка, получаемые из исходного путем поочередного вычеркивания I, II, III столбцов. Знаки чередуются: $+-+$. Каждый определитель второго порядка вычисляется по формуле (2). Определитель третьего порядка всего содержит $3! = 6$ слагаемых.

Пример 2. Вычислите определитель 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение:

Вычисляя определитель по формуле (3), получаем

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \\
= 3 \cdot (5 \cdot 2 - 3 \cdot 4) - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) + 1 \cdot (2 \cdot 4 - 5 \cdot 3) = \\
= 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-5) + 1 \cdot (-7) = -3.$$

Замечание. Для вычисления определителя 3-го порядка можно использовать так называемое *правило Саррюса*¹ (*правило треугольников*): первое из трех слагаемых, входящих в сумму со знаком "+", есть произведение элементов главной диагонали, второе и третье – произведения элементов, находящихся на вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, Три слагаемых, входящих в сумму со знаком "-", определяются аналогично, но относительно второй (побочной) диагонали:

$$\begin{array}{l}
\text{"+"} \quad \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right) \\
\text{"-" } \quad \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right)
\end{array} \quad (3.1)$$

Пример 3. Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение:

Воспользуемся правилом Саррюса (3.1):

¹ Пьер Фредерик Саррюс (фр. Pierre-Frédéric Sarrus; 1798–1861) — французский математик. Исследования в основном касаются вариационного исчисления и механических частей, сформулировал теорию уравнений.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 8 \cdot 4 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 0 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 27.$$

Определитель 4-го порядка может быть вычислен по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Здесь элементы первой строки умножаются на определители третьего порядка, получаемые из исходного путем поочередного вычеркивания I, II, III, IV столбцов. Знаки чередуются: $+ - + -$. Каждый из четырех определителей третьего порядка вычисляется по формуле (3). Определитель четвертого порядка всего содержит $4! = 24$ слагаемых.

Пример 4. Вычислите определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение:

Используем формулу (3):

$$\Delta = (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 9 + 3 \cdot 31 + 0 - 2 \cdot 6 = 63.$$

1.2.2. ОБЩЕЕ ПРАВИЛО ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Для дальнейшего изложения необходимо сформулировать понятие *перестановки*.

Определение. Пусть все числа $j_1, j_2, \dots, j_n$ различны и каждое из них принимает одно из значений $1, 2, \dots, n$. В этом случае совокупность чисел $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ называется *перестановкой* чисел $1, 2, \dots, n$. Например, перестановками из пяти чисел будут $(1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 3, 5, 4), (1, 2, 4, 3, 5), \dots, (5, 4, 3, 2, 1)$.

Нетрудно проверить, что общее число различных перестановок n чисел $1, 2, \dots, n$ равно

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Пусть $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ – произвольная перестановка чисел $1, 2, \dots, n$. Всякая пара чисел (j_k, j_l) такая, что $k < l$, но $j_k > j_l$, называется *инверсией*. Общее число инверсий в перестановке обозначим $N(j_1, j_2, \dots, j_n)$. Перестановка $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ называется *чётной* (*нечётной*), если число инверсий в этой перестановке является чётным (нечётным).

Пример 5. Рассмотрим перестановку $(2, 5, 4, 1, 3)$ пяти чисел $1, 2, 3, 4, 5$. В этой перестановке инверсии образуют пары

$$(2, 1), (5, 4), (5, 1), (5, 3), (4, 1), (4, 3).$$

Следовательно, число инверсий в данной перестановке равно

$$N(2, 5, 4, 1, 3) = 6.$$

Так как это число чётно, то рассматриваемая перестановка является чётной.

Определение. *Определителем (детерминантом) квадратной матрицы n -го порядка*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется число (выражение) $\det A$, равное сумме всех $n!$ произведений элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} (-1)^{N(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}. \quad (6)$$

где суммирование проводится по всем перестановкам $j_1, j_2, \dots, j_n$ чисел $1, 2, \dots, n$, а $N(j_1, j_2, \dots, j_n)$ обозначает число инверсий в перестановке $j_1, j_2, \dots, j_n$. Таким образом каждое произведение снабжено знаком "+" или "-" по следующему правилу. Пусть P – одно из произведений элементов матрицы, входящее в состав определителя. Выпишем сомножители в порядке следования строчек $P = a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$. Тогда номера столбцов дадут перестановку $j_1, j_2, \dots, j_n$. P берется со знаком "+", если эта перестановка четная, и со знаком "-", если она нечетная.

Пример 6. Рассмотрим определитель 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

В первом слагаемом $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$ индексы столбцов образуют

перестановку (1,2,3), количество инверсий ноль (считаем чётным числом). Т.е. $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$ берётся со знаком плюс.

Аналогично $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{33}$.

В слагаемом $a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$ индексы столбцов образуют перестановку (3,1,2), инверсии: (3,1), (3,2), т.е. чётное количество.

В $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$ инверсии (3,2), (3,1), (2,1).

В $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$ инверсии (2,1).

В $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$ инверсии (3,2).

Поэтому эти три произведения берутся со знаком минус.

1.2.3. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Из определения определителя вытекает ряд свойств.

1. Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из нулей, то ее определитель равен 0.
2. Если какие-либо две строки (два столбца) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен 0.
3. Если какие-либо строки (столбцы) матрицы линейно зависимы, то ее определитель равен 0.
4. При умножении столбца (или строки) матрицы на произвольное число ее определитель умножается на это число.
5. Если в матрице переставить местами какие-либо две строки (или столбца), то ее определитель изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.
6. Если к какой-либо строке (столбцу) матрицы прибавить другую строку (столбец), умноженную на произвольное число, то определитель не изменится.
7. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется: $\det A^T = \det A$.
8. Определитель суммы (разности) двух матриц равен сумме (разности) их определителей.
9. Определитель произведения матриц равен произведению их определителей.
10. Определитель диагональной матрицы равен произведению всех диагональных элементов.
11. Если все элементы матрицы, лежащие выше или ниже побочной диагонали, равны нулю, то её определитель равен

произведению числа $(-1)^{n(n-1)/2}$ и всех элементов, стоящих на побочной диагонали.

12. Если в некотором определителе Δ i -ю строку представить в виде суммы каких-либо двух строк $b = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$ и $c = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$ т.е. $a_{ij} = b_j + c_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), то

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2,$$

где все строки определителей Δ_1 и Δ_2 , кроме i -й, совпадают с соответствующими строками определителя Δ , i -я строка определителя Δ_1 равна $b = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$, а i -я строка определителя Δ_2 равна $c = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$.

Аналогичное свойство имеет место и в случае, если один из столбцов определителя представить в виде суммы каких-либо двух столбцов.

1.2.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ЧЕРЕЗ МИНОР И АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ

Для дальнейшего изложения материала дадим несколько новых определений.

Определение. *Дополнительным минором M_{ij} (или просто минором)* произвольного элемента a_{ij} квадратной матрицы n -го порядка называется определитель $(n-1)$ -го порядка, полученной из исходной матрицы вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Например, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

то

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ij} произвольного элемента a_{ij} квадратной матрицы n -го порядка называется дополнительный минор M_{ij} этого элемента взятый со знаком "+" если сумма $i + j$ четная и со знаком "-", если сумма $i + j$ нечетная, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \quad (7)$$

Так для матрицы из предыдущего примера

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. Определитель матрицы A n -го порядка равен сумме произведений всех элементов произвольной i -й строки (j -го столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} \text{ для } \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

(здесь используется разложение по i -й строке),

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} \text{ для } \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

(здесь используется разложение по j -му столбцу).

Доказательство:

По определению, детерминант матрицы A представляет собой сумму

$$\det A = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} (-1)^{N(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}. \quad (6)$$

где суммирование проводится по всем перестановкам $j_1, j_2, \dots, j_n$ чисел $1, 2, \dots, n$, нумерующим столбцы, а $N(j_1, j_2, \dots, j_n)$ – число инверсий в перестановке $j_1, j_2, \dots, j_n$.

Выберем произвольным образом некоторую строку, например, с номером i . Один из элементов этой строки представлен в каждом произведении $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$. Например, в определителе 3-го порядка

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

в каждом слагаемом содержится один из элементов первой строки. И т.д.

Поэтому слагаемые суммы (6) можно перегруппировать, объединив в первую группу те, что содержат элемент a_{i1} в качестве общего множителя, во вторую группу – члены, содержащие элемент a_{i2} и т.д.

Например, при $i = 1$ и $n = 3$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11} \sum_{j_2, j_3} (-1)^{N(j_2, j_3)} \cdot a_{2j_2} a_{2j_3} + a_{12} \sum_{j_1, j_3} (-1)^{N(j_1, j_3)} \cdot a_{2j_1} a_{2j_3} + \\ &\quad + a_{13} \sum_{j_1, j_2} (-1)^{N(j_1, j_2)} \cdot a_{2j_1} a_{2j_2} = \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \end{aligned}$$

В общем случае

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{i=1}^n \sum_{j_1, j_2, \dots, j_i, \dots, j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{ij_i} \dots a_{nj_n} (-1)^{N(j_1, j_2, \dots, j_n)} = \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_n} (-1)^{N(j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_n)} \cdot \underbrace{a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}}_{n-1}.\end{aligned}$$

Здесь $\sum_{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_n} (-1)^{N(j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_n)} \cdot \underbrace{a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}}_{n-1}$ представляет собой алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} .

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}.$$

Аналогично доказывается теорема для произвольного столбца j .
Теорема доказана.

Формулы (2)–(4) являются частными случаями формулы 87).

Так определитель третьего порядка можно вычислить, разложив его, например, по третьей строке, используя формулу (8):

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33} = \\ &= a_{31} \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \\ &= a_{31} (a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13}) + a_{32} (a_{11} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{13}) + a_{33} (a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}).\end{aligned}$$

Также сформулируем следующую лемму.

Лемма 1. Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю:

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0, \quad k \neq i; \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad (10.1)$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ik} = 0, \quad k \neq j; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10.2)$$

Доказательство:

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ и матрицу A' , получаемую из A заменой произвольной k -й строки i -й строкой ($k \neq i$):

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} i\text{-я строка} \\ \\ k\text{-я строка} \end{matrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A' , разложив по k -й строке:

$$\det A' = a_{k1} \cdot A_{k1} + a_{k2} \cdot A_{k2} + \dots + a_{kn} \cdot A_{kn} = \sum_{j=1}^n a_{kj} \cdot A_{kj}.$$

Так как все элементы k -й строки матрицы A' совпадают с соответствующими элементами i -й строки, то

$$\det A' = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{kj}.$$

С другой стороны, матрица A' содержит две одинаковых строки, значит её определитель равен нулю:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{kj} = 0.$$

Что и требовалось доказать.

Приведем пример, иллюстрирующий использование при вычислении определителей сформулированных выше свойств.

Пример 7. Вычислить определитель.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение:

Прибавляя ко второй строке определителя его первую строку, умноженную на число 2, и вычитая из третьей и четвертой строк первую, умноженную соответственно на числа 3 и 4, получим нули в первом столбце, начиная с его второго элемента:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & -14 & -17 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель Δ по первому столбцу и вынесем за знак определителя общий множитель -10 элементов второй строки и общий множитель -1 элементов третьей строки:

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ -10 & -10 & -10 \\ -5 & -14 & -17 \end{vmatrix} = (-10) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 14 & 17 \end{vmatrix} = \\ &= 10 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 14 & 14 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Вычитая из второго и третьего столбцов первый, получаем определитель

$$\Delta = 10 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 12 \end{vmatrix}.$$

Этот определитель удобно разложить по второй строке:

$$\Delta = 10 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = -10 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}.$$

Далее можно вынести общий множитель 3 элементов первого столбца и общий множитель 6 элементов второго столбца:

$$\Delta = 10 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -180 \cdot ((-1) \cdot 2 - 3 \cdot 1) = -180 \cdot (-5) = 900.$$

1.2.5. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Если не считать выражения определителя, данного в его определении, не существует никакого общего метода вычисления определителей произвольного порядка.

К определителям того или иного специального вида применяются различные методы вычисления, приводящие к выражениям, более простым, чем выражение определителя, получающееся в результате применения его определения. Рассмотрим некоторые наиболее употребительные из этих методов.

1. Метод приведения к треугольному виду

Это метод состоит в преобразовании определителя к такому виду, в котором все элементы, находящиеся по одну сторону от главной или побочной диагонали, равны нулю.

В случае, когда таковой является главная диагональ определителя, применяется свойство 10: *определитель диагональной матрицы равен произведению всех диагональных элементов.*

В случае, когда равны нулю все элементы, лежащие по одну сторону от побочной диагонали, применяется свойство 11: *если все элементы матрицы, лежащие выше или ниже побочной диагонали, равны нулю, то её определитель равен произведению числа $(-1)^{n(n-1)/2}$ и всех элементов, стоящих на побочной диагонали.*

Пример 8.

а) Вычислить определитель порядка n :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$$

Решение:

Из всех строк определителя Δ , начиная со второй, вычтем его первую строку, а затем к первому столбцу полученного определителя прибавим все остальные столбцы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+2(n-1) & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Применяя свойство 10, окончательно находим

$$\Delta = (3 + 2(n-1)) \cdot 1^{n-1} = 2n + 1.$$

б) Вычислить определитель порядка n :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$$

Решение:

На первом шаге вычтем первую строку из всех остальных строк:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & n-2 & n-3 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

На втором шаге вычтем вторую строку из всех строк, начиная с третьей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-3 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Продолжая аналогичные преобразования, после выполнения $n-1$ шагов придём к определителю

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

у которого все элементы, стоящие ниже побочной диагонали, равны нулю. Для вычисления этого определителя воспользуемся свойством 12:

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 1^{n-1} \cdot n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot n.$$

в) Вычислить определитель порядка $n+1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix}$$

Решение:

Вычтем из всех столбцов определителя его первый столбец и разложим полученный определитель по первой строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 - x_1 & -x_1 & -x_1 & \dots & -x_1 & -x_1 \\ x_2 & 0 & a_2 - x_2 & -x_2 & \dots & -x_2 & -x_2 \\ x_3 & 0 & 0 & a_3 - x_3 & \dots & x_3 & x_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_n & 0 & 0 & 0 & \dots & x_n & a_n - x_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 - x_1 & -x_1 & -x_1 & \dots & -x_1 & -x_1 \\ 0 & a_2 - x_2 & -x_2 & \dots & -x_2 & -x_2 \\ 0 & 0 & a_3 - x_3 & \dots & -x_3 & -x_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n - x_n \end{vmatrix}.$$

Для вычисления полученного треугольного определителя воспользуемся свойством 10:

$$\Delta = (a_1 - x_1)(a_2 - x_2)(a_3 - x_3) \cdot \dots \cdot (a_n - x_n) = \prod_{i=1}^n (a_i - x_i).$$

2. Метод выделения линейных множителей

В этом методе определитель рассматривают как многочлен от одной или нескольких входящих в него переменных. Тем или иным способом показывают, что этот многочлен делится на ряд линейных множителей, а значит, и на их произведение. Сравнивая отдельные

члены определителя с соответствующими членами произведения линейных множителей, находят частное от деления определителя на это произведение и тем самым находят выражение определителя.

Пример 9. Вычислить определитель порядка $n + 1$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n+1-x \end{vmatrix}.$$

Решение:

Так как при $x = 1$ вторая строка данного определителя совпадает с его первой строкой, то в точке $x = 1$ определитель обращается в 0. Но это означает, что он делится на двучлен $x - 1$. Аналогично заключаем, что определитель делится и на двучлены $x - 2, x - 3, \dots, x - n$. Таким образом, определитель делится на произведение $(x - 1)(x - 2)(x - 3) \cdot \dots \cdot (x - n)$. Очевидно, что это произведение содержит член x^n с коэффициентом 1. Используя свойство 1 определителей, легко вывести, что данный определитель Δ является многочленом n -й степени от переменной x со старшим членом $(-1)^n x^n$. Отсюда следует, что

$$\Delta = (-1)^n (x - 1)(x - 2)(x - 3) \cdot \dots \cdot (x - n).$$

3. Метод представления определителя в виде суммы определителей

Некоторые определители легко вычисляются путем разложения их в сумму определителей того же порядка относительно строк или столбцов на основе свойства 6 предыдущего параграфа.

Пример 10. Вычислить определитель порядка n :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x + a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & x + a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x + a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x + a_n \end{vmatrix}.$$

Решение:

Представляя все элементы, расположенные вне главной диагонали, в виде $a_i = 0 + a_i$, запишем этот определитель следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x + a_1 & 0 + a_2 & 0 + a_3 & \dots & 0 + a_n \\ 0 + a_1 & x + a_2 & 0 + a_3 & \dots & 0 + a_n \\ 0 + a_1 & 0 + a_2 & x + a_3 & \dots & 0 + a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 + a_1 & 0 + a_2 & 0 + a_3 & \dots & x + a_n \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель относительно первой строки на два определителя. Каждый из этих определителей, в свою очередь, разложим относительно второй строки на два определителя и т. д. В результате получим сумму 2^n определителей. В $2^n - n - 1$ из этих определителей имеются, по крайней мере, две одинаковые строки $(a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n)$. Следовательно, все такие определители равны нулю. Выпишем оставшуюся сумму:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Полученные определители легко вычисляются с помощью свойств 5 и 11 предыдущего параграфа:

$$\Delta = (x)^n (a_1 x^{n-1} + x a_2 x^{n-2} + x^2 a_3 x^{n-3} + \dots + x^{n-1} a_n) = x^{n-1} (x + a_1 + a_2 + \dots a_n).$$

4. Метод рекуррентных соотношений

Метод рекуррентных соотношений состоит в том, что данный определитель выражают через определители того же вида, но более низкого порядка. Полученное выражение называется рекуррентным соотношением. Затем непосредственно по общему виду определителя или с помощью рекуррентного соотношения вычисляют несколько определителей низших порядков, стараясь усмотреть общий вид выражения определителя произвольного порядка, и доказывают справедливость этого выражения при любом n методом математической индукции.

Пример 11.

а). Вычислить определитель порядка n :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение:

Раскладывая этот определитель по первой строке, получаем

$$\Delta_n = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Первый из полученных определителей по виду ничем не отличается от определителя Δ_n , но имеет порядок $n-1$. Следовательно, в силу используемого обозначения этот определитель есть Δ_{n-1} .

Второй определитель разложим по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta_{n-2}.$$

В результате имеем

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

Мы получили рекуррентное соотношение

$$\Delta_n - 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}, \quad n = 3, 4, \dots$$

Непосредственно по виду определителя находим

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

На основе полученных результатов выдвинем гипотезу о том, что общий вид выражения определителя Δ_n есть

$$\Delta_n = n + 1. \quad (11)$$

Докажем её методом математической индукции. Для этого предположим, что $\Delta_n = n + 1$, $\Delta_{n-1} = n$ и с помощью рекуррентного соотношения (11) найдём выражение определителя Δ_{n+1} .

Имеем

$$\Delta_{n+1} = 2\Delta_n - \Delta_{n-1} = 2(n + 1) - n = n + 2 = (n + 1) + 1,$$

что и требовалось.

б) Вычислить определитель порядка $n + 1$:

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

Решение:

Раскладывая этот определитель по $(n + 1)$ -й строке, получаем

$$\Delta_{n+1} = a_n \cdot (-1)^{(n+1)+(n+1)} \Delta_n + 1 \cdot (-1)^{1+(n+1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 2 \end{vmatrix}.$$

Последний определитель разложим по последнему столбцу:

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= a_n \Delta_n + (-1)^{2n+1} \cdot 1 \cdot (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} = \\ &= a_n \Delta_n + (-1)^{2n+3} a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} = a_n \Delta_n - a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}. \end{aligned}$$

Итак, мы получили рекуррентное соотношение

$$\Delta_{n+1} = a_n \Delta_n - a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (12)$$

Непосредственно по виду исходного определителя находим

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = -1.$$

Далее, пользуясь рекуррентным соотношением (12), получаем

$$\Delta_3 = a_2 \Delta_2 - a_1 = a_2 \cdot (-1) - a_1 = -a_2 - a_1 = -a_1 a_2 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right),$$

$$\Delta_4 = a_3\Delta_3 - a_1a_2 = a_3\left(-a_1a_2\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)\right) - a_1a_2 = -a_1a_2a_3\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right).$$

На основе полученных данных выдвигаем гипотезу о том, что общее выражение определителя Δ_n имеет вид

$$\Delta_n = -a_1\Delta_1 \cdot \dots \cdot -a_{n-2}a_{n-1}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-2}} + \frac{1}{a_{n-1}}\right).$$

Для проверки этой гипотезы воспользуемся рекуррентным соотношением (1.7):

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} &= a_n\left(-a_1a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-2}a_{n-1}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-2}} + \frac{1}{a_{n-1}}\right)\right) - a_1a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} = \\ &= -a_1a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-2}a_{n-1}a_n\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-2}} + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}\right)\end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получаем выражение определителя Δ_{n+1} :

$$\Delta_{n+1} = -a_1a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-2}a_{n-1}a_n\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-2}} + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}\right).$$

ПРАКТИКУМ 1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1.2.1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $\det(A \cdot B)$.

Решение:

1-й способ.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2. \quad \det B = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 13.$$

Значит, по свойству 9, $\det(A \cdot B) = -26$.

2-й способ.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det(A \cdot B) = 7 \cdot 18 - 8 \cdot 19 = 126 - 152 = -26$.

1.2.2. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение:

Вычисляя определитель разложением по первой строке, получим:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} &= 3 \cdot (5 \cdot 2 - 3 \cdot 4) - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) + 1 \cdot (2 \cdot 4 - 5 \cdot 3) = \\ &= 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-5) + 1 \cdot (-7) = -3. \end{aligned}$$

1.2.3. Вычислите определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix};$$

Решение:

Разложим определитель по первой строке:

$$\begin{aligned} \Delta = & (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - \\ & -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 9 + 3 \cdot 31 + 0 - 2 \cdot 6 = 63. \end{aligned}$$

1.2.4. Вычислите определители 2-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix};$

в) $\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}.$

г) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix};$

д) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} \varphi & 1 \\ -1 & \operatorname{tg} \varphi \end{vmatrix};$

е) $\begin{vmatrix} x^2 & x \\ xy^2 & y^2 \end{vmatrix}.$

1.2.5. Вычислите определители 3-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

в) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix};$

г) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$

1.2.6. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.2.7. Вычислить определитель 5-го порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

1.2.8. Определить число инверсий в перестановках (за исходное расположение всегда, если нет особых указаний, принимается расположение $1, 2, 3, \dots$ в возрастающем порядке):

а) $2, 3, 5, 4, 1$;

б) $1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8$;

в) $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, 2, 4, 6, 8, \dots, 2n$.

1.2.9. В следующих перестановках определить число инверсий и указать общий признак тех чисел n , для которых эта перестановка четна, и тех, для которых она нечетна:

а) $1, 4, 7, \dots, 3n-2, 2, 5, 8, \dots, 3n-1, 3, 6, 9, \dots, 3n$;

б) $3, 6, 9, \dots, 3n, 2, 5, 8, \dots, 3n-1, 1, 4, 7, \dots, 3n-2$;

в) $2, 5, 8, \dots, 3n-1, 3, 6, 9, \dots, 3n, 1, 4, 7, \dots, 3n-2$.

1.2.10. Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

а) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$;

б) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{15}a_{43}a_{62}$;

$$\text{в)} a_{12}a_{23}a_{34}\dots a_{n-1,n}a_{kk}, \quad a \leq k \leq n;$$

$$\text{г)} a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}\dots a_{2n-1,2n}a_{2n,2n-1}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.2.11. Вычислить определитель второго порядка:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{е)} \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg} \alpha \end{vmatrix}.$$

1.2.12. Вычислить определитель третьего порядка:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{vmatrix} x+y & z & 1 \\ y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{е)} \begin{vmatrix} \sin a & \cos a & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix}.$$

1.2.13. Решить неравенство:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} x+7 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -x & x \end{vmatrix} < 0;$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ x+2 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & x \end{vmatrix} \geq 0.$$

1.2.14. Вычислить определитель:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 7 & 7 \end{vmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{е)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

1.2.15. Вычислить определитель:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

1.2.16. Вычислить определитель порядка n приведением к треугольному виду:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix};$$

$$B) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-2} & a_{n-2} - b_{n-2} & \dots & a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} \\ a_{n-1} - b_{n-1} & a_{n-1} & \dots & a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix};$$

$$Г) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}.$$

1.2.17. Вычислить определитель порядка n методом выделения линейных множителей:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

1.2.18. Вычислить определитель порядка n методом представления в виде суммы определителей:

$$a) \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x_n \end{vmatrix};$$

$$б) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n-2} & x_{n-2} & x_{n-2} & \dots & a_{n-2} & 0 \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \dots & x_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

1.2.19. Вычислить определитель методом рекуррентных соотношений:

$$а) \Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix};$$

$$б) \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots & a_1 b_n \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots & a_2 b_n \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 & \dots & a_3 b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_1 b_n & a_2 b_n & a_3 b_n & \dots & a_n b_n \end{vmatrix};$$

$$в) \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha + \beta \end{vmatrix};$$

$$\Gamma) \Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix}.$$

1.2.20. Доказать, что сумма произведений всех элементов некоторой строки квадратной матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов любой другой строки этой матрицы равна нулю:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0, \quad i \neq k.$$

1.2.21. Все элементы некоторой строки квадратной матрицы A равны 1. Найти сумму алгебраических дополнений всех элементов такой матрицы.

1.2.22. Определить число инверсий в перестановках (за исходное расположение всегда, если нет особых указаний, принимается расположение $1, 2, 3, \dots$ в возрастающем порядке):

- а) 6, 3, 1, 2, 5, 4;
- б) 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2;
- в) $2, 4, 6, \dots, 2n, 1, 3, 5, \dots, 2n-1$.

1.2.23. В следующих перестановках определить число инверсий и указать общий признак тех чисел n , для которых эта перестановка четна, и тех, для которых она нечетна:

- а) $2, 5, 8, \dots, 3n-1, 1, 4, 7, \dots, 3n-2, 3, 6, 9, \dots, 3n$;
- б) $1, 5, \dots, 4n-3, 2, 6, \dots, 4n-2, 3, 7, \dots, 4n-1, 4, 8, \dots, 4n$;
- в) $1, 5, \dots, 4n-3, 3, 7, \dots, 4n-1, 2, 6, \dots, 4n-2, 4, 8, \dots, 4n$;
- г) $4n, 4n-4, \dots, 8, 4, 4n-1, 4n-5, \dots, 7, 3, 4n-2, 4n-6, \dots, 6, 2, 4n-3, 4n-7, \dots, 5, 1$.

1.2.24. Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

а) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$;

б) $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$;

в) $a_{12}a_{23} \dots a_{n-1,n}a_{n1}$;

г) $a_{11}a_{2,n}a_{3,n-1} \dots a_{2n,2}$.

ТЕМА 1.3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. РАНГ МАТРИЦЫ

1.3.1. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Определение. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) называется *обратимой*, если существует такая матрица X , что

$$A \cdot X = X \cdot A = E_n, \quad (1)$$

где E_n – единичная матрица n -го порядка:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае матрица X называется *обратной* к матрице A и обозначается A^{-1} , т.е.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n. \quad (2)$$

Определение. Матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения к элементам a_{ij} , называется *присоединенной (союзной)* матрицей к матрице A . Обратите внимание на то, что алгебраические дополнения элементов строк матрицы A в матрице $\tilde{A}$ записаны в столбцах.

Теорема 1. Если квадратная матрица A невырожденная (т.е. ее определитель отличен от нуля, $\det A \neq 0$), то у нее существует обратная матрица, которая может быть найдена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}. \quad (4)$$

Доказательство:

Необходимость. Пусть матрица A имеет обратную, т. е. существует квадратная матрица X , удовлетворяющая соотношению $XA = E$.

В силу свойства 9 определителей имеет место равенство

$$\det X \cdot \det A = \det E = 1.$$

Отсюда следует, что $\det A \neq 0$, т. е. матрица A является невырожденной.

Заметим, что из полученного равенства следует также, что и обратная матрица X является невырожденной.

Достаточность. Пусть матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

– присоединённая матрица к матрице A . Покажем, что матрица

$X = \frac{1}{\Delta} \cdot \tilde{A}$ является обратной к матрице A , т. е. убедимся в

справедливости равенства $XA = E$.

Для этого введём обозначение $B = XA$, так что нам предстоит показать, что $B = E$.

Пусть

$$\begin{aligned} B = XA &= \frac{1}{\Delta} \cdot \tilde{A} \cdot A = \\ &= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \dots + A_{n1}a_{n1} & A_{12}a_{11} + A_{22}a_{21} + \dots + A_{n2}a_{n1} & \dots & A_{1n}a_{11} + A_{2n}a_{21} + \dots + A_{nn}a_{n1} \\ A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + \dots + A_{n1}a_{n2} & A_{12}a_{12} + A_{22}a_{22} + \dots + A_{n2}a_{n2} & \dots & A_{1n}a_{12} + A_{2n}a_{22} + \dots + A_{nn}a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{11}a_{1n} + A_{21}a_{2n} + \dots + A_{n1}a_{nn} & A_{12}a_{1n} + A_{22}a_{2n} + \dots + A_{n2}a_{nn} & \dots & A_{1n}a_{1n} + A_{2n}a_{2n} + \dots + A_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$b_{ij} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n A_{ki} a_{kj}, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Если $i = j$, то $\sum_{k=1}^n A_{ki} a_{ki}$ – сумма произведений элементов i -го столбца на их алгебраические дополнения, которая равна $\det A$ (согласно теореме 1 из 1.2) и

$$b_{ii} = \frac{1}{\Delta} \cdot \det A = \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta = 1, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Если $i \neq j$, то $\sum_{k=1}^n A_{ki} a_{kj}$ – сумма произведений элементов j -го столбца на алгебраические дополнения элементов i -го столбца, которая равна нулю согласно лемме 1 из 1.2:

$$b_{ij} = \frac{1}{\Delta} \cdot 0 = 0, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Таким образом,

$$b_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Доказано, что $B = E$, а значит $XA = E$.

Из доказательства достаточности вытекает следующая формула для вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}.$$

Таким образом, обратная матрица получается из присоединенной матрицы $\tilde{A}$ делением всех её элементов на определитель матрицы A :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

Пример 1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите A^{-1} .

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0, \text{ т.е. матрица невырожденная и у нее}$$

существует обратная матрица. Для того, чтобы воспользоваться формулой (4) необходимо найти присоединенную матрицу $\tilde{A}$:

$$A_{11} = 4, \quad A_{12} = -3, \quad A_{21} = -2, \quad A_{22} = 1,$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}.$$

Свойства обратных матриц

$$1) (A^{-1})^{-1} = A.$$

$$2) (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

$$3) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Доказательство:

2) В силу свойств операции умножения матриц и равенства $AA^{-1} = E$, справедливого для любой невырожденной матрицы, имеем

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E.$$

Но это и означает, что матрица $B^{-1}A^{-1}$ является обратной к матрице AB .

3) Для доказательства второго свойства транспонируем обе части равенства $AA^{-1} = E$, учитывая свойство 2 операции транспонирования и симметричность единичной матрицы E :

$$(AA^{-1})^T = E^T \Leftrightarrow (A^{-1})^T A^T = E$$

Полученное равенство как раз и означает, что матрица $(A^{-1})^T$ является обратной для матрицы A^T .

1.3.2. РАНГ МАТРИЦЫ

Выше было использовано понятие *дополнительного минора элемента* матрицы. Рассмотрим теперь, что такое *минор* матрицы.

Определение. Если в матрице $A_{m \times n}$ (не обязательно квадратной) выделить s ($s \leq \min(m, n)$) произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется *минором* матрицы $A_{m \times n}$.

Определение. В матрице размера $m \times n$ *минор* порядка r ($0 < r \leq \min(m, n)$) называется *базисным*, если он не равен нулю, а все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю. Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются *базисными*.

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Определение. Порядок базисного минора матрицы называется *рангом матрицы* и обозначается

$$r = r(A) = \text{rank } A.$$

Т.е. ранг матрицы – это наивысший порядок минора матрицы, отличного от нуля.

Пример 2. Для матрицы $A_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & -1 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ наивысший порядок минора, отличного от нуля, равен 2:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5 \neq 0.$$

Соответственно $\text{rank } A = 2$.

Для нахождения ранга используется т.н. метод окаймляющих миноров, который заключается в следующем. Определяем минор произвольного k -го порядка, не равный нулю, $M_k \neq 0$. Следующим шагом вычисляем миноры $(k+1)$ -го порядка, которые представляют собой «окаймление» минора M_k . Если все миноры $(k+1)$ -го порядка равны нулю, то ранг матрицы равен k . Если какой либо минор $(k+1)$ -го порядка не равен нулю, т.е. $M_r \neq 0$, то этот минор считается исходным для повторения той же самой процедуры «окаймления» и т.д.

Пример 3. Определить ранг матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Вычисляем минор 2-го порядка, стоящий в левом верхнем углу

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда берем другой минор M_2 (в центре, вверху). Вычисляем

$$M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Окаймляем его слева и снизу:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Окаймляем M_3 справа и снизу:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Окаймляем M_3 последним вертикальным столбцом:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, ранг матрицы A равен 3.

Заметим, что метод окаймляющих миноров в практике применяется редко из-за большого объема вычислений. С помощью следующих теорем можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Теорема 2. В произвольной матрице Базисные строки (столбцы) линейно независимы. Каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.

Доказательство:

Доказательство проведём для случая строк. Предположим, что базисные строки линейно зависимы. Тогда, очевидно, будут линейно зависимыми и части этих строк, входящие в базисный минор. Другими словами, будут линейно зависимыми строки определителя, являющегося базисным минором. Такой определитель равен нулю, что противоречит определению базисного минора.

Предположим, что базисный минор матрицы A расположен в строках с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r$ и столбцах с номерами $j_1, j_2, \dots, j_r$. Произвольным образом выберем номер k строки и номер l столбца матрицы A и рассмотрим определитель

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_r} & a_{i_1 l} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_r} & a_{i_2 l} \\ . & . & \dots & . & . \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & . & a_{i_r j_r} & a_{i_r l} \\ a_{k j_1} & a_{k j_2} & \dots & a_{k j_r} & a_{k l} \end{vmatrix}$$

Если k -я строка входит в число базисных строк или l -й столбец входит в число базисных столбцов, то определитель δ равен нулю как определитель, имеющий две одинаковые строки или два одинаковых столбца. Рассмотрим случай, когда k -я строка не входит в число базисных строк и l -й столбец не входит в число базисных столбцов матрицы A . Тогда определитель δ с точностью до перестановки строк и столбцов есть некоторый минор порядка $r+1$ матрицы A . По определению базисного минора все миноры порядка $r+1$ равны нулю. Следовательно, и в этом случае $\delta = 0$. Учитывая, что при каждом $k = 1, 2, \dots, n$ и каждом $l = 1, 2, \dots, n$, определитель $\delta = 0$, разложим его по последнему столбцу:

$$a_{i_1 l} \delta_{i_1 l} + a_{i_2 l} \delta_{i_2 l} + \dots + a_{i_r l} \delta_{i_r l} + a_{k l} \delta_{k l} = 0.$$

Здесь $\delta_{i_m l}$ – алгебраическое дополнение элемента $a_{i_m l}$ в определителе δ . Очевидно, что все алгебраические дополнения $\delta_{i_m l}$ не зависят от номера l . Поэтому можно ввести обозначения

$$\beta_{i_m} = \delta_{i_m l}, \quad m = 1, 2, \dots, r; \quad \beta_k = \delta_{k l}.$$

Тогда при всех $k = 1, 2, \dots, n$, и всех $l = 1, 2, \dots, n$, имеют место равенства

$$\beta_{i_1} a_{i_1 l} + \beta_{i_2} a_{i_2 l} + \dots + \beta_{i_r} a_{i_r l} + \beta_k a_{k l} = 0. \quad (5)$$

Заметим, что число β_k есть базисный минор матрицы A , поэтому $\beta_k \neq 0$. Тогда при всех $k = 1, 2, \dots, n$ и всех $l = 1, 2, \dots, n$ равенство (5) можно переписать в виде

$$a_{k l} = -\frac{\beta_{i_1}}{\beta_k} a_{i_1 l} - \frac{\beta_{i_2}}{\beta_k} a_{i_2 l} - \dots - \frac{\beta_{i_r}}{\beta_k} a_{i_r l}.$$

Но это означает, что при любом $k = 1, 2, \dots, n$ k -я строка матрицы A

является линейной комбинацией её базисных строк.

Теорема 3 (о ранге матрицы). Ранг произвольной матрицы A равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) матрицы.

Доказательство:

Доказательство проведём для случая строк. Пусть $\text{rank } A = r$. В силу теоремы о базисном миноре r базисных строк матрицы A линейно независимы. Поэтому остаётся показать, что если $k > r$, то любая совокупность, состоящая из k строк матрицы A , является линейно зависимой.

Итак, возьмём произвольную совокупность, состоящую из $k > r$ строк матрицы A , и покажем, что она линейно зависима. Ясно, что все миноры, расположенные в рассматриваемых k строках, являются в то же время и минорами матрицы A . Так как $\text{rank } A = r$, то среди них не может быть ни одного минора, отличного от нуля и имеющего порядок, больший, чем r . Отсюда следует, что ранг матрицы, составленной из рассматриваемых k строк, не может быть больше, чем r , а значит, он подавно меньше, чем k . В силу теоремы о базисном миноре хотя бы одна из строк этой матрицы является линейной комбинацией её базисных строк. В эту линейную комбинацию можно включить (с нулевыми коэффициентами) и все остальные строки этой матрицы. Но тогда в силу свойства 1 линейно зависимых совокупностей все k строк этой матрицы линейно зависимы.

Замечание. Если определитель квадратной матрицы A порядка n равен нулю, то ранг такой матрицы заведомо меньше n . В силу теоремы о ранге матрицы максимальное число линейно независимых строк в матрице A также меньше n . Но для матрицы, имеющей n строк, это означает, что вся совокупность её строк линейно зависима.

Учитывая доказанную выше теорему о том, что если строки (столбцы) определителя линейно зависимы, то такой определитель равен нулю, получаем следующий критерий равенства определителя нулю.

Теорема 4. Для того чтобы определитель матрицы был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы его строки были линейно зависимыми.

Следствие 1. Наибольшее число линейно независимых столбцов матрицы равно числу линейно независимых строк.

Следствие 2. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

Следствие 3. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

Доказательство утверждений 1–3 легко следует из соответствующих свойств определителей.

Таким образом, для того, чтобы найти ранг произвольной матрицы необходимо:

- 1) привести матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований;
- 2) подсчитать количество ненулевых строк ступенчатой матрицы.

Пример 4. Определите ранги матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Решение:

- а) Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{II}-\text{I} \\ \text{III}+2\cdot\text{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{III}-2\cdot\text{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Полученная матрица имеет две ненулевые строки, следовательно $\text{rank} = 2$.

б) Произведем с исходной матрицей следующие элементарные преобразования. Сложим соответственно элементы первой и третьей строк, а затем разделим на 4 элементы первой строки.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Из элементов первой строки вычтем соответствующие элементы второй строки, после чего вычеркнем первую строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы равен 2, так как, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следовательно, $\text{rank } A = 2$.

в) Вычеркнув из этой матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ вторую

строку, а затем 2, 3 и 4 столбцы, получим матрицу $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$,

эквивалентную заданной. Так как $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то $\text{rank } A = 2$.

В заключение этого параграфа отметим два **свойства ранга** матрицы.

1. Ранг произведения двух матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей:

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank } A, \text{rank}(AB) \leq \text{rank } B.$$

2. При умножении произвольной матрицы A слева или справа на невырожденную квадратную матрицу B её ранг не изменяется. Другими словами, если $\det B \neq 0$, то

$$\text{rank}(BA) = \text{rank } A, \text{rank}(AB) = \text{rank } A.$$

ПРАКТИКУМ 1.3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. РАНГ

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1.3.1. Дана матрица. Найдите обратную матрицу:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение:

а) Найдем определитель матрицы

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -48 + 84 - 9 = 27 \neq 0.$$

Так как $\det A \neq 0$, то матрица A^{-1} существует.

Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 8 = -48;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 0 - 6 \cdot 7) = 42;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = -3;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Запишем присоединенную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3;$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3.$$

б) Сначала найдем определитель исходной матрицы третьего порядка:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot (3 \cdot 4 - 3 \cdot 1) - 2 \cdot (1 \cdot 4 - 1 \cdot 5) + 2 \cdot (1 \cdot 3 - 3 \cdot 5) = \\ &= 3 \cdot 9 - 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-12) = 5. \end{aligned}$$

Далее находим алгебраические дополнения всех элементов этого определителя:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

В соответствии с формулой (4) получим:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку и убедимся, что произведение исходной матрицы A на обратную матрицу A^{-1} равно единичной матрице E третьего порядка:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 9 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-12) & 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot (-4) + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 7 \\ 1 \cdot 9 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-12) & 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-4) + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 7 \\ 5 \cdot 9 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-12) & 5 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 5 \cdot (-4) + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 7 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

1.3.2. Дана матрица A , найдите A^{-1} :

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} x & z \\ y & -x \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.3.3. Найдем методом окаймляющих миноров ранги следующих матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Решение:

а) Фиксируем минор порядка два, отличный от нуля, стоящий в первых двух строках, и в третьем и четвертом столбцах матрицы:

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Минор порядка три, стоящий в левом верхнем углу

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

окаймляет предшествующий минор и также отличен от нуля.

Однако, оба возможных окаймляющих минора порядка четыре равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, ранг матрицы найден по методу окаймляющих миноров и равен 3.

б) Т.к. все миноры 2-го порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

равны нулю, а среди миноров 1-го порядка, т.е. среди элементов этих матриц, есть элементы не равные нулю, то $\text{rank} = 3$.

в) Т.к. в матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

есть миноры второго порядка, не равные нулю, то $\text{rank} = 2$.

г) Т.к. единственный минор 3-го порядка (который в данном случае совпадает с определителем матрицы) отличен от нуля, то

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = 3.$$

д) Все миноры второго и третьего порядков матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

равны нулю, так как элементы строк этих миноров пропорциональны. Миноры же первого порядка (сами элементы матрицы) отличны от нуля. Следовательно, $\text{rank} = 1$.

1.3.4. Определить ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение:

а) Вычтем из элементов 4 столбца элементы 3 столбца, а затем вычеркнем 4 столбец:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

т.е. $\text{rank } A = 3$.

б) Произведем следующие элементарные преобразования:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{II} \leftrightarrow \text{I} \\ \text{III} \leftrightarrow \text{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 3 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{II} - 4 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 5 \cdot \text{I} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 5 \cdot \text{III} - 11 \cdot \text{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}.$$

Соответственно $\text{rank} = 3$.

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rank} = 2.$$

1.3.5. Определить ранг матрицы и найдите базисные миноры:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.3.6. Определите ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.3.7. С помощью элементарных преобразований матрицы выяснить, является ли совокупность строк линейно зависимой или линейно независимой:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } a_1 = (1 \quad -4 \quad 3), & a_1 = (5 \quad 4 \quad 3), \\ a_2 = (3 \quad -1 \quad 5), & \text{б) } a_2 = (3 \quad 3 \quad 2), \\ a_3 = (2 \quad -3 \quad 1). & a_3 = (8 \quad 1 \quad 3). \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{в) } a_1 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 5), & a_1 = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1), \\ a_2 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 3 \quad 4), & \text{г) } a_2 = (1 \quad -1 \quad -1 \quad 1), \\ a_3 = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \quad 7), & a_3 = (1 \quad -1 \quad 1 \quad -1), \\ a_4 = (2 \quad -3 \quad 4 \quad 11 \quad 12). & a_4 = (1 \quad 1 \quad -1 \quad -1). \end{array}$$

1.3.8. Найти какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему совокупности строк:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } a_1 = (2 \quad 1 \quad -3 \quad 1), & a_1 = (1 \quad 2 \quad 3), \\ a_2 = (4 \quad 2 \quad -6 \quad 2), & a_2 = (2 \quad 3 \quad 4), \\ a_3 = (6 \quad 3 \quad -9 \quad 3), & \text{б) } a_3 = (3 \quad 2 \quad 3), \\ a_4 = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1). & a_4 = (4 \quad 3 \quad 4), \\ & a_5 = (1 \quad 1 \quad 1). \end{array}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.3.9. Найдите обратную матрицу:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} a & -b \\ -a & b \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{pmatrix};$

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix};$

е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 5 & -4 \\ 5 & -4 & -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$

1.3.10. Доказать, что матрица, обратная к невырожденной верхней (нижней) треугольной матрице, также является верхней (нижней) треугольной.

1.3.11. Пользуясь результатом задачи 1.3.10 и определением обратной матрицы, найти обратную матрицу для данной невырожденной матрицы порядка n :

а) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$

б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a^2 & a & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a^{n-1} & a^{n-2} & a^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$

1.3.12. Решить матричное уравнение:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$

б) $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$

в) $X \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

д) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$

е) $X \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

ж) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$

з) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

1.3.13. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1.3.15. Пусть A – невырожденная матрица, и α – произвольное отличное от нуля число. Доказать справедливость свойства

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$$

1.3.16. Доказать, что матрица, обратная к симметричной невырожденной матрице, также является симметричной.

1.3.17. Матрицы A и B называются перестановочными, если они удовлетворяют равенству

$$AB = BA$$

Пусть A и B невырожденные матрицы одного и того же порядка. Показать, что свойства перестановочности пар матриц A и B , A и B^{-1} , A^{-1} и B^{-1} , A^{-1} и B равносильны между собой.

1.3.18. Пусть матрица A такова, что матрица $E - A$ является невырожденной и при некотором натуральном m имеет место равенство $A^m = O$. Доказать справедливость равенства

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^{m-1}.$$

1.3.18. Как изменится обратная матрица A^{-1} , если в данной матрице A все элементы i -й строки умножить на отличное от нуля число α ?

1.3.19. Как изменится обратная матрица A^{-1} , если в данной матрице A переставить j -й и k -й столбцы?

1.3.20. Показать, что равенство

$$AB - BA = E$$

не может выполняться ни для каких матриц A и B .

1.3.21. Определить ранг матрицы и найдите базисные миноры:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.3.22. Определите ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{д) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{е) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{ж) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$$

$$\text{з) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{и) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ -2 & 1 & 3 & 3 & -9 \\ -4 & -3 & 11 & -19 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\text{к) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 8 & 2 & -19 \end{pmatrix}$$

$$\text{л)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{м)} \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$$

$$\text{н)} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{о)} \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$$

1.3.23. Найти ранг матрицы размера $n \times n$

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{pmatrix}$$

составленная из коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей*. Матрица-столбец B и матрица-столбец X :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

называются столбцом свободных членов и столбцом неизвестных соответственно. Матрица

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

размера $m \times (n + 1)$ называется *расширенной матрицей* системы. Таким образом, систему (1) можно представить в эквивалентной краткой матричной записи:

$$A \cdot X = B. \quad (2)$$

Действительно,

$$AX = B \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \right.$$

Совокупность чисел $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ называется *решением системы* (1) если при их подстановке вместо неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ соответственно, каждое уравнение превращается в верное числовое равенство (тождество).

Например, для системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

решением будут являться числа $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Действительно, подставляя 2 и 3 вместо неизвестных, получим

$$\begin{cases} 2 - 3 = -1, \\ 2 \cdot 2 + 3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = -1, \\ 7 = 7. \end{cases}$$

Если система (1) имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной*. Если система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет только одно решение и *неопределенной*, если более одного.

Пример 1.

а) Система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ -4x_1 - 2x_2 = -10 \end{cases}$$

является совместной и неопределённой, поскольку у неё имеется, по крайней мере, два различных решения:

$$1) x_1 = 1, x_2 = 3; \quad 2) x_1 = 0, x_2 = 5.$$

б) Система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

несовместна, так как ни при каком выборе значений x_1 и x_2 выражение $2x_1 + x_2$ не может равняться одновременно и числу 5 и числу 3.

Теорема 1 (теорема Крёнекера – Капелли¹, критерий совместности СЛУ). Система линейных уравнений (2) совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы:

$$\text{rank } A = \text{rank}(A | B).$$

Доказательство:

Необходимость ($\Rightarrow$). Пусть система $A \cdot X = B$ совместна, и столбец $C = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)^T$ является одним из её решений, т. е. имеет место тождество

$$AC = B \tag{3}$$

Это тождество равносильно тому, что столбец B есть линейная комбинация столбцов основной матрицы с коэффициентами $c_1, c_2, \dots, c_n$. Из теоремы о базисном миноре легко вывести, что столбец B будет линейной комбинацией только базисных столбцов основной матрицы A . Поэтому если к совокупности базисных столбцов основной матрицы A добавить столбец B , то полученная совокупность непре-

¹ Альфредо Капелли (итал. Alfredo Capelli; 1855–1910) – итальянский математик, основные работы по алгебре, открыл Тождество Капелли.

менно будет линейно зависимой. Здесь мы воспользовались свойством 1 линейно зависимых и независимых совокупностей. Но это означает, что максимальное число линейно независимых столбцов в основной матрице совпадает с максимальным числом линейно независимых столбцов в расширенной матрице. По теореме о ранге матрицы получаем

$$\text{rank } A = \text{rank}(A|B)$$

Достаточность ($\Leftarrow$). Пусть имеет место равенство $\text{rank } A = \text{rank } \tilde{A}$. Тогда любой базисный минор основной матрицы A будет базисным минором и для расширенной матрицы $A|B$.

По теореме о базисном миноре столбец B является линейной комбинацией базисных столбцов матрицы A . К этой линейной комбинации можно добавить (с нулевыми коэффициентами) и все остальные столбцы матрицы A . Следовательно, столбец B будет некоторой линейной комбинацией всех столбцов матрицы A . По определению операции матричного умножения коэффициенты этой линейной комбинации суть некоторое решение системы (2).

Следствие. Так как все миноры матрицы основной A являются в то же время и минорами расширенной матрицы $A|B$, то $\text{rank } A \geq \text{rank}(A|B)$. Следовательно, система (2) является несовместной тогда и только тогда, когда

$$\text{rank } A < \text{rank}(A|B).$$

Пример 2. Исследовать совместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение:

Выпишем основную и расширенную матрицы этой системы:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A|B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдём ранг основной матрицы A . Вычислим её определитель, т. е. единственный минор порядка 3:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 0.$$

Так как он равен нулю, далее будем вычислять миноры второго порядка. Первый же из этих миноров оказывается отличным от нуля:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

Мы видим, что наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A равен 2. Следовательно, $\text{rank } A = 2$.

Найдём ранг расширенной матрицы $A|B$. Как отмечено выше, $\text{rank}(A|B) \geq \text{rank } A = 2$. Поэтому достаточно проверить только миноры третьего порядка матрицы $\overline{A}$:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 - 1 - 2 - 2 - 2 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 1 + 2 + 1 - 2 + 4 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 4 + 1 + 4 - 2 = 0.$$

Мы видим, что в матрице $A|B$ все миноры третьего порядка равны нулю. Следовательно, $\text{rank}(A|B) = 2$.

Таким образом,

$$\text{rank } A = \text{rank}(A|B).$$

где Δ – определитель основной матрицы системы, Δ_j – определитель, получаемый из Δ путем замены j -го столбцом свободных членов $B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)^T$, т.е.

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство:

Покажем, что крамеровская система (4) совместна. Действительно, так как матрица A является невырожденной, то её единственным базисным минором является её определитель. Поскольку порядок матрицы A равен n , то и $\text{rank } A = n$. Как уже неоднократно отмечалось, ранг расширенной матрицы $A|B$ не может быть меньше ранга основной матрицы A , т. е. $\text{rank } A \geq n$. Но в данном случае он не может быть и больше, чем n , поскольку число строк в матрице $A|B$ равно n . Таким образом,

$$\text{rank}(A|B) = n = \text{rank } A,$$

и, следовательно, в силу теоремы Кронекера – Капелли крамеровская система совместна.

Пусть столбец X является решением крамеровской системы (4), т. е. имеет место тождество $AX = B$. Так как матрица A является невырожденной, то она имеет обратную матрицу A^{-1} . Умножим обе части тождества $AX = B$ слева на матрицу A^{-1} и воспользуемся равенством $A^{-1}A = E$:

$$\begin{aligned} A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow EX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B. \end{aligned}$$

Мы видим, что решение системы (4) однозначно определяется формулой

$$X = A^{-1}B \tag{6}$$

следовательно, оно является единственным.

Покажем, что компоненты этого решения можно найти с помощью формул Крамера (5).

Используя явную формулу для обратной матрицы и определение матричного умножения, запишем равенство (6) в покомпонентном виде

$$\sum_{k=1}^n A_{kj} b_k = \Delta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Можно заметить, что сумма $\sum_{k=1}^n A_{kj} b_k$ есть разложение определителя Δ_j , полученного из основного определителя Δ заменой его j -го столбца столбцом правых частей b , по этому столбцу.

$$\sum_{k=1}^n A_{kj} b_k = \Delta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Тем самым справедливость формул (5) доказана.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 5x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

Решение:

Находим основной определитель Δ исходной системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 5 = 13.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение (система определена). Это решение находим по формулам Крамера (5.2). Вычислим определители Δ_1 и Δ_2 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 12 \cdot 1 - (-2) \cdot 7 = 26;$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 12 \cdot 5 = -39.$$

Определим неизвестные:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{26}{13} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{39}{13} = -3.$$

Выполним проверку. Подставим $x_1 = 2$ и $x_2 = -3$ в уравнения системы:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) = 12, \\ 5 \cdot 2 + (-3) = 7, \end{cases}$$

т.е. система решена правильно.

Пример 4. Найдем решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 9, \\ 7x + 8y = -6. \end{cases}$$

методом Крамера.

Решение:

Находим основной определитель Δ исходной системы уравнений:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \neq 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то решение системы существует и единственно.

Найдем определители Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 подставляя столбец свободных

членов $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ вместо первого, второго и третьего столбцов соответ-

ственно в определителе Δ :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -54,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 27,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 54.$$

Отсюда получим решение системы уравнений:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Lambda} = \frac{-54}{27} = -2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Lambda} = \frac{27}{27} = 1, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Lambda} = \frac{54}{27} = 2.$$

1.3.3. МЕТОД ГАУССА³

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решения систем линейных алгебраических уравнений является *метод Гаусса*, который заключается в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система уравнений вида (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots &\dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{cases}$$

Процесс решения системы по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (*прямой ход*) система приводится к ступенчатому (треугольному или трапециальному) виду:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ a_{kk}x_k + \dots + a_{kn}x_n & = & b_k, \end{array} \right. \quad (7)$$

где $k \leq n$, $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, k}$. Коэффициенты $a_{ii} = a_{11}, a_{22}, \dots$ называются главными элементами системы.

Опишем прямой ход метода Гаусса более подробно. Будем считать, что $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля).

³ Иоганн Карл Фридрих Гаусс (нем. Johann Carl Friedrich Gauß; 1777 – Гёттинген) – выдающийся немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. С именем Гаусса связаны фундаментальные исследования почти во всех основных областях математики: в алгебре, теории чисел, дифференциальной и неевклидовой геометрии, математическом анализе, теории функций комплексного переменного, теории вероятностей.

Для этого умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$:

[illegible]

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_{11} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} x_1 - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} x_2 - \dots - a_{1n} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} x_n = -b_1 \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}, \\ \left(a_{21} - a_{11} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} \right) x_1 + \left(a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} \right) x_2 + \dots + \left(a_{2n} - a_{1n} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} \right) x_n = \\ \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m. \end{array} \right.$$

третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n & = & b_3^{(1)}, \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m3}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n & = & b_m^{(1)}. \end{array} \right.$$

112

Аналогичным образом, считая главным элементом $a_{22}^{(1)} \neq 0$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме второго, и так далее. Продолжаем процесс, пока это возможно.

Если в процессе приведения системы к ступенчатому виду появляются нулевые уравнения, т.е. равенства вида $0 = 0$, их отбрасывают. Если же появляются уравнения вида $0 = b_i$, $b_i \neq 0$, то это свидетельствует о несовместности системы.

Второй этап (обратный ход) заключается в решении ступенчатой системы. Ступенчатая система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{kk}x_k + \dots + a_{kn}x_n & = & b_k, \end{array} \right.$$

вообще говоря, имеет бесчисленное множество решений. В последнем уравнении этой системы выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные $(x_{k+1}, \dots, x_n)$. Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение системы и выражаем x_{k-1} через $(x_{k+1}, \dots, x_n)$; затем находим $x_{k-2}, \dots, x_1$. Придавая свободным неизвестным $(x_{k+1}, \dots, x_n)$ произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы.

Замечание 1. Если ступенчатая система оказывается треугольной, т.е. $k = n$, то исходная система имеет единственное решение (является совместной и определенной). Из последнего уравнения находим x_n , из предпоследнего x_{n-1} , далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные $x_{n-2}, \dots, x_1$.

Замечание 2. На практике удобнее работать не с системой уравнений, а с соответствующей расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над её строками. Удобно,

чтобы коэффициент a_{11} был равен 1 (уравнения переставить местами, либо разделить обе части уравнения на $a_{11} \neq 1$).

Подробно поясним применение метода Гаусса на примерах.

Пример 5. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

Решение:

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\Pi - 2 \cdot \text{I}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 9 \end{array} \right).$$

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 3x_2 = 9. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x_2 = 3$; подставляя это значение в первое уравнение, получим $x_1 = 2$.

Итак, общее решение (оно же единственное частное) есть $\{2; 3\}$.

Ответ: система совместна и определена; общее решение = частное решение = $\{2; 3\}$.

Пример 6. Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение:

Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{II}-\text{I} \\ \text{III}+2\cdot\text{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{III}-2\cdot\text{II} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Эта система неопределенна, т.к. невозможно однозначно определить значения неизвестных. Выразим x_2 , а затем и x_1 через x_3 :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_2 = 2x_3 + 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 - 4, \\ x_2 = 2x_3 + 4. \end{cases}$$

Обозначая свободную переменную x_3 например через c , получим общее решение системы:

$$\{-c - 8; 2c + 4; c\}.$$

Частное решение системы получим, например, взяв $c = 0$:

$$\{-8; 4; 0\}.$$

Ответ: система совместна и неопределенна; общее решение $\{-c - 8; 2c + 4; c\}$, частное решение $\{-8; 4; 0\}$.

Пример 7. Исследовать систему линейных уравнений на совместность; если она совместна, то найти общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & | & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & | & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & | & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & | & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{II}-6\text{I} \\ \text{III}+7\cdot\text{I} \\ \text{IV}+3\cdot\text{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & | & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & | & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & | & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{III}+\text{II} \\ \text{IV}+\text{II} \end{matrix} \sim \\
\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & | & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II}\cdot(-1) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & | & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Так как

$$\text{rank } A = \text{rank}(A | B) = 2 < 4 = n,$$

то система совместна и неопределенна (т.е. имеет бесконечно много решений).

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 15. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим x_2 через x_3 и x_4 :

$$x_2 = 1 - x_3 - \frac{19}{15}x_4.$$

Подставляя выражение для x_2 в первое уравнение, получим:

$$x_1 = -1 - \frac{7}{15}x_4.$$

Таким образом, получили общее решение системы:

$$\left\{ -1 - \frac{7}{15}x_4; 1 - x_3 - \frac{19}{15}x_4; x_3; x_4 \right\}$$

Здесь x_3 и x_4 — свободные переменные, x_1 и x_2 — главные переменные.

Обозначив свободные переменные через a и b , запишем общее решение в виде:

$$\left\{ -1 - \frac{7}{15}b; 1 - a - \frac{19}{15}b; a; b \right\}.$$

Частное решение системы можно получить, например взяв $a = 0, b = 0$:

$$\{-1; 1; 0; 0\}.$$

Ответ: система совместна и неопределенна; общее решение $\left\{-1 - \frac{7}{15}b; 1 - a - \frac{19}{15}b; a; b\right\}$, частное решение $\{-1; 1; 0; 0\}$.

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

Решение:

Запишем расширенную матрицу системы:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right)$$

Приведем ее к ступенчатому виду.

$$\begin{aligned} A|B &= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - 2 \cdot \text{I} \end{array} \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{III} + \text{II} \end{array} \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{III} + \text{II} \end{array} \end{aligned}$$

Заметно, что вторая строка матрицы соответствует не имеющему решения уравнению

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 3 \text{ или } 0 = 3.$$

Соответственно система решений не имеет.

Ответ: система несовместна.

1.3.4. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных. Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Пусть дана СЛУ вида (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{cases}$$

или в эквивалентной матричной записи:

$$AX = B.$$

Если матрица A невырожденная (т.е. $\det A \neq 0$), то мы можем найти обратную матрицу A^{-1} , которая вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A},$$

где $\tilde{A}$ – присоединённая матрица, состоящая из алгебраических дополнений.

Выполним следующие действия:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot AX &= A^{-1} \cdot B, \\ (A^{-1}A) \cdot X &= A^{-1} \cdot B, \\ E \cdot X &= A^{-1} \cdot B, \\ X &= A^{-1} \cdot B. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом мы можем найти столбец неизвестных X , т.е. решить систему (1).

Заметим, что для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Пример 9. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases}$$

Решение:

Запишем данную систему в виде одного матричного уравнения

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Для решения матричного уравнения с помощью обратной матрицы вычислим определитель матрицы A

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Так как $\det A \neq 0$, то матрица A имеет обратную A^{-1} .

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(27 - 20) = -7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 15 = -6;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 3) = -3;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 15 = 6;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(7 - 10) = 3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -(28 - 27) = -1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 18 = 3;$$

Тогда

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем решения системы по формуле (7):

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы нашли решение данной системы:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -5; \quad x_3 = 3.$$

Ответ: система совместная и определенная, общее решение = частное решение = $\{2; -5; 3\}$

1.3.5. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение. Если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, то система (1) называется *однородной*:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & 0, \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

или в матричной форме $AX = O$, где $O = (0 \ 0 \ \dots \ 0)^T$.

Однородная система всегда совместна, так как существует так называемое *тривиальное решение* $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ (в этом нетрудно убедиться).

Теорема 3. Однородная система (9) может иметь и нетривиальные решения, но только в случае, когда определитель основной матрицы системы равен нулю: $|A| = 0$. При этом система (9) будет являться неопределенной, т.е. иметь бесконечное множество решений.

Следствие. Однородная система является совместной неопределенной тогда и только тогда, когда $r = \text{rank } A < n$.

Определение. Пусть общее решение системы (9) записано в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t_1, \dots, t_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(t_1, \dots, t_{n-r}) \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix}$$

где $x_1, \dots, x_r$ – главные переменные, $t_1, \dots, t_{n-r}$ – значения свободных переменных $x_{r+1}, \dots, x_n$. Выберем $n-r$ решений системы (3), полученных из общего решения следующим образом: одно из значений свободных переменных полагается равным 1, а остальные равными 0:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1(1,0,\dots,0) \\ \vdots \\ x_r(1,0,\dots,0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_1(0,1,\dots,0) \\ \vdots \\ x_r(0,1,\dots,0) \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1(0,0,\dots,1) \\ \vdots \\ x_r(0,0,\dots,1) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Эти решения образуют т.н. *нормальную фундаментальную систему решений* однородной системы (9).

Теорема 4. Любое решение X системы (9) может быть единственным образом представлено в виде:

$$X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_{n-r} X_{n-r}$$

где $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ – нормальная фундаментальная система решений, $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ – некоторые числа.

Определение. Любой набор из $n - r$ решений системы (9), обладающих свойством, сформулированным в теореме 4, называется *фундаментальной системой решений* однородной системы.

Теорема 5. Набор из $n - r$ произвольных решений системы (9)

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \dots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ \dots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix}, \dots, X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1^{(n-r)} \\ \dots \\ x_n^{(n-r)} \end{pmatrix}$$

образует фундаментальную систему решений тогда и только тогда,

когда матрица, составленная из их компонентов

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(n-r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & \dots & x_n^{(n-r)} \end{pmatrix}$$

имеет ранг $n - r$.

Теорема 6. Пусть дана некоторая неоднородная система линейных уравнений

$$AX = B \quad (2)$$

а

$$AX = O \quad (9)$$

– соответствующая ей однородная система. Общее решение системы (2) может быть представлено в виде суммы общего решения системы (2) и какого-то одного (частного) решения системы (9).

Пример 10. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Pi - 2 \cdot I \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как столбец свободных членов при всех элементарных преобразованиях не изменяется, его можно не писать и ограничиться матрицей системы A :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Pi - 2 \cdot I \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Однородная система совместна всегда, т. е. ранг $r(A)$ матрицы A однородной системы всегда равен рангу $\text{rank}(A | B)$ расширенной матрицы $(A | B)$, в данном примере $\text{rank}(A) = \text{rank}(A | B) = 2$. Количество переменных n также равно 2:

$$n = \text{rank}(A) = \text{rank}(A | B) = 2,$$

значит, система определена, т.е. имеет единственное (очевидно, тривиальное – нулевое) решение.

Подробнее, запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 7x_2 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения получим $x_2 = 0$. Подставляя это значение в первое уравнение, получим $x_1 = 0$.

Ответ: общее решение $(0; 0)$.

Пример 11. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Запишем матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Pi - 2 \cdot I} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Pi : 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A | B) = 2 < 3 = n,$$

то система неопределенна. Количество главных переменных равно $r(A) = 2$, количество свободных переменных равно $n - \text{rank}(A) = 3 - 2 = 1$. Для определения главных переменных выберем какой-нибудь не равный нулю минор второго порядка получен-

ной матрицы A , например, минор $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Его столбцы – 1-й и 2-й

столбцы матрицы A – соответствует переменным x_1 и x_2 – это будут главные переменные, а x_3 – свободная переменная. Заметим, что в качестве главных переменных в данном примере нельзя выбрать пару x_2 и x_3 , так как соответствующий им минор равен нулю:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения, выражая x_2 через x_3 , получим $x_2 = x_3$; подставляя это выражение в первое уравнение, получим $x_1 = 0$.

Обозначив свободную переменную через t , получим общее решение системы: $(0; t; t) = t \cdot (0; 1; 1)$. Фундаментальную систему решений образует, например, решение $(0; 1; 1)$.

Ответ. общее решение системы $(0; t; t)$; фундаментальная система решений $(0; 1; 1)$.

ПРАКТИКУМ 1.4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1.4.1. Решить систему методом Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 3x + 2y + z = 10, \\ 4x + 3y - 2z = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 5; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение:

а) Находим определитель $\Delta = \det A$ исходной системы уравнений

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 3x + 2y + z = 10, \\ 4x + 3y - 2z = 4. \end{cases} \\ \Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \\ = -7 + 20 + 1 = 14. \end{aligned}$$

Так как определитель $|A|$ исходной системы уравнений отличен от нуля, то исходная система уравнений имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера (5.2):

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{14} = \frac{8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{14} = \frac{14}{14} = 1;$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{14} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{28}{14} = 2;$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{14} = \frac{42}{14} = 3.$$

б) Решим систему $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -17;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -8;$$

$$x_1 = \frac{16}{17}; \quad x_2 = -\frac{3}{17}; \quad x_3 = \frac{8}{17}.$$

в) Находим основной определитель Δ исходной системы уравнений:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = -60,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = -90.$$

Соответственно

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-30}{-30} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-60}{-30} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-90}{-30} = 3.$$

1.4.2. Решить систему методом Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x - 3y = 1, \\ x + 11y = 6. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ 4x + 5y + 6z = 19, \\ 7x + 8y = 1. \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x + 3y - 6z = 12, \\ 3x + 2y + 5z = -10, \\ 2x + 5y - 3z = 6. \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 3x + 2y + 2z = -1, \\ x - y + 5z = -2. \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} x \cos a - y \cos a = \cos 2a, \\ x \sin a + y \cos a = \sin 2a. \end{cases}$$

1.4.3. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 10x_5 = -10, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 9. \end{cases}$$

Решение:

$$\text{а) Решим систему } \begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

Преобразуем расширенную матрицу исходной системы уравнений в эквивалентную матрицу ступенчатого вида:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array} \right) & \text{I} \leftrightarrow \text{II} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array} \right) \text{II} - 3 \cdot \text{I} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 9 & 3 \end{array} \right) \text{III} + 5\text{I} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array} \right) \text{III} \cdot \left(-\frac{1}{11} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Мы поменяли местами первую и вторую строки, вычли из остальных двух строк первую, умноженную, соответственно, на три и четыре, а затем из третьей строки вычли вторую строку, умноженную на 5, и, наконец, разделили на -11 последнюю строку.

В итоге исходная система уравнений сводится к следующей:

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ -y + 4z = 5, \\ z = 2. \end{cases}$$

Данная система совместна и определена. Она имеет единственное решение: $x = -1$, $y = 3$, $z = 2$.

Ответ: общее решение $\{-1; 3; 2\}$.

б) Решим систему
$$\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} \leftrightarrow \text{I} \\ \text{III} \leftrightarrow \text{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 3 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} - 4 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 5 \cdot \text{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ 5 \cdot \text{III} - 11 \cdot \text{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array} \right).$$

Таким образом, исходная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ -5y - 10z = 40, \\ 6z = 18. \end{cases}$$

Откуда получаем $z = 3$, $y = 2$, $x = 1$.

Ответ: система совместная и определенная, общее решение $\{1; 2; 3\}$.

в) Решим систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 10x_5 = -10, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 9. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 5 & -5 & 10 & -10 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 3 \cdot \text{I} \sim \\ \text{IV} - \text{I} \\ \text{V} - 2 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & -11 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & -11 & 13 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \text{III} - \text{II} \sim \\ \\ \text{V} - \text{II} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{IV} - \text{III} \\ \text{V} - \text{III} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{III} \cdot \frac{1}{2} \sim \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Каждая из двух последних строк этой матрицы соответствует уравнению

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется любым набором чисел $x_1, x_2, \dots, x_5$, и его следует удалить из системы. Таким образом, система с только что полученной расширенной матрицей эквивалентна системе с расширенной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Этой матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = -2, \\ x_2 - x_3 - x_5 = 1, \\ x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -4. \end{cases}$$

Если неизвестным x_4 и x_5 придать произвольные значения (т.е. выбрать их в качестве свободных), то из последнего уравнения системы, получим

$$x_3 = -4 + 2x_4 - 3x_5.$$

Подставив выражения x_3 , x_4 , и x_5 во второе уравнение той же системы, получим

$$x_2 = -3 + 2x_4 - 2x_5.$$

Теперь из первого уравнения можно получить

$$x_1 = 4 - x_4 + x_5.$$

Окончательно решение системы представляется в виде

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_4 + x_5, \\ x_2 = -3 + 2x_4 - 2x_5, \\ x_3 = -4 + 2x_4 - 3x_5, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = 4 - a + b, \\ x_2 = -3 + 2a - 2b, \\ x_3 = -4 + 2a - 3b, \\ x_4 = a, \\ x_5 = b. \end{cases}$$

Это общее решение системы. Найдём теперь одно из частных решений. Положим например $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Тогда

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = -4.$$

Ответ: $\{4 - x_4 + x_5; -3 + 2x_4 - 2x_5; -4 + 2x_4 - 3x_5; x_4; x_5\}$ – общее решение; $\{4; -3; -4; 0; 0\}$ – частное решение.

1.4.4. Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решение.

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - 4y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8 \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 - 18x_3 + 11x_4 = -13, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \end{cases}$$

$$\text{з) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$$

$$\text{и) } \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$$

$$\text{К) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 7 \end{cases}$$

$$\text{л) } \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

[illegible]

$$\text{H)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_n = n, \\ 2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_n = 2n, \\ \\ (n-1)x_1 + (n-1)x_2 + \dots + (n+1)x_n = (n-1)n \\ nx_1 + nx_2 + \dots + nx_n = 0 \end{array} \right.$$

[illegible]

1.4.5. Пользуясь определением, выяснить, является ли совокупность строк

$$a_1 = (1 \ 3 \ 5 \ -1), \ a_2 = (2 \ -1 \ -3 \ 4), \\ a_3 = (5 \ 1 \ -1 \ 7), \ a_4 = (7 \ 7 \ 9 \ 1).$$

линейно зависимой. В случае линейной зависимости строк указать какую-либо их нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевой строке.

Решение:

Следуя определению, составим линейную комбинацию данных строк с неопределёнными коэффициентами a_1, a_2, a_3, a_4 и приравняем её к нулевой строке:

$$a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 + a_4 a_4 = 0$$

В силу определения операций умножения строки на число и сложения строк — это равенство равносильно однородной системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 + 7\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 7\alpha_4 = 0 \\ 5\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 + 9\alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Наша задача состоит, таким образом, в том, чтобы выяснить, имеет ли эта система ненулевые решения, и, если имеет, найти хотя бы одно из них.

Решим полученную систему методом Гаусса. Поскольку при элементарных преобразованиях строк расширенной матрицы нулевой столбец правых частей может перейти только в нулевой столбец, достаточно преобразовывать не расширенную, а только основную матрицу этой системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \\ 5 & -3 & -1 & 9 \\ -1 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -14 & -14 \\ 0 & -13 & -26 & -26 \\ 0 & 6 & 12 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На последнем этапе преобразований мы исключили из матрицы нулевую строку и переставили третий и четвёртый столбцы.

Из полученного вида матрицы следует, что её ранг равен 3. Поскольку он меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений, среди которых только одно является нулевым, а все остальные – ненулевые. Следовательно, существуют нетривиальные линейные комбинации данных строк, равные нулевой строке, а это означает, что данные строки линейно зависимы.

Найдём одну из нетривиальных линейных комбинаций строк a_1, a_2, a_3, a_4 , равную нулевой строке. Для этого вернёмся от преобразованной матрицы к системе, учитывая при этом изменение нумерации неизвестных, вызванное перестановкой третьего и четвёртого столбцов матрицы:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 7\alpha_4 + 5\alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + 2\alpha_4 + 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

в этой системе неизвестные a_1, a_2, a_4 являются базисными, а неизвестная a_3 – свободной.

Положив, например, $a_3 = 1$, из системы найдем соответствующие значения базисных неизвестных:

$$a_4 = 0, \quad a_2 = -2, \quad a_1 = -1.$$

Следовательно, одна из нетривиальных линейных комбинаций данных строк a_1, a_2, a_3, a_4 , равная нулевой строке, имеет коэффициенты $a_1 = -1, a_2 = -2, a_3 = 1, a_4 = 0$. :

$$-a_1 - 2a_2 + a_3 = 0.$$

1.4.6. Найти максимальную линейно независимую подсистему совокупности строк

$$a_1 = (5 \ 2 \ -3 \ 1), a_2 = (4 \ 1 \ -2 \ 3),$$

$$a_3 = (1 \ 1 \ -1 \ -2), a_4 = (3 \ 4 \ -1 \ 2)$$

и представить все строки, не вошедшие в эту подсистему, в виде линейных комбинаций строк, входящих в подсистему.

Решение:

Из данных строк образуем матрицу и найдем её ранг.

Для простоты вычислений перед выполнением первого шага поменяем местами первую и третью строки. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

На первом шаге вычтем из второй, третьей и четвёртой строк первую, умноженную соответственно на числа 4, 5 и 3:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Перед выполнением второго шага поменяем местами вторую и четвёртую строки:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & -3 & 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

На втором шаге прибавим к третьей и четвёртой строкам вторую, умноженную на число 3:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 35 \\ 0 & 0 & 8 & 35 \end{pmatrix}.$$

Наконец, вычтем из четвёртой строки третью:

$$A \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как ранг полученной матрицы B равен 3, то в силу теоремы о ранге матрицы максимальное число линейно независимых строк в матрице B , а значит, и в матрице A , также равно 3.

Поскольку минор третьего порядка, расположенный в левом верхнем углу матрицы B , отличен от нуля, то согласно теореме о базисном миноре максимальную линейно независимую подсистему строк матрицы B образуют её первые три строки. Учитывая перестановки, сделанные в процессе преобразования матрицы A к матрице B , заключаем, что максимальную линейно независимую подсистему строк матрицы A образуют строки a_3, a_4, a_1 .

Согласно той же теореме о базисном миноре, строка a_2 является линейной комбинацией строк a_1, a_3, a_4 . Найдем коэффициенты этой линейной комбинации, т. е. такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ для которых имеет место равенство

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_3 + \alpha_3 a_4 = a_2.$$

В покомпонентном виде это равенство равносильно системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 5\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 4, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 1, \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = -2, \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 3. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\begin{aligned}
 A|B &= \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & -7 & 5 & 7 \\ 0 & 11 & -7 & -11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Так как ранг полученной матрицы совпадает с числом неизвестных, то система имеет единственное Решение:

Для его отыскания вернёмся от расширенной матрицы к системе:

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 3, \\ \alpha_2 = -1, \\ \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решая её, находим

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 0.$$

Таким образом, искомое представление строки a_2 в виде линейной комбинации строк a_1, a_3, a_4 есть

$$a_2 = a_1 - a_3.$$

1.4.7. Выяснить, является ли столбец b линейной комбинацией столбцов $a_1 - a_5$ и, если да, найти коэффициенты этой линейной комбинации:

$$b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Согласно условию задачи требуется выяснить, существуют ли такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, что имеет место равенство

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 + \alpha_5 a_5 = b.$$

В покомпонентном виде это равенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 5\alpha_1 + 6\alpha_2 - 2\alpha_3 + 7\alpha_4 + 4\alpha_5 = 7, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 + 4\alpha_4 + 2\alpha_5 = 3, \\ 7\alpha_1 + 9\alpha_2 - 3\alpha_3 + 5\alpha_4 + 6\alpha_5 = 10, \\ 5\alpha_1 + 9\alpha_2 - 3\alpha_3 + \alpha_4 + 6\alpha_5 = 8. \end{cases} \quad (10)$$

Следовательно, требуется установить, имеет ли эта система решения, и, если имеет, найти их.

Решим систему методом Гаусса. Рассмотрим расширенную матрицу системы:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 6 & -2 & 7 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & -3 & 5 & 6 & 10 \\ 5 & 9 & -3 & 1 & 6 & 8 \end{array} \right).$$

Для удобства выполнения первого шага вычтем из первой строки вторую, умноженную на число 2:

$$A|B \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & -3 & 5 & 6 & 10 \\ 5 & 9 & -3 & 1 & 6 & 8 \end{array} \right).$$

На первом шаге вычтем из второй, третьей и четвёртой строк первую, умноженную соответственно на числа 2, 7 и 5:

$$A|B \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & -3 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & -3 & 6 & 6 & 3 \end{array} \right).$$

На втором шаге вычтем из третьей и четвёртой строк вторую, умноженную на число 3:

$$A|B \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Перед выполнением 3-го шага переставим третий и четвёртый столбцы:

$$A|B \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На третьем шаге вычтем из четвёртой строки третью, умноженную на число 2:

$$A|B \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Так как ранги основной и расширенной матриц совпадают, то система совместна. Поскольку ранг матрицы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

Базисными столбцами преобразованной матрицы являются первые три столбца. Учитывая выполненную в процессе преобразований перестановку третьего и четвёртого столбцов, заключаем, что базисными столбцами исходной матрицы являются первый, второй и четвёртый столбцы. Следовательно, базисными переменными будут a_1, a_2, a_4 , а свободными a_3, a_5 .

Пусть $a_3 = C_1, a_5 = C_2$, где C_1 и C_2 произвольные постоянные. Переходя от преобразованной расширенной матрицы к системе, получаем

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_4 = 1, \\ 3\alpha_2 + 6\alpha_4 = 1 + C_1 - 2C_2, \\ -6\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы есть

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{1 + C_1 - 2C_2}{3}, \quad \alpha_4 = 0$$

Следовательно, общее решение системы (2.9) имеет вид

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{1 + C_1 - 2C_2}{3}, \quad \alpha_3 = C_1, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = C_2$$

где постоянные C_1 и C_2 могут принимать произвольные значения.

1.4.8. Пользуясь только определением, выяснить, являются ли данные строки линейно зависимыми. В случае линейной зависимости указать какую-нибудь их нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевой строке.

$$\begin{aligned} a_1 &= (1 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \quad 1), \\ \text{а)} \quad a_2 &= (2 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad -3), \\ a_3 &= (3 \quad -2 \quad -1 \quad 1 \quad -2), \\ a_4 &= (2 \quad -5 \quad 1 \quad -2 \quad 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= (1 \quad 1 \quad 0 \quad -3 \quad -1), \\ \text{б)} \quad a_2 &= (1 \quad -1 \quad 2 \quad -1 \quad 0), \\ a_3 &= (4 \quad -2 \quad 6 \quad 3 \quad -4), \\ a_4 &= (2 \quad 4 \quad -2 \quad 4 \quad -7). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= (1 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \quad -2), \\ \text{в)} \quad a_2 &= (2 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \quad 1), \\ a_3 &= (4 \quad -10 \quad 5 \quad -5 \quad 7), \\ a_4 &= (2 \quad -14 \quad 7 \quad -7 \quad 11). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= (1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -2), \\ \text{г)} \quad a_2 &= (3 \quad 3 \quad -3 \quad -3 \quad 4), \\ a_3 &= (2 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1), \\ a_4 &= (4 \quad 5 \quad -5 \quad -5 \quad 7). \end{aligned}$$

1.4.9. Проверить, является ли строка b линейной комбинацией строк a_1, a_2, a_3 . Если да, найти коэффициенты этой линейной комбинации.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{aligned} a_1 &= (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1), \\ a_2 &= (3 \ 2 \ 1 \ 1 \ -3), \\ a_3 &= (0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 6), \\ b &= (5 \ 4 \ 3 \ 3 \ -1). \end{aligned} & \text{б) } \begin{aligned} a_1 &= (1 \ 2 \ 3 \ -4), \\ a_2 &= (2 \ 3 \ -4 \ 1), \\ a_3 &= (2 \ -5 \ 1 \ 2), \\ b &= (2 \ -5 \ 8 \ -3). \end{aligned} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{в) } \begin{aligned} a_1 &= (2 \ -1 \ 3 \ 5), \\ a_2 &= (4 \ -3 \ 1 \ 3), \\ a_3 &= (3 \ -2 \ 3 \ 4), \\ b &= (4 \ -1 \ 15 \ 17). \end{aligned} & \text{г) } \begin{aligned} a_1 &= (1 \ 2 \ 3), \\ a_2 &= (2 \ 3 \ 4), \\ a_3 &= (1 \ 1 \ 1), \\ b &= (3 \ 2 \ 3). \end{aligned} \end{array}$$

1.4.10. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$$

Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & -3 & -1 \\ -7 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 15 & 15 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A | B) = 2 < 4 = n,$$

то система неопределенна. В качестве главных переменных можно выбрать x_1 и x_2 , соответствующие столбцам ненулевого минора второго порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 15 \end{vmatrix}$; в качестве свободных переменных — x_3 и x_4 .

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения, выражая x_2 через x_3 и x_4 , получим

$x_2 = -x_3 - \frac{19}{15}x_4$. Подставляя это выражение в первое уравнение, по-

лучим $x_1 = -\frac{7}{15}x_4$. Обозначая свободные переменные $-x_3$ через t_1 , x_4

через $15t_2$ запишем общее решение системы:

$$(-7t_2; -t_1 - 19t_2; t_1; 15t_2) = t_1(0; -1; 1; 0) + t_2(-7; -19; 0; 15).$$

Фундаментальную систему решений образует, например, пара реше-
ний

$$(0; -1; 1; 0) \text{ и } (-7; -19; 0; 15).$$

Ответ: общее решение системы

$$(-7t_2; -t_1 - 19t_2; t_1; 15t_2);$$

фундаментальная система решений

$$\{(0; -1; 1; 0), (-7; -19; 0; 15)\}.$$

1.4.11. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 4x - 6y = 0 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0 \\ \sqrt{3}x_1 - 3x_2 = 0 \\ -\sqrt{2}x_1 + \sqrt{6}x_2 = 0 \\ 2x_1 - \sqrt{12}x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0. \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{з) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.4.12. Решить систему методом Крамера и методом обратной матрицы:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + 3y + z = 1, \\ x + y - 4z = 0, \\ 4x + 5y - 3z = 1. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x - 2y - z = -5, \\ x + 3y + 2z = 2, \\ 5x - 2y + 4z = -7. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} ax + by + cz = a - b, \\ bx + cy + az = b - c, \\ cx + ay + bz = c - a. \end{cases}$$

1.4.13. Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решение (использовать метод Гаусса):

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 6x + 4y = 10. \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{д)} \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$$

$$\text{е)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\text{ж)} \begin{cases} 3x - y = -5 \\ 2x + 3y = 4 \\ -x + \frac{1}{3}y = \frac{5}{3} \\ x + 1,5y = 2 \end{cases}$$

$$\text{з)} \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ 2x - 4y - 3z = -1 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{и)} \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\text{к)} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

$$\text{л)} \begin{cases} 2\sqrt{5}x_1 - x_2 + \sqrt{5}x_3 = 1 \\ 10x_1 - \sqrt{5}x_2 + 5x_3 = \sqrt{5} \\ -2x_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}x_2 - x_3 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\text{м)} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$$

$$\text{н)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -3 \end{array} \right.$$

$$\text{о)} \left\{ \begin{array}{l} 45x_1 - 28x_2 + 34x_3 - 52x_4 = 9, \\ 36x_1 - 23x_2 + 29x_3 - 43x_4 = 3, \\ 35x_1 - 21x_2 + 28x_3 - 45x_4 = 16, \\ 47x_1 - 32x_2 + 36x_3 - 48x_4 = -17, \\ 27x_1 - 19x_2 + 22x_3 - 35x_4 = 6. \end{array} \right.$$

$$\text{п)} \left\{ \begin{array}{l} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{array} \right.$$

$$\text{р)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{array} \right.$$

1.4.14. Исследовать систему уравнений и найти её общее решение в зависимости от значений параметра λ :

$$\text{а)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -1, \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = -1. \end{array} \right.$$

$$\text{б)} \begin{cases} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1, \\ \lambda x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1. \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$$

1.4.15. Найти какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему совокупности строк и представить все строки, не вошедшие в эту подсистему, в виде линейных комбинаций строк, входящих в подсистему:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{array}{l} a_1 = (1 \ 0 \ 3 \ 5), \\ a_2 = (1 \ 2 \ 1 \ 3), \\ a_3 = (1 \ 1 \ 2 \ 4), \\ a_4 = (1 \ 6 \ -3 \ -1). \end{array} & \text{б)} \begin{array}{l} a_1 = (0 \ 1 \ 2 \ 6), \\ a_2 = (1 \ 1 \ 1 \ 1), \\ a_3 = (5 \ 4 \ 3 \ -1), \\ a_4 = (3 \ 2 \ 1 \ -3). \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{в)} \begin{array}{l} a_1 = (1 \ -1 \ -1), \\ a_2 = (3 \ -2 \ -4), \\ a_3 = (2 \ 1 \ 1), \\ a_4 = (1 \ 1 \ 1), \\ a_5 = (-2 \ -1 \ 1). \end{array} & \text{г)} \begin{array}{l} a_1 = (1 \ 2 \ 3), \\ a_2 = (2 \ 3 \ 4), \\ a_3 = (4 \ 3 \ 4), \\ a_4 = (1 \ 1 \ 1), \\ a_5 = (3 \ 2 \ 3). \end{array} \end{array}$$

1.4.16. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -\sqrt{8}x_1 + \sqrt{2}x_2 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1.4.17. Автозавод выпустил автомобили двух марок M_1 и M_2 в количестве 52 000 шт. На следующий год запланировано увеличение выпуска автомобилей марки M_1 на 75 %, а марки M_2 на 140 %. В результате выпуск автомобилей должен увеличиться в два раза. Сколько автомобилей каждой марки автозавод выпустил в текущем году и выпустит на следующий год?

Решение:

Обозначим через x – количество автомобилей марки M_1 , выпущенных в текущем году, а через y – количество автомобилей марки M_2 . Тогда в следующем году будет выпущено $x + 0,75x = 1,75x$ автомобилей M_1 и $y + 1,4y = 2,4y$ автомобилей M_2 .

Из условия задачи следует, что $x + y = 52000$ и $1,75x + 2,4y = 104000$.

Имеем систему

$$\begin{cases} x + y = 52000, \\ 1,75x + 2,4y = 104000. \end{cases}$$

Решая её, получим

$$x = 32000, \quad y = 20000.$$

Т.е. автозавод выпустил в текущем году 32000 автомобилей марки M_1 и 20000 автомобилей марки M_2 . В следующем году автозавод планирует выпустить $1,75 \cdot 32000 = 56000$ и $2,4 \cdot 20000 = 48000$ автомобилей соответственно.

1.4.18. Оператор станка-автомата имеет ежедневное задание на изготовление определенного количества деталей. Если ему удастся изготовить на одну деталь в час больше, то он закончит работу на полчаса раньше; если же в час будет изготавливаться на 5 деталей больше, то задание будет выполнено на 2 часа раньше. Сколько деталей в обычном режиме необходимо изготовить за один рабочий день?

Решение:

Обозначим через x время (в часах), необходимое работнику для выполнения ежедневного задания, а через y – количество деталей, которое необходимо изготовить в течение одного часа. Тогда xy – ежедневное задание работника.

Из условий задачи, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = (x - 0,5) \cdot (y + 1), \\ xy = (x - 2) \cdot (y + 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 0,5y = 0,5, \\ 5x - 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = 15. \end{cases}$$

Соответственно за один рабочий день в нормальном режиме рабочему необходимо изготовить $xy = 8 \cdot 15 = 120$ деталей.

1.4.19. Фермер вложил в прошлом году в зерноводство, животноводство и овощеводство 10 млн. рублей. В текущем году он собирается увеличить вложения в зерноводство в 2 раза, в животноводство в 3 раза, а вложения в овощеводство оставить на прошлогоднем уровне и выделяет на это 22 млн.руб.

В прошлом году фермер получил 780 тыс. рублей прибыли. Известно, что зерноводство приносит 10 % прибыли на вложенные средства, животноводство – 8 %, овощеводство – 6 %. Какую прибыль получит фермер в текущем году?

Решение:

Обозначим через x_1 (млн. руб.) прошлогодние вложения в зерноводство, x_2 – в животноводство, x_3 – в овощеводство. Получаем систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 22, \\ 0,1x_1 + 0,08x_2 + 0,06x_3 = 0,78 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 22, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 39. \end{cases}$$

Решая её (например методом Гаусса) получаем, что

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 3.$$

Соответственно, в текущем году фермер ожидает получить прибыль в размере:

$$p = 0,1 \cdot (2x_1) + 0,08 \cdot (3x_2) + 0,06 \cdot x_3 = 0,1 \cdot 4 + 0,08 \cdot 15 + 0,06 \cdot 3 = 1,78.$$

1.4.20. Изменим некоторые условия из предыдущего примера. Пусть зерноводство дает 8 % прибыли, животноводство – 10 %, овощеводство – 6 %, а вся прибыль, полученная фермером в прошлом году равна 840 тыс. руб. Какую прибыль получит фермер в текущем году?

Решение:

Пусть, по прежнему x_1 (млн. руб.) прошлогодние вложения в зерноводство, x_2 – в животноводство, x_3 – в овощеводство. Получаем систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 22, \\ 0,08x_1 + 0,1x_2 + 0,06x_3 = 0,84, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 22, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 42, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_2 - x_3 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - 2x_3, \\ x_2 = 2 + x_3. \end{cases}$$

Т.е. система уравнений является неопределенной.

Найдем прибыль:

$$\begin{aligned} p &= 0,08 \cdot (2x_1) + 0,1 \cdot (3x_2) + 0,06 \cdot x_3 = \\ &= 0,08 \cdot 2(8 - 2x_3) + 0,1 \cdot 3(2 + x_3) + 0,06 \cdot x_3 = 0,04x_3 + 1,88. \end{aligned}$$

Это значит, задача имеет множество решений: общая прибыль в текущем году зависит от прошлогодних вложений в овощеводство (x_3).

Логично определить в каком случае фермер получит максимальную прибыль, т.е. найти такое значение x_3 , при котором $p = \max$.

Заметим, что на x_1 , x_2 , x_3 должны быть наложены ограничения:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - 2x_3 \geq 0, \\ x_2 = 2 + x_3 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 \leq 4, \\ x_3 \geq -2, \\ x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x_3 \leq 4.$$

Очевидно, что прибыль $p = 0,04x_3 + 1,88$ будет максимальной при $x_3 = 4$.

1.4.21. Цены обращающихся на рынке акций A , B , C и D равны 77, 85, 110 и 75 денежных единиц (д.е.). Ожидаемый от них через год доход зависит от того, сохранится ли существующий обменный курс национальной валюты, повысится он или снизится.

Акция	Текущая цена, ден. ед. за 1 акцию	Ожидаемый доход, если обменный курс		
		понижится	не изменится	повысится
A	77	60	75	90
B	85	100	75	75
C	110	95	120	105
D	75	50	50	105

Составьте портфель из трех первых акций, обеспечивающий через год такой же ожидаемый доход, какой даст акция D . Найдите цену данного портфеля.

Решение:

Структура такого портфеля находится из системы уравнений

$$\begin{cases} 60x_1 + 100x_2 + 95x_3 = 50, \\ 75x_1 + 75x_2 + 120x_3 = 50, \\ 90x_1 + 75x_2 + 105x_3 = 105. \end{cases}$$

Здесь x_1 , x_2 , x_3 – количество акций A , B , C соответственно. Решая систему, найдем $x_1 = 2,43$, $x_2 = 0,22$, $x_3 = -1,24$. Т.е. в портфель нужно включить 2,43 акции A , 0,22 акции B и – 1,24 акции C (т.е. продать это количество акций C – этот вид операции называется «short»).

За такой портфель придется заплатить $77 \cdot 2,42 + 85 \cdot 0,22 - 110 \cdot 1,24 = 69,4$ д.е. Следовательно, продав одну акцию D сейчас и купив указанный портфель, немедленно получим $75 - 69,4 = 5,6$ д.е. дохода.

Описанное явление называется арбитраж. По мере увеличения предложения акций D и спроса на остальные акции установится система цен, исключаяющая получение арбитражного дохода. Одной из таких систем может быть 77, 85, 110 и 69,2.

1.4.22. У завода есть четыре потребителя, которым еженедельно отгружается готовая продукция. Груз доставляется каждому потребителю на автомашине упакованным в ящики, маркированные в зависимости от вида продукции.

Однажды, когда автомашины были уже отправлены, но еще находились в пути, обнаружилось, что один из четырех видов груза был отправлен по ошибке и его следует вернуть (причем в полной сохранности и без нарушения целостности остальных грузов). Одновременно выяснилось также, что по недосмотру служащего не осталось никаких сведений о том, как именно маркирована та партия ящиков, в которых находился этот подлежащий возврату груз.

Однако

Известно количество маркированных ящиков каждого вида, общий вес груза в каждой автомашине (см. таблицу), а также и то, что ящики с возвращаемым грузом должны быть тяжелее остальных.

Номер автомашины	Груз (количество ящиков)				
	1-й вид	2-й вид	3-й вид	4-й вид	Общий вес, ц.
1	1	4	9	S	51
2	2	9	8	3	45
3	2	6	8	6	48
4	3	5	7	8	51

Возникает вопрос: а нельзя ли дать рекомендации по изъятию этого груза без распаковки и дополнительного взвешивания? Оказывается, можно.

Приведем расчеты, при помощи которых совсем нетрудно выйти из сложившейся чрезвычайной ситуации.

Решение:

Обозначим через x_k вес ящика с k -м видом груза. Тогда общий вес груза на автомашине 1 можно подсчитать так:

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 8x_4,$$

что равно 51.

Проведем аналогичные подсчеты для трех других автомашин и запишем результаты:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 51; \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 45; \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 48; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 51. \end{cases}$$

Решая систему уравнений (например методом Гаусса), найдем:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 2; \quad x_4 = 3.$$

Соответственно нужно вернуть на завод ящики с 4-м видом груза, т.е. $8 + 3 + 6 + 8 = 25$ ящиков.

1.4.23. Ресторан специализируется на выпуске трех видов фирменных блюд B_1 , B_2 , B_3 при этом используются ингредиенты трех типов S_1 , S_2 , S_3 . Нормы расхода каждого из них на одно блюдо (в денежных единицах) и объем расхода ингредиентов на 1 день заданы таблицей.

Ингредиент	Норма расхода на 1 блюдо (д.е.)			Расход ингредиентов на 1 день (д.е.)
	B_1	B_2	B_3	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	900
S_3	3	2	2	1600

Нужно найти ежедневный объем выпуска фирменных блюд каждого вида.

Решение:

Пусть ежедневно ресторан выпускает x_1 блюд вида B_1 , x_2 блюд вида B_2 , x_3 блюд вида B_3 . Тогда в соответствии с таблицей расходом ингредиентов каждого вида имеем систему:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 900, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600. \end{cases}$$

Решая которую, получаем объемы выпуска фирменных блюд каждого вида:

$$x_1 = 200, x_2 = 300, x_3 = 200.$$

1.4.24. Цех выпускает продукцию четырех видов: A , B , C , D . Известны объемы выпуска продукции за четыре дня и денежные затраты на производство за эти дни.

Дни	Объем выпуска продукции (единиц)				Затраты (тыс. р.)
	A	B	C	D	
1	50	10	30	20	250
2	40	10	20	20	220
3	30	20	30	–	170
4	20	30	40	–	220

Найдите себестоимость единицы продукции каждого вида.

1.4.25. Корм для птицы, составленный из четырех видов зерна, должен содержать 17 единиц полезного вещества A , 27 единиц вещества B и 44 единицы вещества C . Известно содержание единиц полезных веществ в 1 кг зерна каждого вида и цена 1 кг зерна каждого вида:

Вид зерна	Содержание полезных веществ (единиц в 1 кг)			Цена 1 кг (руб.)
	A	B	C	
1	1	3	4	5
2	2	3	5	7
3	1	–	1	2
4	1	3	4	5

Выясните:

- все возможные составы корма, обеспечивающие необходимое количество полезных веществ;
- существует ли такой состав корма, стоимость которого равна 30 руб.

ТЕМА 1.5. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

1.5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Задача нахождения собственных значений и собственных векторов матриц (СЗСВ) является одной из основных задач для многих разделов алгебры, геометрии, физики, анализа данных, экономики. С такой вычислительной проблемой приходится сталкиваться, например, при исследовании собственных колебаний различных механических систем, колебательных и электронных спектров молекул и кристаллов. В анализе данных СЗиСВ используются для построения главных компонент в задаче о снижении размерности признакового пространства.

Одна из задач, которая дает геометрическую интерпретацию собственных векторов, есть приведение кривых второго порядка к каноническому виду: собственные векторы образуют главные направления кривых второго порядка. Они помогают решить задачу приведения к канонической форме гиперповерхностей второго порядка.

В математической физике основной класс уравнений второго порядка решается благодаря задаче Штурма – Лиувилля нахождения собственных значений и функций дифференциального оператора определенного вида.

Пусть A – квадратная матрица порядка n , $X^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ – ненулевой (т.н. *полуположительный*) вектор-столбец (символом X^T будем обозначать вектор-строку $X^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$).

Определение. Число λ называется *собственным значением* квадратной матрицы A , а ненулевой вектор X – ее *собственным вектором*, соответствующим собственному числу λ , если выполняется равенство

$$AX = \lambda X \quad (1)$$

С геометрической точки зрения, собственное значение λ можно рассматривать как *коэффициент усиления* собственного вектора матрицы. А собственный вектор как *вектор, сохраняющий свое направление* в пространстве при умножении на матрицу.

Множество собственных чисел матрицы A называется ее *спектром*.

$$\sigma(A) = \{\lambda\}.$$

Заметим, что в литературе встречается и другая терминология: собственные значения иногда называют *собственными числами* или *характеристическими корнями*, а собственные векторы – *характеристическими векторами*.

Матричное уравнение $AX = \lambda X$ можно переписать в виде

$$AX - \lambda X = O,$$

ИЛИ

$$(A - \lambda E)X = O, \quad (2)$$

где E – единичная матрица порядка n , $O = (0 \ 0 \ \dots \ 0)^T$ – n -мерный нуль-вектор–столбец. Здесь

$$\lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Матричное уравнение (2) представляет собой запись системы однородных линейных уравнений с переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

[illegible]

Система (3) всегда совместна, т.к. существует тривиальное решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Чтобы у однородной системы существовало нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы определитель основной её матрицы был равен нулю $\det = 0$.

Таким образом, матрица A имеет ненулевой собственный вектор X , если существует ненулевое (нетривиальное) решение системы (3), т.е. только в том случае, когда матрица системы (3) вырожденная – её определитель равен нулю:

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (4)$$

Равенство (4) является уравнением n -й степени относительно переменной λ . Действительно, оно имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

а в определителе n -го порядка есть слагаемое $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda)$ с λ в n -й степени.

Определение. Уравнение $|A - \lambda E| = 0$ (4) называется *характеристическим уравнением* матрицы A , определитель $\varphi(\lambda) = |A - \lambda E|$ – её *характеристическим многочленом*.

Чтобы найти собственные значения матрицы, надо составить и решить её характеристическое уравнение (4).

Известно, что алгебраическое уравнение n -й степени имеет ровно n корней, включая комплексные и кратные (*основная теорема алгебры*)¹. Если уравнение (4) имеет мнимый корень, то оно имеет и сопряженный ему корень, так как все коэффициенты уравнения (4) – действительные числа.

¹ Подробнее данная тема рассмотрена в 1.9.

После нахождения собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ можно найти собственные векторы, подставив каждое их собственных значений в систему (3).

Поскольку однородная система (3) в случае существования нетривиального решения является неопределенной, то каждому собственному значению λ матрицы A соответствует бесчисленное множество собственных векторов.

Пример 1. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Составим и решим характеристическое уравнение матрицы A

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= 0: \\ \left| \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| &= 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ (3-\lambda)(2-\lambda) - 20 &= 0, \\ \lambda^2 - 5\lambda - 14 &= 0, \\ \lambda_1 = 7, \lambda_2 &= -2. \end{aligned}$$

Итак, матрица A имеет действительные собственные значения 7 и -2 .

Таким образом, собственные векторы матрицы A , соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 7$, находим, решая систему вида (2)

$$\begin{aligned} (A - \lambda E)X &= O: \\ (A - 7E)X &= O; \\ \begin{pmatrix} 3-7 & 4 \\ 5 & 2-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Эта система равносильна одному уравнению: $x_1 - x_2 = 0$, или $x_1 = x_2$.

Собственными векторами матрицы A , соответствующими собственному значению $\lambda_1 = 7$, являются векторы $v_1 = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$, где c – любое, не равное нулю, число. Например, можно взять $c = 1$, тогда

$$v_1 = (1 \ 1)^T.$$

Собственные векторы матрицы A , соответствующие собственному значению $\lambda_2 = -2$, находим, решая систему

$$(A + 2E)X = 0:$$

$$\begin{pmatrix} 3+2 & 4 \\ 5 & 2+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система равносильна одному уравнению: $5x_1 + 4x_2 = 0$, или $x_1 = -\frac{4}{5}x_2$.

Собственными векторами матрицы A , соответствующими собственному значению $\lambda_2 = -2$, являются векторы $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5}c \\ c \end{pmatrix}$, $c \neq 0$, или $\begin{pmatrix} 4c \\ -5c \end{pmatrix}$,

$c \neq 0$. Пусть $c = 1$, тогда

$$v_1 = (4 \ -5)^T.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу о стабильном распределении автомобилей. В некотором регионе автомобили эксплуатируются не более 3 лет, причем ежегодно (будем считать, что в начале года) заменяются 20% автомобилей, проработавших к этому моменту 2 года, и все автомобили, проработавшие 3 года. Автомобили, проработавшие 1 год, замене не подлежат. Найдем *устойчивое распределение автомобилей по срокам эксплуатации*, т.е. распределение, которое не изменяется из года в год.

Решение:

Введем обозначения: пусть u_i^t – число автомобилей, которые к началу года t проработали i лет. Выразим u_i^t через u_i^{t-1} ($i = 1, 2, 3$).

К началу текущего года проработают 1 год те автомобили (их количество – u_1^t), которые были заменены в начале предыдущего года, т.е. 20% автомобилей, проработавших к началу предыдущего года 2 года, и 100% автомобилей, проработавших к началу предыдущего года 3 года:

$$u_1^t = 0 \cdot u_1^{t-1} + 0,2 \cdot u_2^{t-1} + 1 \cdot u_3^{t-1}.$$

К началу текущего года проработают 2 года те автомобили (их число обозначим u_2^t), которые к началу предыдущего года проработали 1 год (они не подлежали замене):

$$u_2^t = 1 \cdot u_1^{t-1} + 0 \cdot u_2^{t-1} + 0 \cdot u_3^{t-1}.$$

К началу текущего года проработают 3 года те автомобили (их число обозначим u_3^t), которые к началу предыдущего года проработали 2 года и не были заменены, т.е. 80% от их числа:

$$u_3^t = 0 \cdot u_1^{t-1} + 0,8 \cdot u_2^{t-1} + 0 \cdot u_3^{t-1}.$$

Итого, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 0 \cdot u_1^{t-1} + 0,2 \cdot u_2^{t-1} + 1 \cdot u_3^{t-1} = u_1^t; \\ 1 \cdot u_1^{t-1} + 0 \cdot u_2^{t-1} + 0 \cdot u_3^{t-1} = u_2^t; \\ 0 \cdot u_1^{t-1} + 0,8 \cdot u_2^{t-1} + 0 \cdot u_3^{t-1} = u_3^t. \end{cases}$$

Или в матричной форме

$$A \cdot U^{t-1} = U^t,$$

где

$$U^t = \begin{pmatrix} u_1^t \\ u_2^t \\ u_3^t \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Распределение автомобилей, общее число которых не изменяется из года в год, по годам службы будет неизменным, если не будет изменяться вектор U^t , т.е. $U^t = U^{t-1}$. Такой вектор является решением уравнения

$$A \cdot U^t = U^t \text{ или } A \cdot U = U.$$

Если же общее число автомобилей из года в год изменяется пропорционально наличному составу автомобилей, то при неизменном процентном составе по годам службы вектор U должен удовлетворять уравнению

$$A \cdot U = \lambda \cdot U.$$

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A . Характеристическое уравнение этой матрицы таково:

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0,2 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0,8 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$-\lambda^3 + 0,2\lambda + 0,8 = 0.$$

Проверкой установим, что корнем последнего уравнения является число $\lambda = 1$. Два других корня этого уравнения – комплексные числа. Из рассмотрения примера 1 ясно, что нас интересуют собственные векторы матрицы A , соответствующие собственному значению $\lambda = 1$. Находим их:

$$(A - 1 \cdot E)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0,2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0,8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 0,2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ 0,8x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,8x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ 0,8x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 0,8x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = 0,8x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0,8c \end{pmatrix}, \quad c \neq 0.$$

Это означает, что состав автомобильного парка по срокам службы будет устойчивым, если автомобилей, проработавших 1 год, будет столько же, сколько автомобилей, проработавших 2 года, и число автомобилей, проработавших 3 года, будет равно 80% от числа машин, проработавших 1 год.

Следующая теорема (приводится без доказательства) устанавливает важное свойство характеристического многочлена квадратной матрицы.

Теорема 1 (теорема Гамильтона – Кэли²). Если $\varphi(\lambda)$ – характеристический многочлен матрицы A , то $\varphi(A) = 0$. Т.е. любая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена.

Проверим это утверждение на примере.

Пример 4. Вычислим $\varphi(A)$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ из примера 2.

Решение:

В уравнении $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 14$ подставим вместо λ , матрицу A , умножив свободный член (-14) на единичную матрицу:

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^2 - 5 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - 14 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим A^2 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 20 \\ 25 & 24 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} 29 & 20 \\ 25 & 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 25 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

² Уильям Роуэн Гамильтон (англ. William Rowan Hamilton; 1805 – 1865) – ирландский математик, механик-теоретик, физик-теоретик. Известен фундаментальными открытиями в математике (кватернионы, основы векторного анализа, вариационное исчисление, обоснование комплексных чисел), аналитической механике (гамильтонова механика) и оптике. Автор предельно общего вариационного принципа наименьшего действия, применяемого во многих разделах физики. Артур Кэли (англ. Arthur Cayley; 1821 – 1895) – английский математик. Большая часть его работ относится к линейной алгебре, дифференциальным уравнениям и эллиптическим функциям. Был первым, кто сформулировал определение группы – множество с бинарной операцией, удовлетворяющей определённым законам.

1.5.2. СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Укажем свойства собственных значений квадратной матрицы.

1. Сумма собственных значений матрицы A равна следу этой матрицы (т.е. сумме ее диагональных элементов, обозначается $\text{tr } A$):

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

2. Произведение собственных значений матрицы, A равно определителю этой матрицы:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = |A|.$$

3. Число отличных от нуля собственных значений матрицы A равно ее рангу, в частности, все собственные значения матрицы A отличны от нуля в том и только в том случае, если матрица A – невырожденная.
4. Если λ – собственное значение невырожденной матрицы A , то $\frac{1}{\lambda}$ – собственное число матрицы A^{-1} .
5. Если λ – собственное значение матрицы A , то λ^k – собственное значение матрицы A^k при любом целом $k \geq 1$.
6. Собственными значениями диагональной матрицы являются числа, стоящие на ее главной диагонали, т.е. если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то

$$\lambda_1 = a_{11}, \lambda_2 = a_{22}, \dots, \lambda_n = a_{nn}.$$

Свойства собственных векторов:

1. Собственные векторы матрицы, соответствующие ее различным собственным значениям, линейно независимы.

2. Если все собственные значения квадратной матрицы n -го порядка различны, то соответствующие им собственные векторы образуют базис пространства $\mathbb{R}_n$.
3. Любая не равная нулевому вектору линейная комбинация собственных векторов данной матрицы, соответствующих одному и тому же собственному значению этой матрицы, также является собственным вектором данной матрицы.

1.5.3. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ОБМЕНА

Рассмотрим две макроэкономические модели, в которых используется аппарат линейной алгебры, а именно отыскание собственных значений и собственных векторов квадратной матрицы.

При исследовании различных экономических ситуаций возникает необходимость рассматривать так называемую матрицу обмена и находить ее собственные векторы.

Сначала рассмотрим задачу о равновесном выпуске в простой модели обмена.

Пусть имеется система из n отраслей производства, каждая из которых выпускает продукцию одного вида. Примем за единицу объем продукции каждой отрасли в рассматриваемом периоде. Обмен продукцией происходит только внутри системы (экономика замкнута) и известна матрица A :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где a_{ij} — доля продукции j -й отрасли, которая поступает в i -ю отрасль. Ясно, что для матрицы A выполнены два условия:

$$1) a_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$2) \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Второе условие вызвано тем, что вся продукция j -й отрасли предназначена для обмена внутри системы.

Определение. Матрица (4), для которой выполнены условия 1 и 2, называется *матрицей обмена*.

Требуется определить такие объемы выпуска (в стоимостном выражении) продукцию каждой отрасли, при которых вся система находится в равновесии, т.е. ни одна отрасль не обогащается за счет другой.

Пусть x_j – объем выпуска продукции j -й отрасли, а $X = (x_1; x_2; \dots x_n)$ – вектор выпуска. Тогда расход i -й отрасли, т.е. стоимость всей закупаемой ею продукции, таков:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Чтобы отрасль могла развиваться, ее расход не должен превышать дохода, который равен стоимости произведенной ею продукции, т.е. x_i :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Если искомые равновесные выпуски существуют, то система неравенств (5) выполняется для них как система равенств. Действительно, пусть числа $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0$ удовлетворяют условиям (5). Подставим их в эти неравенства и сложим почленно все полученные неравенства:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^0 &\leq \sum_{i=1}^n x_i^0; \\ \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) x_j^0 &\leq \sum_{i=1}^n x_i^0; \\ \sum_{j=1}^n x_j^0 &\leq \sum_{i=1}^n x_i^0; \end{aligned}$$

Так как последнее неравенство является равенством $\sum_{j=1}^n x_j^0 = \sum_{i=1}^n x_i^0$ и все слагаемые в суммах неотрицательны, то и исходные неравенства (5) выполняются для чисел $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ как равенства:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Итак, надо найти вектор $X = (x_1; x_2; \dots, x_n)$, такой, что

$$AX = X.$$

Таким образом, задача свелась к следующему:

1) выяснить, является ли число $\lambda = 1$ собственным значением матрицы обмена A ;

2) если да, то найти соответствующий этому собственному значению полуположительный собственный вектор матрицы A .

Для того чтобы число $\lambda = 1$ было собственным значением матрицы обмена A , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $|A - E| = 0$, т.е.:

$$\begin{aligned} |A - E| &= \begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_{i1} - 1 & \sum_{i=1}^n a_{i2} - 1 & \dots & \sum_{i=1}^n a_{in} - 1 \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - 1 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы прибавили к первой строке все остальные, воспользовались условием 2 из определения матрицы обмена, получили первую строку определителя, состоящую из одних нулей, в силу чего этот определитель равен нулю.

Итак, число 1 является собственным значением матрицы обмена и для отыскания соответствующего ему собственного вектора следует найти полуположительное решение однородной системы

$$(A - E)x = 0.$$

Можно доказать, что такое решение существует и найденный полуположительный вектор X является искомым вектором равновесного выпуска.

Пример 5. Экономическая система состоит из трех отраслей производства, каждая из которых выпускает один вид продукции. Обмен внутри системы происходит в соответствии сданной матрицей обмена

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектор равновесного выпуска.

Решение:

Сначала найдем матрицу $A - E$:

$$A - E = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & -0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & -0,7 \end{pmatrix}.$$

Составим однородную систему линейных уравнений $(A - E)x = 0$:

$$\begin{cases} -0,8x_1 + 0,3x_2 + 0,6x_3 = 0; \\ 0,4x_1 - 0,5x_2 + 0,1x_3 = 0; \\ 0,4x_1 + 0,2x_2 - 0,7x_3 = 0. \end{cases}$$

Решив ее, получим:

$$x_1 = \frac{33}{28}x_3; \quad x_2 = \frac{32}{28}x_3; \quad x_3 \in R, \text{ или } x = (33a; 32a; 28a).$$

Полагая $a > 0$, находим равновесные объемы выпуска продукции каждой отрасли: $x_1 = 33a$; $x_2 = 32a$; $x_3 = 28a$, где a можно трактовать как множитель, связанный с денежной единицей.

1.5.4. МОДЕЛЬ МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛИ

Другая экономическая модель, где решается математическая задача того же вида, – это модель международной торговли.

Рассмотрим систему из n стран $S_1, S_2, \dots, S_n$, торгующих только друг с другом (т.е. система замкнута). Известна матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, где a_{ij} – доля средств страны S_j , затрачиваемая на импорт из страны S_i . Матрица A является матрицей обмена типа (4), т.е.

$$1) a_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$2) \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n.$$

В рамках данной задачи матрица A носит название структурной матрицы торговли.

Требуется найти первоначальное распределение средств между странами, обеспечивающее равновесие всей системы, т.е. такое положение, при котором в каждой стране после каждого цикла обмена остается столько же средств, сколько было до обмена.

Пусть x_i – национальный доход i -й страны, т.е. вектор $X = (x_1; x_2; \dots x_n)$ описывает искомое распределение средств. Таким образом, для любой страны S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) выручка от внутренней и внешней торговли составит

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$$

Из предыдущего пункта известно, что надо найти вектор x , удовлетворяющий условиям

$$\begin{cases} AX = X; \\ X \geq 0. \end{cases}$$

Ранее было показано, что число 1 есть собственное значение матрицы обмена A и что существует полуположительный собственный вектор X матрицы A , соответствующий этому собственному значению. Вектор X и является искомым первоначальным распределением средств. Система при этом будет находиться в равновесии, т.е.

расход каждой страны в каждом цикле обмена совпадает с ее доходом от экспорта и не изменяется от цикла к циклу.

Проанализируем структуру равновесных векторов в изучаемой модели.

Пример 6. Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_n имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти соотношение национальных доходов стран для сбалансированной торговли.

Решение:

Находим собственный вектор x , отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, решив уравнение $(A - E)X = 0$ или систему

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

например, методом Гаусса. Найдем $x_1 = \frac{3}{2}c$; $x_2 = 2c$; $x_3 = c$, т.е.

$$x = \left(\frac{3}{2}c; 2c; c \right).$$

Полученный результат означает, что сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных доходов

$X = \left(\frac{3}{2}c; 2c; c \right)$, т.е. при соотношении национальных доходов стран

$\frac{3}{2}:2:1$ или $3:4:2$.

Пример 7. Международная торговля системы шести стран описывается матрицей обмена

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 & 0,3 & 0 & 0,3 \\ 0,4 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \\ \text{V} \\ \text{VI} \end{matrix}$$

I II III IV V VI

Найдем равновесный вектор этой системы.

Решение:

Нетрудно заметить, что страны I, III, V покупают продукцию только друг у друга. Такой же вывод можно сделать относительно стран II и IV. Поэтому, переставив строки и столбцы, можно привести матрицу A к виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{III} \\ \text{V} \\ \text{II} \\ \text{IV} \\ \text{VI} \end{matrix}$$

I III V II IV VI

Это соответствует тому, что вся система состоит из двух независимых блоков (I, III, V) и (II, IV) и не входящей в блоки страны VI; при этом матрицы блоков

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 0,6 & 0 & 1 \\ 0,4 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0,7 \\ 1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

тоже являются матрицами обмена.

Найдем их равновесные векторы $Y = (x_1; x_3; x_5)$ и $Z = (x_2; x_4)$, соответственно:

$$\begin{aligned} (A_1 - E)Y &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 0,5x_3 = 0; \\ -0,6x_1 - 5x_3 + x_5 = 0; \\ 0,4x_1 + 0,5x_3 - x_5 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0,5x_3; \\ x_3 \in R; \\ x_5 = 0,7x_3 \end{cases} &\Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}. \\ (A_2 - E)Z &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 + 0,7x_4 = 0; \\ x_2 - 0,7x_4 = 0; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0,7x_4; \\ x_4 \in R; \end{cases} &\Leftrightarrow Z = \beta \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ясно, что векторы $X^1 = (5; 0; 10; 0; 7; 0)$; $X^2 = (0; 7; 0; 10; 0; 0)$ являются равновесными векторами исходной системы.

Можно показать, что множество всех равновесных векторов матрицы A есть линейная комбинация векторов X^1 и X^2 :

$$X = \alpha X^1 + \beta X^2 = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\alpha \\ 7\beta \\ 10\alpha \\ 10\beta \\ 7\alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta > 0$ – произвольные числа.

Заметим, что средства страны VI, не входящей в блоки, должны быть равны нулю. Это связано с тем, что она лишь импортирует продукцию других стран, при этом ее продукция не экспортируется.

ПРАКТИКУМ 1.5. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1.5.1. Найдите собственные значения и собственные векторы матриц:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1.5.2. Экономическая система из n отраслей описывается матрицей обмена:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 \\ 0,6 & 0,2 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,9 & 0,5 \\ 0 & 0,1 & 0,3 \\ 0,7 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Найдите равновесный вектор цен.

1.5.3. Международная торговля системы семи стран описывается матрицей обмена A :

$$A = \begin{matrix} & \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,2 & 0 & 0,3 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \\ \text{V} \\ \text{VI} \\ \text{VII} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} & \text{VI} & \text{VII} \end{matrix} & \end{matrix}$$

Найдите равновесное начальное распределение средств в данной системе.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.5.4. Найдите собственные значения и собственные векторы матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix};$

г) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$

е) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

ж) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

з) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

$$\text{и) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{к) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{л) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{м) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & -8 \\ 2 & -4 & 7 & -4 \\ -1 & -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{н) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{о) } A = \begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 101 \\ 0 & 99 & 0 & 0 \\ 0 & 101 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 99 \end{pmatrix};$$

$$\text{п) } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{p) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{с) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.5.5. Экономическая система из n отраслей описывается матрицей обмена:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найдите равновесный вектор выпуска.

1.5.6. Найти равновесный вектор национальных доходов стран $S_1, \dots, S_n$ в модели международной торговли для структурной матрицы торговли A , если известно, что суммарный доход этих стран равен 402 млн. ден.ед.:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,5 & 0,7 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/10 & 1/10 \\ 1/10 & 2/5 & 3/10 \\ 1/2 & 3/10 & 3/5 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/5 & 2/5 \\ 3/10 & 1/10 & 1/10 \\ 2/5 & 7/10 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

ТЕМА 1.6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1.6.1. ПОНЯТИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Линейное пространство – математическая структура, которая представляет собой набор элементов, называемых *векторами*, для которых определены операции сложения друг с другом и умножения на число – *скаляр*. Дадим более строгое определение.

Определение. Множество V элементов любой природы называется *действительным линейным пространством*, если выполнены следующие три требования:

1. Определена *операция сложения*: задано правило, по которому любым двум элементам $x, y \in V$ ставится в соответствие третий элемент $z \in V$, называемый их суммой и обозначаемый $x + y$:

$$z = x + y.$$

2. Определена *операция умножения на число (скаляр)*: задано правило, согласно которому любому элементу $x \in V$ и любому действительному числу $\lambda \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие элемент $u \in V$, называемый произведением элемента x на число λ и обозначаемый $\lambda \cdot x$ или $x \cdot \lambda$:

$$u = \lambda \cdot x = x \cdot \lambda.$$

3. Указанные правила подчинены следующим восьми аксиомам:

- 1) $x + y = y + x, \forall x, y \in V$ (*коммутативность сложения*);
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in V$ (*ассоциативность сложения*);
- 3) существует так называемый *нулевой элемент*, обозначаемый символом $\mathbf{0}$, такой, что $x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x, \forall x \in V$ (*существование нейтрального элемента относительно сложения*);

- 4) для любого $x \in V$ существует так называемый противоположный элемент $x' \in V$ такой, что $x + x' = \mathbf{0}$ (*существование противоположного элемента* относительно сложения);
- 5) $1 \cdot x = x, \forall x \in V$ (*унитарность*: умножение на нейтральный (по умножению) элемент сохраняет вектор);
- 6) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (*ассоциативность* умножения на скаляр);
- 7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (*дистрибутивность* умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров);
- 8) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (*дистрибутивность* умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов).

Элементы линейного пространства принято называть *векторами*, а само линейное пространство часто называют *векторным пространством*. Т.е. имеем обобщение понятия «вектор» до элемента векторного пространства. Это связано с тем, что свойства операций над элементами линейного пространства совпадают со свойствами операций над обычными геометрическими векторами. При этом вектор как элемент векторного пространства не обязательно должен быть задан в виде направленного отрезка.

Теорема 1. В произвольном линейном пространстве существует единственный нулевой элемент; для каждого элемента x линейного пространства существует единственный противоположный элемент. При этом нулевой элемент $\mathbf{0}$ равен произведению произвольного элемента x на число 0 ; для каждого элемента x противоположный элемент x' равен произведению этого элемента на число -1 :

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= 0 \cdot x; \\ x' &= (-1) \cdot x.\end{aligned}$$

Доказательство:

В силу аксиомы 3 в произвольном линейном пространстве V существует нулевой элемент $\mathbf{0}$ такой, что для всех $x \in V$ имеет место равенство $x + \mathbf{0} = x$. Покажем, что такой элемент является единственным.

Для этого предположим, что существуют два элемента $\mathbf{0}'$ и $\mathbf{0}''$ такие, что для всех $x \in V$ имеют место равенства

$$x = x + \mathbf{0}' \text{ и } x + \mathbf{0}'' = x.$$

Полагая в первом из этих равенств $x = \mathbf{0}''$, получаем

$$\mathbf{0}'' = \mathbf{0}'' + \mathbf{0}' = (\text{аксиома 1}) = \mathbf{0}' + \mathbf{0}'' = \mathbf{0}'.$$

Таким образом, единственность нулевого элемента доказана.

Покажем, что его можно представить в виде произведения произвольного элемента x на число 0. Используя аксиомы 5 и 7, для всех $x \in V$ имеем

$$x + 0 \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x = x.$$

Мы видим, что произведение $0 \cdot x$ действительно удовлетворяет определению нулевого элемента.

В силу аксиомы 4 в произвольном линейном пространстве V для каждого элемента $x \in V$ существует противоположный элемент $x' \in V$ такой, что имеет место равенство $x + x' = \mathbf{0}$. Покажем, что такой элемент является единственным.

Для этого предположим, что для некоторого элемента $x \in V$ существуют два элемента x' и x'' такие, что имеют место равенства

$$x + x' = \mathbf{0} \text{ и } x + x'' = \mathbf{0}.$$

Последовательно используя определение нулевого элемента, второе из данных равенств, аксиому 2, аксиому 1, первое из данных равенств, определение противоположного элемента, ещё раз аксиому 1 и снова определение нулевого элемента, получаем

$$\begin{aligned} x' &= x' + \mathbf{0} = x' + (x + x'') = (x' + x) + x'' = (x + x') + x'' = \\ &= \mathbf{0} + x'' = x'' + \mathbf{0} = x''. \end{aligned}$$

Тем самым единственность элемента, противоположного произвольному элементу x , доказана.

Покажем, что его можно представить в виде произведения элемента x на число -1 . Применяя аксиомы 5 и 7, а также доказанное ранее представление нулевого элемента в виде $\mathbf{0} = 0 \cdot x$, имеем

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = \mathbf{0}.$$

Мы видим, что произведение $(-1) \cdot x$ удовлетворяет определению элемента, противоположного элементу x .

Замечание. Элемент, противоположный элементу x , принято обозначать $-x$. Таким образом вводится операция вычитания на линейном пространстве.

Рассмотрим примеры конкретных линейных пространств.

1. Арифметическое векторное пространство $\mathbf{R}^n$.

Множество, каждый элемент которого представляет собой упорядоченный набор действительных чисел

$$x = (x_1; x_2; \dots; x_n),$$

на котором операции сложения элементов и умножения элемента на число определены как соответствующие матричные операции. $\mathbf{R}^n$ является линейным пространством и называется *n-мерным арифметическим векторным пространством* $\mathbf{R}^n$.

В случае, когда

$n = 1$ $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}$ – множество действительных чисел;

$n = 2$ $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ – *декартово произведение* множества действительных чисел на себя – множество упорядоченных пар чисел $x = (x_1; x_2)$. Если рассматривать $(x_1; x_2)$ как координаты точек в некоторой системе координат Oxy , то можно считать, что $\mathbf{R}^2$ есть двумерная плоскость (рисунок 1.6.1);

$n = 3$ $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ – множество упорядоченных троек чисел $x = (x_1; x_2; x_3)$. Геометрически аналог $\mathbf{R}^3$ – трёхмерное пространство $Oxyz$ точек с координатами $(x_1; x_2; x_3)$.

И т.д.

Рис. 1.6.1

Заметим, что элементы $\mathbb{R}^n$ допускают запись в виде столбцов, а также в виде строк, где элементы перечислены через запятую:

$$x = (x_1; x_2; \dots; x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

2. Пространство n -мерных строк A_n .

Множество строк действительных чисел

$$x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n).$$

Очевидно, что данное пространство имеет взаимно-однозначное соответствие с арифметическим векторным пространством $\mathbb{R}^n$, т.е. *изоморфно* ему. Часто пространства $\mathbb{R}^n$ и A_n отождествляют:

$$A_n \simeq \mathbb{R}^n.$$

3. Пространство геометрических векторов.

Наиболее известным примером линейного пространства является совокупность всех геометрических векторов, началом которых служит какая-либо фиксированная точка O на плоскости или в физическом трёхмерном пространстве.

Умножение вектора на положительное число λ означает умножение его длины на число λ без изменения направления. Если число λ отрицательно, то умножение вектора на число λ означает умножение его длины на число $|\lambda|$ и изменение его направления на противоположное. Сложение двух геометрических векторов сводится к взятию диагонали параллелограмма, построенного на этих векторах. В качестве нулевого элемента берётся вектор, начало и конец которого совпадают с точкой O . Наконец, для каждого геометрического вектора противоположным будет вектор, имеющий такую же длину, но противоположное направление. В курсе аналитической геометрии показывается, что для операций над геометрическими векторами, определённых описанным способом, выполнены все аксиомы линейного пространства.

Каждый вектор $\vec{a}$ на плоскости можно задать парой чисел $(x_1; x_2)$ — его координатами:

$$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + x_2 \cdot \vec{j} = (x_1; x_2).$$

Таким образом между пространством геометрических векторов на плоскости и арифметическим векторным пространством $\mathbb{R}^2$ устанавливается взаимно-однозначное соответствие, они изоморфны.

Аналогично изоморфны множество векторов трёхмерного пространства и $\mathbb{R}^3$

Рис. 1.6.2

4. Множество $M_{m \times n}$ матриц размеров $m \times n$.

Ещё один пример линейного пространства даёт множество всех матриц одних и тех же размеров $m \times n$ с известными определениями операций сложения матриц и умножения матрицы на число (тема 1.1). В силу определения операций над матрицами все аксиомы линейного пространства для этих операций выполнены.

1.6.2. БАЗИС ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

По аналогии с понятием линейной независимости (зависимости) строк и столбцов введём понятие линейной независимости (зависимости) элементов произвольного линейного пространства.

Определение. Пусть V – линейное пространство, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – его элементы, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – действительные числа. Выражение вида

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n$$

называется *линейной комбинацией* элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все её коэффициенты равны нулю, и *нетривиальной* – в противном случае.

Система векторов называется *линейно независимой*, если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору:

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

или

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 0.$$

И *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору.

Примеры

4. В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим совокупность векторов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что они линейно независимы. Для этого составим их линейную комбинацию с неопределёнными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \\ = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ясно, что

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

только если $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, то есть только если она является тривиальной. Это и означает, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы.

5. В пространстве M_2 квадратных матриц порядка 2 рассмотрим три элемента – матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Выясним, являются ли эти элементы линейно зависимыми или линейно независимыми. Для этого образуем их линейную комбинацию с неопределёнными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и приравняем её к нулевой матрице:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу определения матричных операций, это равенство равносильно системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - 7\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 7\alpha_3 = 0, \\ 4\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

и вопрос о линейной зависимости матриц A, B, C сводится к вопросу о существовании ненулевых решений этой системы.

Исследуем полученную систему методом Гаусса. Поскольку система является однородной, то в процессе прямого хода её правая часть не изменится, и, следовательно, достаточно работать только с основной матрицей системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 2 & -7 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из вида полученной матрицы следует, что её ранг равен 2. Поскольку он меньше числа неизвестных, то система имеет ненулевые решения, а это означает, что матрицы A, B, C линейно зависимы.

Найдём какую-нибудь нетривиальную линейную комбинацию этих матриц, равную нулевой матрице. Для этого найдём какое-нибудь ненулевое решение системы (1). Вернёмся от преобразованной матрицы к системе:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Будем считать неизвестные α_1 и α_2 базисными, а неизвестную α_3 – свободной. Положив, например, $\alpha_3 = 1$, из системы (2) найдём $\alpha_2 = -1$, $\alpha_1 = 3$. Тем самым мы нашли нетривиальную нулевую комбинацию матриц A, B, C :

$$3A - B + C = O.$$

Системы линейно зависимых и линейно независимых элементов линейного пространства обладают теми же свойствами, что и системы линейно зависимых и линейно независимых столбцов.

Определение. Пусть V – произвольное линейное пространство. Система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V называется *базисом* этого пространства, если

- 1) $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы;
- 2) для каждого вектора $x \in V$ найдутся такие числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, что имеет место равенство

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n. \quad (3)$$

Это равенство называется разложением элемента x по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$, а числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — координатами вектора x относительно базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Примеры

6. В пространстве R^n рассмотрим совокупность элементов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Мы уже выяснили, что эти элементы линейно независимы. Пусть x — произвольный элемент пространства R^n :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, \end{aligned}$$

т. е. имеет место разложение вида (3). Отсюда и из линейной независимости векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ следует, что эти векторы образуют

базис пространства R^n . Компоненты $x_1; x_2; \dots; x_n$ вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

являются его координатами относительно рассматриваемого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$.

7. Показать, что векторы

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

пространства $\mathbb{R}^3$ образуют базис этого пространства, и найти коор-

динаты произвольного вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ пространства $\mathbb{R}^3$ в этом ба-

зисе.

Решение:

Проверим линейную независимость элементов e_1, e_2, e_3 . Пусть имеет место равенство

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \mathbf{0}, \quad (4)$$

где $\mathbf{0}$ – ноль-вектор пространства $\mathbb{R}^3$, т. е. $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Так как

$$\alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \alpha_3 e'_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},$$

то равенство (4) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что эта система имеет только нулевое решение. Следовательно, совокупность векторов e'_1, e'_2, e'_3 линейно независима.

Покажем, что произвольный вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ можно представить в

виде линейной комбинации e'_1, e'_2, e'_3 . Для этого достаточно найти такие числа ξ_1, ξ_2, ξ_3 , что имеет место равенство

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3.$$

Это равенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = x_1, \\ \xi_2 + \xi_3 = x_2, \\ \xi_3 = x_3. \end{cases} \quad (5)$$

Поскольку полученная система, очевидно, является крамеровской, то для любой совокупности значений x_1, x_2, x_3 она имеет единственное решение.

Следовательно, произвольный вектор $x \in \mathbb{R}^3$ действительно является линейной комбинацией e'_1, e'_2, e'_3 . Но это означает, что система векторов e'_1, e'_2, e'_3 образует базис пространства $\mathbb{R}^3$.

Найдём координаты $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ относительно этого базиса, для чего

решим систему (5):

$$\xi_3 = x_3, \xi_2 = x_2 - x_3, \xi_1 = x_1 - x_2.$$

Таким образом,

$$x = (x_1 - x_2)e_1 + (x_2 - x_3)e_2 + x_3 e_3,$$

т.е.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

в базисе e'_1, e'_2, e'_3 .

Теорема 2. Координаты каждого элемента x относительно данного базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ определяются однозначно. Другими словами, для каждого $x \in V$ разложение вида (3) определяется единственным образом.

Доказательство:

Предположим, что для некоторого элемента $x \in V$ существуют два разложения вида (3), т. е. существуют такие совокупности чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, что имеют место равенства

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n \quad (3)$$

и

$$x = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n \quad (6)$$

Вычитая из первого равенства второе и применяя аксиомы линейного пространства, имеем

$$0 = (\xi_1 - \eta_1)e_1 + (\xi_2 - \eta_2)e_2 + \dots + (\xi_n - \eta_n)e_n.$$

Так как элементы $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы, то полученное равенство возможно только в одном случае, а именно, когда все коэффициенты линейной комбинации, стоящей в правой части этого равенства, равны нулю:

$$\begin{cases} \xi_1 - \eta_1 = 0, \\ \xi_2 - \eta_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \xi_n - \eta_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \eta_1, \\ \xi_2 = \eta_2, \\ \dots\dots\dots \\ \xi_n = \eta_n. \end{cases}$$

Тем самым показано, что равенства (3) и (6) представляют собой одно и то же равенство.

Главное значение базиса состоит в том, что операции сложения векторов и умножения вектора на число при задании базиса пространства превращаются в соответствующие операции над числами — координатами векторов.

Теорема 3. При сложении двух векторов линейного пространства их координаты относительно данного базиса складываются; при

умножении вектора на число $\lambda \in \mathbb{R}$ все координаты вектора умножаются на это же число λ . Другими словами, если

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n, \quad y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n,$$

то

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1)e_1 + (\xi_2 + \eta_2)e_2 + \dots + (\xi_n + \eta_n)e_n,$$

$$\lambda x = (\lambda \xi_1)e_1 + (\lambda \xi_2)e_2 + \dots + (\lambda \xi_n)e_n.$$

Доказательство очевидно.

Из теоремы 3 легко следует, что координатный столбец (строка) линейной комбинации векторов является линейной комбинацией координатных столбцов (строк) данных векторов с теми же коэффициентами. Отсюда, в свою очередь, следует важнейшее утверждение.

Теорема 4. Векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы их координатные строки (столбцы) относительно любого базиса.

Теорема 4 означает, что вопрос о линейной зависимости элементов линейного пространства всегда сводится к вопросу о линейной зависимости их координатных строк относительно любого базиса.

1.6.3. РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА.

Определение. Пусть V – линейное пространство. Число n называется *размерностью пространства V* , а само пространство V называется *n -мерным*, если в нём существует линейно независимая совокупность, состоящая из n элементов, а любые $n + 1$ элементов этого пространства образуют уже линейно зависимую совокупность.

Размерность пространства V обозначается символом $\dim V$.

Выясним связь между понятиями базиса и размерности линейного пространства.

Теорема 5. Если в линейном пространстве V существует базис, состоящий из n векторов, то $\dim V = n$.

Доказательство:

Пусть в линейном пространстве V существует базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, состоящий из n элементов. Согласно определению базисные элементы $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы. Покажем, что произвольная совокупность $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$, состоящая из $n+1$ элементов линейного пространства V , линейно зависима. По определению базиса каждый из элементов $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ можно разложить по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$. Пусть

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_{11}e_1 + \xi_{12}e_2 + \dots + \xi_{1n}e_n, \\ x_2 &= \xi_{21}e_1 + \xi_{22}e_2 + \dots + \xi_{2n}e_n, \\ &\dots \\ x_n &= \xi_{n1}e_1 + \xi_{n2}e_2 + \dots + \xi_{nn}e_n, \\ x_{n+1} &= \xi_{n+1,1}e_1 + \xi_{n+1,2}e_2 + \dots + \xi_{n+1,n}e_n. \end{aligned}$$

В силу теоремы 4 для доказательства линейной зависимости элементов $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ достаточно доказать линейную зависимость их координатных строк относительно базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$

Из координатных строк элементов $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ относительно базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{nn} \\ \xi_{n+1,1} & \xi_{n+1,2} & \dots & \xi_{n+1,n} \end{pmatrix}.$$

Так как число столбцов в этой матрице равно n , то в силу теоремы о ранге матрицы ранг матрицы A не может быть больше n . В силу этой же теоремы число линейно независимых строк в матрице A также не может быть больше n . Но общее число строк в матрице A равно $n+1$, следовательно, они линейно зависимы.

Следствие. Все базисы линейного пространства состоят из одного и того же числа векторов, равного размерности пространства.

Пример 8. Из результатов примера 6 вытекает, что $\dim R^n = n$.

Теорема 6. Если $\dim V = n$, то любая совокупность n линейно независимых векторов пространства V является базисом этого пространства.

Доказательство:

Пусть $\dim V = n$. По определению размерности в пространстве V существует линейно независимая совокупность $e_1, e_2, \dots, e_n$, состоящая из n элементов. Покажем, что эта совокупность является базисом пространства V .

Пусть x – произвольный элемент линейного пространства V . Рассмотрим совокупность $e_1, e_2, \dots, e_n, x$. Так как размерность пространства V равна n , а рассматриваемая совокупность состоит из $n+1$ элементов, то она линейно зависима. Следовательно, существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$, что среди них хотя бы одно отлично от нуля и, тем не менее, имеет место равенство

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} x = 0. \quad (7)$$

Легко показать, что число α_{n+1} отлично от нуля. Действительно, если предположить, что $\alpha_{n+1} = 0$, то равенство (7) принимает вид

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0,$$

причём среди коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ имеется хотя бы один отличный от нуля. Но это означает, что совокупность $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно зависима, что противоречит условию.

Таким образом, показано, что $\alpha_{n+1} \neq 0$. Тогда равенство (7) можно привести к виду

$$x = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} e_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}} e_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} e_n,$$

означающему, что произвольный элемент $x \in V$ является линейной комбинацией элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Вместе с линейной независимостью элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ это доказывает, что они образуют базис пространства V .

Пример 9. Показать, что совокупность векторов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, e_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образует базис пространства R^n .

Решение:

Так как число столбцов в данной совокупности совпадает с размерностью пространства R^n , то достаточно проверить только линейную независимость векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Пусть имеет место равенство

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n \\ \vdots \\ \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то равенство (8) равносильно системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_n = 0, \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0, \\ \vdots \\ \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0. \end{array} \right.$$

Очевидно, что эта система имеет только нулевое решение. Следовательно, данная совокупность векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независима.

1.6.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ ПРИ ЗАМЕНЕ БАЗИСА

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ – два произвольных базиса n -мерного линейного пространства V . Разложим каждый элемент базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$:

[illegible]

Или в матричном виде

$$(e'_1 \quad e'_2 \quad \dots \quad e'_n) = (e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n) \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

столбцы которой являются координатами новых базисных векторов в старом базисе, называется матрицей перехода от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$.

Заметим, что определитель матрицы перехода U отличен от нуля, ибо в противном случае столбцы матрицы U были бы линейно зависимыми, а тогда в силу теоремы 4 были бы линейно зависимыми и базисные элементы $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$, что противоречит определению базиса.

Пусть x – произвольный вектор линейного пространства V ,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

– его координатный столбец относительно базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$,

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

– его координатный столбец относительно базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$, т. е.

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n;$$

$$x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \dots + x'_n e'_n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x &= (u_{11}e_1 + u_{21}e_2 + \dots + u_{n1}e_n)x'_1 + (u_{12}e_1 + u_{22}e_2 + \dots + u_{n2}e_n)x'_2 + \dots \\ &\quad \dots + (u_{1n}e_1 + u_{2n}e_2 + \dots + u_{nn}e_n)x'_n = \\ &= (u_{11}x'_1 + u_{12}x'_2 + \dots + u_{1n}x'_n)e_1 + (u_{21}x'_1 + u_{22}x'_2 + \dots + u_{2n}x'_n)e_2 + \dots \\ &\quad \dots + (u_{n1}x'_1 + u_{n2}x'_2 + \dots + u_{nn}x'_n)e_n. \end{aligned}$$

В силу единственности разложения всякого вектора по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ из полученного равенства сразу же вытекают формулы

перехода от координат вектора x относительно базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ к его координатам относительно базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$:

[illegible]

или в матричном виде

$$x = U \cdot x'.$$

Умножим данное равенство на матрицу U^{-1} слева:

$$U^{-1} \cdot x = U^{-1} \cdot (U \cdot x'),$$

$$U^{-1} \cdot x = (U^{-1} \cdot U) \cdot x',$$

$$U^{-1} \cdot x = E \cdot x',$$

$$U^{-1} \cdot x = x'$$

ИЛИ

$$x' = U^{-1} \cdot x$$

Данная формула является *формулой преобразования координат при смене базиса*.

Примеры

10. Найти матрицу перехода от стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^3$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

к базису

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Система векторов e'_1, e'_2, e'_3 является базисом пространства R^3 в силу линейной независимости. В соответствии с определением матрицы перехода найдем разложение каждого из векторов базиса e'_1, e'_2, e'_3 по базису e_1, e_2, e_3 :

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3,$$

$$e'_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 \cdot e_1 + 5 \cdot e_2 + 6 \cdot e_3,$$

$$e'_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 7 \cdot e_1 + 8 \cdot e_2 + 9 \cdot e_3.$$

Следовательно, искомая матрица перехода есть

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

12. Дан произвольный вектор $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ пространства R^3 со стандартным базисом

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найти его координаты относительно базиса

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e'_1, e'_2, e'_3 . Воспользовавшись полученными формулами, найти координаты вектора $x = e_1 - 2e_2 + 2e_3$ относительно базиса e'_1, e'_2, e'_3 .

Решение:

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – координатный столбец вектора x относительно ба-

зиса e_1, e_2, e_3 , а $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ – координатный столбец того же вектора

относительно базиса e'_1, e'_2, e'_3 . Имеем

$$x' = U^{-1} \cdot x,$$

где U^{-1} – матрица, обратная к матрице перехода U от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e'_1, e'_2, e'_3 .

Матрица U имеет вид:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу.

Определитель:

$$\det U = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Алгебраические дополнения:

$$\begin{aligned} U_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, & U_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & U_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \\ U_{12} &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & U_{22} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & U_{32} &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ U_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & U_{23} &= -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, & U_{33} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$U^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = U^{-1}x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

т. е. формулы преобразования координат произвольного вектора x при переходе от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e'_1, e'_2, e'_3 имеет вид

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 + x_3, \\ x'_2 = -x_1 + x_2, \\ x'_3 = x_1. \end{cases}$$

Применим полученные формулы к координатам конкретного век-

тора $x = e_1 - 2e_2 + 2e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. В этом случае $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 2$,

следовательно,

$$\begin{cases} x'_1 = -(-2) + 2 = 4, \\ x'_2 = -1 - 2 = -3, \\ x'_3 = 1. \end{cases}$$

Окончательно получаем

$$x = 4e'_1 - 3e'_2 + e'_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

11. Показать, что векторы

$$e''_1 = (1, 1, 0), e''_2 = (1, -1, 0), e''_3 = (-1, 2, -1)$$

образуют базис пространства R^3 , и найти матрицу перехода от базиса

$$e'_1 = (0, 0, 1), e'_2 = (0, 1, 1), e'_3 = (1, 1, 1)$$

к базису e''_1, e''_2, e''_3 .

Решение:

Проверим линейную независимость векторов e_1'', e_2'', e_3'' . Пусть имеет место равенство

$$\alpha_1 e_1'' + \alpha_2 e_2'' + \alpha_3 e_3'' = 0.$$

Это равенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Так как эта система, очевидно, имеет только ненулевое решение, то векторы e_1'', e_2'', e_3'' линейно независимы. Поскольку их число равно размерности пространства R^3 , то в силу теоремы 6 они образуют базис этого пространства.

Найдем разложение каждого из векторов базиса e_1'', e_2'', e_3'' по базису e_1', e_2', e_3' . Пусть

$$e_1'' = \alpha_1 e_1' + \alpha_2 e_2' + \alpha_3 e_3'$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – неопределенные коэффициенты. Применяя правила выполнения операций над строками, приходим к равенству.

$$(1, 1, 0) = (\alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),$$

равносильному системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_3 = 1, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы есть

$$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1.$$

Следовательно

$$e_1'' = -1 \cdot e_1' + 0 \cdot e_2' + 1 \cdot e_3'$$

Аналогично находим разложения по базису e_1', e_2', e_3' векторов e_2'' и e_3'' :

$$e_2'' = 1 \cdot e_1' - 2 \cdot e_2' + 1 \cdot e_3', \quad e_3'' = -3 \cdot e_1' + 3 \cdot e_2' - 1 \cdot e_3'.$$

Используя полученные разложения, выпишем матрицу перехода от базиса e_1', e_2', e_3' к базису e_1'', e_2'', e_3'' :

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

ПРАКТИКУМ 1.6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1.6.1. Пусть P_n – множество всех многочленов степени не выше n от переменной t с действительными коэффициентами, т. е. выражений вида

$$x = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_{n-1}t^{n-1} + a_nt^n.$$

Суммой двух многочленов

$$x = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n \text{ и } y = b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n$$

назовем многочлен

$$x + y = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \dots + (a_n + b_n)t^n,$$

а произведением многочлена

$$x = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$$

на действительное число λ – многочлен

$$\lambda x = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)t + \dots + (\lambda a_n)t^n.$$

Два многочлена

$$x = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n \text{ и } y = b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n$$

будем считать равными, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной t : $a_i = b_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Показать, что P_n – линейное пространство.

1.6.2. Показать, что множество симметричных матриц одного порядка с обычным определением операций сложения двух матриц и умножения матрицы на число является линейным пространством.

1.6.3. Показать, что столбцы e_1, e_2, e_3, e_4 образуют базис пространства $\mathbb{R}^4$, и найти координаты вектора x относительно этого базиса:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1.6.4. Показать, что векторы e_1, e_2, e_3, e_4 образуют базис пространства $\mathbb{R}^4$, и найти координаты вектора x относительно этого базиса:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 1, 1, 1), \\ e_2 &= (1, 3, 1, 1), \\ e_3 &= (1, 1, 2, 1), \\ e_4 &= (1, 3, 2, 3); \\ x &= (3, 6, 3, -1). \end{aligned}$$

1.6.5. Показать, что матрицы

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

образуют базис линейного пространства квадратных матриц порядка

2. Найти координаты матрицы $X = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ относительно этого базиса.

1.6.6. Показать, что многочлены

$$f_1 = t^2 + 1, \quad f_2 = -t^2 + 2t, \quad f_3 = t^2 - t$$

образует базис пространства многочленов степени не выше 2. Найти координаты многочлена $g = -2t^2 + t - 1$ относительно этого базиса.

1.6.7. Проверить, что совокупности строк e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3 являются базисами линейного пространства $\mathbb{R}^3$, и найти матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e'_1, e'_2, e'_3 :

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, 0), & e'_1 &= (1, -1, 1), \\
\text{a) } e_2 &= (0, 1, 0), & e'_2 &= (-1, 1, -2), \\
e_3 &= (0, 0, 1); & e'_3 &= (-1, 2, 1).
\end{aligned}$$

1.6.8. Убедиться, что системы векторов e_1, e_2, e_3, e_4 и e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 образуют базисы пространства $\mathbb{R}^4$, найти матрицу перехода. Найти координаты вектора $x = (1, 2, -3, 4)$ в базисе e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 :

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, 0, 0), & e'_1 &= (1, -1, 0, 0), \\
\text{a) } e_2 &= (0, -1, 0, 0), & e'_2 &= (0, 1, -1, 0), \\
e_3 &= (0, 0, -1, 0), & e'_3 &= (1, 0, -1, 1), \\
e_4 &= (0, 0, 0, 1); & e'_4 &= (0, 0, -1, 1).
\end{aligned}$$

1.6.9. Проверить, что совокупности многочленов $f_1 = 1, f_2 = t, f_3 = t^2$ и $g_1 = 1, g_2 = t - 2, g_3 = (t - 2)^2$ образуют базисы в пространстве многочленов степени не выше 2. Найти матрицу перехода от базиса f_1, f_2, f_3 к базису g_1, g_2, g_3 и вычислить координаты многочлена $h = 4t^2 - 13t + 12$ относительно базиса g_1, g_2, g_3 .

1.6.10. Найти формулы выражающие координаты произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^3$ в базисе e'_1, e'_2, e'_3 через его координаты в базисе e_1, e_2, e_3 . С помощью полученных формул найти координаты конкретного вектора x относительно базиса e'_1, e'_2, e'_3 .

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, -1), & e'_1 &= (1, -1, 0), \\
e_2 &= (1, -2, 0), & e'_2 &= (0, 2, 1), & x &= 2e_1 + 5e_2 + 8e_3. \\
e_3 &= (0, -1, 1); & e'_3 &= (1, 0, 1);
\end{aligned}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.6.11. Пусть V – множество всех строк вида $x = (x_1, x_2)$, обе компоненты которых строго положительны: $x_1 > 0, x_2 > 0$. Сумму двух строк $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ определим равенством

$$x + y = (x_1 y_1, x_2 y_2),$$

а произведение строки $x = (x_1, x_2)$ на действительное число λ – равенством

$$\lambda x = (x_1^\lambda, x_2^\lambda).$$

Показать, что V – линейное пространство.

1.6.12. Является ли линейным пространством множество строк вида $x(x_1, x_2, 0, 0)$

с обычным определением операций сложения двух строк и умножения строки на число?

1.6.13. Показать, что столбцы e_1, e_2, e_3, e_4 образуют базис пространства $\mathbb{R}^4$, и найти координаты вектора x относительно этого базиса:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1.6.14. Показать, что векторы e_1, e_2, e_3, e_4 образуют базис пространства $\mathbb{R}^4$, и найти координаты вектора x относительно этого базиса:

$e_1 = (1, 1, 0, 1),$	$e_1 = (2, 1, 0, 1),$
$e_2 = (2, 1, 3, 1),$	$e_2 = (0, 1, 2, 2),$
а) $e_3 = (1, 1, 0, 0),$	б) $e_3 = (-2, 1, 1, 2),$
$e_4 = (0, 1, -1, -1);$	$e_4 = (1, 3, 1, 2);$
$x = (0, 0, 0, 1).$	$x = (10, 6, 5, 8).$

1.6.15. Показать, что матрицы

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

образуют базис линейного пространства симметричных матриц порядка 2. Найти координаты матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

относительно этого базиса.

1.6.16. Показать, что система многочленов

$$f_1 = t^3 + t^2 + t + 1, f_2 = t^2 + t + 1, f_3 = t + 1, f_4 = 1$$

образует базис пространства многочленов степени не выше 3. Найти координаты многочлена $g = t^2 + 4t + 4$ относительно этого базиса.

1.6.17. Пусть V – множество всех строк вида $x = (x_1, x_2)$, обе компоненты которых строго положительны: $x_1 > 0, x_2 > 0$. Сумму двух строк $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ определим равенством

$$x + y = (x_1 y_1, x_2 y_2),$$

а произведение строки $x = (x_1, x_2)$ на действительное число λ – равенством

$$\lambda x = (x_1^\lambda, x_2^\lambda).$$

Показать, что строки $e_1 = (10, 1)$ и $e_2 = (1, 10)$ образуют базис этого пространства. Найти координаты строки $x = (10^{-3}, 100)$ относительно этого базиса.

1.6.18. Определить размерность линейного пространства $M_{m \times n}$ прямоугольных матриц размеров $m \times n$.

1.6.19. Определить размерность линейного пространства P_n многочленов степени не выше n .

1.6.20. Проверить, что совокупности строк e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3 являются базисами линейного пространства R^3 , и найти матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e'_1, e'_2, e'_3 :

$$\begin{array}{ll} e_1 = (1, 1, 1), & e'_1 = (1, 1, 0), \\ \text{а) } e_2 = (1, 0, 1), & e'_2 = (1, -1, 0), \\ e_3 = (0, 0, 1); & e'_3 = (-1, 2, -1). \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} e_1 = (1, 2, 1), & e'_1 = (3, 1, 4), \\ \text{б) } e_2 = (2, 3, 3), & e'_2 = (5, 2, 1), \\ e_3 = (3, 7, 1); & e'_3 = (1, 1, -6). \end{array}$$

1.6.21. Убедиться, что системы векторов e_1, e_2, e_3, e_4 и e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 образуют базисы пространства R^4 , найти матрицу перехода. Найти координаты вектора $x = (1, 2, -3, 4)$ в базисе e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 :

$$\begin{array}{ll} e_1 = (-1, 0, 0, 0), & e'_1 = (1, 1, 1, 1), \\ \text{а) } e_2 = (1, -1, 0, 0), & e'_2 = (1, 2, 1, 1), \\ e_3 = (1, 1, -1, 0), & e'_3 = (1, 1, 2, 1), \\ e_4 = (1, 1, 1, -1); & e'_4 = (1, 3, 2, 3). \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} e_1 = (0, 0, 0, 1), & e'_1 = (1, 0, 3, 3), \\ \text{б) } e_2 = (0, 0, 1, -1), & e'_2 = (2, 3, 5, 4), \\ e_3 = (0, 1, -1, 0), & e'_3 = (2, 2, 5, 4), \\ e_4 = (1, -1, 0, 0); & e'_4 = (2, 3, 4, 4). \end{array}$$

1.6.22. Найти формулы выражающие координаты произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^3$ в базисе e'_1, e'_2, e'_3 через его координаты в базисе e_1, e_2, e_3 . С помощью полученных формул найти координаты конкретного вектора x относительно базиса e'_1, e'_2, e'_3 .

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 1, 0), & e'_1 &= (1, 1, -2), \\ \text{а) } e_2 &= (-1, 0, -2), & e'_2 &= (0, 3, -1), & x &= -2e_1 + 7e_2 - 3e_3. \\ e_3 &= (2, 2, 1); & e'_3 &= (2, 3, -4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 2, 1), & e'_1 &= (1, 1, 1), \\ \text{б) } e_2 &= (2, 3, 3), & e'_2 &= (1, 1, 2), & x &= -e_1 - e_2 + e_3. \\ e_3 &= (3, 8, 2); & e'_3 &= (1, 2, 3); \end{aligned}$$

1.6.23. Пусть U – матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейного пространства к базису $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$, а V – матрица перехода от базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ к базису $e''_1, e''_2, \dots, e''_n$. Показать, что матрицей перехода от базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ к базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ будет матрица U^{-1} , а матрицей перехода от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e''_1, e''_2, \dots, e''_n$ будет матрица UV .

1.6.24. Как изменится матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$, если переставить

- а) векторы e_i и e_j ;
- б) векторы e'_k и e'_m ?

1.6.25. Определить размерность и найти какой-нибудь базис подпространства $L \subset R_n$, состоящего из всех столбцов $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ таких, что

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_n.$$

1.6.26. Определить размерность и найти какой-нибудь базис подпространства $L \subset A_n$, состоящего из всех строк $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ таких, что

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_{n-1} = x_n \end{cases}$$

1.6.27. Определить размерность и найти какой-нибудь базис подпространства $L \subset A_{2n}$, состоящего из всех строк $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{2n-1} \ x_{2n})$, у которых одинаковы все компоненты с четными номерами и одинаковы все компоненты с нечетными номерами.

1.6.27. В пространстве многочленов степени не выше 4 найти базис линейного подпространства многочленов $f(t)$ таких, что

$$f(1) = 0, \ f(2) = 0, \ f(3) = 0.$$

ТЕМА 1.7. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1.7.1. ПОНЯТИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА И ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть V и W – два линейных пространства.

Определение. *Оператором A , действующим из пространства V в пространство W , называется отображение, сопоставляющее каждому элементу $x \in V$ один и только один элемент $y \in W$:*

$$A: V \rightarrow W.$$

При этом элемент $y \in W$ называется *образом* элемента $x \in V$ и обозначается

$$y = A(x) \text{ или } y = Ax,$$

а элемент x называется *прообразом* элемента y .

Если оператор A действует из пространства V в это же пространство, т.е. пространство W совпадает с пространством V , то он называется *преобразованием* пространства V .

В данном разделе понятия линейный оператор и линейное преобразование будем отождествлять (кроме специально оговоренных случаев).

Оператор $A: V \rightarrow W$ называется *линейным*, если выполнены два условия:

1) для любого элемента $x_1, x_2 \in V$ справедливо соотношение

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2;$$

2) для любого элемента $x \in V$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет место соотношение

$$A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

Теорема 1 (критерий линейности оператора). Условия 1 и 2 эквивалентны следующему:

$$\mathbf{A}(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot \mathbf{A}x + \mu \cdot \mathbf{A}y \quad \forall x, y \in V, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Данное условие носит название *билинейности*. Оно является критерием линейности оператора.

Лемма 1. Из определения линейного оператора непосредственно следует, что любой линейный оператор переводит нулевой элемент пространства V в нулевой же элемент пространства W . Действительно,

$$\mathbf{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{A}(x + (-1) \cdot x) = \mathbf{A}x + \mathbf{A}((-1) \cdot x) = \mathbf{A}x + (-1) \cdot \mathbf{A}x = \mathbf{0}.$$

Замечание 1. В учебной и научной литературе приняты различные обозначения линейных операторов:

$$\mathbf{A}, A, \varphi,$$

т.е.

а также действия линейного оператора на элемент векторного пространства:

$$\mathbf{A}x = A(x) = \varphi(x).$$

Замечание 2. Элементы арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^n$ будут записывать в виде столбца или строки компонент, перечисленных через запятую :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Соответственно, линейный оператор может быть записан в виде функции от $x_1, x_2, \dots, x_n$ в виде столбца или строки.

Например

$$\mathbf{A}x = \varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2, x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3).$$

Пример 1. Рассмотрим примеры линейных операторов.

а) Рассмотрим арифметическое векторное пространство R^3 .

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3)$$

и оператор $\mathbf{A}$, отображающий R^3 в R^3 по следующему правилу:

$$\mathbf{A}x = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что $\mathbf{A}$ – линейный оператор. Для этого проверим, выполняется ли условие билинейности (1):

$$\mathbf{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \mathbf{A}(x) + \mu \mathbf{A}(y)$$

Пусть

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda x + \mu y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu y_1 \\ \mu y_2 \\ \mu y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \\ \lambda x_3 + \mu y_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\lambda x + \mu y) &= \mathbf{A} \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \\ \lambda x_3 + \mu y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) \\ (\lambda x_2 + \mu y_2) + (\lambda x_3 + \mu y_3) \\ (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_3 + \mu y_3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + x_2) \\ \lambda(x_2 + x_3) \\ \lambda(x_1 + x_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu(y_1 + y_2) \\ \mu(y_2 + y_3) \\ \mu(y_1 + y_3) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_2 + y_3 \\ y_1 + y_3 \end{pmatrix} = \\ &= \lambda \mathbf{A}(x) + \mu \mathbf{A}(y). \end{aligned}$$

Следовательно, оператор является линейным.

б) Рассмотрим арифметическое векторное пространство R^n столбцов высоты n и некоторую фиксированную матрицу A размеров $m \times n$. Сопоставим каждому столбцу $x \in R^n$ столбец $y = A \cdot x$. Он

имеет высоту m . Тем самым мы определили оператор $\mathbf{A}$, действующий из пространства R^n столбцов высоты n в пространство R^m столбцов высоты m по правилу

$$\mathbf{A}x = A \cdot x.$$

В силу свойств операции умножения матриц этот оператор, очевидно, является линейным.

в) Рассмотрим линейное пространство P_n многочленов степени не выше n . Сопоставим каждому многочлену

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n \in P_n.$$

его производную

$$x'(t) = a_1 + 2a_2 t + \dots + (n-1)a_{n-1} t^{n-2} + na_n t^{n-1}.$$

Она является многочленом степени не выше $n-1$. Тем самым мы определили оператор дифференцирования $\mathbf{D}$, действующий из пространства P_n многочленов степени не выше n в пространство P_{n-1} многочленов степени не выше $n-1$ по правилу

$$\mathbf{D}x(t) = x'(t).$$

Легко проверить, что этот оператор является линейным. Действительно, для $\forall x(t), y(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n \in P_n$:

$$\lambda \cdot x(t) + \mu \cdot y(t) = (\lambda a_0 + \lambda a_1 t + \dots + \lambda a_n t^n) + (\mu b_0 + \mu b_1 t + \dots + \mu b_n t^n).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\lambda \cdot x(t) + \mu \cdot y(t)) &= \\ &= (\lambda a_1 + \lambda a_2 2t + \dots + \lambda a_n n t^{n-1}) + (\mu b_1 + \mu b_2 2t + \dots + \mu b_n n t^{n-1}) = \\ &= \lambda \cdot \mathbf{D}x(t) + \mu \cdot \mathbf{D}y(t). \end{aligned}$$

Поскольку каждый многочлен степени не выше $n-1$ является в то же время и многочленом степени не выше n , то оператор дифференцирования $\mathbf{D}$ можно рассматривать и как линейное преобразование линейного пространства P_n .

г) В трёхмерном пространстве геометрических векторов рассмотрим *преобразование отражения* относительно координатной плоскости Oxy

$$\mathbf{P}\vec{a} = \vec{a} - 2(\vec{a}, \vec{k})\vec{k},$$

где $(\vec{a}, \vec{k})$ – скалярное произведение; $\vec{k}$ – вектор единичной длины, направленный вдоль оси Oz . Покажем, что это преобразование является линейным. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два произвольных вектора и λ – любое действительное число. В силу свойств скалярного произведения векторов имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{a} + \vec{b} - 2(\vec{a} + \vec{b}, \vec{k})\vec{k} = \\ &= \vec{a} - 2(\vec{a}, \vec{k})\vec{k} + \vec{b} - 2(\vec{b}, \vec{k})\vec{k} = \mathbf{P}\vec{a} + \mathbf{P}\vec{b};\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(\lambda\vec{a}) = \lambda\vec{a} - 2(\lambda\vec{a}, \vec{k})\vec{k} = \lambda(\vec{a} - 2(\vec{a}, \vec{k})\vec{k}) = \lambda\mathbf{P}\vec{a}.$$

Видим, что оба условия, составляющие определение линейного преобразования, выполнены. Следовательно, преобразование отражения является линейным.

1.7.2. ЯДРО И ДЕФЕКТ, ОБРАЗ И РАНГ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Определение. *Ядром* линейного оператора $\mathbf{A}$ называется множество всех таких элементов $x \in V$, для которых имеет место равенство.

$$\mathbf{A}x = 0.$$

Ядро линейного оператора $\mathbf{A}$ обозначается символом $\text{Ker } \mathbf{A}$.

Таким образом,

$$\text{Ker } \mathbf{A} = \{x \in V \mid \mathbf{A}x = 0\}.$$

Дефектом линейного оператора $\mathbf{A}$ называется число $\text{def } \mathbf{A}$, равное размерности его ядра:

$$\text{def } \mathbf{A} = \dim(\text{Ker } \mathbf{A}).$$

Пример 2. На линейном пространстве P_n многочленов степени не выше n рассмотрим линейный оператор дифференцирования

$$\mathbf{D}x(t) = x'(t),$$

сопоставляющее каждому многочлену

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n \in P_n$$

его производную

$$x'(t) = a_1 + 2a_2 t + \dots + (n-1)a_{n-1} t^{n-2} + na_n t^{n-1}.$$

Поскольку нулевым элементом $\mathbf{0}$ пространства P_n является многочлен, все коэффициенты которого равны 0, то равенство $\mathbf{D}x(t) = \mathbf{0}$ имеет место тогда и только тогда когда $x(t) = a_0$.

Следовательно, ядром оператора $\mathbf{D}$ является пространство P_0 многочленов нулевой степени.

Определение. *Образом* линейного оператора $\mathbf{A}$ называется множество всех таких элементов $y \in V$, каждый из которых является образом некоторого элемента пространства V при преобразовании $\mathbf{A}$, то есть множество всех элементов $y \in V$, представимых в виде

$$y = \mathbf{A}x.$$

Образ линейного оператора $\mathbf{A}$ обозначается символом $\text{Im } \mathbf{A}$. Таким образом,

$$\text{Im } \mathbf{A} = \{y \in V \mid \exists x \in V, y = \mathbf{A}x\}.$$

Рангом линейного оператора $\mathbf{A}$ называется число $\text{rank } \mathbf{A}$, равное размерности его образа:

$$\text{rank } \mathbf{A} = \dim(\text{Im } \mathbf{A}).$$

Пример 3. На линейном пространстве P_n многочленов степени не выше n рассмотрим линейный оператор дифференцирования

$$\mathbf{D}x(t) = x'(t).$$

Так как производная многочлена степени не выше n есть многочлен степени не выше $n-1$, то для любого многочлена $x(t) \in P_n$ его образ при преобразовании $\mathbf{D}$ принадлежит пространству P_{n-1} многочленов степени не выше $n-1$.

Обратно, если некоторой многочлен $y(t)$ принадлежит пространству P_{n-1} , то любая его первообразная $x(t)$ принадлежит пространству P_n , т.е. для каждого многочлена $y(t) \in P_{n-1}$ существует многочлен $x(t) \in P_n$ такой, что $y(t) = \mathbf{D}x(t)$.

Отсюда следует, что образом оператора $\mathbf{D}$ служит пространство P_{n-1} .

Теорема 1. Пусть $\mathbf{A}$ – линейный оператор n -мерного линейного пространства V . Тогда

$$\dim(\text{Ker } \mathbf{A}) + \dim(\text{Im } \mathbf{A}) = n,$$

т.е.

$$\text{def } \mathbf{A} + \text{rank } \mathbf{A} = \dim V.$$

1.7.3. МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Рассмотрим линейное пространство V размерности n . Выберем в нем некоторый базис $e_1, e_2, \dots, e_n$. Пусть $\mathbf{A}$ – линейный оператор пространства V .

Рассмотрим образы $\mathbf{A}e_i$ базисных векторов e_i при этом преобразовании ($j = 1, 2, \dots, n$). Векторы $\mathbf{A}e_j$, как и любые другие элементы линейного пространства V , можно разложить по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Пусть

$$\mathbf{A}e_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{nj}e_n, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Из координат векторов $\mathbf{A}e_j$ составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется *матрицей линейного оператора $\mathbf{A}$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$* .

Пример 4. На пространстве $\mathbb{R}^3$ задан линейный оператор

$$\mathbf{A}x = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора $\mathbf{A}$ в стандартном базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 0), \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 1, 0), \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 1).$$

Решение.

Подействуем преобразованием $\mathbf{A}$ на каждый из базисных векторов e_1, e_2, e_3 и полученные образы разложим по тому же базису e_1, e_2, e_3 :

$$\mathbf{A}e_1 = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 \\ 1-0 \\ 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3;$$

$$\mathbf{A}e_2 = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3;$$

$$\mathbf{A}e_3 = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3.$$

Следовательно, матрица оператора $\mathbf{A}$ в базисе e_1, e_2, e_3 есть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно определению матрицы линейного оператора каждому линейному преобразованию $\mathbf{A}$ линейного пространства V при заданном базисе этого пространства ставится в соответствие некоторая квадратная матрица. Возникает естественный вопрос – всякой ли квадратной матрице можно поставить в соответствие линейный оператор.

Теорема 2. Пусть в n -мерном линейном пространстве V задан базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ пусть A – квадратная матрица порядка n . Существует и притом единственный линейный оператор A этого пространства, матрицей которого в данном базисе является матрица A .

Таким образом, при фиксированном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V между всеми линейными операторами этого пространства и всеми квадратными матрицами порядка n существует взаимно-однозначное соответствие.

Пусть x – произвольный элемент пространства V , и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ – его разложение по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$. Рассмотрим образ вектора x при преобразовании A :

$$y = Ax = A \sum_{j=1}^n x_j e_j = \sum_{j=1}^n x_j A e_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) e_i.$$

Обозначим координаты вектора y относительно базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$, через $y_1, y_2, \dots, y_n$. Из полученного разложения вектора $y = Ax$ по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ следует, что

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Положим

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда равенства (2) могут быть записаны в матричной форме

$$y = Ax, \quad (3)$$

Где A – матрица оператора $\mathbf{A}$ в данном базисе.

Итак, если A – матрица линейного оператора $\mathbf{A}$ в некотором базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$, то кардинальные столбцы произвольного вектора x и его образа $y = \mathbf{A}x$ относительно этого базиса связаны соотношением (3).

Пример 5.

а) В пространстве $\mathbb{R}^3$ задан линейный оператор

$$\mathbf{A}x = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_3, x_1 + x_2).$$

Убедившись, что векторы

$$e'_1 = (1, -1, 1), e'_2 = (-1, 1, -2), e'_3 = (-1, 2, 1).$$

Образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$, найти матрицу оператора $\mathbf{A}$ в этом базисе. Используя полученную матрицу, найти координаты вектора $y = \mathbf{A}x$ относительно этого базиса, если $x = e_1 + 2e_2 - 3e_3$.

Решение:

Проверку линейной независимости векторов e_1, e_2, e_3 предоставляем читателю. Найдем матрицу оператора $\mathbf{A}$ в рассматриваемом базисе e'_1, e'_2, e'_3 . Имеем

$$\mathbf{A}e'_1 = \mathbf{A}(1, -1, 1) = (0, 0, 0);$$

$$\mathbf{A}e'_2 = \mathbf{A}(-1, 1, -2) = (-1, 1, 0);$$

$$\mathbf{A}e'_3 = \mathbf{A}(-1, 2, 1) = (4, -2, 1).$$

Разложим векторы $\mathbf{A}e'_1, \mathbf{A}e'_2, \mathbf{A}e'_3$ по базису e'_1, e'_2, e'_3 .

Очевидно, что

$$\mathbf{A}e'_1 = 0 \cdot e'_1 + 0 \cdot e'_2 + 0 \cdot e'_3.$$

Разложение вектора $\mathbf{A}e'_2$ по базису e_1, e_2, e_3 будем искать в виде

$$\mathbf{A}e'_2 = (-1, 1, 0) = \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \alpha_3 e'_3.$$

Это равенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = -1, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1, \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решим её методом Гаусса. Выпишем и приведем к верхней трапеци-
идальной форме расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} a_1 - a_2 - a_3 = -1, \\ -a_2 + 2a_3 = 1, \\ a_3 = 0. \end{cases}$$

Её решение есть $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 0$, следовательно,

$$\mathbf{A}e'_2 = -2e'_1 - 1 \cdot e'_2 + 0 \cdot e'_3.$$

Разложение вектора $\mathbf{A}e'_3$ сводится к решению системы

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 4, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = -2, \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $\alpha_1 = 13$, $\alpha_2 = 7$, $\alpha_3 = 2$. Следовательно,

$$\mathbf{A}e'_3 = 13e'_1 + 7e'_2 + 2e'_3.$$

Теперь мы можем выписать матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе e'_1, e'_2, e'_3 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 13 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $x = e'_1 + 2e'_2 - 3e'_3$, то

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

относительно базиса e'_1, e'_2, e'_3 . И по формуле (3) получаем

$$y = Ax = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 13 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43 \\ -23 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

б) Пусть P_3 – линейное пространство многочленов степени не выше 3, $\mathbf{D}$ – оператор дифференцирования. Найти матрицу оператора $\mathbf{D}$ в стандартном базисе.

Решение:

Пространство P_3 состоит из элементов

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

Набор многочленов $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$, $e_3(t) = t^2$, $e_4(t) = t^3$ называется стандартным базисом пространства P_3 . Любой многочлен $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ в рассматриваемом базисе может быть записан в координатной форме как четырехмерный вектор:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Применим оператор дифференцирования к базисным векторам:

$$e'_1 = (1)' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4;$$

$$e'_2 = (t)' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4;$$

$$e'_3 = (t^2)' = 2t = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 = 0e_1 + 2e_2 + 0e_3 + 0e_4;$$

$$e'_4 = (t^3)' = 3t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 3 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 = 0e_1 + 0e_2 + 3e_3 + 0e_4.$$

$$\mathbf{D}e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица оператора $\mathbf{D}$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

в) На пространстве R^3 векторов $x = (x_1, x_2, x_3)$ задан линейный оператор

$$Ax = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_3, x_1 + x_2).$$

Найти дефект и ранг этого оператора, а также какие-нибудь базисы его ядра и образа.

Решение:

По определению ядра линейного оператора вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ принадлежит ядру $\text{Ker } A$ тогда и только тогда, когда

$$Ax = 0,$$

где 0 — нуль-вектор.

Пусть A — матрица оператора A в каком-нибудь базисе пространства A_3 , например, в стандартном базисе

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1),$$

Равенство $Ax = 0$ равносильно однородной системе уравнений

$$Ax = 0.$$

Другими словами, подпространство $\text{Ker } A$ изоморфно пространству решений системы $Ax = 0$, и, следовательно, дефект оператора A , совпадает с размерностью пространства решений однородной системы $Ax = 0$.

Не представляет труда выписывать матрицу A и координатный столбец произвольного элемента $x = (x_1, x_2, x_3)$ относительно базиса e_1, e_2, e_3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Известно, что размерность пространства решений однородной системы $Ax = 0$ равна $n - r$, где n – порядок матрицы A , а r – ее ранг. Найдем ранг матрицы A , для чего приведем ее к треугольному виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из вида полученной матрицы следует, что $r = \text{rank } A = 2$. Тогда $\text{def } A = n - r = 3 - 2 = 1$.

Согласно теореме 3 ранг линейного оператора равен рангу его матрицы в любом базисе. Следовательно,

$$\text{rank } A = r = 2.$$

В силу того, что подпространство $\text{Ker } A$ и пространство решений однородной системы $A\xi = 0$ изоморфны, в качестве базиса подпространство $\text{Ker } A$ можно взять вектор e'_1 , координатным столбцом которого относительно базиса e_1, e_2, e_3 является любое ненулевое решение системы $Ax = 0$ (это решение составляет фундаментальную систему решений однородной системы уравнений $Ax = 0$).

Найдем какое-нибудь ненулевое решение системы $Ax = 0$. Используя результат приведения матрицы A к верхней трапецеидальной форме, приходим к системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

В этой системе переменные x_1 и x_2 являются базисными, а переменная x_3 – свободной. Полагая $x_3 = 1$, из системы находим $x_2 = -1$, $x_1 = 1$. Таким образом, искомое ненулевое решение системы $Ax = 0$ есть

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и, следовательно, базис подпространства $\text{Ker } A$ составляет вектор

$$e'_1 = (1, -1, 1).$$

Обратимся теперь к образу линейного оператора $\mathbf{A}$, т.е. к подпространству $\text{Im } \mathbf{A}$. Размерность этого подпространства найдена выше:

$$\dim(\text{Im } \mathbf{A}) = \text{rank } \mathbf{A} = 2.$$

По определению образа линейного оператора строка $y = (y_1, y_2, y_3)$ принадлежит подпространству $\text{Im } \mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда существует вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ такой, что $y = \mathbf{A}x$.

Пусть A – матрица оператора $\mathbf{A}$ в рассматриваемом базисе e_1, e_2, e_3 пространства A_3 . Тогда равенство $y = \mathbf{A}x$ равносильно равенству

$$y = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полученное равенство означает, что вектор $y = (y_1, y_2, y_3)$ принадлежит подпространству $\text{Im } \mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда его координатный столбец y является линейной комбинацией столбцов матрицы A .

Другими словами, пространство $\text{Im } \mathbf{A}$ изоморфно линейной оболочке столбцов матрицы A . Поэтому в качестве базиса пространства $\text{Im } \mathbf{A}$ можно взять векторы e'_1 и e'_2 такие, что их координатные столбцы относительно базиса e_1, e_2, e_3 образуют базис линейной оболочки столбцов матрицы A .

Базисом линейной оболочки столбцов матрицы A является любая максимальная линейно независимая подсистема совокупности столбцов этой матрицы. Воспользуемся результатом приведения матрицы A к трапецеидальной форме. Поскольку базисный минор преобразованной матрицы расположен в двух первых столбцах, базисными столбцами матрицы A являются ее первые два столбца. В силу теоремы о базисном миноре эти столбцы и образуют базис линейной оболочки столбцов матрицы A .

Таким образом, базис подпространства $\text{Im } \mathbf{A}$ составляют векторы

$$e'_1 = (1, 1, 1), \quad e'_2 = (2, 0, 1).$$

1.7.4. ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ МАТРИЦЫ

Линейные операторы на плоскости

Рассмотрим в качестве примера оператор преобразования квадрата в параллелограмм (рис. 1.7.1).

Рис. 1.7.1

Для простоты примем сторону квадрата за единицу, введём прямоугольную систему координат и расположим его вершины в точках $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$, $(0;1)$. Данный квадрат необходимо преобразовать в параллелограмм с вершинами $(0;0)$, $(a;b)$, $(a+c;b+d)$, $(c;d)$ соответственно.

Рис. 1.7.2

Рассмотрим матрицу размера 2×2 следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

По сути параллелограмм получается путём умножения матрицы A на каждый из векторов $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, которые соответствуют вершинам единичного квадрата. Действительно,

$$\mathbf{A}a_1 = A \cdot a_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}(a_2) = A \cdot a_2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}(a_3) = A \cdot a_3 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}(a_4) = A \cdot a_4 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Далее приведены примеры матриц операторов линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^2$.

Горизонтальный сдвиг

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Горизонтальное отражение

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вертикальное отражение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Растяжение

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сжатие

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Гомотетия

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Наклон

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поворот на плоскости

Рассмотрим поворот вектора $x = (x_1, x_2)$ в пространстве $\mathbb{R}^2$, т.е. на плоскости Ox_1x_2 , на угол α против часовой стрелки от оси Ox_1 вокруг неподвижной точки O (рис. 1.7.1).

Рис. 1.7.1.

Пусть угол наклона вектора к оси Ox_1 равен β , тогда

$$\begin{cases} x_1 = |x| \cos \beta, \\ x_2 = |x| \sin \beta. \end{cases}$$

где $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ – модуль (длина) вектора.

Вектор $x' = (x'_1, x'_2)$, полученный в результате поворота вектора x имеет тот же модуль, а угол наклона $\beta + \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} x'_1 &= |x| \cos(\beta + \alpha) = |x| \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha - |x| \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha = \\ &= x_1 \cdot \cos \alpha - x_2 \cdot \sin \alpha; \\ x'_2 &= |x| \sin(\beta + \alpha) = |x| \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha + |x| \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha = \\ &= x_1 \cdot \sin \alpha + x_2 \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

То есть

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot \cos \alpha - x_2 \cdot \sin \alpha \\ x_1 \cdot \sin \alpha + x_2 \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

– матрицу поворота на угол α .

Например, матрицей поворота на угол $\frac{\pi}{6}$ будет

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Поворот в пространстве

Рассмотрим поворот трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ вокруг оси Oy на 45° . Обозначим этот оператор через φ (Очевидно, что φ действительно есть линейный оператор.) Если не указано иначе, то подразумевается, что поворот осуществляется против часовой стрелки, если смотреть из конца оси Oy (точнее, смотреть вдоль этой оси в направлении, противоположном стрелке). Прежде всего запишем матрицу этого оператора. Из геометрических соображений ясно, что плоскость xOz , перпендикулярная к оси Oy , будет вращаться внутри себя, поэтому поворот вектора i будет осуществляться в пределах этой плоскости. Координаты вектора $\varphi(i)$ в плоскости xOz будут равны $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, т. е.

$$\varphi(i) = \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}k.$$

Далее,

$$\varphi(j) = j$$

(вектор j при заданном вращении не меняется), а

$$\varphi(k) = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}k.$$

Таким образом, искомая матрица равна:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Матрицами вращения вокруг оси декартовой системы координат на угол α в трёхмерном пространстве $Oxyz$ с неподвижной системой координат являются:

- вращение вокруг оси Ox :

$$M_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix};$$

- вращение вокруг оси Oy :

$$M_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix};$$

- вращение вокруг оси Oz :

$$M_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проекция

$V = \mathbb{R}^3$, φ – оператор проектирования на плоскость Oxy . Найдём матрицу этого оператора в стандартном базисе

$$e_1 = i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\varphi(i) = i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(j) = j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(k) = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В столбцах матрицы A стоят образы базисных векторов i, j, k в координатной форме.

Обозначим через ψ ортогональное проектирование на плоскость $x = y$. Из свойств проекции вытекает, что оператор проектирования на ось или на плоскость всегда линеен.

Ясно, что

$$\begin{aligned} \psi(i) &= \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j; \\ \psi(j) &= \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j; \\ \psi(k) &= k. \end{aligned}$$

Чтобы получить эти результаты, можно воспользоваться формулой проекции вектора a на плоскость π (в этой формуле проекция рассматривается как вектор):

$$\text{Пр}_\pi a = a - \frac{(a, n) \cdot n}{|n|^2}$$

Здесь n — произвольный ненулевой вектор, нормальный к данной плоскости. В нашем случае в качестве такового можно взять вектор $(1; -1; 0)$ Поэтому, например,

$$\psi(i) = \text{Пр}_\pi i = i - \frac{(i, n) \cdot n}{|n|^2} = i - \frac{1}{2}n = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right)$$

и аналогично для других проекций. Это дает матрицу:

$$A_{\psi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть оператор ω – ортогональное проектирование на ось $x = y$, $z = 0$

Оператор ортогонального проектирования, как уже отмечалось выше, линеен. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\omega(i) &= \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j; \\ \omega(j) &= \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j; \\ \omega(k) &= 0.\end{aligned}$$

Чтобы получить эти результаты, можно воспользоваться формулой проекции вектора на ось (в этой формуле проекция рассматривается как вектор):

$$\text{Пр}_l a = \frac{(a, l) \cdot l}{|l|^2}.$$

Здесь l – произвольный ненулевой (направляющий) вектор данной оси. В нашем примере в качестве такового можно взять вектор $\{1; 1; 0\}$. Поэтому, например,

$$\omega(i) = \text{Пр}_l i = \frac{(i, l) \cdot l}{|l|^2} = \frac{1}{2}l = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$$

и аналогично для других проекций. Таким образом, мы имеем:

$$A_{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.7.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА ПРИ ПЕРЕХОДЕ К ДРУГОМУ БАЗИСУ

Пусть V_n – линейное пространство, $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ – два его базиса.

Напомним определение матрицы перехода от одного базиса линейного пространства к другому. Пусть

$$\begin{aligned} e'_1 &= u_{11}e_1 + u_{21}e_2 + \dots + u_{n1}e_n = \sum_{i=1}^n u_{i1}e_i, \\ e'_2 &= u_{12}e_1 + u_{22}e_2 + \dots + u_{n2}e_n = \sum_{i=1}^n u_{i2}e_i, \\ &\dots \\ e'_n &= u_{1n}e_1 + u_{2n}e_2 + \dots + u_{nn}e_n = \sum_{i=1}^n u_{in}e_i, \end{aligned}$$

т.е.

$$e'_k = u_{1k}e_1 + u_{2k}e_2 + \dots + u_{nk}e_n = \sum_{i=1}^n u_{ik}e_i, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Тогда матрица

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей перехода от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$. Напомним также, что матрица перехода от одного базиса к другому является невырожденной.

Пусть A – линейный оператор пространства V_n . Обозначим через

$$A = (a_{ij}) \text{ и } A' = (a'_{ij})$$

матрицы линейного оператора $\mathbf{A}$ в базисах $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ соответственно. Найдём связь между этими матрицами.

Теорема 4. Матрицы A и A' оператора $\mathbf{A}$ в базисах $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ соответственно связаны соотношением

$$A' = U^{-1}AU. \quad (6)$$

Доказательство:

По определению матрицы линейного оператора $\mathbf{A}$ в базисах $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ имеем

$$\mathbf{A}e_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n = \sum_{i=1}^n a_{i1}e_i,$$

...

$$\mathbf{A}e_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n = \sum_{i=1}^n a_{in}e_i$$

или

$$\mathbf{A}e_k = \sum_{i=1}^n a_{ik}e_i, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

Аналогично

$$\mathbf{A}e'_1 = a'_{11}e'_1 + a'_{21}e'_2 + \dots + a'_{n1}e'_n = \sum_{i=1}^n a'_{i1}e'_i,$$

...

$$\mathbf{A}e'_n = a'_{1n}e'_1 + a'_{2n}e'_2 + \dots + a'_{nn}e'_n = \sum_{i=1}^n a'_{in}e'_i$$

или

$$\mathbf{A}e'_k = a'_{1k}e'_1 + a'_{2k}e'_2 + \dots + a'_{nk}e'_n, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Рассмотрим левую часть равенства (8):

$$\mathbf{A}e'_k.$$

Поскольку $e'_k = u_{1k}e_1 + u_{2k}e_2 + \dots + u_{nk}e_n$ (4), то

$$\mathbf{A}e'_k = \mathbf{A}(u_{1k}e_1 + u_{2k}e_2 + \dots + u_{nk}e_n) = u_{1k}\mathbf{A}e_1 + \dots + u_{nk}\mathbf{A}e_n.$$

Так как

$$\begin{aligned}
u_{1k} \mathbf{A} e_1 &= u_{1k} (a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n) = \\
&= u_{1k} a_{11} e_1 + u_{1k} a_{21} e_2 + \dots + u_{1k} a_{n1} e_n, \\
&\dots \\
u_{nk} \mathbf{A} e_n &= u_{nk} (a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \dots + a_{nn} e_n) = \\
&= u_{nk} a_{1n} e_1 + u_{nk} a_{2n} e_2 + \dots + u_{nk} a_{nn} e_n.
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
&u_{1k} \mathbf{A} e_1 + \dots + u_{nk} \mathbf{A} e_n = \\
&= (u_{1k} a_{11} + \dots + u_{nk} a_{1n}) e_1 + (u_{1k} a_{21} + \dots + u_{nk} a_{2n}) e_2 + \dots + (u_{1k} a_{n1} + \dots + u_{nk} a_{nn}) e_n = \\
&= (a_{11} u_{1k} + \dots + a_{1n} u_{nk}) e_1 + (a_{21} u_{1k} + \dots + a_{2n} u_{nk}) e_2 + \dots + (a_{n1} u_{1k} + \dots + a_{nn} u_{nk}) e_n = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ \vdots \\ u_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим правую часть равенства (8):

$$\begin{aligned}
&a'_{1k} e'_1 + a'_{2k} e'_2 + \dots + a'_{nk} e'_n = (\text{с учётом равенств (4)}) \\
&= a'_{1k} (u_{11} e_1 + u_{21} e_2 + \dots + u_{n1} e_n) + a'_{2k} (u_{12} e_1 + u_{22} e_2 + \dots + u_{n2} e_n) + \dots \\
&\dots + a'_{nk} (u_{1n} e_1 + u_{2n} e_2 + \dots + u_{nn} e_n) = \\
&= (a'_{1k} u_{11} + a'_{2k} u_{12} + \dots + a'_{nk} u_{1n}) e_1 + (a'_{1k} u_{21} + a'_{2k} u_{22} + \dots + a'_{nk} u_{2n}) e_2 + \dots \\
&\dots + (a'_{1k} u_{n1} + a'_{2k} u_{n2} + \dots + a'_{nk} u_{nn}) e_n = \\
&= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{1k} \\ a'_{2k} \\ \vdots \\ a'_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Поскольку левая и правая части равенства (8) тождественны для любого $k = 1, 2, \dots, n$, мы получили n равенств:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ \vdots \\ u_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{1k} \\ a'_{2k} \\ \vdots \\ a'_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix},$$

которые можно записать в виде одного матричного равенства

$$AU = UA'$$

или

$$UA' = AU.$$

Тогда, умножив слева обе части на U^{-1} , получим

$$A' = U^{-1}AU$$

Что и требовалось доказать.

Пример 6. В пространстве $\mathbb{R}^3$ задан линейный оператор

$$Ax = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_3, x_1 + x_2).$$

Найти матрицу оператора A в базисе

$$e'_1 = (1, -1, 1), e'_2 = (-1, 1, -2), e'_3 = (-1, 2, 1),$$

используя матрицу перехода от базиса

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$$

к базису e'_1, e'_2, e'_3 . Найти определитель оператора A .

Решение:

Пусть A и A' – матрицы оператора A в базисах e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3 соответственно. Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выпишем матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e'_1, e'_2, e'_3 :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём матрицу U^{-1} :

$$\det U = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 + 1 - 1 + 4 = 1,$$

$$U_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad U_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad U_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$U_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad U_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad U_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$U_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad U_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad U_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (6) получаем

$$\begin{aligned} A' = U^{-1}AU &= \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 13 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Найдём определитель линейного оператора **A**. Согласно определению, он равен определителю матрицы оператора в любом базисе.

Воспользуемся матрицей *A*:

$$\det A = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 1 - 0 - 0 + 1 = 0.$$

Легко проверить, что такой же результат дает и использование матрицы *A'*.

ПРАКТИКУМ 1.7. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1.7.1. Являются ли следующие операторы векторного пространства R^3 линейными. Если оператор линейный, то найдите его матрицу в стандартном базисе.

а) $\varphi(x) = (x_1 + x_2; x_1 + x_2 - x_3; x_1 + x_2 + x_3)$

б) $\varphi(x) = (x_1 + x_2; x_2 - x_3; x_3 - 1)$

в) $\varphi(x) = (x_1 + x_3; x_2 - 2; x_3 - x_1)$

г) $\varphi(x) = (x_1 - 3x_2 + 4x_3; 4x_1 - 7x_2 + 8x_3; 6x_1 - 7x_2 + 7x_3)$

д) $\varphi(x) = (x_1 - x_2; x_2 + 2x_3; x_1 + x_2 \cdot x_3)$.

е) $\varphi(x) = (2x_1 - x_2; x_2 - x_3; x_3 + 2x_2)$.

ж) $\varphi(x) = (x_1 - 1, x_2 + 2, x_1 + x_2 + x_3)$

1.7.2. Пусть A – квадратная матрица порядка n . На линейном пространстве A_n строк вида $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ зададим преобразование $Ax = A \cdot x$, сопоставляющее каждой строке x её произведение на матрицу A . Показать, что это преобразование является линейным.

1.7.3. На трёхмерном пространстве геометрических векторов рассматривается преобразование P_{xy} проектирования на плоскость xOy , действующее по следующему правилу: если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – декартов прямоугольный базис и

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

то

$$P_{xy} \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Показать, что преобразование P_{xy} является линейным.

1.7.4. На линейном пространстве $M_{2 \times 2}$ квадратных матриц порядка 2 рассмотрим преобразование C , сопоставляющее каждой матрице

$X \in M_{2 \times 2}$ матрицу, являющуюся произведением данной матрицы на некоторую фиксированную матрицу U , т.е.

$$CX = XA_0, \quad \forall X \in M_{2 \times 2}.$$

Показать, что преобразование C является линейным оператором пространства $M_{2 \times 2}$.

1.7.5. Для линейного оператора φ найдите ядро и образ, дефект и ранг. Пусть $\varphi(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \vec{a}$, где

а) $\varphi(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \vec{a}; \quad \vec{a} = (1; 2; 3)$

б) $\varphi(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \vec{a}; \quad \vec{a} = (2; 3; -5)$

в) $\varphi(x) = x \cdot B$, где x – квадратная матрица 2×2 , $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

г) $\varphi(x) = B \cdot x$, где x – квадратная матрица 2×2 , $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

д) φ – оператор проектирования на плоскость Oxy .

е) φ – оператор проектирования на плоскость Oyz

ж) φ – оператор проектирования на плоскость $x - z = 0$

з) φ – поворот относительно оси Oy в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$

и) φ – преобразование дифференцирования, заданный на линейном пространстве P_n многочленов степени не выше n .

1.7.6. Линейный оператор φ в базисе $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2$ имеет матрицу A . Найдите матрицу оператора φ в базисе $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$.

а) $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$$g_1(x) = 1 + x + x^2, \quad g_2(x) = 1 + 3x + 2x^2, \quad g_3(x) = x + x^2.$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x) = 1 + 2x + 2x^2, \quad g_2(x) = -2 - 2x - 3x^2, \quad g_3(x) = x + x^2.$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x) = -2 - 2x + x^2, \quad g_2(x) = 2 + x, \quad g_3(x) = -3 + 2x + x^2.$$

1.7.7. На линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ задан линейный оператор

$$Ax = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3).$$

Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

и в базисе

$$e'_1 = (0, 0, 1), \quad e'_2 = (0, 1, 1), \quad e'_3 = (1, 1, 1).$$

1.7.8. В $\mathbb{R}^3$ задан линейный оператор

$$Ax = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3 + x_4, x_3 + x_4 + x_1, x_4 + x_1 + x_2).$$

Найти матрицу этого оператора в базисе

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), \quad e_2 = (1, 1, 0, 0), \quad e_3 = (1, 1, 1, 0), \quad e_4 = (1, 1, 1, 1).$$

1.7.9. Пусть D – преобразование дифференцирования, заданное на линейном пространстве P_n многочленов степени не выше n . Найти матрицу этого оператора в базисе

$$f_1 = 1, \quad f_2 = t, \quad f_3 = t^2, \dots, \quad f_n = t^{n-1}, \quad f_{n+1} = t^n$$

и в базисе

$$g_1 = 1, \quad g_2 = t - t_0, \quad g_3 = \frac{(t - t_0)^2}{2!}, \dots, \quad g_n = \frac{(t - t_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad g_{n+1} = \frac{(t - t_0)^n}{n!}$$

где t_0 – фиксированное действительное число.

1.7.10. На линейном пространстве $M_{2 \times 2}$ квадратных матриц порядка 2 задан линейный оператор

$$CX = XA_0, \quad \forall X \in M_{2 \times 2},$$

где A_0 – фиксированная матрица:

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе, состоящем из матриц

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.7.11. Пусть P_{xy} – преобразование проектирования геометрических векторов на плоскость xOy . Найти матрицу этого оператора в базисе i, j, k .

1.7.12. На пространстве $\mathbb{R}^3$ задан линейный оператор A . Найти матрицу этого оператора в данном базисе e_1, e_2, e_3 и вычислить координаты вектора $y = Ax$ относительно этого базиса, если вектор $x \in A_3$ задан.

а) $Ax = (3x_1 - 2x_2 + 2x_3, 3x_2, 2x_2 + x_3);$
 $e_1 = (1, 1, 0), \quad e_2 = (2, 2, 1), \quad e_3 = (1, 0, 2);$
 $x = -2e_1 + e_2 - 2e_3.$

б) $Ax = (7x_1 - 4x_2 + 4x_3, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3, 2x_1 + 5x_3);$
 $e_1 = (1, 1, -2), \quad e_2 = (0, 3, -1), \quad e_3 = (2, 3, -4);$
 $x = -e_1 - e_2 + 2e_3.$

1.7.13. На пространстве $\mathbb{R}^3$ задан линейный оператор A . Определить дефект и ранг этого оператора, а также найти какие-нибудь базисы его ядра и образа:

а) $Ax = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3).$
 б) $Ax = (4x_1 - 5x_2 + 2x_3, 5x_1 - 7x_2 + 3x_3, 6x_1 - 9x_2 + 4x_3).$

1.7.14. Линейный оператор $\mathbf{A}$ в некотором базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3.$$

1.7.15. Линейный оператор $\mathbf{A}$ в некотором базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе

$$e'_1 = e_4; \quad e'_2 = e_3; \quad e'_3 = e_2; \quad e'_4 = e_1$$

и в базисе

$$e''_1 = e_1, \quad e''_2 = e_1 + e_2, \quad e''_3 = e_1 + e_2 + e_3, \quad e''_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4.$$

1.7.16. Линейный оператор $\mathbf{A}$ в некотором базисе e'_1, e'_2, e'_3 имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ -13 & -20 & 5 \\ 7 & 11 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе e_1, e_2, e_3 , если

$$e'_1 = 3e_1 - e_3, \quad e'_2 = e_1 + e_2 - 2e_3, \quad e'_3 = 3e_1 + 2e_2 - 4e_3.$$

1.7.17. В линейном пространстве A_3 заданы два базиса:

$$e'_1 = (1, -1, 0), \quad e'_2 = (3, 0, 1), \quad e'_3 = (0, 2, 1);$$

$$e_1'' = (1, 0, 1), \quad e_2'' = (3, 1, 0), \quad e_3'' = (0, -1, 2).$$

Найти матрицу линейного оператора $\mathbf{A}$ пространства A_3 в базисе e_1'', e_2'', e_3'' , если его матрица в базисе e_1', e_2', e_3' имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.7.18. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\mathbf{A}$ линейного пространства A_3 :

а) $\mathbf{A}x = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, -x_1 + x_2 + 3x_3).$

б) $\mathbf{A}x = (3x_1 - 2x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + 3x_3).$

1.7.19. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\mathbf{A}$, заданного в некотором базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ матрицей A :

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$

г) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

д) $A = \begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 101 \\ 0 & 99 & 0 & 0 \\ 0 & 101 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 99 \end{pmatrix}.$

е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$

1.7.20. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан матрицей A в некотором базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Выяснить, существует ли базис $e_1', e_2', \dots, e_n'$, в котором

матрица оператора $\mathbf{A}$ имеет диагональный вид. Если да, найти этот базис и выписать соответствующую ему матрицу оператора.

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.7.21. Являются ли следующие преобразования векторного пространства $\mathbb{R}^3$ линейными. Если преобразование линейное, то найдите его матрицу в стандартном базисе.

$$\text{а) } \varphi(x) = (x_1 + x_3; x_3 - x_2; x_2 + x_1).$$

$$\text{б) } \varphi(x) = (x_1 + 1; x_2 + 2; x_3 + 3).$$

$$\text{в) } \varphi(x) = (x_1 - 2x_3; x_2 + x_1; x_2 - 5)$$

$$\text{г) } \varphi(x) = (x_1 + x_2 - x_3; x_2 - x_3; x_3).$$

$$\text{д) } \varphi(x) = (x_1 + 2; x_2 + 2; x_3).$$

$$\text{е) } \varphi(x) = (x_1 + x_2; x_2; x_1 - x_2 - x_3)$$

1.7.22. Для линейного оператора φ найдите ядро и образ, дефект и ранг. Пусть $\varphi(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \vec{a}$, где

$$\text{а) } \varphi(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \vec{a}; \quad \vec{a} = (4; -1; 2)$$

$$\text{б) } \varphi(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \vec{a}; \quad \vec{a} = (-1; -2; 3)$$

$$\text{в) } \varphi(x) = x \cdot B, \text{ где } x - \text{квадратная матрица } 2 \times 2, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \varphi(x) = B \cdot x, \text{ где } x - \text{квадратная матрица } 2 \times 2, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{д) } \varphi - \text{оператор проектирования на плоскость } Oxz$$

- е) φ – оператор проектирования на плоскость $x + y = 0$
- ж) φ – поворот относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$.
- з) φ – поворот относительно оси Ox в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$

1.7.23. На пространстве A_3 задан линейный оператор A . Определить дефект и ранг этого оператора, а также найти какие-нибудь базисы его ядра и образа:

а) $Ax = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$.

б) $Ax = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$.

1.7.24. Линейный оператор φ в базисе $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2$ имеет матрицу A . Найдите матрицу оператора φ в базисе $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$.

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$

$$g_1(x) = 1 + x - x^2, \quad g_2(x) = -1 + x, \quad g_3(x) = -2 + x + x^2$$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

$$g_1(x) = -2 + 2x + x^2, \quad g_2(x) = -2 + x + x^2, \quad g_3(x) = -1 + x^2$$

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

$$g_1(x) = -1 - 2x + 2x^2, \quad g_2(x) = -2x + 3x^2, \quad g_3(x) = -1 - x + x^2.$$

1.7.25. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора A пространства $\mathbb{R}^3$:

а) $Ax = (5x_1 - 4x_2 + 4x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 3x_3).$

б) $Ax = (7x_1 - 6x_2 + 6x_3, 4x_1 - x_2 + 4x_3, 4x_1 - 2x_2 + 5x_3).$

1.7.26. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора A , заданного в некотором базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ матрицей A :

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$

б) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

в) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

д) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

1.7.27. Линейный оператор A задан матрицей A в некотором базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Выяснить, существует ли базис $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$, в котором матрица оператора A имеет диагональный вид. Если да, найти этот базис и выписать соответствующую ему матрицу оператора.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$ б) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$ в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

ТЕМА 1.8. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

В современной математике *комплексное число* является одним из фундаментальных понятий. Необходимость в числах нового типа появилась при решении квадратных уравнений для случая $D < 0$, например $x^2 + 1 = 0$. Долгое время эти числа не находили физического применения, поэтому их называли «мнимыми». Со временем уникальные свойства комплексных чисел и функций нашли широкое применение для решения многих практических задач в различных областях «чистой» и прикладной математики, а также физики и техники: в квантовой механике, обработке сигналов, теории управления, электромагнетизме, теории колебаний, теории упругости и многих других. Преобразования комплексной плоскости оказались полезны в картографии, аэро- и гидродинамике.

Рис. 1.8.1. Комплексная функция Жуковского $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ используется для расчетов в аэро- и гидродинамике

1.8.1. ПОНЯТИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА.

Определение. *Комплéксным числом z называется число вида*

$$z = x + iy, \quad (1)$$

где i – новый вид числа, называемый *мнимая единица*

$$i^2 = -1;$$

числа $x, y \in \mathbb{R}$ называются соответственно *действительной и мнимой частью комплéксного числа z* и обозначаются

$$x = \operatorname{Re} z,$$

$$y = \operatorname{Im} z.$$

Форму (1) называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется *чисто мнимым*, если $y = 0$, то число $x + i \cdot 0 = x$ отождествляется с действительным числом x , а это означает, что множество $\mathbb{R}$ действительных чисел является подмножеством множества $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел, т.е.

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Пример 1. Как уже оговаривалось, комплéксные числа возникают при решении квадратных уравнений для случая отрицательного дискриминанта $D < 0$.

а) Рассмотрим уравнение

$$x^2 + 1 = 0,$$

$$x^2 = -1.$$

Очевидно, что уравнение не разрешимо в действительных числах. Однако, если положить $x = i$, то уравнение имеет решение. Действительно,

$$x = i \Rightarrow x^2 = i^2 \Rightarrow x^2 = -1.$$

Другим корнем будет комплексное число $x = -i$.

б) Решим уравнение

$$x^2 + 3x + 3 = 0.$$

$D = b^2 - 4ac = 9 - 12 = -3$. Действительных корней нет.

$\sqrt{D} = \sqrt{-3} = i\sqrt{3}$. Тогда

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{3}i}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

То есть уравнение имеет два комплексных корня.

Пример 2. Найдем действительные и мнимые части комплексных чисел:

$$\operatorname{Re}(2 + 3i) = 2; \operatorname{Im}(2 + 3i) = 3;$$

$$\operatorname{Re}(4) = 4; \operatorname{Im}(4) = 0;$$

$$\operatorname{Re}(-7i) = 0; \operatorname{Im}(-7i) = -7.$$

Определение. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части, т. е.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Комплексно-сопряженные числа

Два комплексных числа

$$z = x + iy \text{ и } \bar{z} = x - iy,$$

отличающихся только знаком мнимой части называются *сопряженными* (комплексно-сопряженными). Операция комплексного сопряжения означает нахождение числа, сопряженного данному. Например,

$$\overline{2 + 3i} = 2 - 3i;$$

$$\overline{i} = -i.$$

1.8.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ, ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно рассматривать, как упорядоченную пару действительных чисел:

$$x + iy = (x; y).$$

Соответственно, его можно *изобразить точкой* $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ (рис. 1.8.2). И наоборот: любой точке плоскости соответствует единственное комплексное число.

Рис. 1.8.2.

Плоскость Oxy , на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью* (ее также обозначают $\mathbb{C}$). Ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой*.

Комплексное число $z = x + iy$ также можно изображать с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x; y)$.

Длина вектора $\vec{r}$, изображающего комплексное число z (см. рис. 1.8.2), называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или r . По теореме Пифагора:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого числа, обозначают $\text{Arg } z$.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная: $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где $\arg z = \varphi$ – *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$, то есть $-\pi < \arg z \leq \pi$. Аргумент комплексного числа $z = 0 = 0 + i0$ не определен.

Замечание. В качестве значения аргумента можно брать величину, принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$.

Определение. Запись числа z в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (3)$$

называется *тригонометрической формой*.

Рассмотрим рисунок 1.8.2. Здесь

$$x = r \cdot \cos \varphi;$$

$$y = r \cdot \sin \varphi.$$

Поэтому $\arg z = \varphi$ можно вычислить с помощью формул

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{r}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{r}, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Аргумент z можно найти, используя формулу

$$\text{tg } \varphi = \frac{y}{x},$$

а так как $-\pi < \arg z \leq \pi$, то из формулы $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ находим

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{при } x > 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{при } x < 0, y > 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{при } x < 0, y < 0. \end{cases} \quad (4)$$

1.8.3. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Определение. Запись числа z в виде

$$z = r e^{i\varphi} \quad (5)$$

называется *показательной (экспоненциальной) формой* комплексного числа.

Равенство (5) основано на том, что

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Данное соотношение известно как *формула Эйлера*. Откуда возникает такая запись? Несколько забегаая вперёд, скажем, что тригонометрические функции представимы в виде *рядов Тейлора*:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Тогда

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \dots = \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) = \\
&= \cos x + i \sin x.
\end{aligned}$$

Замечание 1. Равенство вида

$$e^{i\pi} - 1 = 0$$

называется *тождеством Эйлера*.

Тождество считается образцом математической красоты, поскольку показывает глубокую связь между фундаментальными числами:

e – число $e \approx 2,718281828459045$, или основание натурального логарифма;

i – мнимая единица;

$\pi \approx 3,14159$ – число пи, отношение длины окружности к длине её диаметра;

1 – единица, нейтральный элемент по операции умножения;

0 – ноль, нейтральный элемент по операции сложения.

Замечание 2. При помощи формулы Эйлера можно определить функции $\sin x$ и $\cos x$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \\
\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.
\end{aligned}$$

Пример 3. Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах:

а) $z = 2 + 2i$;

б) $z = -1 + i\sqrt{3}$;

в) $z = -5i$;

г) $z = -3 - 2i$;

д) $z = -3 \left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} \right)$.

Решение:

Используем формулы (2) – (5).

а) Находим модуль и аргумент комплексного числа $z = 2 + 2i$.

Здесь $x = 2 > 0$, $y = 2 > 0$,

$$|z| = r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2};$$

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Значит,

$$2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

б) Для $z = -1 + i\sqrt{3}$ имеем

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{-1} \right) + \pi = \frac{2}{3}\pi. \text{ Значит,}$$

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) = 2e^{i\frac{2}{3}\pi}.$$

в) Имеем: $r = \sqrt{0 + 25} = 5$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Значит,

$$-5i = 5 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

г) Имеем: $r = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{-2}{-3} \right) - \pi = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} - \pi$.

Значит,

$$-3 - 2i = \sqrt{13} \left(\cos \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3} - \pi \right) + i \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3} - \pi \right) \right) = \sqrt{13} e^{i \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3} - \pi \right)}.$$

Рис. 1.8.3

д) Запись $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} - i \sin\frac{\pi}{4}\right)$ не является тригонометрической формулой записи комплексного числа (см. формулу (3)).

Перепишем z в виде $z = 3\left(-\cos\frac{\pi}{5} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$. Надо найти такой угол

φ , что $\cos\varphi = -\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\varphi = \sin\frac{\pi}{5}$. Таким углом является

$\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4}{5}\pi$, т. е. $\varphi = \frac{4}{5}\pi$. Значит,

$$z = 3 \left(\cos \frac{4}{5} \pi + i \sin \frac{4}{5} \pi \right) = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{4}{5} \pi}.$$

Изображение чисел представлены на рисунке 1.8.3.

Пример 4. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|z| = 2$;

б) $\arg z = \frac{\pi}{3}$;

в) $0 \leq \operatorname{Im} z < 1,5$;

г) $\operatorname{Re} z > 1$;

д) $\begin{cases} |z| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3}{4}\pi. \end{cases}$

Решение:

а) Согласно формуле (2), имеем $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, т. е. $x^2 + y^2 = 4$. Множество точек, удовлетворяющих условию $|z| = 2$, т. е. $x^2 + y^2 = 4$ представляет собой окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат.

б) Точки z лежат на луче, выходящем из точки $O(0;0)$ под углом $\frac{\pi}{3}$ к действительной оси.

в) Неравенство $0 \leq \operatorname{Im} z < 1,5$ можно переписать так $0 \leq y < 1,5$.

г) Условие $\operatorname{Re} z > 1$ или $x > 1$ определяет множество всех точек, расположенных справа от прямой $x = 1$.

д) Множества точек, расположенных внутри и на границе круга $|z| \leq 1$, заключенных между лучами $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ удовлетворяют

условию $\begin{cases} |z| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$

Множество точек а) – д) изображены на рисунке.

Рис. 1.8.4

1.8.4. СЛОЖЕНИЕ, ВЫЧИТАНИЕ, УМНОЖЕНИЕ, ДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Основные действия над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, заданные в алгебраической форме, определяются следующими равенствами:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (6)$$

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \quad (7)$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 - y_1x_2), \quad (8)$$

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad (9)$$

(при $z_2 \neq 0$).

Из равенства (7) следует, что

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad (10)$$

т.е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Пример 5. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$.

Решение:

Используя формулы (6) – (10), находим:

$$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 - i) = 3 + i;$$

$$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (2 - i) = -1 + 3i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (2 - i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 4 + 3i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{5i}{5} = i.$$

1.8.5. ДЕЙСТВИЯ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ. ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ, ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ

Правило умножения

При умножении комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, заданных в *тригонометрической форме* их модули перемножаются, а аргументы складываются, т. е.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (11)$$

Формула Муавра

Отсюда следует *формула Муавра* для возведения комплексных чисел в натуральную степень:

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (12)$$

Деление

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, осуществляется по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad (13)$$

Извлечение корня n -й степени

Корень n -й степени из комплексного числа имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$. (14)

Пример 6. Найти $(-1 - i\sqrt{3})^{15}$.

Решение:

Запишем число $z = -1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$|z| = r = \sqrt{1+3} = 2, \arg z = \varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{(-\sqrt{3})}{(-1)} - \pi = -\frac{2}{3}\pi, \text{ т. е.}$$

$$-1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \left(-\frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{2}{3}\pi \right) \right).$$

По формуле Муавра (12) имеем

$$\begin{aligned} (-1 - i\sqrt{3})^{15} &= \left[2 \left(\cos \left(-\frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{2}{3}\pi \right) \right) \right]^{15} = \\ &= 2^{15} \cdot (\cos(-10\pi) + i \sin(-10\pi)) = 2^{15} (1 + 0i) = 2^{15} = 32678. \end{aligned}$$

Пример 7. Решить уравнение $z^5 + 32 = 0$ на множестве комплексных чисел.

Решение:

Перепишем уравнение в виде $z = \sqrt[5]{-32}$. Число (-32) представим в тригонометрической форме:

$$-32 = 32(\cos \pi + i \sin \pi).$$

По формуле (14) находим

$$z = \sqrt[5]{32}(\cos \pi + i \sin \pi) = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{5} \right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Полагая $k = 0, 1, 2, 3, 4$, получим

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) \approx 1,6180 + 1,1756 \cdot i,$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right) \approx -0,6180 + 1,9021 \cdot i,$$

$$z_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2,$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5} \right) \approx -0,6180 - 1,9021 \cdot i,$$

$$z_4 = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5} \right) \approx 1,6180 - 1,1756 \cdot i.$$

Найденным корням уравнения соответствуют вершины правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат (рис. 1.8.5).

Рис. 1.8.5

1.8.6. КОМПЛЕКСНАЯ ДИНАМИКА. МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА И МАНДЕЛЬБРОТА

На множестве $\mathbb{C}$ рассмотрим рекуррентное соотношение

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

где $c = x + iy$ – некоторое фиксированное комплексное число.

Очевидно, что z_1 будет зависеть от двух комплексных параметров:

z_0 и c . Зафиксируем $z_0 = x_0 + iy_0$.

Тогда

$$z_1 = z_0^2 + c = (x_0 + iy_0)^2 + x + iy = x_0^2 - y_0^2 + x + (2x_0y_0 + y)i;$$

$$z_2 = z_1^2 + c = \left(x_0^2 - y_0^2 + x + (2x_0y_0 + y)i\right)^2 + x + iy;$$

$$z_3 = z_2^2 + c = \left(\left(x_0^2 - y_0^2 + x + (2x_0y_0 + y)i\right)^2 + x + iy\right)^2 + x + iy;$$

и т.д.

Таким образом получаем бесконечную последовательность комплексных чисел $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, каждое из которых можно изобразить в виде точки на комплексной плоскости. Последовательность точек $\{z_n\}$ при фиксированном c может вести себя по-разному в зависимости от начального значения z_0 . Точки могут удаляться в бесконечность, либо могут ложиться в ограниченной области. Точки также могут стремиться к некоторой фигуре (точке) на комплексной плоскости, называемой *аттрактором*. Аттрактор – место притяжения итерационного процесса.

Определение. *Множество Жюлиа* для каждого c – это множество таких точек z_0 на комплексной плоскости, для которых рекуррентное соотношение $z_{n+1} = z_n^2 + c$ задаёт ограниченную последовательность.

Иными словами, это множество таких c , для которых существует такое действительное R , что $|z_n| < R$ для $n = 1, 2, \dots$

Таким образом, начальные значения z_0 , лежащие вне границ множества Жюлиа уводят последовательность $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ в бесконечность. А начальные значения z_0 , в границах множества Жюлиа имеют ограниченный аттрактор. Название получили в честь французского математика Гастона Жюлиа¹.

На рисунке изображены множества Жюлиа при различных c .

а) $c = 0,27334 + 0,00742i$

б) $c = -1,25$

в) $c = -0,74543 + 0,11301i$

г) $c = i$

Рис. 1.8.6. Множества Жюлиа

¹ Гастон Морис Жюлиа (фр. Gaston Maurice Julia, 1893–1978) – французский математик. Исследовал и получил результаты в теории конформных отображений и их применениях к функциональным уравнениям. Занимался теорией гильбертовых пространств, в которой разработал некоторые вопросы (проблема моментов).

Рис. 1.8.7. Цветная визуализация множества Жюлиа

При $z_0 = 0$ имеем

$$z_1 = z_0^2 + c = x + iy;$$

$$\begin{aligned} z_2 = z_1^2 + c &= (x + iy)^2 + x + iy = \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy = x^2 - y^2 + x + (2xy + y)i; \end{aligned}$$

$$z_3 = z_2^2 + c = \dots$$

и т.д.

Определение. Множество Мандельброта² – это множество таких точек c на комплексной плоскости, для которых рекуррентное соотношение $z_{n+1} = z_n^2 + c$ при $z_0 = 0$ задаёт ограниченную последовательность.

При более сильном увеличении в окрестностях границ множества Мандельброта обнаруживаются уменьшенные копии самого множества Мандельброта. Это свойство называется *самоподобием*.

² Бенуа Мандельброт (фр. Benoît B. Mandelbrot, 1924–2010) – французский и американский математик, создатель фрактальной геометрии.

Множества Жюлиа и Мандельброта являются одними из самых известных *фракталов*, в том числе за пределами математики, благодаря своим цветным визуализациям (рис. 1.8.7, 1.8.9).

Рис. 1.8.8. Множество Мандельброта на комплексной плоскости

Рис. 1.8.9. Цветная визуализация множества Мандельброта

ПРАКТИКУМ 1.8. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1.8.1. Даны комплексные числа

а) $z = 5 - 5i$;

б) $z = 2$.

Найти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

1.8.2. Построить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ векторы, соответствующие комплексным числам z . Найти $|z|$ и $\arg z$:

а) $z = -5$;

б) $z = 2, 3i$;

в) $z = -1 - i$;

г) $z = 3 - i$.

1.8.3. Дана точка $z = 2 + 3i$. Построить на этой же плоскости точки: $-2 + 3i$, $-2 - 3i$, $2 - 3i$, $2 + 0i$, $0 + 3i$, $-2 + 0i$, $0 - 3i$.

1.8.4. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $2 + 4i$;

б) $\sqrt{3} - i$;

в) 2001 ;

г) $2 \cos \frac{\pi}{3} - 2i \sin \frac{\pi}{3}$.

1.8.5. Представить в алгебраической форме числа:

а) $2 \left(\cos \frac{2}{3} \pi + i \sin \frac{2}{3} \pi \right)$;

б) $-\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

1.8.6. Представить в показательной форме комплексного числа:

а) $12i$;

б) $1 - \sqrt{3}$;

в) $-4 - 3i$;

г) $\sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3}$.

1.8.7. Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих неравенствам:

а) $|z| > 2$;

б) $|\operatorname{Im} z| < 2$;

в) $-\frac{\pi}{4} < \arg z \leq 0$.

1.8.8. Указать на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих условиям:

а) $1 \leq |z| \leq 4, |\operatorname{Re} z| \geq \sqrt{2}, |\operatorname{Im} z| \leq 0,7$;

б) $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z, |z| > 0,2$;

в) $\arg z = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$.

1.8.9. Вычислить:

а) $(1-i) \cdot (-3+2i)$;

б) $\frac{1+2i}{3-i} + (1-i)^2$.

1.8.10. Найти:

а) $\left(\frac{i^{16} + 3}{i^6 + 3} \right)^5$;

б) $(1+i)^{10}$.

1.8.11. Доказать, что:

а) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

б) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

1.8.12. Вычислить:

а) $\frac{2+3i}{4-2i} + \frac{1-3i}{2i}$;

б) $i^2 + i^3 + i^4 + i^5$.

1.8.13. Найти:

а) $\frac{1+i}{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})};$

б) $(-1+i)^5.$

1.8.14. Доказать, что:

а) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2};$

б) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$

1.8.15. Вычислить: $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{100}.$

1.8.16. Вычислить: $i^4 + i^{14} + i^{24} + i^{34} + i^{44} + i^{54} + i^{64} + i^{74} + i^{84}.$

1.8.17. Найти действительные решения уравнения:

а) $(1+i)x + (1-i)y = 3-i;$

б) $x + y + ixy = i.$

1.8.18. Найти:

а) действительные решения;

б) комплексные решения

системы уравнений
$$\begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6; \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8. \end{cases}$$

1.8.19. Вычислить $\frac{(1+i)^{28}}{(1-i)^{24} - i \cdot (1+i)^{24}}.$

1.8.20. Вычислить $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}.$

1.8.21. Найти все значения корня $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}.$

1.8.22. Решить уравнение $z^3 + 1 = 0.$

1.8.23. Изобразить на рисунке множество точек z , удовлетворяющих условию $|z-3| = 2 \cdot |z|.$

1.8.24. Изобразить на комплексной плоскости множество точек z , для которых выполняется условие $|3+iz| \leq |z|.$

1.8.25. Изобразить на рисунке множества точек z комплексной области, удовлетворяющих условию:

$$\text{а) } \begin{cases} 1 \leq z \cdot \bar{z} \leq 2, \\ -\sqrt{3} \leq \operatorname{Im} z \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } |z - i| = |z + 2|;$$

$$\text{в) } \begin{cases} |z - i| < 1, \\ \arg z \geq \frac{\pi}{4}, \\ \arg(z + 1 - i) \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решение:

а) Так как $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$, а $\operatorname{Im} z = y$, то данную систему неравенств можно записать в виде $\begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, \\ -\sqrt{3} \leq y \leq 0. \end{cases}$

Неравенства $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ задают кольцо между окружностями, включая их границы радиусов $R = 1$ и $R = 2$ с центром в начале координат. Неравенства $-\sqrt{3} \leq y \leq 0$ определяют горизонтальную полосу между прямыми $y = -\sqrt{3}$ и $y = 0$, включая прямые $y = -\sqrt{3}$ и $y = 0$. Искомое множество точек z заштриховано на рисунке 1.8.5.

Рис. 1.8.10

б) Согласно формуле (10), равенству $|z - i| = |z - (-2)|$ удовлетворяет множество точек z , равноудаленных от точек $z_1 = i$ и $z_2 = -2$. Это множество точек представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки $z_1 = i$ и $z_2 = -2$ (см. рис. 1.8.6).

Рис. 1.8.11.

в) Изобразим на отдельных рисунках множество точек, удовлетворяющих каждому из неравенств условиям (см. рис. 1.8.7).

Рис. 1.8.12

Находим пересечение трех полученных областей – это и будет иско-
мое множество (выделено на рис. 1.8.8).

Рис. 1.8.13

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.8.26. Найти значения аргумента комплексного числа:

а) -6 ;

б) $\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

1.8.27. Найти главное значение аргумента комплексного числа $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, если:

а) $\sin \varphi = -0,5$;

б) $\sin \varphi = 0,5, \cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.8.28. Представить в тригонометрической и алгебраической формах числа:

а) $5e^{-\frac{\pi}{2}i}$;

б) $-2(\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ)$.

1.8.29. Представить в тригонометрической и показательной формах числа:

а) $-3 + 4i$;

б) $3(\cos 10^\circ - i \sin 10^\circ)$;

в) $1 + i \cdot \operatorname{tg} 1$.

1.8.30. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $1 + \cos 22^\circ + i \sin 22^\circ$;

б) $\sin \varphi + i \cos \varphi$;

в) $1 - i \operatorname{tg} \alpha$, если $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$;

г) $5 \left(\cos \frac{4}{3} \pi - i \sin \frac{4}{3} \pi \right)$.

1.8.31. Найти наибольшее и наименьшее значения $|z|$, если $z = 2 \sin \alpha + i \cos \alpha$.

1.8.32. При каких значениях x и y комплексные числа $z = x + 2i$ и $z = 4 + \sqrt{3}yi$.

а) равны?

б) сопряжены?

1.8.33. Могут ли быть сопряженными: два действительных числа? два чисто мнимых? действительное и мнимое число?

1.8.34. Пусть $\arg z = \frac{3}{7} \pi$. Чему равно $\arg \bar{z}$?

1.8.35. Какое из чисел больше: $z = 2 - i$ или $z = -2 + i$?

1.8.36. Каковы условия равенства комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме?

1.8.37. Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если

а) $z = (2 - i)^2 \cdot (3 + 4i)$;

б) $z = i^8 + \frac{5 + i}{1 - 3i}$.

1.8.38. Решить уравнения:

а) $z^2 + \bar{z} = 0$;

б) $|z| - 3z = -12i$.

1.8.39. Вычислить:

а) $\left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right) \right)^{12}$;

б) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^{100}$.

1.8.40. Доказать справедливость тождеств:

а) $\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$;

б) $\sin 3\varphi = 3\sin \varphi - 4\sin^3 \varphi$.

Указание. Использовать формулу Муавра:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi.$$

1.8.41. Найти все значения корня:

а) $\sqrt[3]{-i}$;

б) $\sqrt[4]{8 - 8\sqrt{3} \cdot i}$;

в) $\sqrt[4]{-16}$;

г) $\sqrt[5]{1+i}$.

1.8.42. Найти расстояние между точками:

а) $1 - 6i$ и $2i$;

б) $1 + 4i$ и $3 - 2i$.

1.8.43. Найти комплексные числа, каждое из которых сопряжено со своим квадратом.

1.8.44. Решить уравнение ($x \in \mathbb{C}$):

а) $x^2 - 4x + 8 = 0$;

б) $3x^2 - x + 2 = 0$.

1.8.45. Выполнить действия:

а) $\frac{8(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)}{16(\cos(-50^\circ) + i \sin(-50^\circ))}$;

б) $\sqrt{2} \cdot (1 - i)(1 + i\sqrt{3})(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$.

1.8.46. Выполнить действия. Результат предоставить в алгебраической форме:

а) $\left(\sqrt{2} \cdot e^{\frac{2\pi}{9}i} \right)^3$;

б) $3 \cdot e^{\frac{\pi}{5}i} \cdot 4e^{\frac{4}{5}\pi i}$.

1.8.47. На плоскости $\mathbb{C}$ нарисовать область, заданную неравенствами:

а) $|z + i| < 1, |z + 1| \geq 1$;

б) $|z - 2 - i| \geq 1, 1 \leq \operatorname{Re} z < 3, 0 < \operatorname{Im} z \leq 3$;

в) $|z| < 2, \operatorname{Re} z \geq 1, \arg z < \frac{\pi}{4}$.

1.8.48. Дано: $z = \frac{1}{\sqrt{2}(1-i)} - \frac{1}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}$. Найти: $\bar{z}$ и $\frac{1}{z}$.

1.8.49. Доказать формулы Эйлера

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

1.8.50. Используя формулы Эйлера, выразить через косинусы и синусы кратных дуг функции:

а) $\cos^4 x$;

б) $\sin^2 x$.

1.8.51. Решить уравнения:

а) $z^2 - (2i - 5)z + 5 - 5i = 0$;

б) $z^4 + 9z^2 + 20 = 0$.

1.8.52. Доказать, что последовательность чисел $\{z_n\}$, где $z_n = \cos nx + i \sin nx$ есть геометрическая прогрессия. Найти ее знаменатель.

1.8.53. Доказать, что если $|z| = 1$, то $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

1.8.54. Из всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z - \sqrt{3} + i| \leq 1$ найти число, имеющее наименьшее значение главного аргумента.

1.8.55. Найти число с наибольшим модулем среди комплексных чисел z , удовлетворяющих условию $|z + 3 - 4i| = 3$.

1.8.56. Найти $(1 + \sin \varphi + i \cos \varphi)^{16}$.

1.8.57. Найти модуль и аргумент комплексного числа z , если:

а) $z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$;

$$\text{б) } z = \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{6})^4}{\left(\sin \frac{3\pi}{10} + i \cos \frac{7\pi}{10}\right)^2};$$

$$\text{в) } z = \left(1 - \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)^2 \cdot \left(1 - i \operatorname{ctg} \frac{11}{10} \pi\right)^3.$$

1.8.58. Пользуясь формулой Муавра, выразить $\sin 5\varphi$ через $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$.

1.8.59. Найти сумму:

а) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$; ($n \in \mathbb{N}$);

б) $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$; ($n \in \mathbb{N}$).

Указание. Использовать формулы Эйлера.

1.8.60. Решить уравнение на множестве комплексных чисел:

а) $z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1 = 0$;

б) $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$;

в) $|\bar{z}| - 2z = 2i - 1$.

1.8.61. При каких действительных значениях x и y числа

$z_1 = x^2 + 4y - yi$ и $z_2 = 4 + y - \frac{2}{i} - x^2 \cdot i$ будут сопряженными?

1.8.62. Зная точку z , на комплексной плоскости построить точку:

а) $z' = z - 3$;

б) $z' = iz$;

в) $z' = z + (2 - i)$.

1.8.63. Сколько и какие значения имеет произведение $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-4}$?

1.8.64. При каком условии квадрат комплексного числа $x + iy$ является чисто мнимым числом?

1.8.65. Указать на плоскости $\mathbb{C}$ точки z , для которых:

а) $\bar{z} = \frac{1}{z}$;

б) $\bar{z} = -\frac{1}{z}$.

1.8.66. Вычислить:

а) $|e^{i\varphi}|$;

б) $|\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi|$.

1.8.67. Может ли сумма квадратов двух комплексных чисел быть отрицательной?

1.8.68. Как изменится модуль и аргумент комплексного числа z в результате умножения этого числа на:

а) 2;

б) $2i$;

в) $-2i$.

1.8.69. Вычислить:

а) $\sqrt{1}$;

б) i^{2001} .

1.8.70. Нарисовать на плоскости $\mathbb{C}$ область, заданную неравенствами:

а) $|z + i| \leq 2, \operatorname{Re} z > \sqrt{2}$;

б) $|\operatorname{Re} z| \leq 2, |\operatorname{Im} z| < 1$;

в) $|z - 1| < 1, \arg z \leq \frac{\pi}{4}, \arg(z - 1) > \frac{\pi}{4}$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1.8.71. Извлечь корень, сделать проверку:

1) $\sqrt{-15 + 8i}$;

2) $\sqrt{-15 - 8i}$;

4) $\sqrt{-15 - 8i}$

5) $\sqrt{11 + 60i}$

3) $\sqrt{15 + 8i}$

6) $\sqrt{-11 + 60i}$

7) $\sqrt{11 - 60i}$

8) $\sqrt{-11 - 60i}$;

9) $\sqrt{8 + 15i}$

10) $\sqrt{60 + 11i}$;

11) $\sqrt{8 - 15i}$;

12) $\sqrt{-60 + 11i}$

13) $\sqrt{-8 + 15i}$

14) $\sqrt{60 - 11i}$;

15) $\sqrt{2 + i\sqrt{12}}$;

16) $\sqrt{-60 - 11i}$

17) $\sqrt{2 - i\sqrt{12}}$;

18) $\sqrt{-8 - 15i}$

19) $\sqrt{-2 + i\sqrt{12}}$

20) $\sqrt{\sqrt{3} - i}$

1.8.72. Найти комплексные корни уравнения, сделать проверку:

1) $x^2 + 2x + 5 = 0$

2) $x^2 + x + 6 = 0$

3) $x^2 + 2x + 3 = 0$

4) $x^2 - 2x + 10 = 0$;

5) $x^2 - 2x + 5 = 0$

6) $x^2 + 2ix + 5 = 0$;

7) $x^2 - 2ix + 5 = 0$

8) $x^2 - (2 + i)x - 1 + 7i = 0$;

9) $x^2 - (3 - 2i)x + 5 - 5i = 0$;

10) $x^2 + (2 - i)x - 1 - 8i = 0$

11) $x^2 - (3 + 2i)x + 5 + 5i = 0$;

12) $ix^2 - 4x + 5i = 0$

13) $3ix^2 + 4x + 5i = 0$;

14) $ix^2 - 4x - 3i = 0$

15) $x^2 + (2 + i)x - 1 + 7i = 0$;

16) $2ix^2 - 4x - 3i = 0$;

17) $4ix^2 + 4x + 5i = 0$

18) $x^2 + (2 + i)x - 1 + 8i = 0$

19) $ix^2 + 4x - 3i = 0$

20) $x^2 - (2 - 3i)x - 6i = 0$;

1.8.73. Найти действительные значения x и y из уравнения, сделать проверку:

1) $(5 - 8i)x + (7 + 3i)y = 2 - i$

2) $(7 - 8i)x + (3 + 4i)y = -2 + i$

3) $(5 + 13i)x - (7 - 13i)y = 23 - 13i$;

4) $(2 + 3i)x - (5 - 4i)y = -1 - i$;

5) $(15 - 18i)x + (5 + 3i)y = 22 - i$;

6) $(7 - 8i)x - (15 + 7i)y = 31 + 17i$

7) $(7 - 2i)x - (5 + 2i)y = 3 - 4i$

8) $(14 - 5i)x + (2 + 9i)y = 13 - 3i$

9) $(1 + 8i)x - (17 + 4i)y = -19 + 5i$

10) $(5 + 2i)x + (6 - 5i)y = -2 + 3i$;

11) $(13 - 18i)x + (14 + 5i)y = -12 + 8i$;

12) $(12 - 4i)x + (3 + 3i)y = 5 - 18i$

- 13) $(5 - 2i)x - (7 - 3i)y = 5 - 3i;$
- 14) $(5 + 2i)x + (7 + 3i)y = 2 - i$
- 15) $(3 - 4i)x + (3 + 2i)y = 15 - 2i$
- 16) $(4 + 8i)x + (7 + 5i)y = -5 + 6i;$
- 17) $(5 - 18i)x - (14 + 5i)y = 12 - 5i;$
- 18) $(5 - 4i)x + (3 + 5i)y = 19 + 7i$
- 19) $(5 - 5i)x + (7 + 7i)y = 2 - 5i;$
- 20) $(5 + 18i)x - (14 - 5i)y = 12 + 5i;$

1.8.74. Найти комплексные числа, удовлетворяющие системе уравнений, сделать проверку:

- 1)
$$\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i \end{cases}$$
- 2)
$$\begin{cases} (1+i)z_1 - (1-i)z_2 = 1-i \\ (1-i)z_1 - (1+i)z_2 = 1+3i \end{cases};$$
- 3)
$$\begin{cases} (-1+i)z_1 + (i-7)z_2 = 2+2i \\ (1+i)z_1 + 6iz_2 = 4-6i \end{cases}$$
- 4)
$$\begin{cases} iz_1 + (1-i)z_2 = 2+2i \\ 2iz_1 - (3+2i)z_2 = 5+3i \end{cases};$$
- 5)
$$\begin{cases} iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5-3i \end{cases}$$
- 6)
$$\begin{cases} (-1+i)z_1 + 2iz_2 = 2+2i \\ (2+2i)z_1 + (3-i)z_2 = 4i \end{cases}$$
- 7)
$$\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1-i \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i \end{cases};$$
- 8)
$$\begin{cases} (2+i)z_1 + (2-i)z_2 = 6 \\ (3+2i)z_1 + (3-2i)z_2 = 8 \end{cases};$$
- 9)
$$\begin{cases} (-1+i)z_1 + (2i-1)z_2 = 4 \\ (2+2i)z_1 + (3+i)z_2 = 2+4i \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
10) & \begin{cases} iz_1 - (1-i)z_2 = 2+2i \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 1-3i \end{cases}; \\
11) & \begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i \end{cases}; \\
12) & \begin{cases} (-1+i)z_1 + (2i-2)z_2 = 2 \\ (2+2i)z_1 + (3+3i)z_2 = 4 \end{cases}; \\
13) & \begin{cases} (1+i)z_1 - (1-i)z_2 = 1+i \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i \end{cases}; \\
14) & \begin{cases} iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i \end{cases}; \\
15) & \begin{cases} (-1+i)z_1 + (2i-3)z_2 = -2 \\ (2+2i)z_1 + (3+5i)z_2 = 0 \end{cases}; \\
16) & \begin{cases} iz_1 + (1+i)z_2 = 2-2i \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 3+3i \end{cases}; \\
17) & \begin{cases} (-1+i)z_1 + (i-4)z_2 = 2+2i \\ (2+2i)z_1 + (1+7i)z_2 = 4+2i \end{cases}; \\
18) & \begin{cases} (-1+i)z_1 + 3iz_2 = 4 \\ (2+2i)z_1 + (5-i)z_2 = 2 \end{cases}; \\
19) & \begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i \\ (1-i)z_1 - (1+i)z_2 = 1+2i \end{cases}; \\
20) & \begin{cases} (-1+i)z_1 + (i-5)z_2 = 2-2i \\ (2+2i)z_1 + (1+9i)z_2 = 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

1.8.75. Найти комплексное число, для которого выполняется равенство, сделать проверку:

1) $ z + z = 8 + 4i$;	2) $ z - z = 2 - 4i$
3) $ z + z = 8 - 4i$	4) $ z - z = 2 + 4i$
5) $ z + z = 2 + 4i$	6) $ z - z = 8 - 4i$;
7) $ z + z = 2 - 4i$;	8) $ z - z = 8 + 4i$;

9) $ z + z = 9 + 3i;$	10) $ z - z = 1 - 3i;$
11) $ z + z = 9 - 3i;$	12) $ z - z = 1 + 3i;$
13) $ z + z = 1 + 3i;$	14) $ z - z = 9 - 3i;$
15) $ z + z = 1 - 3i$	16) $ z - z = 9 + 3i$
17) $ z + z = 18 + 12i$	18) $ z - z = 8 - 12i$
19) $ z + z = 25 + 5i$	20) $ z - z = 1 - 5i;$

1.8.76. Найти геометрическое место точек на комплексной области, удовлетворяющих условиям:

1) $\begin{cases} z+1 \leq 2 \\ \frac{\pi}{2} \leq \arg z^2 \leq \pi \end{cases}$	2) $\begin{cases} z-2-i \geq 2 \\ \pi \leq \arg z^2 \leq 2\pi \end{cases}$
3) $\begin{cases} \bar{z}-i \geq 2 \\ \pi \leq \arg(z+i) \leq 2\pi \end{cases}$	4) $\begin{cases} z-2 \leq 3 \\ \frac{\pi}{2} \leq \arg z^3 \leq \pi \end{cases}$
5) $\begin{cases} iz-2 \geq 2 \\ \pi \leq \arg(iz+1) \leq 2\pi \end{cases}$	6) $\begin{cases} z \leq 2 \\ \operatorname{Re}((1+i)z) \leq 0 \end{cases}$
7) $\begin{cases} z-1 \leq 2 \\ \operatorname{Im}((1+i)z) \leq 0 \end{cases}$	8) $\begin{cases} z-i \leq 2 \\ \operatorname{Re}(z^2) \geq 0 \end{cases}$
9) $\begin{cases} z-1+i \leq 3 \\ \operatorname{Im}(z^2) \geq 0 \end{cases}$	10) $\begin{cases} \bar{z}-i \leq 2 \\ \operatorname{Re}((\sqrt{3}+i)z-1) \leq 0 \end{cases}$
11) $\begin{cases} (1+i)z+1-i \leq 4 \\ \frac{\pi}{2} \leq \arg z^2 \leq \pi \end{cases}$	12) $\begin{cases} \bar{z}-i \leq 2 \\ \operatorname{Im}((1+i)\bar{z}) \leq 0 \end{cases}$
13) $\begin{cases} iz-1 \geq 2 \\ \pi \leq \arg(\bar{iz}+1) \leq 2\pi \end{cases}$	14) $\begin{cases} z-1+i \leq 2 \\ \operatorname{Re}((1+i)\bar{z}-1) \leq 0 \end{cases}$
15) $\begin{cases} z-1+i \leq 3 \\ \operatorname{Im}((2-i)z) \geq 0 \end{cases}$	16) $\begin{cases} (4+3i)z-5 \geq 5 \\ \frac{\pi}{6} \leq \arg(iz+2) \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$17) \begin{cases} |(3-4i)z-5| \leq 5 \\ \frac{\pi}{3} \leq \arg(iz+1) \leq \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} |z-i| = |z-3i| \\ 0 \leq \arg((1-i)z) \leq \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} |z-1| = |z-3| \\ 0 \leq \arg((1+i)z) \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} |z-1-i| \leq 2 \\ \operatorname{Re}((1-i)z^2) \geq 0; \end{cases}$$

1.8.77. Найти комплексные числа, удовлетворяющие соотношению:

$$1) z = \bar{z}$$

$$3) z^3 = \bar{z}$$

$$5) z = \overline{z^3};$$

$$7) z^{-1} = \bar{z};$$

$$9) z = i\bar{z}$$

$$11) z^2 = -\bar{z};$$

$$13) z^2 = (1+i)\bar{z}$$

$$15) z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \bar{z}$$

$$17) z = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \bar{z}$$

$$19) z^3 = -\bar{z};$$

$$2) z^2 = \bar{z};$$

$$4) z = z^2;$$

$$6) z = z^{-1};$$

$$8) z = -\bar{z}$$

$$10) z = -i\bar{z};$$

$$12) z^2 = (-1+i)\bar{z};$$

$$14) z^2 = (1-i)\bar{z};$$

$$16) z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \bar{z}$$

$$18); z = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \bar{z}$$

$$20) z = -\overline{z^2};$$

1.9. МНОГОЧЛЕНЫ И ИХ КОРНИ

1.9.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ТЕОРЕМА БЕЗУ. СХЕМА ГОРНЕРА

Определение. Многочленом степени n ($n \in \mathbb{N}$) называется функция (выражение) вида:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in R$ и $a_n \neq 0$.

Числа $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ называются *коэффициентами* многочлена, a_n — *старший коэффициент*, a_0 — *свободный член*.

Число x_0 называется *корнем* многочлена $P_n(x)$, если $P_n(x_0) = 0$.

Говорят, что корень x_0 имеет *кратность* k , если рассматриваемый многочлен делится на $(x - x_0)^k$ и не делится на $(x - x_0)^{k+1}$.

Например, многочлен $x^2 - 2x + 1$ имеет единственный корень, равный 1 кратности 2. Выражение «кратный корень» означает, что кратность корня больше единицы.

Теорема 1 (теорема Безу¹). Для любого многочлена степени $n > 0$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

и любого числа $x_0 \in R$ найдётся такой многочлен степени $n - 1$

$$P_{n-1}(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0,$$

что справедливо равенство:

$$P_n(x) = (x - x_0) \cdot P_{n-1}(x) + P_n(x_0).$$

Таким образом, теорема утверждает, что остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x - x_0)$ равен $P_n(x_0)$.

Замечание. Многочлены также будем обозначать как:

¹ Этьенн Безу́ (фр. Étienne Bézout; 1730 – 1783) – французский математик. Основные работы относятся к алгебре (исследование систем алгебраических уравнений высших степеней, исключение неизвестных в таких системах и др.). Автор шеститомного «Курса математики», неоднократно переиздававшегося в Европе.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

Тогда

$$f(x) = (x - x_0) \cdot q(x) + r,$$

где

$$q(x) = P_{n-1}(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0;$$

$$r = P_n(x_0) = f(x_0).$$

Следствие 1 (схема Горнера²). Коэффициенты $P_{n-1}(x)$ могут быть вычислены по следующему алгоритму:

$$b_{n-1} = a_n, \quad b_{n-2} = x_0 b_{n-1} + a_{n-1}, \quad b_{n-3} = x_0 b_{n-2} + a_{n-2}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad b_{i-1} = x_0 b_i + a_i, \quad \dots$$

$$\dots, \quad b_1 = x_0 b_2 + a_2, \quad b_0 = x_0 b_1 + a_1,$$

$$P_n(x_0) = x_0 b_0 + a_0.$$

Таким образом, коэффициент b_k вычисляется путем умножения предыдущего коэффициента b_{k-1} на x_0 и добавления соответствующего коэффициента a_k . Остаток определяется по тому же правилу.

Результаты вычисления коэффициентов многочлена $P_{n-1}(x)$ удобно помещать в таблицу (схему Горнера):

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_{i+1}	a_i	$\dots$	a_2	a_1	a_0
x_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_i	b_{i-1}	$\dots$	b_1	b_0	$P_n(x_0)$

Следствие 2. Если x_0 есть корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится без остатка на $x - x_0$, т.е.

$$P_n(x) = (x - x_0) \cdot P_{n-1}(x),$$

² Уильям Джордж Горнер (англ. William George Horner, 1786–1837) – британский математик. Также он считается изобретателем зоотропа – устройства для демонстрации движущихся рисунков.

где $P_{n-1}(x)$ – многочлен степени $(n-1)$.

Таким образом, чтобы выяснить, является ли число x_0 корнем многочлена $P_n(x)$, нужно заполнить приведённую выше таблицу (схему Горнера). Если $P_n(x_0)$ окажется равным 0, то x_0 – корень. В противном случае x_0 – не корень $P_n(x)$.

Приведём ещё одну теорему о многочленах и следствие из неё, касающееся рациональных корней многочлена.

Пример 1. Разделить $P(x) = 2x^4 - x^3 - 2x - 3$ на $x - 3$. Результат можно записать в виде таблицы, в верхней строке которой расположены коэффициенты многочлена $P(x)$, а в нижней коэффициенты частного и остаток.

	2	-1	0	-2	-3
3	2	$3 \cdot 2 - 1 = 5$	$3 \cdot 5 + 0 = 15$	$3 \cdot 15 - 2 = 43$	$3 \cdot 43 - 3 = 126$

Таким образом, искомое частное будет

$$P_3(x) = 2x^3 + 5x^2 + 15x + 43.$$

Остаток $r = P(3) = 126$.

Пример 2. Разложить многочлен $f(x)$ по степеням $x - x_0$ и найти значение его производных в точке x_0 :

$$f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10, \quad x_0 = 2.$$

Решение:

Используем схему Горнера:

	1	0	-4	6	-8	10
2	1	2	0	6	4	18

Тогда

$$x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10 = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 6x + 4) + 18.$$

Продолжим по схеме:

	1	0	-4	6	-8	10
2	1	2	0	6	4	18
2	1	4	8	22	48	

$$x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10 = (x - 2) \left[(x - 2)(x^3 + 4x^2 + 8x + 22) + 48 \right] + 18 =$$

$$= (x - 2)^2 (x^3 + 4x^2 + 8x + 22) + 48(x - 2) + 18.$$

И так далее:

	1	0	-4	6	-8	10
2	1	2	0	6	4	18
2	1	4	8	22	48	
2	1	6	20	62		
2	1	8	36			
2	1	10				
2	1					

Окончательно получаем:

$$f(x) = (x - 2)^5 + 10(x - 2)^4 + 36(x - 2)^3 + 62(x - 2)^2 + 48(x - 2) + 18.$$

Найдем значение функции в точке x_0 :

$$f(2) = (2 - 2)^5 + 10(2 - 2)^4 + 36(2 - 2)^3 +$$

$$+ 62(2 - 2)^2 + 48(2 - 2) + 18 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 18 = 18.$$

Первая производная:

$$f'(x) = 5(x - 2)^4 + 40(x - 2)^3 + 108(x - 2)^2 + 124(x - 2) + 48,$$

$$f'(2) = 5(2 - 2)^4 + 40(2 - 2)^3 + 108(2 - 2)^2 + 124(2 - 2) + 48 =$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 48 = 48.$$

Вторая производная:

$$f''(x) = 20(x - 2)^3 + 120(x - 2)^2 + 216(x - 2) + 124,$$

$$f''(2) = 20(2 - 2)^3 + 120(2 - 2)^2 + 216(2 - 2) + 124 =$$

$$= 0 + 0 + 0 + 124 = 124.$$

Третья производная:

$$f'''(x) = 60(x-2)^2 + 240(x-2) + 216,$$

$$f'''(x) = 60(2-2)^2 + 240(2-2) + 216 = 0 + 0 + 216 = 216.$$

Четвёртая производная:

$$f^{(IV)}(x) = 120(x-2) + 240,$$

$$f^{(IV)}(2) = 120(2-2) + 240 = 0 + 240 = 240.$$

Пятая производная:

$$f^{(V)}(x) = 120,$$

$$f^{(V)}(2) = 120.$$

Приведём ещё одну теорему о многочленах и следствие из неё, касающееся рациональных корней многочлена.

Теорема 2. Пусть $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Если несократимая дробь (рациональное число) $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $P_n(x)$, то:

$$1) a_n \div q;$$

$$2) a_0 \div p.$$

Следствие. Пусть $P_n(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда все рациональные корни многочлена $P_n(x)$ являются целыми и являются делителями свободного члена a_0 .

Пример 3. Найти целые корни уравнения $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$.

Решение:

По следствию целые корни находятся среди делителей свободного члена $\pm 1; \pm 2$. Проверяем по схеме Горнера каждое из этих чисел:

	1	3	1	-3	-2	
1	1	4	5	2	0	корень
1	1	5	10	12		не корень (не кратный корень)
-1	1	3	2	0		корень
-1	1	2	0			вновь корень (кратности 2)
-2	1	0				корень

Таким образом

$$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = (x-1)(x+1)^2(x+2).$$

Данное уравнение имеет 3 корня: 1; -1; -2, причём -1 – корень кратности 2.

Пример 4. Решить уравнение $6x^4 + 17x^3 + 20x^2 + 14x + 3 = 0$.

Решение:

По теореме все рациональные корни уравнения находятся среди чисел $\frac{p}{q}$, где $6 : q$, $3 : p$.

Делители 3: $\pm 1; \pm 3$.

Делители 6: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$.

Числа вида $\frac{p}{q}$: $\pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{1}{6}; \pm 3; \pm \frac{3}{2}$.

	6	17	20	14	3	
-1	6	11	9	5	-2	не корень
$-\frac{1}{2}$	6	14	13	$\frac{15}{2}$		не корень
$-\frac{1}{3}$	6	15	15	9	0	корень

Таким образом, $x_1 = -\frac{1}{3}$ и данное уравнение эквивалентно

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)(6x^3 + 15x^2 + 15x + 9) = 0. \text{ Рассмотрим } 6x^3 + 15x^2 + 15x + 9 = 0.$$

Т.к. $6x^3 + 15x^2 + 15x + 9 = 3(2x^3 + 5x^2 + 5x + 3)$, то получаем $2x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = 0$

Делители 3: $\pm 1; \pm 3$.

Делители 2: $\pm 1; \pm 2$.

Числа вида $\frac{p}{q}$: $\pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm 3; \pm \frac{3}{2}$.

Корнями могут быть лишь отрицательные числа, причём -1 и $-\frac{1}{2}$ не являются корнями (проверили выше).

Проверяем числа $-3; -\frac{3}{2}$.

	2	5	5	3	
-3	2	-1	8	-21	не корень
$-\frac{3}{2}$	2	2	2	0	корень

То есть $x_2 = -\frac{3}{2}$ и данное уравнение эквивалентно

$\left(x + \frac{3}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2) = 0$. Уравнение $x^2 + x + 1 = 0$ действительных корней не имеет.

Ответ: $-\frac{1}{3}; -\frac{3}{2}$.

1.9.2. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Деление многочлена на многочлен можно выполнить с остатком, подобно тому как это делается при делении целых чисел. Разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ – значит найти многочлены $L(x)$ (частное) и $M(x)$ (остаток), удовлетворяющие двум требованиям:

- 1) должно соблюдаться равенство $P = Q \cdot L + M$;
- 2) степень многочлена $M(x)$ ниже чем степень $L(x)$.

При этом остаток $M(x)$ может представлять собой число (много-
член нулевой степени), либо вообще отсутствовать (т.е. P делится
на Q без остатка).

Процесс нахождения частного $L(x)$ и остатка $M(x)$ аналогичен
процессу деления (с остатком) многозначного числа на многознач-
ное. Роль цифр высшего и низшего разрядов играют члены, содер-
жащие главную букву в высшей и низшей степенях. Перед делением
члены делимого и делителя располагаются в порядке убывания глав-
ной буквы.

Пример 5. Решить уравнение $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$.

Решение:

Разложим данный многочлен третьей степени на множители. Подбо-
ром можно определить, что одним из корней этого уравнения явля-
ется число $x=1$. Тогда, согласно теореме Безу, многочлен
 $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$ делится на двучлен $x-1$:

$$\begin{array}{r|l}
 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 & x-1 \\
 \hline
 4x^3 - 4x^2 & 4x^2 - 5x + 1 \\
 \hline
 -5x^2 + 6x & \\
 -5x^2 + 5x & \\
 \hline
 x - 1 & \\
 x - 1 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

- 1) Делим первый член делимого $4x^3$ на первый член делителя x ; ре-
зультат $4x^2$ есть первый член частного.
- 2) Помножаем полученный член $4x^2$ на делитель $x-1$; результат
 $4x^3 - 4x^2$ подписываем под делимым, подобный член под подобным.
- 3) Вычитаем члены результата из соответствующих членов дели-
мого; сносим следующий по порядку член делимого; получаем
 $-5x^2 + 6x$.

- 4) Первый член остатка $-5x^2$ делим на первый член делителя x ; результат $-5x$ есть второй член частного.
- 5) Помножаем полученный второй член частного $-5x$ на делитель $x-1$; результат $-5x^2 + 5x$ подписываем под первым остатком.
- 6) Вычитаем члены этого результата $-5x^2 + 5x$ из соответствующих членов первого остатка $-5x^2 + 6x$; получаем второй остаток $x-1$.
- 7) Снова делим первый член остатка $x-1$ делим на первый член делителя x ; получаем 1. Домножаем $x-1$ на 1 (получаем $x-1$) и от $x-1$ отнимаем $x-1$. Остаток равен 0, таким образом деление закончено: многочлен $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$ разделился на двучлен $x-1$ без остатка. То есть

$$4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = (x-1)(4x^2 - 5x + 1).$$

Решая уравнение $(x-1)(4x^2 - 5x + 1) = 0$, получаем два корня: $x = 1$ и $x = \frac{1}{4}$.

1.9.3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ

Теорема 3 (основная теорема алгебры) Всякий многочлен n -й степени имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.

Следствие 1. Всякий многочлен n -й степени имеет ровно n корней, включая комплексные и кратные.

Следствие 2. Всякий многочлен n -й степени можно представить в виде

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n),$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — корни многочлена, a_n — старший коэффициент.

Множители $(x-x_i)$ называются *линейными множителями*.

Если в разложении многочлена какой-либо корень встретился k раз, то он называется *корнем кратности k* . Тогда разложение многочлена можно записать в виде:

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r},$$

где $k_1, k_2, \dots, k_r$ — кратности соответственно корней $x_1, x_2, \dots, x_r$.

Пример 6. Разложить многочлен

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 2$$

на множители.

Решение:

Многочлен

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 2$$

обращается в нуль при $x = -1, x = 1, x = 2$. Следовательно

$$x^3 - 2x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 1)(x - 2).$$

Пример 7. Представить выражение $x^3 - x^2 + 4x - 4$ в виде произведения линейных множителей.

Решение:

Легко проверить, что $x = 1$ является корнем данного многочлена.

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = x^2(x - 1) + 4(x - 1) = (x - 1)(x^2 + 4).$$

Уравнение $x^2 + 4 = 0$ имеет два комплексных корня

$$x_1 = 2i \text{ и } x_2 = -2i.$$

Следовательно,

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x - 1)(x + 2i)(x - 2i).$$

Теорема 4. Если многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $z = a + ib$, то он имеет сопряжённый корень $\bar{z} = a - ib$.

Доказательство:

Пусть число $a + ib$ является корнем многочлена, т.е. $P_n(a + ib) = 0$.

То есть

$$a_n(a + ib)^n + a_{n-1}(a + ib)^{n-1} + \dots + a_1(a + ib) + a_0 = 0.$$

По свойству сопряженных комплексных чисел

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n.$$

Тогда

$$(a - ib)^n = \overline{(a + ib)^n}.$$

$$\begin{aligned} a_n(a - ib)^n + a_{n-1}(a - ib)^{n-1} + \dots + a_1(a - ib) + a_0 &= \\ a_n \overline{(a + ib)^n} + a_{n-1} \overline{(a + ib)^{n-1}} + \dots + a_1 \overline{(a + ib)} + a_0 &= \end{aligned}$$

(поскольку $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ — действительные числа, они совпадают со своими сопряженными)

$$\begin{aligned} &= \overline{a_n(a + ib)^n} + \overline{a_{n-1}(a + ib)^{n-1}} + \dots + \overline{a_1(a + ib)} + \overline{a_0} = \\ &= \overline{a_n(a + ib)^n} + \overline{a_{n-1}(a + ib)^{n-1}} + \dots + \overline{a_1(a + ib)} + \overline{a_0} = \\ &= \overline{a_n(a + ib)^n + a_{n-1}(a + ib)^{n-1} + \dots + a_1(a + ib) + a_0} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Перемножив линейные множители,

$$\begin{aligned} &(x - (a + ib))(x - (a - ib)) \\ &= ((x - a) - ib)((x - a) + ib) = (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2, \end{aligned}$$

получили трёхчлен второй степени с действительными коэффициентами

$$(x - (a + ib))(x - (a - ib)) = x^2 + px + q,$$

где $p = -2a, q = a^2 + b^2$.

Таким образом, произведение линейных множителей, соответствующих сопряженным корням, можно заменить квадратным трёхчленом с действительными коэффициентами. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Всякий многочлен n -й степени с действительными коэффициентами может быть разложен на множители первой и второй степени с действительными коэффициентами:

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r} \times \\ \times (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_m) = n$; $x_1, x_2, \dots, x_r$ – корни многочлена, а все квадратные трехчлены не имеют действительных корней.

Пример 8. Многочлен

$$P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$$

имеет корни:

$$x_1 = -2; \quad x_2 = 3,$$

других действительных корней нет. Тогда

$$P(x) = (x + 2)(x - 3)(x^2 + 1).$$

1.9.4. ФОРМУЛЫ ВИЕТА

Пусть дан многочлен $P_n(x)$ со старшим коэффициентом $a_n = 1$:

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

и пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ его корни. Тогда по следствию из основной теоремы алгебры $P_n(x)$ представим в виде

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

Перемножая скобки, стоящие справа, приводя подобные члены и сравнивая с коэффициентами многочлена, получим формулы, выражающие коэффициенты многочлена через его корни. Эти формулы называются *формулами Виета*:

$$a_{n-1} = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n);$$

$$a_{n-2} = (x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n);$$

$$a_{n-3} = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n);$$

...

$$a_n = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n.$$

Пример 9. Найти многочлен третьей степени, имеющий простым корнем число 2 и двукратным корнем число -3 .

Решение:

Считая, что старший коэффициент a_3 многочлена $P(x)$ равен 1, по формулам Виета получим

$$a_2 = -(2 - 3 - 3) = 4;$$

$$a_1 = 2 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-3) = -3;$$

$$a_0 = -2 \cdot (-3) \cdot (-3) = -18.$$

Таким образом, искомый многочлен будет таким:

$$P(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18.$$

Пример 10. Найти многочлен, имеющий корни

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = x_4 = 3.$$

Решение:

$$a_4 = 1,$$

$$a_3 = -(5 - 2 + 3 + 3) = -9,$$

$$a_2 = 5(-2) + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 17,$$

$$a_1 = -[5 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 \cdot 3] = 78,$$

$$a_0 = 5 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 3 = -90.$$

$$P(x) = x^4 - 9x^3 + 17x^2 + 33x - 90.$$

ПРАКТИКУМ 1.9. МНОГОЧЛЕНЫ И ИХ КОРНИ

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1.9.1. Используя схему Горнера, разделить с остатком многочлен $f(x)$ на $x - c$:

а) $f(x) = 3x^6 - 4x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3, \quad c = 2;$

б) $f(x) = x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 1, \quad c = -3;$

1.9.2. Используя схему Горнера, найти значение многочлена $f(x)$ в точке c :

а) $f(x) = 2x^6 + 4x^5 - x^3 - 4x - 4, \quad c = -2;$

б) $f(x) = x^6 - 5x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 3x + 2, \quad c = 2;$

в) $f(x) = x^6 + 4x^5 + 2x^4 + 3x^2 - 2x, \quad c = -3;$

1.9.3. Используя схему Горнера, многочлен $f(x)$ разложить по степеням $x - c$. Найти значения всех производных этого многочлена в точке c :

а) $f(x) = x^6 + 2x^5 + x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 2x + 5, \quad c = -2;$

б) $f(x) = 3x^6 - x^5 - 5x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x + 3, \quad c = -1;$

в) $f(x) = x^6 - 5x^5 + 5x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 5, \quad c = 3$

1.9.4. Разделить с остатком многочлен $f(x)$ на $g(x)$ в следующих случаях:

а) $f(x) = 4x^5 + 10x^4 + 8x^3 + 5x^2 + 2x + 3;$

$$g(x) = 2x^3 + 3x^2 - x.$$

(Ответ: $q(x) = 2x^2 + 2x + 2; r(x) = x^2 + 4x + 3$).

б) $f(x) = x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 3x + 5;$

$$g(x) = x^3 - 2x.$$

(Ответ: $q(x) = x^2 + 4x; r(x) = x^2 + 3x + 5$).

в) $f(x) = 6x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 6x - 2;$

$g(x) = 3x^3 + x^2 + 2x - 2.$

(Ответ: $q(x) = 2x^2 - 2x;$ $r(x) = 2x - 2$).

г) $f(x) = x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 5x^2 + 7x + 1;$

$g(x) = x^3 + 4x^2 + 5x - 2.$

(Ответ: $q(x) = x^3 - 2x + 1;$ $r(x) = x^2 - 2x + 3$).

1.9.5. Найти кратность корня $x = x_0$ многочлена $f(x)$:

а) $f = x^5 + 8x^4 + 21x^3 + 14x^2 - 20x - 24, \quad x_0 = -2;$

б) $f = x^5 - 10x^4 + 34x^3 - 36x^2 - 27x + 54, \quad x_0 = 3;$

в) $f = x^6 - 12x^5 + 53x^4 - 96x^3 + 27x^2 + 108x - 81, \quad x_0 = 3;$

г) $f = x^6 + 9x^5 + 30x^4 + 40x^3 - 48x - 32, \quad x_0 = -2;$

д) $f = 16x^6 - 64x^5 + 40x^4 + 40x^3 - 55x^2 + 22x - 3, \quad x_0 = \frac{1}{2}.$

1.9.6. Найти вещественные и комплексные корни многочленов

а) $x^4 + 1 = 0;$

б) $x^4 - x^2 + 1 = 0.$

1.9.7. Разложить многочлен на линейные множители над полем комплексных чисел:

а) $x^3 + x + 2;$

б) $x^4 + 4;$

в) $x^6 - 1.$

1.9.9. Разложить многочлен на неприводимые множители над полем вещественных чисел:

а) $x^3 + x + 2$

б) $x^4 + 4$

в) $x^4 + 4x^2 + 64$

г) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

1.9.10. Расписать формулы Виета для многочлена степени n :

а) $n = 2$;

б) $n = 3$.

1.9.11. По заданным корням найти коэффициенты многочлена:

а) $x_1 = 1, x_2 = -3$;

б) $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -2$.

1.9.12. Составить уравнение 4-й степени, корнями которого будут являются числа

$$2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}$$

1.9.13. Определить a , b и c так, чтобы они были корнями уравнения

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

1.9.14. Числа x_1 , x_2 , x_3 являются корнями уравнения

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 10 = 0.$$

Построить уравнение, корнями которого будут числа x_1^2 , x_2^2 , x_3^2

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.9.15. Используя схему Горнера, разделить с остатком многочлен $f(x)$ на $x - c$:

а) $f(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 3x - 4$, $c = -1$;

б) $f(x) = x^6 - 5x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 5$, $c = 3$;

в) $f(x) = x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x - 2$, $c = -3$.

1.9.16. Используя схему Горнера, найти значение многочлена $f(x)$ в точке c :

а) $f(x) = x^6 - 3x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 4x + 5, \quad c = 2;$

б) $f(x) = x^6 - 5x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 2x + 2, \quad c = 2;$

в) $f(x) = x^6 + 3x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 5x^2 - x - 5, \quad c = -3.$

1.9.17. Используя схему Горнера, многочлен $f(x)$ разложить по степеням $x - c$. Найти значения всех производных этого многочлена в точке c :

а) $f(x) = x^6 + 5x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 5x + 4, \quad c = -3;$

б) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 3x^3 + 3x^2 + 1, \quad c = 3;$

в) $f(x) = x^6 - 4x^5 + x^4 + x^2 - 4x, \quad c = 3.$

1.9.18. Разделить с остатком многочлен $f(x)$ на $g(x)$ в следующих случаях:

а) $f(x) = 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 4x - 2;$

$$g(x) = 3x^3 - 2x^2 - 2x.$$

(Ответ: $q(x) = x^2 + 2x; \quad r(x) = 2x^2 + 4x - 2$).

б) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 6x + 5;$

$$g(x) = 3x^3 - 2x^2 - 2x.$$

(Ответ: $q(x) = x^2 - x - 2; \quad r(x) = 2x + 5$).

в) $f(x) = 6x^5 + x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x + 4;$

$$g(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2.$$

(Ответ: $q(x) = 2x + 1; \quad r(x) = x^2 - x + 4$).

г) $f(x) = 3x^5 + x^4 + 4x^3 + 3x - 1;$

$$g(x) = 3x^4 + x^3 + 4x^2 - x + 4.$$

(Ответ: $q(x) = x; \quad r(x) = x^2 - x - 1$).

1.9.19. Найти кратность корня $x = x_0$ многочлена $f(x)$:

а) $f = 8x^5 + 44x^4 + 18x^3 - 103x^2 + 65x - 12, \quad x_0 = \frac{1}{2};$

б) $f = x^6 - 4x^5 - 5x^4 + 40x^3 - 40x^2 - 32x + 48, \quad x_0 = 2;$

в) $f = 16x^6 + 64x^5 + 40x^4 - 120x^3 - 135x^2 + 54x + 81, \quad x_0 = -\frac{2}{3};$

г) $f = x^6 + 6x^5 + 9x^4 - 8x^3 - 24x^2 + 16, \quad x_0 = -2;$

1.9.20. Найти вещественные и комплексные корни многочленов

а) $x^4 + x^2 + 1 = 0;$

б) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$

1.9.21. Разложить многочлен на линейные множители над полем комплексных чисел:

а) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1;$

б) $x^n - 1;$

в) $(x+1)^n - (x-1)^n.$

1.9.22. Разложить многочлен на неприводимые множители над полем вещественных чисел:

а) $x^6 - 1$

б) $x^6 + 27$

в) $x^{2n} - 1$

г) $(x+1)^n - (x-1)^n$

1.9.23. Расписать формулы Виета для многочлена степени n :

а) $n = 4;$

б) $n = 5.$

1.9.24. По заданным корням найти коэффициенты многочлена:

а) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4;$

б) $x_1 = 1$ – кратности 2

1.9.25. Найти такое λ , чтобы один из корней уравнения

$$x^3 - 7x + \lambda = 0$$

равнялся бы удвоенному другому корню.

1.9.26. Сумма двух корней уравнения $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ равна 1. Найти λ .

1.9.27. Найти сумму квадратов корней уравнения

$$2x^4 - x^3 + 12x + 11 = 0.$$

1.9.28. Составить уравнение, корни которого равны квадратам корней уравнения $x^3 + 6x - 7 = 0$.

1.9.29. Показать, что многочлен $f(x)$ тогда и только тогда делится на многочлен $g(x)$, когда любой комплексный корень многочлена $g(x)$, кратность которого равна $k \geq 1$, является корнем $f(x)$ кратности не меньшей k

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – 10-е изд. – М.: Физматлит, 2005.
2. Бугров, Я. С. Высшая математика: в 3 т. Т. 2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – 7-е изд. – М.: Юрайт, 2017.
3. Винберг, Э. Б. Курс алгебры / Э. Б. Винберг. – М.: МЦНМО, 2017.
4. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – М.: АСТ, Астрель, 2006.
5. Выгодский, М. Я. Справочник по элементарной математике / М. Я. Выгодский. – М.: АСТ, Астрель, 2009.
6. Ильин, В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 6-е изд. – М.: Физматлит, 2014.
7. Корн, Г. А. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. А. Корн, Т. М. Корн. – М.: Наука, 1973.
8. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. В 3 частях / А. И. Кострикин. – М.: МЦНМО, 2018.
9. Кремер, Н. Ш. Линейная алгебра : учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман, И. М. Тришин. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2018.
10. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры. – 19-е изд. – СПб.: Лань, 2013.
11. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике / К. Н. Лунгу, В. П. Норин, Д. Т. Письменный, Ю. А. Шевченко. – М.: Айрис-пресс, 2003.
12. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Т. 1–2. – М.: Айрис-Пресс, 2009.
13. Потапов, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / А. П. Потапов. – М. : Издательство Юрайт, 2018.

14. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре: Учебное пособие. 13-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010.
15. Ринчино, А. Л. Высшая математика: теория и практика. Курс для экономистов. Часть II / А. Л. Ринчино. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2010.
16. Ринчино, А. Л. Высшая математика: теория и практика. Курс для экономистов. Часть I / А. Л. Ринчино. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2010.
17. Ринчино, А. Л. Элементарная математика: краткие сведения для экономистов и менеджеров / А. Л. Ринчино. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2010.
18. Салимов Р. Б. Математика для инженеров и технологов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
19. Spiegel, M. Mathematical Handbook of Formulas and Tables: 4-th Edition. – NY: McGraw Hill, 2012.
20. Aleskerov, F. Linear Algebra for Economists / F. Aleskerov, H. Ersel, D. Piontkovski – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
21. Wolfram Alpha. – URL: <http://www.wolframalpha.com>.
22. Olver, P. J. Shakiban, C. Applied Linear Algebra. Springer International Publishing AG. 2018.
23. Strang, G. Introduction to Linear Algebra. Cambridge University Press, 2016.

ОБ АВТОРЕ

Андрей Львович Ринчино -
учёный, преподаватель, общественный деятель, блогер.
Кандидат экономических наук, доцент департамента
математики Института математики и компьютерных
технологий Дальневосточного федерального университета.
Автор ряда книг, научных работ, статей в области математики,
экономики, по общественно-политическим вопросам.