От матроидов в задачах электротехники и механики — к решению прикладных экономических задач

А. Н. Исаченко¹, А. М. Ревякин²

¹ *Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь*

² *Национальный исследовательский университет «МИЭТ», Москва, Россия*

arevyakin@mail.ru

Сделана попытка приложить результаты использования матроидов в задачах электротехники и механики к экономико-математическому моделированию. Для задач электротехники, связанных с расчетом и синтезом электрических цепей, предложено использовать матроиды, а для выбора минимальных по размерности систем уравнений — матрицы фундаментальных циклов и разрезов соответствующих матроидов графов их цепей. Для решения задачи жесткости взвешенной планарной фермы, которая сведена к задаче линейного программирования с булевыми переменными, предложено использовать жадный алгоритм. Сформулированы свойства ориентированных матроидов, которые находят применение в решении прикладных экономических задач.

Ключевые слова: экономико-математическое моделирование; матроид; база матроида; цикл матроида; графический матроид; кографический матроид; ориентированный матроид; жадный алгоритм; остоное дерево; жесткость планарной фермы; электрическая цепь; задача линейного программирования с булевыми переменными.

From Matroids in Electrical Engineering and Mechanics Problems to Solutions for Economic Applications

A. N. Isachenko¹, A. M. Revyakin²

¹ *Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus*

² *National Research University of Electronic Technology, Moscow, Russia*

arevyakin@mail.ru

The authors did attempt to transfer the results of matroids use in electrical engineering and mechanics problems to mathematical modelling in economics. They have proposed to use matroids for electrical engineering problems related to electrical circuits calculation and synthesis, and the matrix of fundamental cycles and cut sets of the corresponding matroids of graphs of their circuits for selection of minimum dimension systems of equations. The authors also have proposed to use greedy algorithm to solve problem of rigidity of weighted planar framework, the problem reduced to the linear programming problem with boolean variables. In conclusion, the authors did formulate the properties of oriented matroids, finding a usage in economic applications' solution.

Keywords: mathematical modelling in economics; matroid; matroid base; matroid cycle; graphic matroid; cographic matroid; oriented matroid; greedy algorithm; spanning tree; planar framework rigidity; linear programming problem with boolean variables.

Матроидный подход к решению задач экономики, так же как и задач электротехники и механики, заключается в построении математической модели задачи — либо матроида, либо пересечения матроидов. Продолжим изучение математических моделей, рассмотренных нами в работах по использованию матроидов в моделировании экономических систем [1; 2; 3].¹

Обратим внимание на понятия матроида, цикла, базы и ранга.

Обозначим через 2^S множество всех подмножеств конечного множества S . Матроидом $M = (S, I)$ на множестве S называется подмножество I множества 2^S , если выполняются следующие свойства: а) $\emptyset \in I$; б) если A — подмножество B и $B \in I$, то $A \in I$; в) если $A, B \in I$ и $|A| > |B|$, то найдется $a \in A \setminus B$, такой, что $B \cup \{a\} \in I$.

Пусть $A, B, C \in 2^S$. Множества $A \in I$ матроида $M = (S, I)$ называют независимыми, минимальные по включению зависимые множества $B (B \in I)$ — базой, а целочисленную функцию $r(A)$, такую, что $r(A) = \max \{|X| : X \text{ — подмножество множества } A \text{ и } X \in I\}$, — рангом матроида $M = (S, I)$.

Приведем еще два эквивалентных определения матроидов с помощью семейств циклов и баз. Определения, в которых свойства становятся аксиомами, а аксиомы — свойствами, называются криптоморфными.

Пара $M = (S, B)$ — матроид с семейством баз $B (B \subseteq 2^S)$, если никакое подмножество базы не является базой и из $B_1, B_2 \in B$ и $x \in B_1$ следует, что найдется $y \in B_2$, такой, что $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in B$.

Пара $M = (S, C)$, где $C \subseteq 2^S$, — матроид, если никакое собственное подмножество множества из C не лежит в C и из условий $C_1, C_2 \in C, C_1 \neq C_2$ и $x \in C_1 \cap C_2$ следует, что найдется $C_3 \in C$, такое, что C_3 содержится в $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$. При этом элементы семейства C являются циклами матроида M .

Заметим, что множество $B^*(M) = \{S \setminus A : A \in B\}$ является семейством всех баз некоторого матроида M^* на множестве S , называемого

двойственным к M . Причем $M^{**} = M$ и для любого $A \in 2^S$ справедливо соотношение $r^*(A) = |A| + r(S \setminus A) - r(S)$, где r и r^* — ранговые функции матроидов M и M^* .

Пусть $G = G(V, E)$ — простой граф, где V — множество вершин, а E — множество ребер. Тогда семейство всех циклов C графа G удовлетворяет аксиомам матроида $M(G) = (E, C)$ на множестве E , где C — множество циклов матроида $M(G)$. Матроид $M(G)$ носит название циклического матроида графа G . Будем говорить, что M — графический матроид, если существует граф G , циклический матроид $M(G) = (E, C)$ которого изоморфен M .

Пусть R — семейство всех разрезов графа $G = G(V, E)$. Тогда $M^*(G) = (E, R)$ — матроид на множестве E с семейством циклов R . Матроид $M^*(G)$ называют матроидом разрезов графа $G = G(V, E)$. Скажем, что M — кографический матроид, если найдется такой граф G , что матроид его разрезов $M^*(G)$ изоморфен M .

Теория матроидов, возникнув как обобщение многих понятий математики, широко используется в приложениях. Ценность и значимость матроидного подхода обусловлена удачным сочетанием абстрактного аксиоматического подхода и прикладного характера его конструкций. Среди приложений теории матроидов выделим использование матроидов в экономических задачах [1; 2; 8], задачах, связанных с анализом электрических схем [5; 10; 11; 12; 13], и задачах поиска условий жесткости строительных конструкций [2; 5; 8; 9].

В статике условие равновесия, как правило, определяется системой дифференциальных или алгебраических уравнений. Построив для системы уравнений соответствующий матроид, можно сформулировать критерий ее разрешимости. Если математическая модель допускает представление в виде задачи на пересечении двух матроидов, то точное решение может дать алгоритм, основанный на построении специального графа с указанием в нем так называемых увеличивающих путей. Аналогичный подход можно применить в экономической статике

¹ Основные определения и обозначения, используемые в решении задачи, можно найти в: [4; 5; 6; 7].

для определения внутренних механизмов поддержания равновесного состояния, под действием которых достигается максимальная экономическая эффективность.

Определим условия жесткости строительных конструкций. Рассмотрим плоскую ферму, состоящую из жестких стержней и соединяющих их шарниров. Структура каждого горизонтального ряда решетки фермы — одинаковые прямоугольники. Чтобы ферма была геометрически неизменяемой (жесткой), необходимо добавить по одному диагональному стержню в некоторые прямоугольники решетки. Необходимое и достаточное условия для того, чтобы добавленные стержни придали ферме жесткость, даны в теореме Болкера — Крапо [9].

Теорема Болкера — Крапо. Пусть ферма имеет m строк и n столбцов. Определим двудольный граф $G(V, E)$, вершины которого соответствуют строкам (первая доля) и столбцам (вторая доля) $V = \{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n\}$, а ребра (v_i, w_j) соответствуют тем прямоугольникам решетки, в которых располагаются диагональные стержни. Ферма является жесткой в том и только в том случае, когда граф $G(V, E)$ является связным.

Любой связный подграф графа $G(V, E)$, соответствующий ферме с m строками и n столбцами, содержит не менее $m + n - 1$ ребер. Поэтому минимальный набор диагональных стержней, придающий жесткость такой ферме, содержит $m + n - 1$ стержней и соответствует остовному дереву графа G или базе его циклического матроида $M(G)$.

Пусть каждому прямоугольнику решетки присвоен некоторый вес $c_{ij} \geq 0$, обозначающий затраты на установку диагонального стержня. Тогда получим задачу определения минимального по суммарному весу множества стержней, придающих ферме жесткость, или — если подразумевать под весом эффективность диагонального стержня — задачу определения максимального по весу множества из $m + n - 1$ стержней, придающих ферме жесткость.

Введем булевы переменные x_{ij} , равные единице, если в прямоугольнике (i, j) устанавливается диагональный стержень,

и равные нулю — в противном случае. Теперь можем переформулировать эту задачу как задачу булевого линейного программирования:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min (\max), \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} &= m + n - 1, \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq 1, j = \overline{1, n}, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\geq 1, i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq 2|A| - 1, \forall A \subseteq \{1, \dots, m\}, \forall B \subseteq \{1, \dots, n\}, \\ \min \{m, n\} &\geq |A| = |B| \geq 2, \\ x_{ij} &= 0 \vee 1, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Указанные ограничения задачи гарантируют, что матрица переменных $X = \|x_{ij}\|_{m \times n}$ соответствует остовному дереву графа G . Число ограничений является экспоненциальным от $\min\{m, n\}$, что значительно усложняет построение всей системы ограничений.

Вместе с тем все остовные деревья любого графа G образуют семейство баз B матроида $M = (S, B)$ на множестве ребер E и удовлетворяют свойству: если $B_1, B_2 \in B$ и $x \in B_1$, то $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in B$ для некоторого $y \in B_2$.

Следовательно, решение задачи можно найти за время $O(mn \log(mn))$, с помощью жадного алгоритма на полном двудольном графе $G(V, E)$, ребрам $(v_i, w_j) \in E$ которого приписаны веса c_{ij} соответствующих прямоугольников решетки.

Пусть I_k — текущее множество алгоритма.

Шаг 1. Положим $I_0 = \emptyset$ и $k = 0$.

Шаг 2. Пронумеруем ребра

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_{n \times m}\}$$

двудольного графа $G(V, E)$ по возрастанию или по убыванию их весов, например, либо $c(e_1) \leq c(e_2) \leq \dots \leq c(e_{m \times n})$, либо $c(e_1) \geq c(e_2) \geq \dots \geq c(e_{m \times n})$.

Шаг 3. Положим

$$I_{k+1} = \begin{cases} I_k \cup e_{k+1}, & \text{если } I_k \cup e_{k+1} \text{ не образует цикл,} \\ I_k, & \text{если } I_k \cup e_{k+1} \text{ содержит цикл.} \end{cases}$$

Шаг 4. Если $k + 1 = m + n - 1$, то остановимся (задача решена). В противном случае возвратимся к шагу 3, присвоив $k = k + 1$.

Если диагональные стержни разрешается ставить только в определенных прямоугольниках решетки, то в алгоритме используется множество ребер, соответствующее этим прямоугольникам. В этом случае решения может и не существовать, по причине отсутствия множества стержней, придающих ферме жесткость.

В связи с возможностью варьировать затратами на установку стержневых конструкций представляет интерес решение задачи жесткости трехмерной $n \times m \times k$ фермы, состоящей из кубов, при двух условиях: 1) можно добавлять стержни только в грани кубов; 2) можно добавлять стержни как в грани кубов, так и в диагональные позиции.

При конструировании электрических цепей необходимо учитывать надежность их работы. Поскольку уровень надежности зависит в том числе и от затрат, необходимо достижение оптимальной, экономически обоснованной степени надежности. При этом методы расчета также должны быть оптимальными.

Для электрических цепей, состоящих из резисторов и источников напряжения и тока, выполняются законы Кирхгофа для тока (для всех узлов цепи сумма токов, втекающих в узел, равна сумме токов, вытекающих из этого узла) и напряжения (алгебраическая сумма напряжений в любом замкнутом контуре равна нулю), которые в матричном виде можно записать как $RI = 0$ и $CV = 0$, где R и C — соответственно матрицы разрезов и циклов некоторого ориентированного графа (орграфа), сопоставленного с электрической цепью, а I и V — соответственно вектор-столбцы тока и напряжения в элементах электрической цепи.

Пусть T — остова орграфа электрической цепи, $\Phi = (\Phi_1 | E)$ и $K = (E | K_2)$ — матрицы фундаментальных циклов и фундаментальных разрезов относительно остова T , где E — единичные матрицы, а вектор-столбцы

матриц, соответствующие хордам и ветвям остова T , отличаются подстрочными индексами. Тогда в силу законов Кирхгофа $(\Phi_1 | E)(I_1 | I_2)^T = 0$ и $(E | K_2)(V_1 | V_2)^T = 0$. Заметим, что $\Phi_1 = -K_2^T$. Отсюда $I_2 = -\Phi_1 I_1 = K_2^T I_1$. Аналогично $V_1 = K_2^T I_2$.

Таким образом, все величины тока в элементах электрической цепи выражаются линейной комбинацией величин тока на хордах, а все величины напряжения — линейной комбинацией величин напряжения на ветвях электрической цепи².

Для электрических цепей, состоящих из источников тока и напряжения, а также из линейных / нелинейных положительных сопротивлений (см.: [10]), выполняются свойства неусиления: а) величина напряжения на любом из сопротивлений не должна превышать сумму величин напряжений на всех источниках тока; б) величина тока в любом сопротивлении не должна превышать суммарную величину токов, на которую рассчитаны все источники напряжения цепи³.

При решении задач теоретической электротехники целесообразно на множестве электрических цепей вводить бинарные отношения частичного порядка и изучать свойства получаемых решеток (структур) [11; 12; 13], которые при этом часто оказываются геометрическими (матроидными). Такой подход позволяет описывать минимальные и максимальные элементы решеток (структур) математических моделей электрических цепей и минимальные по размерности системы уравнений. Используя свойства матроидных решеток, удобно описывать электрические цепи как подмножества неприводимых в решетке элементов [11; 12; 13]. Отметим, что приведенный подход позволяет сократить время расчета электрических цепей за счет сокращения размерности систем уравнений.

В заключение сформулируем ряд полезных свойств так называемых ориентированных матроидов, имеющих первостепенное

² Как для расчетов выбрать остова T в электрической цепи, детально описано в: [5].

³ Перечисленные результаты хорошо формулируются и описываются в терминологии теории матроидов [5; 11; 12; 13].

значение в экономико-математическом моделировании.

Пусть C — матрица инцидентности циклов матроида M на конечном множестве S , а R — матрица инцидентности коциклов этого же матроида. Каждой строке матрицы C соответствует цикл матроида M , а каждому столбцу — элемент множества S . При этом $c_{ij} = 1$, если j -й элемент множества S принадлежит i -му циклу. В противном случае $c_{ij} = 0$. Аналогично формулируем условия для матрицы R . Замена некоторых значений ненулевых миноров $+1$ — на -1 в матрицах C и R называется ориентацией матроида M , если для ориентированных матриц C и R , полученных в результате этой замены, произведение матрицы C на матрицу, транспонированную к матрице R , равно нулевой матрице, т. е. $CR^T = 0$.

Пусть B — база матроида M на конечном множестве S и $a \in S \setminus B$. Тогда существует единственный цикл $C = C(a, B)$, такой, что $a \in C \subseteq B \cup \{a\}$. Цикл $C(a, B)$ называется фундаментальным циклом элемента a относительно базы B . Аналогично, если $B^* = S \setminus B$ и $a \in B$, то существует единственный коцикл $R = R(a, B^*)$, такой, что $a \in R \subseteq B^* \cup \{a\}$. Коцикл $R(a, B^*)$ называется фундаментальным коциклом элемента a относительно базы B .

Пусть $C = (C_1 | E)$ — матрица фундаментальных циклов, а $R = (E | R_2)$ — матрица фундаментальных коциклов матроида M на конечном множестве S относительно базы B , где столбцы подматрицы C_1 соответствуют элементам базы B , столбцы подматрицы R_2 — элементам кобазы B^* , а E — единичные матрицы, размеры которых согласуются с числом элементов базы B и кобазы B^* . Заметим, что для матриц фундаментальных циклов и коциклов ориентированного матроида M имеет место соотношение $C_1 = -R_2^T$. Если $(E | A)$ — стандартное представление матроида M , то $(-A^T | E)$ — стандартное представление двойственного матроида M^* на том же конечном множестве.

Матроид $M = (S, I)$ представим над полем F , если существует линейное (векторное) пространство V над полем F и отображение $\varphi : S \rightarrow M$, при котором $A \in 2^S$ независимо

в M только в том случае, если $\varphi|_A$ взаимно однозначно и $\varphi(A)$ — линейно независимое подмножество векторов в V . Матроид, представимый над полем $GF(2)$, называется бинарным.

Пусть $G = G(V, E)$ — произвольный неориентированный граф. Зададим произвольным образом ориентацию ребрам E , получив в результате орграф G_1 . Тогда усеченная матрица инцидентности графа G_1 является представлением циклического матроида $M(G)$ над произвольным полем F .

Легко видеть, что ориентированный матроид должен быть бинарным.

Ориентируемый матроид имеет линейные представления над всеми полями.

Матроид M является ориентируемым тогда и только тогда, когда двойственный матроид M^* — ориентируем.

Любые миноры ориентируемых матроидов являются ориентируемыми.

Прямая сумма ориентируемых матроидов является ориентируемым матроидом.

Очевидно, что циклический и коциклический матроиды любого графа ориентируемы.

Поскольку прямая сумма $M_1 + M_2$ двух матроидов является графическим матроидом (соответственно прямая сумма кографических матроидов — кографическим матроидом) в том и только в том случае, если оба матроида M_1 и M_2 одновременно графические (либо кографические). Легко привести пример ориентированного матроида, который не является ни графическим, ни кографическим.

Матроидный подход к решению задач электротехники и механики позволяет удачно сочетать абстрактный аксиоматический подход и прикладной характер рассматриваемых конструкций. Аналогичный подход, связанный с введением ориентированных матроидов, позволяет сокращать число уравнений-ограничений при решении целочисленных транспортных задач, а также задач линейного программирования, используемых для оптимального распределения ресурсов хозяйственной деятельности.

Приведем примеры двух матроидов, используемых для характеристики ориентированных матроидов.

Пусть $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, B — семейство всех его 3-элементных подмножеств, кроме $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 4, 7\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{4, 5, 6\}$ и $\{3, 6, 7\}$. Тогда матроид $\Phi = (S, B)$ с семейством баз B называется матроидом Фано. Матроид Φ содержит по семь точек и семь прямых. Если в матроиде Фано Φ заменить одну прямую $\{4, 5, 6\}$ на три прямые $\{4, 5\}$, $\{4, 6\}$ и $\{5, 6\}$, то получим новый матроид Φ^- . Матроид Фано является бинарным, но он неориентируемый, не представим ни над каким другим полем, таким, характеристика которого отлична от 2. В то же время матроид Φ^- не является бинарным, но представим над любым полем, таким, характеристика которого не равна 2.

Татт [14] получил характеристику ориентированных матроидов запрещенными минорами, а именно: бинарный матроид является регулярным тогда и только тогда, когда не содержит в качестве миноров ни матроид Фано Φ , ни ему двойственный Φ^* .

Пусть

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} -$$

стандартная матрица представления матроида R_{10} над полем $GF(2)$. Матроид, двойственный к R_{10} , совпадает с R_{10} . Кроме того, все миноры R_{10} являются либо графическими, либо кографическими, вместе с тем как сам R_{10} таковым не является. Если исключить любой элемент из R_{10} , то получим матроид, изоморфный циклическому матроиду полного двудольного графа $K_{3,3}$. Кроме того, матроид R_{10} является ориентированным, самодвойственным матроидом. Самодвойственным называется матроид M , если $M = M^*$.

Например, матроид P_8 на восьми элементах с матрицей представления

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

над полем $GF(3)$ не является ориентированным, но является самодвойственным матроидом.

Перечислим ряд других результатов без доказательства.

Пусть A — $k \times n$ -матрица с целыми коэффициентами и $k < n$. Матрица A называется унимодулярной, если все ее ненулевые миноры равны +1 или -1.

Следующие утверждения эквивалентны:

а) матроид $M = (S, I)$ является ориентируемым;

б) матроид M представим над каждым полем;

в) матроид M является как бинарным, так и тернарным;

г) бинарный матроид $M = (S, I)$ представим полем F , характеристика которого не равна 2;

д) матроид $M = (S, I)$ обладает унимодулярной матрицей представления над полем рациональных чисел.

Каждый ориентированный матроид может быть получен посредством 1-суммы, 2-суммы и 3-суммы графических и кографических матроидов, а также матроида R_{10} . Эта чрезвычайно эффективная характеристика получена в 1980 г. П. Сеймуром (см.: [6; 7]).

Минимизация количества уравнений, описывающих экономико-математическую модель производства, позволяет находить эффективные алгоритмы для оптимизации затрат на целевые функции. Эти результаты могут быть успешно использованы при решении задач сегментации рынка (с помощью кластерного анализа) и при введении различных балльно-рейтинговых систем оценивания деятельности предприятий.

Литература

1. Исаченко А. Н., Ревякин А. М. Матроиды в математическом моделировании экономических систем // Экономические и социально-гуманитарные исследования. 2015. № 1 (5). С. 13—18.

2. Исаченко А. Н., Ревякин А. М. Матроиды

и сильная связность орграфов в математическом моделировании экономических систем // Экономические и социально-гуманитарные исследования. 2018. № 4 (20). С. 36—40. <https://doi.org/10.24151/2409-1073-2018-4-36-40>

3. **Исаченко А. Н., Ревякин А. М.** О сводимости матроидных оракулов // Вестник Московской государственной академии делового администрирования. Серия: Философские, социальные и естественные науки. 2011. № 3 (9). С. 117—121.

4. **Исаченко А. Н.** Полиномиальная сводимость матроидных оракулов // Известия Академии наук Белорусской ССР. Серия физико-математических наук. 1984. № 6. С. 33—36.

5. **Recski A.** Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics. Budapest: Akademiai Kiado; Berlin: Springer-Verlag, 1989. XIII, 533 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-22143-3>

6. **Revyakin A. M.** Matroids // Journal of Mathematical Sciences. 2002. Vol. 108, No. 1. P. 71—130. <https://doi.org/10.1023/A:1012757316376>

7. **Oxley J. G.** Matroid Theory. Oxford; New York; Tokyo: Oxford University Press, 2006. XII, 532 p. (Oxford Mathematics).

8. **Ревякин А. М., Бардушкина И. В.** Математические методы моделирования в экономике. М.: МИЭТ, 2013. 327 с.: ил., табл.

9. **Bolker E. D., Crapo H.** How to brace a one-story building? // Environment and Planning B: Urban Analytics and City Science. 1977. Vol. 4, No. 2. P. 125—152. <https://doi.org/10.1068/b040125>

10. **Свами М., Тхуласираман К.** Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984. 454 с.: ил.

11. **Iri M.** Application of matroid theory to engineering systems problems // Proceedings of the Sixth Conference on Probability Theory (Sept. 10—15, 1979, Brason, Romania). Bucuresti: Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, 1981. P. 107—127.

12. **Iri M., Fujishige S.** Use of matroid theory in operations research, circuits and systems theory // International Journal of Systems Science. 1981. Vol. 12, No. 1. P. 27—54. <https://doi.org/10.1080/00207728108963728>

13. **Tomizawa N., Fujishige S.** Historical survey of extensions of the concept of principal partition and their unifying generalization to hypermatroids // Proceedings of the 1982 International Symposium on Circuits and Systems (Rome, May 10—12, 1982). Rome: IEEE, 1982. P. 142—145.

14. **Tutte W. T.** Introduction to the theory of matroids. N. Y.: American Elsevier Publishing Company, 1971. 84 p.

Поступила после доработки 19.04.2019

Исаченко Александр Николаевич — доцент кафедры информационных систем управления Белорусского государственного университета (Республика Беларусь, 220030, г. Минск, пр. Независимости, 4), isachen@bsu.by

Ревякин Александр Михайлович — доцент кафедры высшей математики №2 Национального исследовательского университета

«МИЭТ» (Россия, 124498, Москва, г. Зеленоград, пл. Шокина, д. 1), arevyakin@mail.ru

References

1. Isachenko A. N., Revyakin A. M. Matroidy v matematicheskom modelirovanii ekonomicheskikh sistem (Matroids in Mathematical Modeling of Economic Systems), *Ekonomicheskie i sotsial'no-gumanitarnye issledovaniya*, 2015, No. 1 (5), pp. 13—18.

2. Isachenko A. N., Revyakin A. M. Matroidy i sil'naya svyaznost' orgrafov v matematicheskom modelirovanii ekonomicheskikh sistem (Matroid and Strong Connectivity of the Digraphs in the Mathematical Modeling of Economic Systems), *Ekonomicheskie i sotsial'no-gumanitarnye issledovaniya*, 2018, No. 4 (20), pp. 36—40. <https://doi.org/10.24151/2409-1073-2018-4-36-40>

3. Isachenko A. N., Revyakin A. M. O svodimosti matroidnykh orakulov (On Reduction of Matroid Oracles), *Vestnik Moskovskoi gosudarstvennoi akademii delovogo administrirovaniya, Seriya Filosofskie, sotsial'nye i estestvennye nauki*, 2011, No. 3 (9), pp. 117—121.

4. Isachenko A. N. Polinomial'naya svodimost' matroidnykh orakulov (Polynomial Reduction of Matroid Oracles), *Izvestiya Akademii nauk Belorusskoi SSR, Seriya fiziko-matematicheskikh nauk*, 1984, No. 6, pp. 33—36.

5. Recski A. Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics. Budapest, Akademiai Kiado, Berlin, Springer-Verlag, 1989, xiii, 533 p., <https://doi.org/10.1007/978-3-662-22143-3>

6. Revyakin A. M. "Matroids". *Journal of Mathematical Sciences*, 2002, vol. 108, no. 1, pp. 71—130, <https://doi.org/10.1023/A:1012757316376>

7. Oxley J. G. Matroid Theory. Oxford, New York, Tokyo, Oxford University Press, 2006, xii, 532 p., Oxford Mathematics.

8. Revyakin A. M., Bardushkina I. V. Matematicheskie metody modelirovaniya v ekonomike (Mathematical Modeling Methods in Economics), M., MIET, 2013, 327 p., il., tabl.

9. Bolker E. D., Crapo H. "How to brace a one-story building?" *Environment and Planning B: Urban Analytics and City Science*, 1977, vol. 4, no. 2, pp. 125—152, <https://doi.org/10.1068/b040125>

10. Svami M. (Swamy M. N. S.), Tkulasiraman K. (Thulasiraman K.). Grafy, seti i algoritmy (Graphs, Networks and Algorithms), M., Mir, 1984, 454 p., il.

11. Iri M. "Application of matroid theory to engineering systems problems". *Proceedings of the Sixth Conference on Probability Theory (Sept. 10—15, 1979, Brason, Romania)*, Bucuresti, Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, 1981, pp. 107—127.

12. Iri M., Fujishige S. "Use of matroid theory in operations research, circuits and systems theory". *International Journal of Systems Science*, 1981, vol. 12, no. 1. P. 27—54, <https://doi.org/10.1080/00207728108963728>

13. Tomizawa N., Fujishige S. "Historical survey of extensions of the concept of principal partition and their unifying generalization to hypermatroids". *Proceedings of the 1982 International Symposium on Circuits and Systems (Rome, May 10—12, 1982)*, Rome, IEEE, 1982. pp. 142—145.

14. Tutte W. T. Introduction to the theory of

matroids. N. Y., American Elsevier Publishing Company, 1971, 84 p.

Submitted after updating 19.04.2019

Isachenko Aleksandr N., Ph.D. of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor, associate professor at the Department of Information Management Systems, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus), *isachen@bsu.by*

Revyakin Alexander M., Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, associate professor of Higher Mathematics Department No. 2, National Research University of Electronic Technology (1, Shokin sq., Zelenograd, 124498, Moscow, Russia), *arevyakin@mail.ru*