О.И. Дьяченко,
В.Ю. Капитан,
К.В. Нефедев

**Общая теория
и численные расчеты
в физике магнитных
явлений**

Дальневосточный федеральный университет
Школа естественных наук

О.И. Дьяченко, В.Ю. Капитан, К.В. Нефедев

**ОБЩАЯ ТЕОРИЯ
И ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ
В ФИЗИКЕ МАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ**

Учебное пособие

Владивосток

2020

© ФГАОУ ВО ДВФУ, 2020
ISBN 978-5-7444-4850-9

УДК 537.611(075.8)
ББК 22.334.11я73

*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания
Министерства науки и высшего образования Российской Федерации
№ 0657-2020-0005*

Рецензенты:

В.И. Белоконь, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры
теоретической и ядерной физики ШЕН ДВФУ;
И.В. Прохоров, д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник
Института прикладной математики ДВО РАН.

Дьяченко, О.И. Общая теория и численные расчеты в физике магнитных явлений : учебное пособие / О.И. Дьяченко, В.Ю. Капитан, К.В. Нефедев. – Владивосток : Изд-во Дальневост. федерал. ун-та, 2020. – 1 CD-ROM ; [107 с.]. – Загл. с титул. экр. – ISBN 978-5-7444-4850-9. – DOI dx.doi.org/10.24866/7444-4850-9. – Текст. Изображения : электронные.

Пособие посвящено изучению фундаментальных вопросов физики магнитных явлений и описанию численных методов, применяемых при исследовании сложных магнитных наносистем с различными типами обменных взаимодействий.

Представлены численные методы и подходы, позволяющие в хорошем согласии с экспериментом рассчитывать свойства магнетиков.

Для специалистов в различных областях теоретической и экспериментальной физики, медицинской биофизики, информатики и компьютерного моделирования, а также для аспирантов и студентов вузов естественнонаучных и физико-технических направлений подготовки.

Текстовое электронное издание

Минимальные системные требования:
процессор с частотой 1,3 ГГц (Intel, AMD); оперативная память 256 МБ,
свободное место на винчестере 335 МБ; Windows (XP; Vista; 7 и т.п.)

Программное обеспечение:
Acrobat Reader, Foxit Reader либо любой другой их аналог

Дальневосточный федеральный университет
690922, Приморский край, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.
Тел./факс: (423) 226-54-43
E-mail: dvfutip@yandex.ru, editor_dvfu@mail.ru

Изготовитель CD-ROM:
Дальневосточный федеральный университет,
690922, Приморский край, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.

Подписано к использованию 7.09.2020 г.
Объем 3,25 Мб. Тираж 50 экз.

© ФГАОУ ВО ДВФУ, 2020

Оглавление

Предисловие	6
Глава 1 Теория магнетизма	8
1.1 Магнитное поле и его характеристики	8
1.2 Закон Био–Савара–Лапласа	13
1.2.1 Принцип суперпозиции в магнетизме	13
1.2.2 Применение закона Био–Савара–Лапласа	16
1.3 Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции (закон полного тока)	21
1.3.1 Применение теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции. Магнитное поле внутри прямого проводника с током	22
1.3.2 Магнитное поле соленоида	25
1.3.3 Магнитное поле тороида	30
1.4 Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле	32
1.4.1 Движение заряженных частиц в постоянном магнитном поле	33
1.5 Сила Ампера	37
1.5.1 Контур с током в магнитном поле	39
1.5.2 Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле	40
1.6 Выводы	41
Глава 2 Магнитные свойства вещества и критические явления	45

2.1	Магнитные свойства вещества	45
2.1.1	Магнитные моменты электронов и атомов .	45
2.1.2	Парамагнетики	49
2.1.3	Диамагнетики	52
2.1.4	Характеристики магнитного поля в магнетиках	57
2.1.5	Ферромагнетики	62
2.2	Магнитные фазовые переходы	71
2.2.1	Классификация фазовых переходов	71
2.2.2	Статистическая сумма	76
2.3	Выводы	78

Глава 3 Модельные представления и численные

	методы для изучения магнитных явлений . . .	84
3.1	Модельные представления	84
3.1.1	Модель Изинга	85
3.1.2	Модель Кюри-Вейса	87
3.1.3	ХУ модель	88
3.1.4	Модель Гейзенберга	89
3.2	Численные методы расчета	90
3.2.1	Учет граничных условий	91
3.3	Методы Монте-Карло	92
3.3.1	Алгоритм Метрополиса	93
3.3.2	Алгоритм Ванга-Ландау	94
3.3.3	Метод полного перебора	96
3.4	Выводы	97

Глава 4 Практическая часть 98

4.1	Задачи по теории магнетизма	98
4.2	Применение высокопроизводительных вычислений при решении физических задач	102

4.2.1	Реализация модели Изинга с применением алгоритма Метрополиса	102
4.2.2	Реализация ХУ-модели с применением алгоритма Метрополиса	104
4.2.3	Реализация модели Гейзенберга с применением алгоритма Метрополиса . . .	104
Список литературы		106

Предисловие

В основу учебного пособия положен цикл лекций и практических работ по дисциплинам «Физика: магнитные явления», «Simulation methods in Physics and Material Science», «Advanced IT for Data Analysis and Simulation», «Высокопроизводительные вычисления в математическом моделировании» и «Моделирование систем и технологий», читаемым в Школе естественных наук Дальневосточного федерального университета. В нем в краткой и доступной форме излагаются теоретические основы физики магнитных явлений, а также приводятся численные расчеты применяемые при исследовании различных сложных магнитных наносистем с различными типами обменных взаимодействий. Представлены разработанные авторами численные методы и подходы, позволяющие в хорошем согласии с экспериментом рассчитывать основные свойства магнитных систем, что позволит сформировать у обучающихся научное мировоззрение, владение физико-математическим аппаратом и методами физических исследований для успешного освоения специальных дисциплин. Интегрирование физических законов в смежные науки позволяет студенту рациональнее и эффективнее использовать полученные в ходе обучения компетенции для решения профессиональных задач.

Материал данного учебного пособия делится на четыре главы. Первая и вторая главы посвящены изучению фундаментальных вопросов теории магнетизма, третья глава описывает модельные представления и численные методы для изучения магнитных явлений, четвёртая глава представляет собой практическую часть. Вопросы, излагаемые в данном учебном пособии, являются фундаментальными и также представляют

практических интерес для изучения магнитных систем, в каждом параграфе выделяются основные физические положения, формулы и законы, что позволяет наглядно проследить взаимосвязь физических явлений.

Данное учебное пособие предназначено для специалистов в различных областях теоретической и экспериментальной физики, медицинской биофизики, информатики и компьютерного моделирования, а также для аспирантов и студентов вузов естественнонаучных и физико-технических направлений подготовки.

Глава 1 Теория магнетизма

1.1 Магнитное поле и его характеристики

До начала 19-го века единственным источником магнитного поля, известным Человечеству, были постоянные магниты. Они применялись в виде магнитных стрелок компаса (древний Китай), священниками («плавающий гроб» Магомета в Мекке), были попытки применения магнитов для лечения болезней (растирали руду в порошок и беспощадно заставляли пить суспензию). Физической ясности о природе явления, конечно, не было.

Зимой 1819-1820 г. Ганс Христиан Эрстед читал в Копенгагенском университете студентам старших курсов лекции по электричеству, гальванизму и магнетизму. Электричество означало тогда электростатику; гальванизмом назывались явления, вызываемые постоянным током, получаемым от батарей, - этот раздел возник в результате случайного открытия Гальвани и последующих опытов Вольты; магнетизм имел дело с давно известными свойствами железных руд, со стрелкой компаса, с земным магнитным полем. Можно было предположить, что между гальваническим током и электрическими зарядами должна существовать связь, хотя прямых доказательств этого не было, если не считать того, что оба явления вызывали у человека ощущение удара. С другой стороны, казалось, что магнетизм и электричество не имеют между собой ничего общего.

У Эрстеда была, однако, быть может смутная, но неотвязная мысль о том, что магнетизм, как и гальванический ток, может оказаться одной из «скрытых форм» электричества. В поисках такой связи он попытался проделать перед аудиторией опыт с

пропусканием тока через проволоку, подвешенную над стрелкой компаса под прямым углом к ней. Опыт не дал никакого эффекта. После лекции что-то побудило его продолжить опыт, но с проволокой, параллельной стрелке компаса. Стрелка сильно отклонилась, а когда гальванический ток был пущен в обратном направлении, она отклонилась в другую сторону!

Научный мир был вполне готов к восприятию этого откровения, и как только весть о нем достигла других лабораторий, заработал фермент опытов и открытий. Прошло немного времени и Ампер, Фарадей и другие произвели полное и точное исследование магнитного действия электрических токов. Открытие Фарадеем электромагнитной индукции, имевшее фундаментальное значение, произошло менее чем через 12 лет после опыта Эрстеда, тогда как за два столетия после опубликования в 1600 г. великой работы Уильяма Гильберта «De Magneto» человеческое понимание природы магнетизма не продвинулось ни на шаг!

Уже в том же 1820 году Ампер установил, что электрические токи взаимодействуют между собой. Например, два тонких прямолинейных параллельных проводника, по которым текут токи, (мы будем называть их прямыми токами), притягивают друг друга, если токи в них имеют одинаковое направление, и отталкивают, если токи противоположны. Опыт показывает, что сила взаимодействия, приходящаяся на единицу длины каждого из параллельных проводников, пропорциональна величинам токов в них и обратно пропорциональна расстоянию между ними:

$$F = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1I_2}{b} l, \quad (1.1)$$

где μ - магнитная проницаемость среды, для вакуума и воздуха $\mu = 1$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная, b – расстояние между проводниками, l - их длина, I_1 и I_2 – токи в проводниках.

Очевидно, что взаимодействие токов опосредствуется магнитным полем – особым видом материи, воздействующей на движущиеся электрические заряды и порожденной движущимися зарядами. Основной характеристикой магнитного поля является вектор магнитной индукции B , кроме того, используются напряженность H и магнитный поток Φ . Условились считать, что вектор магнитной индукции B в произвольной точке поля совпадает по направлению с силой, которая действует на северный полюс бесконечно малой магнитной стрелки, помещенной в эту точку поля. Бесконечно малая магнитная стрелка не может своим присутствием исказить то поле, в которое она вносится.

Для графического изображения магнитных полей удобно пользоваться линиями магнитной индукции. Линиями магнитной индукции называются кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора B в этих точках поля.

Рис. 1.1. Картины магнитных силовых линий.

Линии магнитной индукции проще всего наблюдать с помощью мелких игольчатых железных опилок, которые намагничиваются в исследуемом поле и ведут себя подобно маленьким магнитным стрелкам. Картины плоских сечений простейших магнитных полей (рис. 1.1) известны из курса физики средней школы.

Из рис. 1.1 видно, что линии магнитной индукции всегда замкнуты и охватывают проводники с током. Вблизи проводника линии магнитной индукции лежат в плоскостях, перпендикулярных к проводнику. Направление линий индукции магнитного поля тока определяется по известному правилу буравчика, если ввинчивать буравчик по направлению движения тока в проводнике, то направление движения его рукоятки укажет направление линий магнитной индукции (рис 1.2).

Рис. 1.2. Определение ориентации линий индукции магнитного поля.

Из сопоставления рис. 1.1 а и 1.1 г видно, что магнитное поле вне соленоида, т. е. длинной катушки с током, подобно магнитному полю полосового магнита. Северный полюс магнита (рис. 1.1 а) совпадает с тем концом соленоида, из которого ток в витках виден идущим против часовой стрелки (рис. 1 г). Магнитное поле кругового тока (рис. 1.1 в), представляющего собой один виток соленоида, подобно полю очень короткого полосового магнита, расположенного в центре витка так, чтобы его ось была перпендикулярна к плоскости витка. Такой полосовой магнитик естественно назвать магнитным диполем. Из рис. 1.1 а видно, что линии магнитной индукции постоянного магнита выходят из его северного полюса и входят в южный. На первый взгляд кажется, что здесь имеется полная аналогия

с силовыми линиями электростатического поля, причем полюса магнита играют роль магнитных «зарядов» (магнитных масс), создающих магнитное поле. Однако опыты показали, что, разрезая постоянный магнит на части, нельзя разделить его полюсы, т. е. нельзя получить магнит либо с одним северным, либо с одним южным полюсом. Каждая сколь угодно малая часть постоянного магнита всегда имеет оба полюса.

Следовательно, в отличие от электрических зарядов, свободные магнитные «заряды» в природе не существуют. Нет их и в полюсах постоянных магнитов. Поэтому полюсы постоянного магнита не могут являться особыми точками его магнитного поля, а линии магнитной индукции не могут обрываться на полюсах. Исследования показали, что внутри полосовых магнитов имеется магнитное поле, подобное полю внутри соленоида. Линии магнитной индукции этого поля являются продолжением линий индукции вне полосового магнита. Этим было доказано, что линии индукции поля постоянных магнитов тоже замкнуты.

Между индукцией магнитного поля и его напряженностью существует аналитическая связь:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}. \quad (1.2)$$

Итак, движущиеся электрические заряды изменяют свойства окружающего их пространства – создают в нем магнитное поле. Для описания магнитного поля, распределенного в пространстве, служит магнитный поток Φ :

$$\Phi = \int_S B_n \cdot dS. \quad (1.3)$$

Магнитный поток определяет количество силовых линий магнитного поля, пересекающих единичную площадку, ориентированную перпендикулярно силовым линиям магнитного поля.

Единицы измерения B , H и Φ и связь их в системах СИ и СГСМ представлены в таблице 1:

Таблица 1

Единицы измерения характеристик магнитного поля.

Величина	СИ	СГСМ	Связь
B	Тл (Тесла) $(\frac{\text{КГ}}{\text{с}^2\text{А}})$	Гс (Гаусс)	$1 \text{ Гс} = 10^{-4} \text{ Тл}$
H	$\frac{\text{А}}{\text{М}}$	Э (Эрстед)	$1 \text{ Э} = \frac{10^3}{4\pi} \frac{\text{А}}{\text{М}} = 79.6 \frac{\text{А}}{\text{М}}$
Φ	Вб (Вебер) $(\frac{\text{М}^2\text{КГ}}{\text{с}^2\text{А}})$	Мкс (Максвелл)	$1 \text{ Мкс} = 10^{-8} \text{ Вб}$

1.2 Закон Био–Савара–Лапласа

1.2.1 Принцип суперпозиции в магнетизме

Био и Савар провели в 1820 г. исследование магнитных полей токов различной формы. Они установили, что магнитная индукция во всех случаях пропорциональна силе тока, создающего магнитное поле. Лаплас проанализировал экспериментальные данные, полученные Био и Саваром, и нашел, что магнитное поле тока I любой конфигурации может быть вычислено как векторная сумма (суперпозиция) полей, создаваемых отдельными элементарными участками тока.

Длина dl каждого участка тока настолько мала, что его можно считать прямым отрезком, расстояние от которого до точки наблюдения много больше dl . Удобно ввести понятие элемента

тока $I d\vec{l}$, где направление вектора $d\vec{l}$ совпадает с направлением тока I , а его модуль равен dl (рис. 1.3).

Рис. 1.3. Индукция магнитного поля $d\vec{B}$, создаваемого элементом тока $I d\vec{l}$ в точке, находящейся на расстоянии r от него

Для индукции магнитного поля $d\vec{B}$, создаваемого элементом тока $I d\vec{l}$ в точке, находящейся на расстоянии r от него (рис. 1.3), Лаплас вывел формулу, справедливую для вакуума:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}. \quad (1.4)$$

В магнетизме, как и в электричестве, имеет место принцип суперпозиции полей, т. е. индукция магнитного поля, создаваемого системой токов, в данной точке пространства равна векторной сумме индукции магнитных полей, создаваемых в этой

Рис. 1.4. Пример построения вектора магнитной индукции $\vec{B}$

точке каждым из токов в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i, \vec{B} = \int d\vec{B}. \quad (1.5)$$

На рисунке 1.4 приведен пример построения вектора магнитной индукции $\vec{B}$ в поле двух параллельных и противоположных по направлению токов I_1 и I_2 : $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

1.2.2 Применение закона Био–Савара–Лапласа

Магнитное поле прямого тока

Рассмотрим отрезок прямого тока. Элемент тока $I d\vec{l}$ создает магнитное поле, индукция которого в точке A (рисунок 1.5) по закону Био–Савара–Лапласа находится по формуле:

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I dl \cdot r}{4\pi r^3} \sin\alpha, \quad (1.6)$$

где α – угол между направлением тока и вектором $\vec{r}$, характеризующим положение точки A относительно $d\vec{l}$.

Опустив перпендикуляр из точки C на сторону OA , получим два прямоугольных треугольника. Из треугольника ODC следует, что $CD = dl \cdot \sin\alpha$, а из треугольника CDA следует, что $CD = (r + dr) \cdot \sin d\alpha$.

Учитывая, что dr и $d\alpha$ бесконечно малые величины, получим:

$$dl \cdot \sin\alpha = r \cdot d\alpha. \quad (1.7)$$

После подстановки 1.7 в 1.6 получим:

$$dB = \frac{\mu_0 I d\alpha}{4\pi r}. \quad (1.8)$$

Из рисунка 1.5 следует, что $b = r \cdot \sin\alpha$, где b – расстояние от прямого тока до рассматриваемой точки A . Следовательно,

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \sin\alpha d\alpha. \quad (1.9)$$

По принципу суперпозиции $\vec{B} = \int d\vec{B}$. В точке A все $d\vec{B}$ от различных элементов отрезка прямого тока имеют одинаковое

Рис. 1.5. Индукция магнитного поля в точке A

направление. Величина магнитной индукции в точке A равна алгебраической сумме dB от всех элементов прямого тока:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (-\cos \alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (1.10)$$

Таким образом, для индукции магнитного поля отрезка прямого тока конечной длины (рис. 1.6) получаем формулу 1.11:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (1.11)$$

Рис. 1.6. Индукция магнитного поля отрезка прямого тока конечной длины

В случае бесконечно длинного прямого проводника с током $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$.

Следовательно, $\cos \alpha_1 = 1$, $\cos \alpha_2 = -1$, $(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = 2$. Отсюда следует, что индукция магнитного поля бесконечно длинного прямого проводника с током находится по формуле:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}. \quad (1.12)$$

Магнитное поле кругового тока

Рассмотрим проводник в форме окружности радиуса R , по которому протекает ток I (рис. 1.7). Разобьем круговой ток на элементы тока $I d\vec{l}$, каждый из которых создает в центре кругового тока (точка O) магнитное поле $d\vec{B}$. По закону Био–Савара–Лапласа (1.4), с учетом, что $r = R$, магнитная индукция, создаваемая элементом тока в точке O , определяется формулой:

$$db = \frac{\mu_0 I dl R}{4\pi R^3} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} dl. \quad (1.13)$$

Рис. 1.7. Проводник в форме окружности радиуса R , по которому протекает ток I

По принципу суперпозиции $\vec{B} = \int d\vec{B}$. В точке O все $d\vec{B}$ от разных элементов кругового тока имеют одинаковое направление. Следовательно,

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_I dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (1.14)$$

Таким образом, для индукции магнитного поля в центре кругового тока получаем

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (1.15)$$

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое круговым током в других точках на оси z (рис. 1.8).

Рис. 1.8. Магнитное поле, создаваемое круговым током в других точках на оси z

Любая пара равных по величине элементов тока ($I \cdot |d\vec{l}_1| = I \cdot |d\vec{l}_2|$), расположенная симметрично относительно оси z , создает в точках на оси магнитное поле: $d\vec{B} = d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2$, ($|d\vec{B}_1| = |d\vec{B}_2|$). Вектор $d\vec{B}_1$ в соответствии с законом Био–Савара–Лапласа направлен перпендикулярно плоскости, содержащей вектора $d\vec{l}_1$ и $\vec{r}_1$. Вектор $d\vec{B}_2$ направлен перпендикулярно плоскости, содержащей вектора $d\vec{l}_2$ и $\vec{r}_2$. Вектора $d\vec{B}_1$ и $d\vec{B}_2$ образуют ромб, диагональ которого представляет вектор $d\vec{B}$, направленный вдоль оси Oz .

Как следует из рисунка 1.8,

$$dB = 2 \cdot dB_1 \sin \varphi. \quad (1.16)$$

Учитывая, что $\sin\varphi = \frac{R}{r_1}$, по закону Био–Савара–Лапласа:

$$dB = 2 \frac{\mu_0 I dl \sin 90^\circ}{4\pi r_1^2} \frac{R}{r_1}. \quad (1.17)$$

Так как $r_1 = \sqrt{R^2 + z^2}$, $r_1^3 = (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$, получаем:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{2\pi(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.18)$$

По принципу суперпозиции результирующий вектор $\vec{B} = \int d\vec{B}$ также направлен вдоль оси z , поэтому

$$B = \frac{\mu_0 I R}{2\pi(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\pi R} dl. \quad (1.19)$$

Окончательное выражение для индукции в точках на оси кругового тока имеет вид:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.20)$$

1.3 Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции (закон полного тока)

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в вакууме: циркуляция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на μ_0 . Иначе говоря,

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i, \quad (1.21)$$

где $d\vec{l}$ – элементарное перемещение вдоль замкнутого контура l , I_i – токи, охватываемые контуром, причем I_i берется с плюсом, если направление I_i и направление обхода контура связаны правилом правого винта, и с минусом в противном случае.

Если контур находится в проводящей среде, в которой существует упорядоченное движение зарядов, теорему удобно представить в виде:

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S j_n dS, \quad (1.22)$$

где S – любая поверхность, ограниченная контуром l , j_n – проекция плотности тока на нормаль к элементу поверхности dS .

1.3.1 Применение теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции. Магнитное поле внутри прямого проводника с током

В качестве примера применения теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции для расчета индукции магнитного поля рассмотрим магнитное поле постоянного тока, текущего в бесконечно длинном прямом проводнике цилиндрической формы радиуса R . Замкнутый контур выберем в виде окружности радиуса r , лежащей в плоскости, перпендикулярной оси проводника, и с центром на этой оси (рис. 1.9).

Пусть направление обхода контура связано с направлением тока правилом правого винта. Из осевой симметрии следует, что во всех точках, равноудаленных от оси проводника с током, индукция магнитного поля одинакова. Проекция вектора магнитной индукции на направление элементарного перемещения совпадает по величине с магнитной индукцией во всех точках замкнутого контура.

Рис. 1.9. Контур произвольной формы

Таким образом, для циркуляции вектора магнитной индукции получаем:

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \oint_l B_l dl = B \oint_l dl = B \cdot 2\pi r, \quad (1.23)$$

где B_l - проекция вектора магнитной индукции на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$.

Если $r > R$, то по закону полного тока:

$$\oint_l B_l dl = \mu_0 I. \quad (1.24)$$

Из сравнения (1.23) и (1.24) следует

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (1.25)$$

что совпадает с ранее полученной формулой (1.12).

Если r, R , в предположении равномерного распределения тока по сечению проводника, по закону полного тока

$$\oint_l B_l dl = \mu_0 j S_l = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = \mu_0 \frac{I}{R^2} r^2, \quad (1.26)$$

где S_l – площадь, охватываемая контуром l , j – плотность тока. Из сравнения (1.23) и (1.26) следует

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r. \quad (1.27)$$

.

На графике (рис. 1.10 (а)) показана зависимость индукции магнитного поля от расстояния до оси прямого проводника с током.

Рис. 1.10. Зависимости индукции магнитного поля от расстояния до оси прямого проводника с током

Рассмотрим полый проводник цилиндрической формы в виде трубы, вдоль стенки которой течет постоянный ток. Пусть

R – радиус трубы. Замкнутый контур выберем также в форме окружности радиуса r с центром на оси проводника. Пусть $r < R$. В этом случае контур не охватывает ток и

$$\oint_l B_r dr = 0. \quad (1.28)$$

Из сравнения (1.23) и (1.28) следует, что магнитное поле внутри полого проводника с током отсутствует. На рис. 1.10 (б) представлена зависимость величины индукции магнитного поля в некоторой точке от ее расстояния до оси прямого полого проводника с током.

1.3.2 Магнитное поле соленоида

Соленоид представляет собой тонкий провод, навитый плотно (виток к витку) на цилиндрический каркас. На рис. 1.11 представлено схематическое изображение бесконечно длинного соленоида диаметром D . Будем считать, что намотка выполнена плотно, соседние витки прилегают друг к другу и по соленоиду течет ток силой I .

Выясним, как направлен вектор $\vec{B}$ в различных точках магнитного поля соленоида. Для этого рассмотрим два любых элемента тока $I d\vec{l}_1$ и $I d\vec{l}_2$, равных по величине и расположенных симметрично относительно плоскости сечения AA , перпендикулярной к оси соленоида (рис. 1.12). Элементы $d\vec{l}_1$ и $d\vec{l}_2$ перпендикулярны плоскости рисунка.

По закону Био–Савара–Лапласа рассматриваемые элементы тока создадут в каждой точке сечения AA магнитные поля, индукции которых $d\vec{B}_1$ и $d\vec{B}_2$ равны по величине, а их результирующий вектор $d\vec{B}$ параллелен оси соленоида.

Рис. 1.11. Схематическое изображение бесконечно длинного соленоида диаметром D

Рис. 1.12. Схематическое изображение бесконечно длинного соленоида диаметром D

Этот вывод справедлив для любой пары одинаковых элементов тока соленоида, расположенных симметрично

относительно плоскости сечения AA . Из принципа суперпозиции следует, что линии индукции магнитного поля бесконечно длинного соленоида, если оно отлично от нуля, должны быть параллельны оси соленоида как внутри, так и вне соленоида.

Рис. 1.13. Графическое построение

Теперь докажем, что в точках, находящихся на расстоянии, много большем диаметра соленоида с плотной намоткой витков, магнитное поле равно нулю. Для этого рассмотрим два равных по модулю элемента тока $d\vec{l}_1$ и $d\vec{l}_2$, расположенных симметрично относительно оси соленоида (рис. 1.13).

В точках, достаточно удаленных от соленоида, для которых $r_1 \simeq r_2 \gg D$, по закону Био–Савара–Лапласа магнитные индукции $d\vec{B}_1$ и $d\vec{B}_2$ будут равны и противоположны по направлению с хорошей степенью точности. Этот вывод справедлив для любой пары одинаковых элементов тока соленоида, расположенных симметрично относительно оси

соленоида. Из принципа суперпозиции следует, что в достаточно удаленных от соленоида точках магнитное поле отсутствует.

Для вычисления величины индукции магнитного поля соленоида применим теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру. Выберем контур прямоугольной формы, две стороны которого параллельны, а другие две стороны перпендикулярны оси соленоида (рис. 1.14 (а, б)).

Рис. 1.14. Прямоугольный контур

Пусть участок контура $3 \rightarrow 4$ находится от соленоида на расстоянии, много большем его диаметра, а участок $1 \rightarrow 2$, параллельный оси соленоида, расположен в первом случае внутри соленоида, рисунок 1.14 (а) и во втором случае вне соленоида, рисунок 1.14 (б).

Циркуляция вектора $\vec{B}$ на контуре 1–2–3–4 равна сумме линейных интегралов:

$$\oint_l B_l dl = \int_1^2 B_l dl + \int_2^3 B_l dl + \int_3^4 B_l dl + \int_4^1 B_l dl. \quad (1.29)$$

Из соображений симметрии и так как линии магнитной индукции должны быть параллельны оси соленоида, как было

показано выше, $B_l = B = \text{const}$ во всех точках участка $1 \rightarrow 2$. На участках контура $2 \rightarrow 3$ и $4 \rightarrow 1$, $\vec{B}$ перпендикулярен элементарному перемещению. Следовательно, $B_l = 0$ во всех точках участков $2 \rightarrow 3$ и $4 \rightarrow 1$. Точки участка $3 \rightarrow 4$ находятся на расстоянии, много большем диаметра соленоида, и в них, как отмечалось ранее, можно считать $B = 0$ с хорошей степенью точности.

Таким образом,

$$\oint_l B_l dl = \int_1^2 B_l dl = B \int_1^2 dl = B \cdot l', \quad (1.30)$$

где l' – длина участка $1 \rightarrow 2$.

Согласно теореме о циркуляции в случае, когда контур охватывает ток (рис. 1.14 (а)),

$$\oint_l B_l dl = \mu_0 n l' \cdot I, \quad (1.31)$$

где n – плотность намотки (число витков на единицу длины соленоида), а $n l'$ – число витков на длине l' . Если контур не охватывает ток (рис. 1.14 (б)), то

$$\oint_l B_l dl = 0. \quad (1.32)$$

Из сравнения (1.30) с (1.31) и (1.32) следует, что магнитное поле внутри бесконечно длинного соленоида однородно. Магнитная индукция поля равна

$$B = \mu_0 n I. \quad (1.33)$$

Поле вне соленоида отсутствует.

1.3.3 Магнитное поле тороида

Тороид – устройство, выполненное в виде провода, намотанного плотно виток к витку на каркас, имеющий форму тора (рис. 1.15).

Рис. 1.15. Тороид

Окружность радиуса R , проходящая через центры витков, называется осью тороида. Пусть I – сила тока, текущего по виткам тороида. Из симметрии рассматриваемого поля следует, что линии магнитной индукции представляют собой окружности с центрами на оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рис. 1.15. Возьмем одну из таких окружностей радиуса r в качестве замкнутого контура и применим теорему о циркуляции

$\vec{B}$. Так как в каждой точке рассматриваемой окружности величина B должна быть одинакова,

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = B \cdot 2\pi r. \quad (1.34)$$

Если контур проходит внутри тороида, то он охватывает ток $N \cdot I$, где N – число витков тороида. По теореме о циркуляции

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 N \cdot I, \quad (1.35)$$

отсюда получаем

$$B = \frac{\mu_0 N \cdot I}{2\pi r}. \quad (1.36)$$

Контур, проходящий вне тороида, не охватывает ток, поэтому для него $B \cdot 2\pi r = 0$. Следовательно, вне тороида магнитная индукция равна нулю.

Для тороида, радиус витка которого много меньше расстояния r от внутренних точек тороида до точки оси (рис. 1.15), можно ввести понятие плотности намотки тороида n : $N = 2\pi R \cdot n$.

Тогда 1.36 примет вид

$$B = \mu_0 n I \frac{R}{r}. \quad (1.37)$$

Так как в этом случае $\frac{R}{r}$ мало отличается от единицы, то из (1.37) получается формула, совпадающая с формулой (1.33) для бесконечно длинного соленоида, т. е. величину B можно считать одинаковой во всех точках внутри тороида.

1.4 Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле

Рассмотрим движение в вакууме заряженной частицы. Если в пространстве имеется магнитное поле, то на электрический заряд действует сила, величина которой может быть определена по формуле, предложенной Лоренцем:

$$\vec{F}_L = q \cdot [\vec{v}\vec{B}]. \quad (1.38)$$

Модуль этой силы равен

$$\vec{F}_L = q \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha, \quad (1.39)$$

где α - угол между векторами $\vec{v}\vec{B}$.

Направление силы Лоренца определяется из (1.38) как векторное произведение векторов или по «правилу левой руки»: расположим левую руку так, чтобы силовые линии магнитного поля входили в ладонь, четыре пальца должны совпадать с направлением скорости положительно заряженной частицы (или быть направлены против движения отрицательно заряженной частицы), тогда отставленный большой палец покажет направление силы Лоренца (рис. 1.16).

Если в пространстве движения заряженной частицы имеются и магнитное и электрическое поля, то результирующая действующая сила определяется векторным соотношением:

$$\vec{F} = \vec{F}_K + \vec{F}_L = q \cdot \vec{E} + q \cdot [\vec{v}\vec{B}]. \quad (1.40)$$

Рис. 1.16. Направление силы Лоренца

1.4.1 Движение заряженных частиц в постоянном магнитном поле

Записанное выше выражение для силы Лоренца (1.39) позволяет установить ряд закономерностей движения заряженных частиц в магнитном поле, лежащих в основе устройства электронного микроскопа, масс-спектрографа и ускорителей заряженных частиц.

Рассмотрим движение заряженных частиц в однородном магнитном поле. При этом будем считать, что на частицы не действуют никакие электрические поля.

1. Начнем с простейшего случая - движения заряженной частицы вдоль линий индукции магнитного поля. При таком движении частицы угол α между векторами ее скорости v и индукции B равен 0 или π . Поэтому по формуле (1.39) сила

Лоренца равна нулю, т. е. магнитное поле не действует на частицу. Она будет двигаться по инерции - равномерно и прямолинейно.

2. Пусть частица, имеющая заряд q , движется перпендикулярно к линиям магнитной индукции ($\alpha = \frac{\pi}{2}$). Тогда сила Лоренца численно равна:

$$\vec{F}_L = |q| \cdot v \cdot B \quad (1.41)$$

и направлена перпендикулярно к векторам v и B (1.38).

Следовательно, частица движется в плоскости, перпендикулярной к вектору магнитной индукции, причем сила Лоренца является центростремительной силой. Центростремительная сила численно равна:

$$\vec{F}_C = \frac{mv^2}{r}, \quad (1.42)$$

где m —масса заряженной частицы, а r - радиус кривизны ее траектории.

Приравняв правые части выражений (1.41) и (1.42), найдем радиус кривизны траектории

$$r = \left| \frac{m}{q} \right| \frac{v}{B} \quad (1.43)$$

Так как в однородном поле $B = const$, а численное значение скорости заряда в магнитном поле не изменяется, то радиус кривизны траектории этого заряда сказывается постоянным.

Направление силы Лоренца F_L и направление вызываемого ею отклонения заряженной частицы в магнитном поле зависит от знака заряда q частицы. Если частица движется в плоскости чертежа слева направо, а магнитное поле направлено из-за чертежа перпендикулярно к его плоскости, то при $q > 0$ частица отклоняется вниз, а при $q < 0$ - вверх. Таким образом, по характеру отклонения частицы в магнитном поле можно судить о знаке ее

заряда. Этим широко пользуются в исследованиях элементарных частиц.

Частица движется по окружности радиусом r равномерно. Поэтому период обращения частицы, т. е. время T , затрачиваемое ею на один полный оборот, равно:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{B} \left| \frac{m}{q} \right|. \quad (1.44)$$

Частота вращения частицы в поле равна:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{B}{2\pi} \frac{q}{m}. \quad (1.45)$$

Величина $\frac{q}{m}$ называется удельным зарядом. Ни частота обращения, ни период от величины скорости не зависят.

Период обращения обратно пропорционален произведению индукции магнитного поля на удельный заряд частицы и не зависит от ее скорости. При очень больших скоростях движения частицы, соизмеримых со скоростью света, обнаруживается зависимость ее массы m от скорости. Поэтому сделанный нами вывод о независимости периода обращения частицы от скорости справедлив только для движений со скоростями v , которые во много раз меньше скорости света.

3. Рассмотрим теперь общий случай движения заряженной частицы в однородном магнитном поле, когда ее скорость v направлена под произвольным острым углом α к вектору индукции (рис. 1.17). Разложим вектор скорости v на две составляющие: параллельную вектору ($v_{||}$) и перпендикулярную к нему ($v_{\perp}$):

$$\left. \begin{aligned} v_{||} &= v \cdot \cos \alpha \\ v_{\perp} &= v \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\}. \quad (1.46)$$

Скорость $v_{||}$ в магнитном поле не изменяется. Благодаря же скорости $v_{\perp}$ частица должна двигаться по окружности, плоскость

Рис. 1.17. Графическое построение

которой перпендикулярна вектору $\vec{v}_\perp$, а радиус r по формуле (1.43) равен:

$$r = \left| \frac{m}{q} \right| \frac{v_\perp}{B} = \left| \frac{m}{q} \right| \frac{v \cdot \sin \alpha}{B}. \quad (1.47)$$

Частица одновременно участвует в двух движениях: она равномерно вращается со скоростью $v_\perp$ по окружности радиусом r и движется поступательно с постоянной скоростью $v_\parallel$ в направлении, перпендикулярном к плоскости вращения. Поэтому траектория движения заряженной частицы представляет собой винтовую линию, ось которой совпадает с линией индукции магнитного поля (рис. 1.17). Радиус витков r выражается формулой (1.47), а расстояние h между соседними витками (шаг винтовой линии) равно:

$$h = v_\parallel T. \quad (1.48)$$

Заменив T по формуле (1.44), а $v_\parallel$ по (1.46), получим

$$h = \frac{2\pi}{B} \left| \frac{m}{q} \right| \cdot v \cdot \cos \alpha. \quad (1.49)$$

1.5 Сила Ампера

Исторически первой была открыта и описана не сила Лоренца, действующая со стороны магнитного поля на отдельные заряды, о величине которых в начале 19 века ничего не было известно, а сила, действующая на макроскопические токи.

Представим себе проводник с током как некий канал с движущимися заряженными частицами. В металлах движется облако валентных электронов между узлами решетки, в жидкостях наблюдается встречное движение противоположно заряженных ионов, в газах – встречное движение ионов и электронов, в вакууме можно создать пучки электронов, протонов, α - частиц, ионов и т.п.

Если некоторый участок тока поместить во внешнее магнитное поле, то на каждый носитель тока будет действовать сила Лоренца:

$$\vec{F}_L = q \cdot [\vec{v}\vec{B}]. \quad (1.50)$$

Здесь $\vec{v}$ - скорость направленного движения зарядов, скорость хаотического теплового движения во внимание не принимается.

Найдем величину $d\vec{F}$ силы, действующей на элемент проводника длиной dl . В отрезке проводника dl будет содержаться $n \cdot S \cdot dl$ носителей тока (n – концентрация, s – сечение проводника). Тогда

$$d\vec{F} = \vec{F} \cdot n \cdot S \cdot dl = q[\vec{v}\vec{B}] \cdot n \cdot S \cdot dl = [(q \cdot n)\vec{v}\vec{B}] \cdot S \cdot dl. \quad (1.51)$$

Но $q \cdot n \cdot \vec{v} = \vec{j}$ - плотность тока, а $j \cdot S = I$ – сила тока. Перепишем $\vec{j} \cdot S \cdot dl = I \cdot d\vec{l}$, тогда

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (1.52)$$

Это и есть выражение силы Ампера в векторной форме – силы, действующей на элемент тока в магнитном поле.

Модуль силы Ампера равен

$$dF = I \cdot B \cdot dl \cdot \sin \alpha, \quad (1.53)$$

где α - угол между $d\vec{l}$ и $\vec{B}$.

Направление силы Ампера определяется по правилу левой руки, как и для силы Лоренца (рис. 1.18). Сила Ампера является «физической опорой» таких широко распространенных устройств, как электродвигатели, электроизмерительные устройства и т.п.

Рис. 1.18. Направление силы Ампера. Большой палец указывает направление движения и силы, если указательный направлен вдоль поля, а средний – вдоль тока.

1.5.1 Контур с током в магнитном поле

Пусть прямоугольный плоский контур с током помещается в однородном магнитном поле. Если контур ориентирован так, что вектор параллелен его плоскости (рис.1.19), то стороны, имеющие длину b , не будут испытывать действия сил, так как для них в формуле (1.53) $\sin\alpha = 0$.

Рис. 1.19. Поворот рамки с током в магнитном поле.

На левый участок будет согласно закону Ампера действовать сила $f = IBa$, направленная за чертеж, на правый участок - такая же по величине, но противоположно направленная сила f' . Эти силы образуют пару, момент которой равен

$$M = f \cdot b = I \cdot B \cdot a \cdot b. \quad (1.54)$$

Учитывая, что $a \cdot b$ равно площади контура S , а $I \cdot S$ дает величину магнитного момента m , можно написать

$$M = p_m \cdot B. \quad (1.55)$$

Момент стремится повернуть контур так, чтобы его магнитный момент m установился по направлению поля B , а

плоскость рамки становится перпендикулярной вектору $\vec{B}$. В этом случае направления всех сил лежат в плоскости контура. Легко видеть, что вращательный момент в этом случае не возникает. Поскольку поле однородно, равнодействующая сил равна нулю; силы лишь растягивают контур, но сместить его не могут. Заметим, что если повернуть контур на 180° (или изменить направление поля на обратное), то направления всех сил изменятся на противоположные, и они будут не растягивать, а сжимать контур.

1.5.2 Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле

Допустим, что провод с током может свободно перемещаться во внешнем магнитном поле. Это можно осуществить с помощью скользящих контактов между концами провода и остальными участками замкнутой цепи.

Внешнее поле будем предполагать однородным и перпендикулярным к плоскости контура. На проводник с током в магнитном поле действуют силы, определяемые законом Ампера. При указанных на рисунке направлениях тока и поля сила будет направлена вправо и равна $F = I \cdot B \cdot l$, где l — длина перемещаемой части проводника.

При перемещении проводника с током на dx эта сила совершит над проводником работу $dA = F \cdot dx = I \cdot B \cdot l \cdot dx$.

Произведение $l \cdot dx$ равно заштрихованной площади dS , а $B \cdot dS$ — потоку магнитной индукции $d\Phi$ через эту площадку. Поэтому можно написать, что

$$dA = I \cdot d\Phi, \quad (1.56)$$

где $d\Phi$ - поток магнитной индукции, пересекаемый проводником при его движении.

Полученный нами результат легко обобщить на случай неоднородного поля. Для этого нужно разбить проводник на участки dl и сложить элементарные работы, совершаемые над каждым участком (в пределах каждой малой площадки $dl \cdot dx$ магнитную индукцию можно считать постоянной).

1.6 Выводы

1. Магнитное поле – особый вид материи, воздействующей на движущиеся электрические заряды и порожденной движущимися зарядами. Основной характеристикой магнитного поля является вектор магнитной индукции B , кроме того, используются напряженность H и магнитный поток Φ . Условились считать, что вектор магнитной индукции B в произвольной точке поля совпадает по направлению с силой, которая действует на северный полюс бесконечно малой магнитной стрелки, помещенной в эту точку поля.

Между индукцией магнитного поля и его напряженностью существует аналитическая связь:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}.$$

Для описания магнитного поля, распределенного в пространстве, служит магнитный поток Φ :

$$\Phi = \int_S B_n \cdot dS.$$

Магнитный поток определяет количество силовых линий магнитного поля, пересекающих единичную площадку,

ориентированную перпендикулярно силовым линиям магнитного поля.

2. Закон Био–Савара–Лапласа позволяет найти индукцию магнитного поля $d\vec{B}$, создаваемого элементом тока $I d\vec{l}$ в точке, находящейся на расстоянии r от него:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}.$$

Индукции магнитного поля отрезка прямого тока конечной длины:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Индукция магнитного поля бесконечно длинного прямого проводника с током:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}.$$

Индукция магнитного поля в центре кругового тока:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

3. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в вакууме: циркуляция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на μ_0 . Иначе говоря, $\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$, где $d\vec{l}$ – элементарное перемещение вдоль замкнутого контура l , I_i – токи, охватываемые контуром, причем I_i берется с плюсом, если направление I_i и направление обхода контура связаны правилом правого винта, и с минусом в противном случае.

Соленоид представляет собой тонкий провод, навитый плотно (виток к витку) на цилиндрический каркас. Согласно теореме о циркуляции в случае, когда контур охватывает ток, $\oint_l B_i dl = \mu_0 n l' \cdot I$, где n – плотность намотки (число витков на единицу длины соленоида), а $n l'$ – число витков на длине l' . Магнитная индукция поля соленоида равна:

$$B = \mu_0 n I.$$

Поле вне соленоида отсутствует.

Тороид – устройство, выполненное в виде провода, намотанного плотно виток к витку на каркас, имеющий форму тора. Магнитная индукция определяется формулой:

$$B = \mu_0 n I \frac{R}{r}.$$

4. Если в пространстве имеется магнитное поле, то на электрический заряд действует сила, величина которой может быть определена по формуле, предложенной Лоренцем:

$$\vec{F}_L = q \cdot [\vec{v} \vec{B}].$$

Если заряженная частица движется вдоль линий индукции магнитного поля, то при таком движении частицы угол α между векторами ее скорости v и индукции B равен 0 или π . Поэтому сила Лоренца равна нулю, т. е. магнитное поле не действует на частицу. Она будет двигаться по инерции - равномерно и прямолинейно.

Если частица, имеющая заряд q , движется перпендикулярно к линиям магнитной индукции ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), тогда сила Лоренца является центростремительной силой. Частица движется по окружности радиусом r равномерно:

$$r = \left| \frac{m}{q} \right| \frac{v}{B}.$$

Если частица движется под произвольным углом к линиям магнитной индукции, то она одновременно участвует в двух движениях. Частица равномерно вращается со скоростью $v_{\perp}$ по окружности радиусом r и движется поступательно с постоянной скоростью $v_{\parallel}$ в направлении, перпендикулярном к плоскости вращения. Поэтому траектория движения заряженной частицы

представляет собой винтовую линию, ось которой совпадает с линией индукции магнитного поля. Расстояние h между соседними витками (шаг винтовой линии) равно:

$$h = \frac{2\pi}{B} \left| \frac{m}{q} \right| \cdot v \cdot \cos \alpha.$$

5. Сила Ампера – сила, действующая на элемент тока в магнитном поле:

$$dF = I \cdot B \cdot dl \cdot \sin \alpha,$$

где α - угол между $d\vec{l}$ и $\vec{B}$.

Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле:

$$dA = I \cdot d\Phi$$

Глава 2 Магнитные свойства вещества и критические явления

2.1 Магнитные свойства вещества

Определение в начале 19 века движения электрических зарядов в качестве источника магнитного поля и установление ядерно-электронного строения вещества в начале 20 века предопределило современные представления о невозможности индифферентной реакции на внешнее магнитное поле любых веществ в любом агрегатном состоянии - газообразном, жидком или твердом. Таким образом, все вещества в природе являются магнетиками разных типов.

Все вещества, помещенные в магнитное поле, намагничиваются. Рассмотрим причину этого явления с точки зрения строения атомов и молекул, положив в основу гипотезу Ампера, согласно которой в любом теле существуют микроскопические токи, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах.

2.1.1 Магнитные моменты электронов и атомов

В современной физике магнитный момент атома рассматривается как суммарный магнитный момент, связанный с орбитальным движением электронов вокруг ядра, собственным магнитным моментом электронов и с магнитным моментом ядра:

$$\vec{p}_m = \sum_{i=1}^Z (\vec{p}_{oi} + \vec{p}_{si}) + \vec{p}_n, \quad (2.1)$$

где Z – число электронов в атоме; $\vec{p}_m$ – суммарный магнитный момент атома; $\vec{p}_{oi}$ – орбитальный магнитный момент i -го электрона, обусловленный движением электрона вокруг ядра; $\vec{p}_{si}$ – собственный магнитный момент i -го электрона; $\vec{p}_n$ – суммарный магнитный момент ядра, обусловленный магнитными моментами входящих в состав ядра протонов и нейтронов.

Как показывает опыт, магнитный момент ядра мал по своей величине, и им можно пренебречь по сравнению с магнитными моментами электронов, считая, что магнитный момент атома равен векторной сумме орбитальных и собственных магнитных моментов электронов.

Рассмотрим движение электрона по круговой орбите радиуса r вокруг ядра, как круговой контур с током (рис. 2.1). Если электрон за одну секунду делает ν оборотов, то сила тока в таком контуре

$$I = e\nu = e\frac{\omega}{2\pi}, \quad (2.2)$$

где e – модуль заряда электрона; ω – циклическая частота. Тогда для орбитального магнитного момента такого контура площадью $S = \pi r^2$ получаем

$$p_o = IS = \frac{1}{2}e\omega r^2. \quad (2.3)$$

Направление тока I противоположно скорости электрона $\vec{v}$, так как заряд электрона – отрицательный (рис. 2.1).

Здесь уместно ввести понятие гиромангнитного отношения γ – отношения орбитального магнитного момента электрона $\vec{p}_o$ к его орбитальному моменту импульса $\vec{L}_o$:

Рис. 2.1. Круговой контур с током

$$\gamma = \frac{\vec{p}_o}{\vec{L}_o}. \quad (2.4)$$

Момент импульса (момент количества движения) определяется как:

$$L_o = m\omega r^2, \quad (2.5)$$

где m – масса электрона. Вектор $\vec{L}_o$ направлен противоположно вектору $\vec{p}_o$ (рис. 2.1).

Как видно из (2.3)–(2.5), связь между векторами $\vec{p}_o$ и $\vec{L}_o$ можно выразить в виде:

$$\vec{p}_o = \gamma \vec{L}_o, \quad (2.6)$$

где гиромагнитное отношение для орбитального движения электрона:

$$\gamma = \frac{e}{2m}. \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что гиромагнитное отношение не зависит от параметров орбитального движения электрона и для всех электронов одинаково.

Электрон обладает также собственным магнитным моментом $\vec{p}_s$ и собственным моментом импульса $\vec{L}_s$. Последний называют также спином. Соответственно собственный магнитный момент называют спиновым магнитным моментом. Собственные моменты электрона имеют квантовую природу и являются такими же неотъемлемыми его характеристиками, как масса и заряд. Опыт показывает, что собственный магнитный и механический моменты электрона связаны соотношением:

$$\vec{p}_s = \gamma_s \vec{L}_s, \quad (2.8)$$

где $\gamma_s = -\frac{e}{m}$ – гиромагнитное отношение для этих моментов. Рассмотренные ранее орбитальные моменты могут различаться для разных электронов атома. В отличие от них величины собственных магнитных моментов $\vec{p}_s$ одинаковы у всех электронов, это же справедливо и для собственных механических моментов $\vec{L}_s$. Например, они одинаковы у свободного и у связанного в атоме электронов.

В атоме (молекуле) векторная сумма орбитальных и собственных магнитных моментов электронов равна полному магнитному моменту атома (молекулы). Вследствие этого атомы (молекулы) можно рассматривать как микроскопические круговые контура с током, получившие в физике название молекулярных токов Ампера.

Как показывает опыт, для парамагнетиков и ферромагнетиков суммарный магнитный момент атомов (молекул) отличен от нуля. Для диамагнетиков при отсутствии магнитного поля он равен нулю.

2.1.2 Парамагнетики

Итак, магнитные моменты атомов парамагнетика не равны нулю. В отсутствие магнитного поля тепловое движение атомов магнетика приводит к тому, что ориентация их магнитных моментов носит случайный характер. Если парамагнетик поместить в магнитное поле с индукцией $\vec{B}_0$, то на каждый атом парамагнетика, как на рамку с током в магнитном поле, будет действовать момент сил, стремящийся повернуть частицу так, чтобы ее магнитный момент $\vec{p}_m$ был направлен вдоль линий

Рис. 2.2. Парамагнетик: а) без магнитного поля, б) в магнитном поле

магнитной индукции. Совместное действие поля и теплового

движения атомов приведет к появлению преимущественной ориентации магнитных моментов атомов вдоль линий магнитной индукции. Для наглядности на рис. 2.2 маленькие стрелки представляют ориентацию магнитных моментов атомов парамагнетика при выключенном (рис. 2.2 (а)) и включенном (рис. 2.2 (б)) магнитном поле. Для характеристики влияния магнитного поля на магнетик вводится вектор намагничивания (намагниченность) $\vec{J}$, равный магнитному моменту единицы объема магнетика:

$$\vec{J} = \frac{1}{V} \sum_{j=1}^N \vec{p}_{mj}, \quad (2.9)$$

где $\sum_{j=1}^N \vec{p}_{mj}$ – векторная сумма магнитных моментов атомов в физически малом объеме V с числом атомов N . Напомним, что под физически малым объемом понимается объем, с одной стороны, содержащий достаточно большое количество молекул, чтобы можно было проводить статистическое усреднение. С другой стороны, объем настолько мал, что концентрацию молекул в его пределах можно считать одинаковой, а магнитное поле – однородным.

Докажем, что парамагнетики усиливают магнитное поле. Рассмотрим некоторый парамагнетик, имеющий форму цилиндра и помещенный в однородное магнитное поле параллельно линиям магнитной индукции. На рис. 2.3 схематично показаны молекулярные токи Ампера в одном из сечений намагниченного парамагнетика.

Токи Ампера в объеме парамагнетика компенсируются противоположно направленными соседними токами Ампера. Поэтому эти токи не создают макроскопического поля вне или внутри магнетика. Не компенсируются только молекулярные токи, выходящие на внешнюю поверхность магнетика. Таким

Рис. 2.3. Молекулярные токи Ампера

образом, в результате намагничивания парамагнетика можно говорить о некотором поверхностном токе и характеризовать его поверхностной плотностью тока I' (сила тока на единицу длины магнетика). Поверхностный ток создает собственное магнитное поле парамагнетика $\vec{B}'$, направление которого совпадает с направлением внешнего магнитного поля $\vec{B}_0$. По принципу суперпозиции результирующее поле в парамагнетике:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (2.10)$$

В скалярной форме для однородно намагниченного парамагнетика:

$$B = B_0 + B'. \quad (2.11)$$

Из (2.11) следует, что $B > B_0$, т. е. магнитное поле в парамагнетике больше внешнего поля.

2.1.3 Диамагнетики

В отличие от атома парамагнетика суммарный магнитный момент атома диамагнетика равен нулю. Однако это не означает, что диамагнетики не влияют на магнитное поле. В этом подразделе будет показано, как у диамагнетиков, помещенных в магнитное поле, появляется так называемое индуцированное намагничивание, ослабляющее внешнее магнитное поле.

Рассмотрим движение электрона по круговой орбите радиуса r в атоме, помещенном в магнитное поле с индукцией $\vec{B}_0$ (рис. 2.4 (а)).

Пусть $\vec{p}_o$ – орбитальный магнитный момент электрона, $\vec{L}_o$ – момент импульса электрона. Орбитальное движение электрона можно рассматривать как элементарный контур с током, на который со стороны магнитного поля действует вращательный момент пары сил:

$$\vec{M} = [\vec{p}_o \times \vec{B}_0]. \quad (2.12)$$

С учетом (2.6), получаем

$$\vec{M} = \gamma[\vec{L}_o \times \vec{B}_0]. \quad (2.13)$$

Согласно закону изменения момента импульса:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}. \quad (2.14)$$

Из (2.13) и (2.14) следует

Рис. 2.4. а) движение электрона по круговой орбите радиуса r в атоме, помещенном в магнитное поле с индукцией $\vec{B}_0$, б) движение вокруг ядра, в) индуцированный (наведенный) ток

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \gamma[\vec{L}_o \times \vec{B}_0]. \quad (2.15)$$

Так как сила Лоренца, действующая на движущийся электрон, работу не совершает, скорость и момент импульса

электрона не меняются по величине и магнитное поле приводит только к изменению направления вектора момента импульса. Из (2.15) следует, что вектор $d\vec{L}_o$ перпендикулярен плоскости, содержащей $\vec{L}_o$ и $\vec{B}_0$. Следовательно, конец вектора $\vec{L}_o$ движется по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной $\vec{B}_0$ (рис. 2.4 (а)), и за время dt перемещается на угол $d\varphi$, который определяется выражением:

$$d\varphi = \frac{dL_o}{L_o \sin \alpha} = \frac{|\gamma| L_o B_0 \sin \alpha dt}{L_o \sin \alpha} = |\gamma| B_0 dt. \quad (2.16)$$

Отсюда находим угловую скорость ω_L движения по окружности конца вектора $\vec{L}_o$:

$$\omega_L = \frac{d\varphi}{dt} = |\gamma| B_0. \quad (2.17)$$

Конец вектора $\vec{p}_o$, противоположного по направлению вектору $\vec{L}_o$, также движется по окружности с угловой скоростью ω_L . Такому движению векторов $\vec{p}_o$ и $\vec{L}_o$ соответствует сложное движение электрона: его орбита как бы «катается» по плоскости, перпендикулярной направлению вектора магнитной индукции (рис. 2.4 (а)). Это явление в физике получило название прецессия орбиты электрона. Частота прецессии орбиты электрона называется частотой Лармора. Заметим, что частота Лармора не зависит от параметров орбиты или скорости электрона. Она одинакова для всех электронов атома и определяется только величиной магнитной индукции (формула (2.17)).

Сложное движение электрона можно рассматривать как суперпозицию двух движений: по круговой орбите радиуса r вокруг ядра и по окружности радиуса r' в плоскости, перпендикулярной линиям магнитной индукции (рис. 2.4 (б)). Второе движение можно трактовать как индуцированный (наведенный) ток. При этом направление индуцированного тока I_{ind} противоположно направлению движения электрона (рис. 2.4

(в)). Соответствующий магнитный момент индуцированного тока $\vec{p}'$ направлен противоположно индукции магнитного поля $\vec{B}_0$ (рис. 2.4 (в)). Для магнитного момента индуцированного тока справедливо выражение, аналогичное выражению (2.3):

$$p' = \frac{1}{2}e\omega_L(r')^2 = \frac{e|\gamma(r')^2}{2}B_0. \quad (2.18)$$

Соотношение (2.18) написано для одного электрона в атоме.

Если диамагнетик находится в магнитном поле, то можно говорить о суммарном индуцированном магнитном моменте атома $\vec{p}'_m$, связанном со всеми электронами и направленном противоположно вектору магнитной индукции: $\vec{p}'_m = \sum_{i=1}^Z \vec{p}'_i$, где $\vec{p}'_i$ – индуцированный магнитный момент i -го электрона в атоме, Z – число электронов в атоме. Пренебрегая магнитным моментом ядра, соотношение (2.1) для магнитного момента атома в магнитном поле можно написать в виде:

$$\vec{p}_m = \sum_{i=1}^Z (\vec{p}_{oi} + \vec{p}_{si}) + \vec{p}'_m. \quad (2.19)$$

Для диамагнетиков первое слагаемое $\sum_{i=1}^Z (\vec{p}_{oi} + \vec{p}_{si})$ равно нулю, поэтому магнитный момент атома определяется только величиной индуцированного магнитного момента $\vec{p}'_m$, имеющего направление, противоположное направлению вектора магнитной индукции. В этом состоит диамагнитный эффект. Характеристикой намагничивания диамагнетика является вектор намагничивания:

$$\vec{J}' = \frac{1}{V} \sum_{j=1}^Z \vec{p}'_{mj}. \quad (2.20)$$

Для диамагнетика направление вектора намагничивания противоположно направлению магнитной индукции.

Рис. 2.5. Диамагнетик

Рассмотрим диамагнетик в форме прямого цилиндра в однородном магнитном поле, расположенный параллельно линиям магнитной индукции. Тогда можно говорить, как и в случае с парамагнетиками (подраздел 2.1.2), о некотором поверхностном токе и характеризовать его поверхностной плотностью тока I' . Этот ток создает собственное магнитное

поле диамагнетика $\vec{B}'$, направление которого противоположно направлению внешнего магнитного поля $\vec{B}_0$ (рис. 2.6). По принципу суперпозиции для результирующего поля в диамагнетике получаем

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (2.21)$$

В скалярной форме для однородно намагниченного диамагнетика:

$$B = B_0 - B'. \quad (2.22)$$

Из (2.22) следует, что $B < B_0$, т. е. магнитное поле в диамагнетике меньше внешнего.

Диамагнитный эффект имеет место у всех веществ. Формула (2.19) справедлива и для парамагнетиков. Однако у парамагнетиков диамагнитный эффект играет второстепенную роль, так как индуцированные магнитные моменты оказываются меньше магнитных моментов атомов парамагнетика:

$$|p'_m| < \left| \sum_{i=1}^Z (p_{oi} + p_{si}) \right| \neq 0. \quad (2.23)$$

По этой причине диамагнитным эффектом в парамагнетиках можно пренебречь по сравнению с парамагнитным.

2.1.4 Характеристики магнитного поля в магнетиках

Магнитное поле в магнетиках $\vec{B}$ является результатом суперпозиции внешнего поля $\vec{B}_0$ и собственного магнитного поля магнетика $\vec{B}'$: $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$.

В общем случае для произвольного замкнутого контура l в магнетике по теореме о циркуляции вектора магнитной индукции имеем

$$\oint_l B_l dl = \mu_0(I + I_m). \quad (2.24)$$

Ток, охватываемый контуром l , представлен как алгебраическая сумма токов проводимости I и алгебраическая сумма молекулярных токов Ампера I_m , проходящих через поверхность S , ограниченную контуром l (рис. 2.6).

Рис. 2.6. Графическое построение

Молекулярные токи, не охватывающие контур, дважды пересекают эту поверхность: один раз в одном направлении, другой раз – в противоположном. Вклад таких токов в суммарный ток I_m равен нулю. Молекулярные токи, охватывающие контур

l , пересекают поверхность S один раз и должны быть учтены в сумме токов Ампера I_m .

Рис. 2.7. Графическое построение

Найдем вклад dI_m токов, которые охватывают малый элемент dl контура. Построим косой цилиндр, ось которого совпадает с dl , основания параллельны плоскостям круговых молекулярных токов (рис. 2.7). Площадь основания косоуго цилиндра равна площади S_m , ограниченной молекулярным током. Как видно из рис. 2.7, элемент контура dl , образующий с направлением вектора намагничивания $\vec{J}$ угол α , охватывается теми молекулярными токами, центры которых попадают внутрь косоуго цилиндра объемом dV , который определяется формулой:

$$dV = S_m dl \cos \alpha. \quad (2.25)$$

Если n – число атомов (молекул) в единице объема магнетика, то для суммарного тока, охватывающего элемент dl , получаем:

$$dI_M = i_m n S_m \cos \alpha dl, \quad (2.26)$$

где i_m – сила молекулярного тока, магнитный момент которого

$$p_m = i_m S_m. \quad (2.27)$$

Следовательно, выражение $i_m n S_m$ представляет собой магнитный момент единицы объема, т. е. модуль вектора $\vec{J}$, а $i_m n S_m \cos \alpha = J_l$, где J_l – проекция вектора $\vec{J}$ на направление элемента $d\vec{l}$. Таким образом, для суммарного молекулярного тока, охватывающего элемент $d\vec{l}$, получаем

$$dI_m = J_l dl. \quad (2.28)$$

Полную сумму молекулярных токов получим, проинтегрировав (2.28) по замкнутому контуру l :

$$\oint_l J_l dl = I_m. \quad (2.29)$$

Иными словами, циркуляция вектора намагничивания по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме молекулярных токов, проходящих через поверхность S , ограниченную этим контуром.

Подстановка (2.29) в (2.24) приводит к выражению:

$$\oint_l \frac{B_l}{\mu_0} dl = I + \int_l J_l dl, \quad (2.30)$$

откуда

$$\oint_l \left(\frac{B_l}{\mu_0} - J_l \right) dl = I. \quad (2.31)$$

Введем вектор напряженности магнитного поля:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (2.32)$$

Равенство (2.32) является определением напряженности магнитного поля. Тогда для проекции напряженности магнитного поля на направление элементарного перемещения получаем

$$H_l = \frac{B_l}{\mu_0} - J_l. \quad (2.33)$$

Подстановка (2.33) в (2.31) приводит к теореме о циркуляции напряженности магнитного поля:

$$\oint_l H_l dl = I. \quad (2.34)$$

Таким образом, циркуляция напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром. Если контур проведен внутри проводящей среды, в которой текут токи проводимости, то (2.34) удобно представить в виде:

$$\oint_l H_l dl = \int_S j_n dS, \quad (2.35)$$

где j_n – проекция вектора плотности тока проводимости на направление нормали к элементу поверхности dS .

Из (2.32) следует

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}). \quad (2.36)$$

Как показывает опыт, намагниченность $\vec{J}$ для пара- и диамагнетиков пропорциональна напряженности магнитного поля:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}. \quad (2.37)$$

Коэффициент пропорциональности χ называется магнитной восприимчивостью.

Подстановка (2.37) в (2.36) дает связь между напряженностью и магнитной индукцией:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad (2.38)$$

где $\mu = 1 + \chi$ называется магнитной проницаемостью вещества. Магнитная восприимчивость χ и магнитная проницаемость μ – величины, характеризующие магнитные свойства диамагнетиков и парамагнетиков.

У диамагнетиков магнитные моменты атомов (молекул) и вектор намагниченности $\vec{J}$ направлены противоположно вектору магнитной индукции и напряженности магнитного поля. Для диамагнетиков $\chi = -(10^{-6} \dots 10^{-5}) < 0$, $\mu < 1$.

У парамагнетиков магнитные моменты атомов (молекул), вектор намагниченности $\vec{J}$, вектор магнитной индукции и напряженность магнитного поля направлены в одну сторону. Для парамагнетиков при комнатных температурах $\chi = -(10^{-5} \dots 10^{-3}) > 0$, $\mu > 1$. С ростом температуры магнитная восприимчивость уменьшается ($\chi \sim \frac{1}{T}$ – закон Кюри).

2.1.5 Ферромагнетики

Ферромагнетики имеют ряд особенностей, существенно отличающих их от других магнетиков. Для парамагнетиков и диамагнетиков зависимость намагниченности J от напряженности магнитного поля H носит линейный характер (2.37), где магнитная восприимчивость χ – постоянная величина, не зависящая от H . На рис. (2.8) представлена зависимость $J(H)$

для ферромагнетика. В этом случае увеличение напряженности магнитного поля от нуля сопровождается нелинейным ростом величины намагниченности ферромагнетика до некоторого предельного значения, по достижении которого намагниченность не меняется. Предельное намагничивание характеризуется величиной $J_{saturation}$ и называется насыщением намагничивания.

Рис. 2.8. Зависимость $J(H)$ для ферромагнетика

Нелинейный характер зависимости $J(H)$ для ферромагнетиков означает, что магнитная восприимчивость, если ее вводить согласно формуле (2.37), принимает разные значения в зависимости от напряженности магнитного поля, т. е. является функцией H . В некоторой точке кривой $J(H)$ магнитная восприимчивость $\chi = \frac{J}{H}$ достигает максимального значения $10^3 - 10^6$ (сравните с диамагнетиками и парамагнетиками).

На рис. (2.8) приведена кривая намагничивания ферромагнетика, первоначальный магнитный момент которого равен нулю. Эта кривая называется основной или нулевой

кривой намагничивания. Если после достижения насыщения уменьшать напряженность магнитного поля, то уменьшение намагниченности следует не по первоначальной кривой, а выше нее (рис. 2.9). Когда напряженность внешнего поля станет равной нулю, намагниченность оказывается отличной от нуля. Соответствующая величина $J_{residual}$ называется остаточной намагниченностью.

Рис. 2.9. Петля гистерезиса для ферромагнетика

Намагниченность становится равной нулю (рис. 2.9) только под действием поля H_c , имеющего направление, противоположное полю, вызвавшему первоначальное намагничивание. Напряженность H_c называется коэрцитивной силой (coercive force).

Дальнейшее изменение напряженности магнитного поля приводит к изображенной на рис. 2.9 зависимости $J(H)$, которая носит название петли гистерезиса, или просто гистерезиса.

Зависимость магнитной индукции $B = \mu_0 H + \mu_0 J$ от напряженности поля H в общем случае также имеет вид гистерезиса (рис. 52). Стрелки и буквы О-А-С-D-F-G-K указывают последовательность изменения состояния намагничивания ферромагнетика.

Рис. 2.10. Зависимость магнитной индукции $B = \mu_0 H + \mu_0 J$ от напряженности поля H

Можно показать, что при обходе по петле гистерезиса совершается работа, идущая, в частности, на нагревание ферромагнетика и пропорциональная площади петли гистерезиса $\oint H dB$.

Ферромагнетики с большой остаточной намагниченностью, большой остаточной индукцией ($B_{residual} \sim 1$ Тл) и большой коэрцитивной силой ($H_c \sim 10^4 - 10^5 \frac{A}{m}$) называются жесткими ферромагнетиками. Для них характерна широкая петля гистерезиса, и они применяются для создания постоянных магнитов.

Ферромагнетики с малой коэрцитивной силой ($H_c \sim 1 - 10 \frac{A}{m}$), т. е. с узкой петлей гистерезиса, называются мягкими. Они имеют малые потери на нагревание и применяются в электротехнике, например, для изготовления сердечников трансформаторов.

При нагреве ферромагнетик теряет свои характерные свойства и становится парамагнетиком. Температура, при которой это происходит, называется точкой Кюри T_K . Для железа $T_K \cong 1040 K$.

Теория ферромагнетизма была создана Френкелем и Гейзенбергом в 1928 г. В основе теории лежит представление о том, что за магнитные свойства ферромагнетиков ответственны собственные (спиновые) магнитные моменты электронов. При определенных условиях в кристаллах могут возникать силы (в квантовой механике эти силы называются обменными), которые приводят к выстраиванию магнитных моментов электронов параллельно друг другу. В результате возникают области спонтанного (самопроизвольного) намагничивания – домены. Линейные размеры доменов составляют 1–100 мкм.

Если ферромагнетик первоначально не намагничен, то магнитные моменты отдельных доменов ориентированы произвольно, и намагниченность $\vec{J}$ ферромагнетика в целом оказывается равной нулю.

Действие внешнего магнитного поля на ферромагнетик оказывается различно в зависимости от напряженности поля. Так, в слабых магнитных полях наблюдается смещение границ доменов (короткие стрелки на рис. 2.11): происходит увеличение

Рис. 2.11. Магнитные домены

размеров доменов, результирующий магнитный момент которых (длинные стрелки на рис. 2.11) составляет острый угол с $\vec{H}$, за счет уменьшения размеров соседних доменов, у которых угол между магнитным моментом и $\vec{H}$ тупой. С ростом $\vec{H}$ домены, ориентация магнитных моментов которых сильно отличается от направления $\vec{H}$, продолжают уменьшаться и наконец исчезают совсем. При дальнейшем увеличении $\vec{H}$, т. е. в сильном магнитном поле, происходит поворот магнитных моментов доменов в направлении внешнего поля. В результате магнитные моменты всех доменов ориентируются в направлении внешнего магнитного поля.

Наступает насыщение, и дальнейшее увеличение напряженности поля не изменяет намагниченности ферромагнетика.

Процессы изменения доменной структуры ферромагнетика носят необратимый характер. Это лежит в основе объяснения наблюдаемой петли гистерезиса.

Нагревание ферромагнетика приводит к тепловому разрушению его доменной структуры, при этом ферромагнетик превращается в парамагнетик.

В заключение отметим, что рост одних доменов и уменьшение других не означает перемещение атомов, т. е. перенос вещества в ферромагнетике. Происходит только изменение ориентации собственных магнитных моментов электронов домена на границе с соседним доменом.

Имеются вещества, в которых магнитные свойства также обусловлены обменными силами, характеризующими взаимодействие спиновых магнитных моментов электронов в атомах, но которые существенно отличаются от ферромагнетиков. Существуют материалы, у которых спиновые магнитные моменты электронов у соседних атомов выстраиваются антипараллельно друг другу, поскольку это соответствует состоянию с наименьшей энергией. Если при этом магнитные моменты соседних атомов одинаковы по величине, то они компенсируют друг друга и результирующий магнитный момент магнетика в отсутствие внешнего поля становится равным нулю. Такие вещества называются антиферромагнетиками (примером являются марганец, хром и некоторые другие металлы, некоторые окислы металлов).

Кристаллическую решетку антиферромагнетика можно представить как совокупность двух встроенных друг в друга подрешеток. У каждой из подрешеток магнитные моменты атомов ориентированы параллельно друг другу, но противоположно

Рис. 2.12. Антиферромагнетик

магнитным моментам атомов другой подрешетки (рис. 2.12). Магнитная восприимчивость антиферромагнетиков очень мала.

У некоторых материалов, однако, намагниченности подрешеток неодинаковы (например, из-за разной структуры соседних атомов) (рис. 2.13). Вследствие этого появляется результирующая намагниченность. Такие материалы называются ферримагнетиками. Магнитные свойства ферримагнетиков похожи на свойства ферромагнетиков (у них, например, большая магнитная восприимчивость, имеет место явление гистерезиса), но проявляются слабее. Многие ферримагнетики являются полупроводниками и обладают малой электропроводностью.

Рис. 2.13. Ферримагнетик

Такие ферримагнетики называются ферритами. Являясь достаточно сильными магнетиками, они имеют малые тепловые потери при работе на высоких частотах.

Как и у ферромагнетиков, у антиферромагнетиков и ферримагнетиков при нагреве выше определенной температуры (у антиферромагнетиков она называется температурой Нееля) нарушается упорядоченность структуры расположения магнитных моментов атомов, и они превращаются в парамагнетики.

2.2 Магнитные фазовые переходы

Исследование фазовых переходов и критических явлений занимает особое место в статистической физике. Теория критических явлений посвящена исследованию свойств статистических систем, которые они проявляют вблизи фазового перехода, где происходит спонтанное нарушение симметрии. Большинство традиционных теоретических и экспериментальных методов исследования таких систем сталкиваются с серьезными трудностями при вычислении критических параметров, при определении характера и механизмов критического поведения. Несмотря на значительный прогресс, достигнутый в этой области, вопрос о создании строгой теории фазовых переходов и критических явлений является одним из центральных в физике твердого тела.

Началом исследований в области фазовых переходов считается экспериментальное изучение Т. Эндрюсом (1869 год) критической точки жидкость-пар. Другими известными, после фазовых переходов жидкость-пар-твердое тело, являются магнитные фазовые переходы, связанные с изменением магнитного состояния тел.

2.2.1 Классификация фазовых переходов

Пауль Эренфест классифицировал фазовые переходы на основе поведения свободной энергии, как функции других термодинамических переменных. Согласно этой схеме, фазовые переходы были помечены самой низкой производной свободной

энергии, которая имеет разрыв в точке фазового перехода. Фазовые переходы первого рода демонстрируют разрыв производной свободной энергии первого порядка по отношению к некоторой термодинамической переменной. Различные переходы жидкость-пар-твёрдое тело, классифицируются как переходы первого рода, поскольку они связаны со скачкообразным изменением плотности, которая является первой производной от свободной энергии.

Наиболее распространённые примеры фазовых переходов первого рода:

1. плавление и кристаллизация;
2. испарение и конденсация;
3. сублимация и десублимация;
4. плазма и нагретый газ.

Фазовые переходы второго рода являются непрерывными в первой производной (параметр порядка, который является первой производной от свободной энергии по отношению к внешнему полю, непрерывен в точке перехода), но демонстрируют разрыв во второй производной свободной энергии. К ним относится, например, фазовый переход в ферромагнитное состояние, например для железа, где намагниченность, которая является первой производной от свободной энергии по отношению к приложенному магнитному полю, непрерывно увеличивается при понижении температуры ниже температуры Кюри.

Наиболее распространённые примеры фазовых переходов второго рода:

1. переход парамагнетик-ферромагнетик или парамагнетик-антиферромагнетик (параметр порядка — намагниченность);
2. переход металлов и сплавов в состояние сверхпроводимости (параметр порядка — плотность сверхпроводящего конденсата);
3. переход жидкого гелия в сверхтекучее состояние (параметр порядка — плотность сверхтекучей компоненты).

Магнитная восприимчивость, вторая производная от свободной энергии по отношению к приложенному магнитному полю, изменяется скачком.

По классификации Эренфеста, фазовые переходы высшего порядка не существуют.

К сожалению, классификация Эренфеста, является недостаточно точным методом классификации фазовых переходов, так как она не учитывает случай, когда производная свободной энергии расходится (что возможно только в термодинамическом пределе). Например, при фазовом переходе в ферромагнитное состояние теплоемкость стремится к бесконечности.

В современной схеме классификации, фазовые переходы делятся на две большие категории, названных по аналогии с классификацией Эренфеста:

1. Фазовые переходы первого рода, которые связаны со скрытой теплотой. Во время такого перехода система либо поглощает, либо освобождает фиксированное (и, как правило, большее) количество энергии. Имри и Вортис показали, что замороженный беспорядок может расширить область температур, где наблюдается переход первого рода, то есть преобразование состояния системы завершается на конечном интервале температур, но такие явления, как переохлаждение и перегрев сохраняются, кроме того, наблюдается гистерезис в термических циклах.

2. Фазовые переходы второго рода также называются непрерывными фазовыми переходами. Они характеризуются дивергенцией восприимчивости, бесконечной длиной корреляции и степенным убыванием корреляции вблизи критической точки. Ландау создал феноменологическую теорию фазовых переходов второго рода.

3. Переход жидкого гелия в сверхтекучее состояние (параметр порядка – плотность сверхтекучей компоненты).

Несколько переходов известны как фазовые переходы бесконечного порядка. Они непрерывны, но не нарушают никаких симметрии. Самый известный пример – это переход Березинского-Костерлица-Таулеса в двумерной ХУ модели. Многие квантовые фазовые переходы, например, в двумерном электронном газе, относятся к этому классу.

Для каждого фазового перехода существует понятие параметра порядка, чье ненулевое среднее значение в упорядоченной фазе и нарушает симметрию. Так, у ферромагнетика параметром порядка является средняя намагниченность M . Граничную температуру, при которой спонтанно нарушается симметрия и в которой параметр порядка обращается в нуль, называют критической температурой T_c (или температурой Кюри как у ферромагнетиков, рис. 2.14).

Различие типа фазовых переходов отражается на характере обращения в нуль параметра порядка в точке фазового перехода. Если параметр порядка плавно обращается в нуль при $T = T_c$ (но с бесконечной производной из-за флуктуаций), то это фазовый переход второго рода. Если же зависимость параметра порядка вблизи области фазового перехода неоднозначна, то в системе обязательно наблюдается расслоение на фазы, и это переход первого рода (рис. 2).

Появление общих закономерностей у достаточно разнородных объектов указывает на общность статистических свойств. Это хорошо иллюстрируется с точки зрения термодинамики сравнением внутренней энергии E и энтропии S .

Известно, что S – степень беспорядка. Чем хаотичнее состояние системы, тем больше S . С другой стороны, энергия E стремится к минимуму при производной $\left. \frac{dM}{dT} \right|_{T_c}$ упорядочивании

Рис. 2.14. Фазовый переход ферромагнетик - парамагнетик

Рис. 2.15. Фазовые переходы: I - первого рода с неоднозначной зависимостью параметра порядка M от T ; II - второго рода с бесконечной производной $\left. \frac{dM}{dT} \right|_{T_c}$

системы. Устойчивость системы определяется минимумом свободной энергии $F = E - TS$. При высоких температурах

основной член: $-TS < 0$, поэтому для минимума F необходима большая энтропия S , т. е. беспорядок. Но при $T \rightarrow 0$ свободная энергия F стремится к E (и к минимальному значению), а энтропия S к нулю, т. е. система упорядочивается. Следовательно, существует температура, при которой эти два фактора – энергии упорядочения и разупорядочения – сравниваются. Это и есть температура перехода.

2.2.2 Статистическая сумма

Джон Виллард Гиббс предложил способ вычисления термодинамических функций, таких, как $M(h, T)$, исходя из микроскопических сил, действующих между компонентами системы. По Гиббсу, если система обладает набором состояний s и гамильтонианом $E(s)$, то статистическая сумма:

$$Z = \sum_s \exp \left[-\frac{E(s)}{kT} \right], \quad (2.39)$$

где k - постоянная Больцмана и суммирование выполняется по всем допустимым состояниям s системы. Тогда выражение для свободной энергии F имеет вид:

$$F = -k T \ln Z, \quad (2.40)$$

а вероятность найти систему в состоянии s равна:

$$Z^{-1} \exp \left[-\frac{E(s)}{kT} \right]. \quad (2.41)$$

так что, если X - некоторая характеристика состояния системы, такая, как полная энергия или намагниченность, то ее среднее термодинамическое значение равно:

$$\langle X \rangle = Z^{-1} \sum_s X(s) \exp \left[-\frac{E(s)}{kT} \right]. \quad (2.42)$$

В частности, выражение для внутренней энергии:

$$U = \langle E \rangle = Z^{-1} \sum_s E(s) \exp \left[-\frac{E(s)}{kT} \right] \quad (2.43)$$

и, используя приведенные выше определения (2.39) и (2.40), можно убедиться, что

$$U = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right) \quad (2.44)$$

в согласии с обычной термодинамикой.

Таким образом, вычисление суммы по состояниям (2.39) дает Z и F как функции и любых других переменных, входящих в $E(s)$, например, магнитного поля. Термодинамические характеристики можно получить затем посредством дифференцирования.

К сожалению, для любых реалистических систем макроскопического размера со взаимодействием вычисление Z представляет собой трудную задачу. Возможны два пути решения:

1. Заменить реальную систему некоторой простой идеализированной системой, которая называется моделью. Математически это выражается в указании состояний s и определении вида энергетической функции Гамильтона $E(s)$.

2. Использовать некоторое приближение, позволяющее вычислить сумму по состояниям (2.39).

2.3 Выводы

1. Магнитный момент атома рассматривается как суммарный магнитный момент, связанный с орбитальным движением электронов вокруг ядра, собственным магнитным моментом электронов и с магнитным моментом ядра:

$$\vec{p}_m = \sum_{i=1}^Z (\vec{p}_{oi} + \vec{p}_{si}) + \vec{p}_n,$$

где Z – число электронов в атоме; $\vec{p}_m$ – суммарный магнитный момент атома; $\vec{p}_{oi}$ – орбитальный магнитный момент i -го электрона, обусловленный движением электрона вокруг ядра; $\vec{p}_{si}$ – собственный магнитный момент i -го электрона; $\vec{p}_n$ – суммарный магнитный момент ядра, обусловленный магнитными моментами входящих в состав ядра протонов и нейтронов.

Гиромагнитное отношение γ – отношение орбитального магнитного момента электрона $\vec{p}_o$ к его орбитальному моменту импульса $\vec{L}_o$:

$$\gamma = \frac{\vec{p}_o}{\vec{L}_o}.$$

Гиромагнитное отношение для орбитального движения электрона:

$$\gamma = \frac{e}{2m}.$$

В атоме (молекуле) векторная сумма орбитальных и собственных магнитных моментов электронов равна полному магнитному моменту атома (молекулы). Вследствие этого атомы (молекулы) можно рассматривать как микроскопические круговые контура с током, получившие в физике название молекулярных токов Ампера.

Для парамагнетиков и ферромагнетиков суммарный магнитный момент атомов (молекул) отличен от нуля. Для диамагнетиков при отсутствии магнитного поля он равен нулю.

2. Вектор намагничивания (намагниченность) $\vec{J}$ - это физическая величина, равная магнитному моменту единицы объема: магнетика:

$$\vec{J} = \frac{1}{V} \sum_{j=1}^N p_{mj}^{\rightarrow},$$

где $\sum_{j=1}^N p_{mj}^{\rightarrow}$ - векторная сумма магнитных моментов атомов в физически малом объеме V с числом атомов N .

Парамагнетики усиливают магнитное поле, т. е. магнитное поле в парамагнетике больше внешнего поля.

3. У диамагнетиков, помещенных в магнитное поле, появляется индуцированное намагничивание, ослабляющее внешнее магнитное поле.

4. Вектор напряженности магнитного поля:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}.$$

Циркуляция напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром:

$$\oint_l H_l dl = I.$$

Намагниченность $\vec{J}$ для пара- и диамагнетиков пропорциональна напряженности магнитного поля:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}.$$

Коэффициент пропорциональности χ называется магнитной восприимчивостью.

Связь между напряженностью и магнитной индукцией:

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H},$$

где $\mu = 1 + \chi$ называется магнитной проницаемостью вещества. Магнитная восприимчивость χ и магнитная проницаемость μ – величины, характеризующие магнитные свойства диамагнетиков и парамагнетиков.

У диамагнетиков магнитные моменты атомов (молекул) и вектор намагниченности $\vec{J}$ направлены противоположно вектору магнитной индукции и напряженности магнитного поля. Для диамагнетиков $\chi = -(10^{-6} \dots 10^{-5}) < 0, \mu < 1$.

У парамагнетиков магнитные моменты атомов (молекул), вектор намагниченности $\vec{J}$, вектор магнитной индукции и напряженность магнитного поля направлены в одну сторону. Для парамагнетиков при комнатных температурах $\chi = (10^{-5} \dots 10^{-3}) > 0, \mu > 1$. С ростом температуры магнитная восприимчивость уменьшается ($\chi \sim \frac{1}{T}$ – закон Кюри).

5. Для парамагнетиков и диамагнетиков зависимость намагниченности J от напряженности магнитного поля H носит линейный характер. Для ферромагнетика увеличение напряженности магнитного поля от нуля сопровождается нелинейным ростом величины намагниченности до некоторого предельного значения, по достижении которого намагниченность не меняется. Предельное намагничивание характеризуется величиной $J_{saturation}$ и называется насыщением намагничивания. Кривая намагничивания ферромагнетика, первоначальный магнитный момент которого равен нулю называется основной или нулевой кривой намагничивания. Если после достижения насыщения уменьшать напряженность магнитного поля, то уменьшение намагниченности следует не по первоначальной кривой, а выше нее. Когда напряженность внешнего поля станет равной нулю, намагниченность оказывается отличной от нуля. Соответствующая величина $J_{residual}$ называется остаточной намагниченностью.

Намагниченность становится равной нулю только под действием поля H_c , имеющего направление, противоположное полю, вызвавшему первоначальное намагничивание. Напряженность H_c называется коэрцитивной силой (coercive force).

Дальнейшее изменение напряженности магнитного поля приводит к зависимости $J(H)$, которая носит название петли гистерезиса, или просто гистерезиса.

Ферромагнетики с большой остаточной намагниченностью, большой остаточной индукцией ($B_{residual} \sim 1$ Тл) и большой коэрцитивной силой ($H_c \sim 10^4 - 10^5 \frac{A}{m}$) называются жесткими ферромагнетиками. Для них характерна широкая петля гистерезиса, и они применяются для создания постоянных магнитов.

Ферромагнетики с малой коэрцитивной силой ($H_c \sim 1 - 10 \frac{A}{m}$), т. е. с узкой петлей гистерезиса, называются мягкими. Они имеют малые потери на нагревание и применяются в электротехнике, например, для изготовления сердечников трансформаторов.

При нагреве ферромагнетик теряет свои характерные свойства и становится парамагнетиком. Температура, при которой это происходит, называется точкой Кюри T_K .

Теория ферромагнетизма была создана Френкелем и Гейзенбергом в 1928 г. В основе теории лежит представление о том, что за магнитные свойства ферромагнетиков ответственны собственные (спиновые) магнитные моменты электронов. При определенных условиях в кристаллах могут возникать силы (в квантовой механике эти силы называются обменными), которые приводят к выстраиванию магнитных моментов электронов параллельно друг другу. В результате возникают области спонтанного (самопроизвольного) намагничивания — домены. Линейные размеры доменов составляют 1–100 мкм.

У некоторых материалов намагниченности подрешеток неодинаковы (например, из-за разной структуры соседних

атомов). Вследствие этого появляется результирующая намагниченность. Такие материалы называются ферримагнетиками. Как и у ферромагнетиков, у антиферромагнетиков и ферримагнетиков при нагреве выше определенной температуры (у антиферромагнетиков она называется температурой Нееля) нарушается упорядоченность структуры расположения магнитных моментов атомов, и они превращаются в парамагнетики.

6. Пауль Эренфест классифицировал фазовые переходы на основе поведения свободной энергии, как функции других термодинамических переменных. Фазовые переходы первого рода демонстрируют разрыв производной свободной энергии первого порядка по отношению к некоторой термодинамической переменной. Фазовые переходы второго рода являются непрерывными в первой производной (параметр порядка, который является первой производной от свободной энергии по отношению к внешнему полю, непрерывен в точке перехода), но демонстрируют разрыв во второй производной свободной энергии.

Для каждого фазового перехода существует понятие параметра порядка, чье ненулевое среднее значение в упорядоченной фазе и нарушает симметрию. Так, у ферромагнетика параметром порядка является средняя намагниченность M . Граничную температуру, при которой спонтанно нарушается симметрия и в которой параметр порядка обращается в нуль, называют критической температурой T_c .

Различие типа фазовых переходов отражается на характере обращения в нуль параметра порядка в точке фазового перехода. Если параметр порядка плавно обращается в нуль при $T = T_c$ (но с бесконечной производной из-за флуктуаций), то это фазовый переход второго рода. Если же зависимость параметра порядка вблизи области фазового перехода неоднозначна, то в системе

обязательно наблюдается расслоение на фазы, и это переход первого рода

7. Если система обладает набором состояний s и гамильтонианом $E(s)$, то статистическая сумма:

$$Z = \sum_s \exp \left[- \frac{E(s)}{kT} \right],$$

где k - постоянная Больцмана и суммирование выполняется по всем допустимым состояниям s системы.

Глава 3 Модельные представления и численные методы для изучения магнитных явлений

3.1 Модельные представления

Огромное количество экспериментальных данных в области фазовых переходов послужило хорошей почвой для появления различных моделей, описывающих фазовые превращения в магнитных веществах. Однако детальное сравнение теории с экспериментом обнаруживает не очень хорошее количественное согласие. В теории молекулярного поля вблизи точки Кюри намагниченность следует закону $(T_c - T)^n$, $n = \frac{1}{2}$, в то время как эксперимент показывает $n = \frac{1}{3}$. Магнитная теплоемкость обращается в 0 выше точки Кюри, однако на практике существует высокотемпературный «шлейф». Также существует метод Огучи, который описывает явления, связанные с наличием ближнего порядка выше точки Кюри, а именно: отличную от 0 теплоемкость и более низкую температуру перехода. Метод Кастелейна-Ван Кранендонка предсказывает существование ближнего порядка при $T > T_c$, нелинейное соотношение между обратной восприимчивостью и температурой, скачок теплоемкости в точке Кюри и еще более низкую температуру перехода. Для спонтанной намагниченности вблизи точки перехода метод Кастелейна-Ван Кранендонка дает зависимость $(T_c - T)^{\frac{1}{3}}$.

В 1925 году Эрнст Изинг предложил свою модель и решил задачу для одномерной цепочки магнитных моментов (число

ближайших соседей $z = 2$). Модель Изинга может служить упрощенной моделью магнитной системы.

В 1944г. Л.Онзагер нашел точное решение для двумерной модели Изинга. В принципе, среднее для любого конечного n может быть найдено перебором всех спиновых конфигураций, но для макроскопических систем это невозможно для любой ЭВМ, возможно квантовый компьютер сможет решить такой класс задач, но этот вопрос остается открытым.

3.1.1 Модель Изинга

Модель Изинга является одной из самых простых математических моделей ферромагнетизма в статистической механике, допускающих точной решение. Математическая модель рассматривает совокупность дискретных переменных (значения магнитных моментов атомных спинов), которые могут принимать одно из двух значений, соответствующих одному из двух состояний. Для наглядности спины обычно располагаются в виде графа. Модель позволяет дать наглядную интерпретацию фазового перехода II рода. Двумерная квадратная решетка спинов Изинга является одной из самых простых статистических моделей, позволяющей строгое описание фазового перехода.

Рассмотрим множество смежных узлов, которые формируют d -размерную решетку. Для каждого узла j соответствуют дискретная переменная S_j принимающая значения $+1$ или -1 .

Полная энергия системы учитывает парные взаимодействия спинов i, j , интенсивность взаимодействия определяется константой J_{ij} , если к i спину приложено внешнее магнитное

поле h_i , то энергия одного из 2^N возможных состояний системы задается Гамильтонианом вида:

$$\mathcal{H} = -\mu_B^2 \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} S_i S_j - \mu_B h \sum_i S_i. \quad (3.1)$$

Под конфигурацией понимается магнитное состояние системы спинов, характеризующиеся уникальным распределением значений S_i . Вероятность реализации конфигурации определяется распределением Гиббса с учетом обратной температуры $\beta \geq 0$:

$$p_\beta = \frac{e^{-\beta \mathcal{H}}}{Z_\beta}, \quad (3.2)$$

где $\beta = (k_B T)^{-1}$. Константа нормировки есть:

$$Z_\beta = \sum_S e^{-\beta \mathcal{H}}, \quad (3.3)$$

— статистическая сумма системы, суммирование ведется по всем состояниям.

Если для всех пар i, j :

1. $J_{ij} > 0$ то взаимодействие называется «ферромагнитным»;
2. $J_{ij} < 0$ то взаимодействие называется «антиферромагнитным»;
3. $J_{ij} = 0$ то спины не взаимодействующие.

Модель Изинга можно модифицировать, если ввести дополнительную величину — поле переключения h_s , которое может быть использовано для учета анизотропии и некоторое время поддерживать знак спинового избытка в заданном направлении в присутствии внешнего магнитного поля:

$$\mathcal{H} = -\mu_B^2 \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} S_i S_j - \mu_B h \sum_i S_i \quad (3.4)$$

Даже несмотря на то, что модель Изинга — одна из простейших, она позволяет описать, в том числе количественно,

появление порядка при низких температурах, беспорядка при высоких, и самое важное, особенности фазового перехода, когда спиновые корреляции становятся существенными.

Задача о фазовом переходе в модели Изинга может быть решена точно только в простейших случаях (1D и 2D в отсутствии внешнего поля). Для задач, рассматриваемых в трехмерном пространстве и представляющих практический интерес, приходится прибегать либо к аналитическим приближениям, например, к разложению в ряд, или применять численные методы, такие, как методы Монте-Карло, см. пункт 3.3

3.1.2 Модель Кюри-Вейса

Модель Кюри-Вейса представляет собой приближенную модель ферромагнетика, с помощью которой можно детально изучить термодинамические свойства систем многих частиц. Особый интерес представляют магнитные явления, наблюдающиеся в таких системах в окрестности критической температуры фазового перехода. Данный подход обычно называют «методом среднего поля» М. Кац разработал модель, в которой каждый магнитный момент взаимодействует с любым другим магнитным моментом, и назвал её моделью Кюри – Вейса. Гоулд и Тобочник назвали эту модель полно-связной моделью Изинга.

Назовем множество целых чисел от 1 до N решеткой, и его элемент i узлом. Присвоим каждому узлу переменную S_i , которая является спином Изинга. Спины Изинга характеризуются двумя возможными значениями: $+1$ — магнитный момент направлен «вверх», -1 — магнитный момент направлен «вниз». Гамильтониан системы имеет вид:

$$\mathcal{H} = -\frac{J\mu_B^2}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} S_i S_j - \mu_B B \sum_{i=1}^N S_i. \quad (3.5)$$

Магнитный момент частицы (суперспин) пропорционален спину $\mu_i = \mu_B S_i$, где μ_B магнетон Бора. Приложенное магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции B . Гамильтониан 3.5 не зависит от размерности пространства.

3.1.3 XY модель

В классической XY модели, переменными являются двумерные единичные векторы $\vec{S}_i$ в каждом узле решетки. Эта модель представляет собой предельный случай спиновой модели Гейзенберга. Векторы соответствуют направлениям спинов (первоначально квантово-механическим) в материале, в котором Z — компонента спинов пары меньше, чем X и Y компоненты. (Противоположный случай приводит к модели Изинга).

XY модель особенно важна в двумерном случае, где она показывает фазовый переход, называемый переходом Березинского-Костерлица-Таулеса (БКТ), наличие которого экспериментально подтверждается в жидких кристаллах (ЖК дисплеи), в тонких пленках жидкого гелия, пленках сверхпроводников, вероятно, в том числе в слоистых высокотемпературных сверхпроводниках. Кроме того, модель может быть сопоставлена с моделями, описывающих, например, рост кристаллов и грубые переходы.

XY модель состоит из плоских роторов единичной длины, расположенных на двумерной квадратной решетке. Гамильтониан системы имеет вид:

$$\mathcal{H} = -J\mu^2 \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j = -J\mu^2 \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j), \quad (3.6)$$

где $\langle i,j \rangle$ обозначает суммирование по ближайшим соседям.

3.1.4 Модель Гейзенберга

Модель Гейзенберга – это наиболее общая из математических моделей статистической физики применяемая для исследования фазовых переходов и критических точек. Гамильтониан для $2D$ квадратной решетки выглядит следующим образом:

$$H = -J \sum_r \vec{S}_r \cdot (\vec{S}_{r+\hat{x}} + \vec{S}_{r+\hat{y}}) - H_Z \sum_r \vec{S}_r + H_A \sum_r \vec{S}_r^2, \quad (3.7)$$

где $\vec{S}_r$ - атомный спин, J - константа ферромагнитного короткодействующего обмена.

Спин $\vec{S} = \{S^x; S^y; S^z\}$ является трехкомпонентным вектором единичной длины и имеет три степени свободы:

$$S^x = \sin(\varphi) \cos(\vartheta), \quad (3.8)$$

$$S^y = \sin(\varphi) \sin(\vartheta), \quad (3.9)$$

$$S^z = \cos(\varphi), \quad (3.10)$$

где $\varphi = [0; \pi]$, $\vartheta = [0; 2\pi]$.

3.2 Численные методы расчета

Компьютерное моделирование критических явлений позволяет получать наглядную информацию о росте флуктуаций и критическом замедлении процессов релаксации в системах по мере приближения к температуре фазового перехода, о проявлении аномальных свойств в поведении теплоемкости и восприимчивости системы к изменению внешнего поля. Именно в исследованиях фазовых переходов и критических явлений компьютерный эксперимент становится альтернативой физическому эксперименту, и часто, например, при описании свойств сильно неупорядоченных систем, единственно возможным способом получения достоверной информации.

Для реализации научно-исследовательских задач, связанных с определением термодинамических и статистических характеристик критического поведения различных систем методами компьютерного моделирования необходимы значительные вычислительные мощности, которые могут обеспечить суперкомпьютерные системы. Однако, высокопроизводительные вычисления на суперкомпьютерах всегда ассоциировались с их колоссальной стоимостью. Прогресс в электронике внес серьезные коррективы в решение этой проблемы. В середине 90-х гг. прошлого века на рынке появились относительно недорогие и эффективные микропроцессоры и коммуникационные решения. Появилась реальная возможность создавать установки суперкомпьютерного класса из составных частей массового производства. Приемлемая стоимость кластерных суперкомпьютеров привела к широкому распространению подобных решений как за рубежом, так и в России. Число подобных систем растет очень быстро, так как с

помощью высокопроизводительных вычислительных систем найден эффективный способ решения большого класса научно-технических задач. Возможность наращивания числа узлов и производительности вычислительных систем кластерного типа является их наиболее привлекательным свойством. В последнее время все чаще используют гибридные GPU-CPU суперкомпьютерные системы для решения широко класса задач.

В связи с появлением возможности использования высокопроизводительных многопроцессорных систем на первый план выходит задача переноса существующего программного обеспечения с однопроцессорных систем на многопроцессорные при использовании методов параллельного программирования, адаптации существующих алгоритмов и программ для кластерных вычислительных систем, а также разработка принципиально нового программного обеспечения, учитывающего особенности функционирования кластерных систем. Важно при этом отметить, что, несмотря на затраты, использование подобных параллельных систем дает уникальную возможность получения принципиально новых научных результатов.

3.2.1 Учет граничных условий

При решении задач статистической физики характеристики системы вычисляют в термодинамическом пределе, когда число частиц стремится к бесконечности. Компьютерное моделирование позволяет исследовать системы относительно малого, т.е. конечного числа частиц. При этом начинают проявляться эффекты конечного размера системы. Для их уменьшения осуществляется аппроксимация граничных условий.

Существует несколько возможных вариантов:

1. периодические граничные условия;
2. свободная граница;
3. аperiodические граничные условия;
4. нестандартные граничные условия.

Периодические граничные условия устраняют влияние эффектов конечного размера и наилучшим образом соответствуют моделированию поведения объемных систем. Они восстанавливают трансляционную инвариантность конечных систем путем наложения условий на любую наблюдаемую величину A :

$$A(X_i) = A(X_i + L_i), \quad (3.11)$$

где $X_i = \{x, y, z\}$, $L_i = \{L_1, L_2, L_3\}$ – линейные размеры системы.

3.3 Методы Монте-Карло

Методы Монте-Карло являются широким классом вычислительных алгоритмов, которые полагаются на повторном случайной выборки для получения численных результатов. Как правило, один эксперимент повторяется много раз, чтобы получить распределение вероятности неизвестной величины. Название происходит от сходства техники и игрового процесса в рулетку в реальном казино. Данные методы часто используются для решения физических и математических задач и являются наиболее полезными, когда трудно или невозможно получить точное решение. Методы Монте-Карло в основном используются в трех различных классах задач: оптимизации, численного интегрирования и генерации распределения вероятностей.

Для решения физических проблем, методы Монте-Карло являются весьма полезными для моделирования

систем со многими степенями свободы, например, жидкостей, неупорядоченных материалов, сильно связанных твердых тел и решетчатых структур.

3.3.1 Алгоритм Метрополиса

Монте-Карло моделирование с помощью алгоритма Метрополиса зарекомендовало себя как мощный инструмент для систематического изучения магнитных свойств наночастиц и их ансамблей. Два основных преимущества этой методики:

1. изучение наночастиц возможно вплоть до атомных масштабов, поэтому детали их структуры могут быть изучены;
2. корректный учет температуры при проведении численных экспериментов.

Алгоритм Метрополиса состоит в следующем: вычисляется энергия «старой» конфигурации E_1 и «новой» E_2 . Энергию «новой» конфигурации сравниваем с энергией «старой» конфигурации. «Новая» конфигурация принимается и становится исходной для следующего шага, если $E_1 > E_2$, в противном случае рассчитывается вероятность переворота данного спина $p(E_1 \rightarrow E_2)$:

$$p(E_1 \rightarrow E_2) = \begin{cases} 1 & \text{если } E_1 > E_2; \\ e^{\frac{(E_2 - E_1)}{T}} & \text{если } E_2 \leq E_1. \end{cases} \quad (3.12)$$

Несмотря на присущие методу Монте-Карло моделирования ограничения, результаты, полученные с помощью этого метода, качественно воспроизводят результаты экспериментальных данных, а в отношении критических индексов находятся в полном согласии с ними. Хорошее качественное совпадение результатов

моделирования и экспериментальных данных позволяет нам иметь более полное представление о наноразмерных явлениях, хотя некоторые из них вытекают из неравновесных процессов.

Кроме того, нужно отметить хорошее совпадение термодинамических характеристик фазового перехода для плоской решетки спинов Изинга в решении Онсагера и результатов, полученных с помощью алгоритма Метрополиса.

3.3.2 Алгоритм Ванга-Ландау

В отличие от обычных методов Монте-Карло, которые непосредственно генерируют каноническое распределение при заданной температуре $g(E)e^{-E/k_B T}$, алгоритм Ванга-Ландау заключается в оценке плотности состояний $g(E)$ точно посредством метода случайных блужданий, результатом чего является равномерное распределение $g(E)$ в виде гистограммы в энергетическом пространстве. Метод может быть расширен путем проведения многократных случайных блужданий, каждый в своем диапазоне энергии, в последовательном или в параллельном режиме. Полученные части пространства плотности состояний могут быть соединены вместе и использованы для получения канонических средних значений для расчета термодинамических величин при любой температуре.

Данный алгоритм основан на наблюдении, что если выполняется случайное блуждание в пространстве энергии с вероятностью, пропорциональной обратной плотности состояний $1/g(E)$, затем «плоская» гистограмма создается для распределения энергии. Это достигается путем изменения оценки плотности состояний на систематической основе, для получения «плоской» гистограммы для допустимого диапазона энергий и

одновременно осуществляется сходимость плотности состояний к истинному значению. В самом начале случайного блуждания плотность состояний априори неизвестна, поэтому необходимо установить все плотности состояний $g(E)$ для всех энергий E в $g(E) = 1$. Затем начинаем случайное блуждание в пространстве энергии, переворачивая случайно спины. В общем случае, если E_1 и E_2 являются энергиями до и после переворота спина, тогда вероятность перехода с уровня энергии E_1 на E_2 вычисляется по следующей формуле:

$$p(E_1 \rightarrow E_2) = \min\left(\frac{g(E_1)}{g(E_2)}, 1\right), \quad (3.13)$$

которая определяет значение вероятности переворота спина. Каждый раз, когда получается тот или иной уровень энергии E , обновляется соответствующая плотность состояний путем умножения текущего значения на коэффициент изменения $f > 1$, т.е. $g(E) \rightarrow g(E) * f$. Исходный коэффициент изменения может быть задан как $f = f_0 = e^1 = 2,71828$, что позволяет охватить все возможные энергетические уровни очень быстро, даже для больших систем.

Случайные блуждания в энергетическом пространстве и изменение плотности состояний осуществляются до тех пор, пока распределение $H(E)$ не станет равномерным. На этот момент плотность состояний сходится к истинному значению с точностью, пропорционально $\ln(f)$. Затем необходимо уменьшить коэффициент изменения к более точному значению, по некоторому правилу: $f_1 = \sqrt{f_0}$ (любая функция, которая монотонно уменьшается до 1) и сбросить гистограмму $H(E) = 0$. Тогда мы начинаем следующий цикл случайных блужданий с новым, более точным, коэффициентом изменения $f = f_1$, продолжая до тех пор пока распределение вновь не станет равномерным, после чего останавливаемся и уменьшаем

коэффициент изменения, как и раньше, т.е. $f_{i+1} = \sqrt{f_i}$. Алгоритм Ванга-Ландау прекращает работу, когда коэффициент изменения меньше, чем некоторое определенное конечное значение (например, $f_{final} = e^{10^{-8}}$).

Понятно, что коэффициент изменения f случайных блужданий действует в качестве параметра управления для задания вычислительной точности получения плотности состояний во время моделирования, а также определяет, сколько МК шагов необходимо для моделирования. Невозможно получить идеально равномерное распределение и фраза «идеально» равномерное распределение означает, что распределение $H(E)$ для всех возможных E составляет не менее 80% от среднего распределения $\langle H(E) \rangle$. Поскольку плотность состояний изменяется каждый раз после получения очередного значения энергии, то получение относительной плотности состояний возможно только в конце моделирования.

3.3.3 Метод полного перебора

Метод полного перебора состоит из систематического перечисления всех возможных решений и проверки, удовлетворяет ли каждое решение условиям поставленной задачи.

Преимуществом метода полного перебора является то, что он прост в реализации и всегда находит решение, если оно существует, но время возрастает пропорционально количеству вариантов решения. Таким образом, метод полного перебора обычно используется, когда количество решений достаточно мало или когда простота реализации важнее, чем скорость, или же тогда, когда нет других способов решить поставленную задачу. Кроме

того, метод полного перебора часто используют для проверки решений, полученных приближенными методами численного моделирования.

Так как метод полного перебора всегда находит решение, он является удобным средством для верификации разрабатываемых моделей и алгоритмов на примере систем, содержащих малое количество частиц, или условия задачи позволяют значительно редуцировать число решений.

3.4 Выводы

В данной главе были рассмотрены основные модели статистической физики, такие как модель Изинга, ХУ-модель, модель Гейзенберга и их вариации.

Рассмотрены численные методы применяемые при решении различных задач в области компьютерного моделирования физических систем и процессов.

Глава 4 Практическая часть

4.1 Задачи по теории магнетизма

1. Бесконечно длинный провод с током $I = 100$ изогнут так, как это показано на рис. 4.1. Определить магнитную индукцию B в точке O . Радиус дуги $R = 10$.

Рис. 4.1. Рисунок к задаче 1

2. По тонкому кольцу радиусом $R = 20$ течет ток $I = 100$. Определить магнитную индукцию B на оси кольца в точке А (рис. 4.2). Угол $\alpha = \pi/3$.

Рис. 4.2. Рисунок к задаче 2

3. Бесконечно длинный провод с током $I = 50$ изогнут так, как это показано на рис. 4.3. Определить магнитную индукцию B в точке А, лежащей на биссектрисе прямого угла на расстоянии $d = 10c$ от его вершины.

4. Тонкий провод длиной $L = 20$ изогнут в виде полукольца и помещен в магнитное поле ($B = 10$) так, что площадь полукольца перпендикулярна линиям магнитной индукции. По проводу пропустили ток $I = 50$. Определить силу F , действующую на провод. Подводящие провода направлены вдоль линий магнитной индукции.

5. По круговому витку радиусом $R = 5$ течет ток $I = 20$. Виток расположен в однородном магнитном поле ($B = 40$) так, что нормаль к плоскости контура составляет угол $\Theta = \pi/6$ с вектором B . Определить изменение потенциальной энергии контура при его повороте на угол $\varphi = \pi/2$ в направлении увеличения угла Θ .

Рис. 4.3. Рисунок к задаче 3

6. Тонкое кольцо радиусом $R = 10$ несет равномерно распределенный заряд $Q = 80$. Кольцо вращается с угловой скоростью $\omega = 50/$ относительно оси, совпадающей с одним из диаметров кольца. Найти магнитный момент p_m , обусловленный вращением кольца.

7. По тонкому стержню длиной $L = 40$ равномерно распределен заряд $Q = 60$. Стержень вращается с частотой $\nu = 12^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через стержень на расстоянии $a = L/3$ от одного из его концов. Определить магнитный момент p_m , обусловленный вращением, стержня.

8. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов $U = 100$ и, влетев в однородное магнитное поле ($\epsilon = 0,1$), стала двигаться по винтовой линии с шагом $h = 6,5$ и радиусом $R = 1$. Определить отношение заряда частицы к ее массе.

9. Ион, попав в магнитное поле ($\epsilon = 0,01$), стал двигаться по окружности. Определить кинетическую энергию E (в эВ) иона,

если магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока равен $1,6 \cdot 10^{-14} \cdot 2$.

10. Однородные магнитное ($B = 2,5$) и электрическое ($E = 10$) поля скрещены под прямым углом. Электрон, скорость v которого равна $4 \cdot 10^6$ м/с, влетает в эти поля так, что силы, действующие на него со стороны магнитного и электрического полей, сонаправлены. Определить ускорение a электрона.

11. Квадратный контур со стороной $a = 10$, в котором течет ток $I = 6$, находится в магнитном поле ($B = 0,8$) под углом $\alpha = 50^\circ$ к линиям индукции. Какую работу A нужно совершить, чтобы при неизменной силе тока в контуре изменить его форму на окружность?

12. Определить магнитный поток Φ , пронизывающий соленоид, если его длина $l = 50$ и магнитный момент $p_m = 0,4 \cdot 2$.

13. Соленоид содержит $N = 800$ витков. Сечение сердечника из немагнитного материала $S = 10^2$. По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией $B = 8$. Определить среднее значение эдс самоиндукции, которая возникает на зажимах соленоида, если ток уменьшается практически до нуля за время $\Delta t = 0,8$.

14. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,5$ вращается с частотой $\nu = 10$ — 1 стержень длиной $L = 20$. Ось вращения параллельна линиям индукции и проходит через один из концов стержня перпендикулярно его оси. Определить разность потенциалов U на концах стержня.

15. Магнитный поток через сечение соленоида равен 50. Длина соленоида $L = 50$. Найти магнитный момент p_m соленоида, если его витки плотно прилегают друг к другу.

4.2 Применение высокопроизводительных вычислений при решении физических задач

4.2.1 Реализация модели Изинга с применением алгоритма Метрополиса

Модель Изинга (см. 3.1.1) является одной из самых простых математических моделей ферромагнетизма в статистической механике, допускающих точной решение. Математическая модель рассматривает совокупность дискретных переменных (значения магнитных моментов атомных спинов), которые могут принимать одно из двух значений, соответствующих одному из двух состояний. Для наглядности спины обычно располагаются в виде графа. Модель позволяет дать наглядную интерпретацию фазового перехода II рода. Двумерная квадратная решетка спинов Изинга является одной из самых простых статистических моделей, позволяющей строгое описание фазового перехода. Рассмотрим множество смежных узлов, которые формируют двумерную решетку. Для каждого узла j соответствует дискретная переменная S_j принимающая значения $+1$ или -1 . У каждого спина есть 4 соседа (справа, слева, сверху и снизу). Энергия их взаимодействия рассчитывается по формуле (4.2), показанной ниже.

Полная энергия системы учитывает парные взаимодействия спинов i, j , интенсивность взаимодействия определяется константой $J = 1$, то энергия одного из 2^N возможных состояний системы задается уравнением вида:

$$E = -J \frac{\sum_{i \neq j=1}^N S_i S_j}{N}, \quad (4.1)$$

где N – размер системы спинов.

Соответственно энергия взаимодействия одного случайно выбранного спина S_i с его 4 соседями равна:

$$E = -J \sum_{i=1}^4 S_i S_j, \quad (4.2)$$

Под конфигурацией понимается магнитное состояние системы спинов, характеризующиеся уникальным распределением значений S_i .

Если для всех пар i, j :

1. $J > 0$ то взаимодействие называется «ферромагнитным»;
2. $J < 0$ то взаимодействие называется «антиферромагнитным»;
3. $J = 0$ то спины не взаимодействующие.

Задание

1. Язык разработки желателен C/C++, но Вы можете использовать любой на Ваше усмотрение. Все расчеты необходимо реализовывать через Функции.

2. Реализовать функцию создания и заполнения двумерного массива, значениями $+1$ и -1 случайным образом. Размер массива 50×50 .

3. Реализовать функцию расчета намагниченности всей системы.

4. Реализовать определение соседей у случайно выбранных спинов. А также учет граничных условий.

5. Рассчитать теплоемкость системы.

6. Используя `gnuplot` построить графики функций $E(T)$, $M(T)$, $C(T)$.

4.2.2 Реализация ХУ-модели с применением алгоритма Метрополиса

На основе программы для расчета свойств 2D ферромагнетика в рамках модели Изинга, разработать программу для моделирования в рамках ХУ-модели (3.1.3). Рассчитать среднюю энергию системы на 1 спин, намагниченности системы на 1 спин и теплоемкость системы. Построить в Gnuplot графики $E(T)$, $M(T)$, $C(T)$.

Кроме того, необходимо визуализировать полученную конечную конфигурацию для каждого значения температуры, т.е. на последнем шаге МК моделирования для каждой , используя ParaView.

4.2.3 Реализация модели Гейзенберга с применением алгоритма Метрополиса

На основе программы для расчета свойств ферромагнетика в рамках модели Изинга и ХУ-модели, разработать программу для моделирования в рамках модели Гейзенберга, см. раздел 3.1.4. Рассчитать среднюю энергию системы на 1 спин, намагниченности системы на 1 спин и теплоемкость системы. Построить в Gnuplot графики $E(T)$, $M(T)$, $C(T)$.

Кроме того, необходимо визуализировать полученную конечную конфигурацию для каждого значения температуры, т.е. на последнем шаге МК моделирования для каждой , используя ParaView.

Обратите внимание, что в модели Гейзенберга спин задается в сферических координатах, двумя переменными: φ и ϑ .

Спин $\vec{S} = \{S^x; S^y; S^z\}$ является трехкомпонентным вектором единичной длины и имеет три степени свободы:

$$S^x = \sin(\varphi) \cos(\vartheta), \quad (4.3)$$

$$S^y = \sin(\varphi) \sin(\vartheta), \quad (4.4)$$

$$S^z = \cos(\varphi), \quad (4.5)$$

где $\varphi = [0; \pi]$, $\vartheta = [0; 2\pi]$.

Список литературы

1. *Landau D., Binder K.* A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics. — Cambridge university press, 2014.
2. *Боков В.* Физика магнетиков. — БХВ, Санкт-Петербург, 2020. — 256 с.
3. *Бэкстер Р., Вольский Е., Дайхин Л.* Точно решаемые модели в статистической механике: Пер. с англ. — Мир, 1985.
4. *Детлаф А., Яворский Б.* Курс физики: Учеб. пособие для вузов.—2-е изд., испр. и доп. — М.: Высш. шк., 1999.
5. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Электродинамика сплошных сред., 4-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
6. *Парселл Э.* Электричество и магнетизм. — М.: Наука, 1975.
7. *Прудников В., Вакилов А., Прудников П.* Фазовые переходы и методы их компьютерного моделирования. — ООО Издательская фирма "Физико-математическая литература", 2009.
8. *Савельев И.* Курс общей физики: в 5 книгах Кн. 2. Электричество и магнетизм. М.: АСТ, 2001.
9. *Смарт Д.* Эффективное поле в теории магнетизма: пер. с англ. — Мир, 1968.
10. Суперкомпьютерное моделирование и численные решения задач статфизики / В. Капитан [и др.]. — Владивосток : Изд-во ДВФУ, 2017. — 195 с.