УДК 624.072.14

© В. А. Кравчук, д-р техн. наук, профессор
(Тихоокеанский государственный университет,
Хабаровск, Россия)
E-mail: 000415@pnu.edu.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2021-18-6-72-78

© V. A. Kravchuk, Dr. Sci. Tech., Professor
(Pacific National University,
Khabarovsk, Russia)
E-mail: 000415@pnu.edu.ru

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СТАЛЬНЫХ БАЛОК, ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ВЫТЯЖКОЙ ТОНКОЙ СТЕНКИ ПРИ ЖЕСТКОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ ИХ НА ОПОРАХ

DYNAMIC PARAMETERS OF THE CARRYING CAPACITY OF STEEL BEAMS PRESTRESSED BY STRETCHING THE THIN WALL AT RIGID FIXING ON SUPPORTS

На основе известного метода сравнения потенциальной и кинетической энергий колеблющегося стержня определены круговая частота, период колебания, количество колебаний в минуту балки с жесткими опорами. Проведен сопоставительный анализ динамических параметров обычных балок, предварительно напряженных с шарнирными опорами и при жестком их сопряжении в узлах. Изучены динамические характеристики балок при воздействии на них вибрационной нагрузки.

Ключевые слова: предварительно напряженные балки, жесткие опоры, опорный момент, момент усилий предварительного напряжения, круговая частота, период колебаний, вибрационная нагрузка.

On the basis of the well known method of comparison of the potential and kinetic energy of the oscillating rod, there was determined the angular frequency, the vibration period, and the number of vibrations per minute of the beam with rigid supports. There was carried out a comparative analysis of the dynamic parameters of conventional beams prestressed with hinged supports with rigid coupling at the nodes. The dynamic characteristics of the beams under the impact of vibration load were studied.

Keywords: prestressed beams, rigid supports, support moment, moment of prestressing forces, circular frequency, vibration period, vibration load.

Начиная с 30-х годов XX столетия российская конструкторская школа, возглавляемая академиком строительства и архитектуры Н. С. Стрелецким, перешла на преимущественное применение жестких сопряжений элементов строительных конструкций. Такой подход позволял решать основную задачу проектирования строящихся зданий и сооружений, которая заключалась в повышении несущей способности конструкций при одновременном снижении их массы и стоимости. Тенденция проектирования жестких каркасов сохранилась до настоящего времени.

Применение прогрессивных стальных конструкций на основе их предварительного напряжения и формообразования, предложенного академиком В. Г. Шуховым, является еще одним вкладом российских ученых в дело увеличения несущей способности конструкций и улучшения их экономических показателей. Детальное

изучение резерва несущей способности балок, совершенствование методики расчета и формообразования, изготовление таких конструкций и монтаж могут внести существенный вклад в повышение экономических показателей промышленного, гражданского и специального строительства.

Эффективность предварительно напряженных конструкций при статическом нагружении достаточно хорошо изучена в России и за рубежом. Большой вклад в теорию расчета таких конструкций внесли российские ученые Е. И. Беленя, Ю. В. Гайдаров, Б. А. Сперанский, А. А. Воеводин. Известна работа по расчету ферм с затяжками ученого Г. Маньеля, беззатяжному предварительному напряжению балок посвящены работы М. Любински и Я. Карчевски.

Особое место в изучении резервов несущей способности металлических строительных

конструкций занимают вопросы их динамической прочности и устойчивости. Интенсивно в этом направлении работают ученые Санкт-Петербурга и Москвы. В СПбГАСУ детально изучаются проблемы колебательных процессов в конструкциях и сооружениях, в МИСИ изучена динамическая устойчивость стальных предварительно напряженных балок. Исследование динамических параметров несущей способности предварительно напряженных балок с различными опорными узлами проводится и в других вузах России.

Поскольку в практике строительства зданий и сооружений, кроме связевых каркасов, находят применение рамно-связевые, а также рамные каркасы, существует необходимость исследования предварительно напряженных ригелей при условии их жесткого присоединения к колоннам.

Опорный момент предварительно напряженных балок

Отличительная особенность предварительно напряженных балок, жестко закрепленных в колоннах каркасов, заключается в том, что по сравнению с обычными балками они на стадии их изготовления получают нормальные и касательные напряжения, вектор которых направлен в сторону, противоположную соответствующим напряжениям традиционных конструкций. Кроме этого, предварительно напряженные балки имеют выгиб обратного знака прогибам от внешней нагрузки.

Для решения задачи о напряженно-деформированном состоянии предварительно напряженных балок в первую очередь следует определить опорный момент M_{op} , возникающий в жестком узле балки. Для этого следует расчленив балку, жестко закрепленную на опорах (рис. 1, б), на составные шарнирно закрепленные балки

Рис. 1. Расчетная схема балки, жестко закрепленной на опорах: а — прогиб и поворот поперечного сечения опорных узлов от усилий предварительного напряжения; б — схема нагружения балки и закрепления ее опор; в — расчетная схема балки при шарнирном закреплении опорных узлов; г — прогиб и поворот сечения от равномерно распределенной нагрузки; д — прогиб и поворот сечения балки от опорного момента; е — суммарный прогиб балки

(рис. 1, в–д), заменив при этом усилие в жестком узле моментом M_{op} .

Определение момента M_{op} базируется на предположении о том, что повороты поперечного сечения концевых участков от воздействия на балку равномерно распределенной нагрузки q , момента усилий предварительного напряжения M_0 и опорного момента M_{op} равны нулю.

В общем случае соответствующие повороты можно определить на основе интегрирования дифференциального уравнения изогнутых осей балок, но можно также воспользоваться известными из курса сопротивления материалов готовыми формулами.

Поскольку на стадии изготовления балка находится в состоянии чистого изгиба, вызванного моментом предварительного напряжения M_0 , то поворот сечений опорных узлов будет равен

$$\theta_{M_0} = M_0 l / 2. \quad (1)$$

Поворот концевых участков балки от равномерно распределенной нагрузки

$$\theta_q = ql^3 / 24. \quad (2)$$

Поворот указанных участков от чистого изгиба опорным моментом M_{op}

$$\theta_{M_{op}} = M_{op} l / 2. \quad (3)$$

Из равенства $\frac{M_0 l}{2} + \frac{ql^3}{24} + \frac{M_{op} l}{2} = 0$ находим, что

$$M_{op} = \frac{ql^2}{12} - M_0. \quad (4)$$

Суммарный момент внешних нагрузок на предварительно напряженную балку с жесткими опорами

Не отступая от концепции членения балки с жесткими опорами на составные балки, имеющие шарнирное закрепление опорных узлов, устанавливаем, что текущий момент от равномерно распределенной нагрузки

$$M_q = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}. \quad (5)$$

Учитывая, что момент предварительного напряжения M_0 и опорный момент M_{op} создают зоны чистого изгиба, суммарный момент

$$\begin{aligned} \sum M &= M_q - M_0 - M_{op} = \\ &= \left[\left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) - M_0 - \left(\frac{ql^2}{12} - M_0 \right) \right] = \\ &= \left[\left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) - \frac{ql^2}{12} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Суммарный прогиб предварительно напряженной балки с жесткими опорами

Используя известные аналитические зависимости, характеризующие прогибы в шарнирно закрепленных балках от равномерно распределенной нагрузки q , опорного момента M_{op} и момента усилий предварительного напряжения M_0 , суммарный прогиб записывается в виде

$$\begin{aligned} \sum y &= y_q - y_{M_0} - y_{M_{op}} = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^3 x}{24} \right) - \frac{ql^2}{24} (xl - x^2) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Круговая частота предварительно напряженной балки, жестко закрепленной на опорах

Поиск указанного параметра динамической прочности осуществляется на основании известной аналитической зависимости

$$\omega^2 = \frac{\sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{EI_x}}{\sum \int_0^l y^2 \mu dx}. \quad (8)$$

Здесь μ — погонная масса балки и нагрузки на ней.

Суммарный момент внешних нагрузок, введенный в квадрат,

$$\begin{aligned} \sum M^2 &= \frac{q^2 l^2 x^2}{4} - \frac{q^2 l x^3}{2} + \frac{q^2 x^4}{4} - \\ &- \frac{q^2 l^3 x}{12} + \frac{q^2 l^2 x^2}{12} + \frac{q^2 l^4}{144}. \end{aligned} \quad (9)$$

Интеграл выражения (9)

$$\begin{aligned} \int \sum M^2 &= \frac{q^2 l^2 x^3}{12} - \frac{q^2 l x^4}{8} + \frac{q^2 x^5}{20} - \\ &- \frac{q^2 l^3 x^2}{24} + \frac{q^2 l^2 x^3}{36} + \frac{q^2 l^4 x}{144}. \end{aligned} \quad (10)$$

При $x = l / 2$

$$\int M^2 = 0,0006875 q^2 l^5. \quad (11)$$

Суммарный прогиб после возведения в квадрат зависимости (7)

$$\begin{aligned} \sum y^2 &= \frac{q^2 l^2 x^6}{144} - \frac{q^2 l x^7}{144} + \frac{q^2 x^8}{576} - \\ &- \frac{q^2 l^4 x^4}{144} + \frac{q^2 x^5 l^3}{288} + \frac{q^2 l^6 x^2}{576}. \end{aligned} \quad (12)$$

После интегрирования

$$\int \sum y^2 = 0,0002197 q^2 l^9 \quad (13)$$

С учетом выражений (11) и (13) круговая частота, с^{-1} , предварительно напряженной балки, жестко закрепленной в опорных узлах

$$\omega_g = \sqrt{\frac{EI_x \cdot 0,0006875q^2l^5}{0,0002197q^2l^9\mu}} = \frac{1,7689}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}}. \quad (14)$$

В [1, 2–10] установлено, что круговая частота обычной шарнирно закрепленной балки

$$\omega_{ob} = \frac{9,876}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}},$$

предварительно напряженной шарнирно закрепленной —

$$\omega = \frac{7,162}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}}.$$

Следовательно, круговая частота предварительно напряженной балки с жестким закреплением опор в 3,8 раза меньше круговой частоты предварительно напряженной балки с шарнирным закреплением опор и в 5,5 раза — обычной балки равной жесткости EI_x .

Период, частота и количество колебаний в минуту стальной предварительно напряженной балки, жестко закрепленной в опорных узлах

Известно, что период колебаний балки с одной степенью свободы определяется зависимостью $T = 2\pi / \omega$. В таком случае период колебаний предварительно напряженной балки, жестко закрепленной на опорах,

$$T_{гПНБ} = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{6,28l^2\sqrt{\mu}}{1,7689\sqrt{EI_x}} = 3,55 \frac{l^2\sqrt{\mu}}{\sqrt{EI_x}}. \quad (15)$$

Сопоставляя периоды колебаний обычной балки, а также балки, предварительно напряженной, имеющей шарнирное закрепление опорных узлов, с периодом колебаний предварительно напряженной балки с жесткими узлами, устанавливаем, что период колебаний последней балки выше в 5,58 раза по сравнению с обычной балкой и в 4 раза по сравнению с предварительно напряженной балкой, шарнирно закрепленной в опорных узлах.

Частота колебаний исследуемой балки, с^{-1} ,

$$f_{гПНБ} = \frac{1}{T_{гПНБ}} = \frac{1}{3,55l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}} = \frac{0,28}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}} \quad (16)$$

снижается по сравнению с обычной балкой в 5,58 раза, а по сравнению с преднапряженной с шарнирным закреплением — в 4 раза.

Число колебаний в минуту исследуемой балки

$$n = \frac{60}{2\pi} \omega_g = \frac{60}{6,28} 1,7687 \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}} = 17,1 \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}}. \quad (17)$$

Это меньше по сравнению с обычной балкой в 5,5 раза, а по сравнению с предварительно напряженной балкой с шарнирным закреплением концевых участков — в 4 раза.

Несущая способность стальной предварительно напряженной балки с жесткими опорами, нагруженной вибрационной нагрузкой

Общеизвестно [1, 2], что вибрационная сила P определяется выражением (рис. 2)

$$P = m^* o^2 \rho = \frac{G^* o^2 \rho}{g}, \quad (18)$$

где m^* — масса неуравновешенного груза; o — угловая скорость, $o = \frac{2\pi n}{60}$, n — количество оборотов неуравновешенной массы; ρ — эксцентриситет массы; G^* — вес неуравновешенного груза; g — ускорение свободного падения, $g = 998 \text{ см/с}^2$.

Под действием усилия P в балках покрытий возникают горизонтальные усилия $P \cos \theta t$ и вертикальные $P \sin \theta t$. Кроме этого, усилие P , приложенное с эксцентриситетом ρ , создает момент $M = P \cos \theta t \cdot a$ (a — расстояние от центра тяжести механизма до горизонтального уровня покрытия) (рис. 2, б).

Нормальная и горизонтальная составляющие $P \sin \theta t$ и $P \cos \theta t$ создают прогибы в балках.

При наличии сил сопротивления прогиб от силы $P \sin \theta t$:

Рис. 2. Схема (а) и действующие нагрузки (б) балки с одной степенью свободы

$$y = \alpha \sin(\omega t - \lambda) + \alpha e^{-\alpha t} \times \\ \times [\sin \lambda \cos \omega_1 t + \frac{\alpha \sin \lambda - \omega \cos \lambda}{\omega_1} \sin \omega_1 t] + \\ + e^{-\alpha t} [y(0) \cos \omega_1 t + \frac{v(0) + \alpha y(0)}{\omega_1} \sin \omega_1 t], \quad (19)$$

от силы $P \cos \omega t$:

$$y = \alpha \cos(\omega t - \lambda) + \alpha e^{-\alpha t} \times \\ \times [-\cos \lambda \cos \omega_1 t - \frac{\alpha \cos \lambda + \omega \sin \lambda}{\omega_1} \sin \omega_1 t] + \\ + e^{-\alpha t} [y(0) \cos \omega_1 t + \frac{v(0) + \alpha y(0)}{\omega_1} \sin \omega_1 t]. \quad (20)$$

В балках с жесткими опорами

$$\alpha_{ob} = \frac{\delta \omega_{gpr}}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = 0,02386644 \omega_{gpr}, \quad (21)$$

где δ — логарифмический декремент затухания колебаний (согласно СНиП 2.01.07-85* (СП 20.13330) «Нагрузки и воздействия» для стальных конструкций $\delta = 0,15$).

Угловая скорость ω определяется из зависимости

$$\operatorname{tg} \lambda = 2\alpha / (\omega_{gpr}^2 - \omega^2), \quad (22)$$

решение которой позволяет получить квадратное уравнение

$$\omega^2 \operatorname{tg} \lambda + \omega 2\alpha - \operatorname{tg} \lambda \omega_{gpr}^2 = 0, \quad (23)$$

из которого следует

$$\omega = -B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}, \text{ рад/с}, \quad (24)$$

где $A = \operatorname{tg} \lambda$; $B = 2\alpha$; $C = \operatorname{tg} \lambda \omega_{gpr}^2$.

Коэффициент $\lambda = 2\alpha / \omega$ — отвлеченная величина, учитывающая силы сопротивления.

В том случае, когда силы сопротивления свободным колебаниям балок незначительны, можно допустить, что $\alpha \approx 0$, $\lambda \approx 0$, $\omega_1 = \omega$, $e^{-\alpha t} \approx 1$, и при начальных условиях $y(0) = v(0) = 0$ прогибы от усилий $P \sin \omega t$ и $P \cos \omega t$ будут иметь вид

$$y = [\frac{\delta_{1P} P}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{gpr}^2})}] (\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_{gpr}} \sin \omega_{gpr} t); \quad (25)$$

$$y = [\frac{\delta_{1P} P}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{gpr}^2})}] (\cos \omega t - \frac{\omega}{\omega_{gpr}} \cos \omega_{gpr} t). \quad (26)$$

Здесь δ_{1P} — прогиб в балках от единичного нагружения,

$$\delta_{1P} = \frac{l^3}{48EI_x}. \quad (27)$$

Динамические коэффициенты

$$\mu(t) = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{gpr}^2})} (\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_{gpr}} \sin \omega_{gpr} t); \quad (28)$$

$$\mu(t) = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{gpr}^2})} (\cos \omega t - \frac{\omega}{\omega_{gpr}} \cos \omega_{gpr} t). \quad (29)$$

Проанализируем приведенные параметры вибрационной нагрузки в балках пролетом $l = 1200$ см, на которых покоится механизм массой $F = 500$ кг. Предположим, что геометрические параметры обычных и предварительно напряженных балок равны между собой: $I_x = 40\,979$ см⁴, $E = 2\,100\,000$ кг/см².

Круговая частота предварительно напряженных балок с жесткими опорами

$$\omega_{gpr} = \frac{1,7689}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}} = 0,55. \quad (30)$$

Коэффициенты, характеризующие угловую скорость:

$$\alpha = 0,02386644 \omega_{gpr} = 0,02386644 \cdot 0,55 = 0,013126;$$

$$\lambda = 2\alpha / \omega_{gpr} =$$

$$= 2 \cdot 0,02386644 \omega_{gpr} / \omega_{gpr} = 0,04773288;$$

$$A = \operatorname{tg} \lambda = 0,047777;$$

$$B = 2\alpha = 0,026252; C = \operatorname{tg} \lambda \omega_{gpr}^2 = 0,01445.$$

Следовательно, угловая скорость преднапряженных жестко закрепленных балок

$$\omega = \frac{\left(\frac{-0,026252 \pm \sqrt{0,000689 + 4 \cdot 0,047777 \cdot 0,014454}}{2 \cdot 0,047777} \right)}{0,095554} = 0,34. \quad (31)$$

Динамический коэффициент

$$\mu_{gpr} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{gpr}^2}} = 1,6185. \quad (32)$$

Выше установлено, что суммарный момент внешних нагрузок в предварительно напряженных балках с жесткими опорами определяется выражением (6):

$$\sum M_g = ql^2 / 24 = 0,18 \cdot 1200^2 / 24 = 10\,800 \text{ кН} \cdot \text{см}. \quad (33)$$

Указанный момент создает напряжения:

- в верхней зоне балки

$$\sigma_{gv} = \sum M_g / W_{xv} =$$

$$= 10\,800 / 1666,82 = 6,4833 \text{ кН/см}^2; \quad (34)$$

- в нижней зоне балки

$$\sigma_{gn} = 10\,800 / 896,0 = 12,0465 \text{ кН/см}^2. \quad (35)$$

Динамические параметры обычных и предварительно напряженных стальных тонкостенных балок

Балки	μ	$\omega, \text{с}^{-1}$	$\sigma, \text{рад/с}$	$y, \text{см}$	$\sigma, \text{кН/см}^2$
Б	1,435	9,876	1,89	9,334	3810
ПН	1,55	7,162	1,78	8,434	2973
ПНЖ	1,618	1,769	0,34	1,31	19,5

Примечание. Б — обычные балки, ПН — предварительно напряженные балки с шарнирными опорами; ПНЖ — предварительно напряженные балки с жесткими опорами.

С учетом коэффициента динамичности максимальные нормальные напряжения в жестко закрепленной предварительно напряженной балке

$$\sigma_{gpr}^c = 12,0465 \cdot 1,6185 = 19,5 \text{ кН/см}^2. \quad (36)$$

Результирующий прогиб в исследуемых балках (7):

$$y_{gpr} = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{5ql^4}{384} - \frac{ql^4}{96} \right] = \frac{1}{EI_x} \frac{ql^4}{384} = \frac{1}{EI_x} \frac{18 \cdot 1200^4}{384} = 1,225 \text{ см}. \quad (37)$$

Учитывая коэффициент динамичности,

$$\sum y_{gpr}^c = 1,225 \cdot 1,6185 = 1,31 \text{ см}. \quad (38)$$

Используя результаты исследования динамических параметров несущей способности обычных и предварительно напряженных балок с шарнирными опорами, изложенные в работе [10], и сопоставляя их с соответствующими параметрами предварительно напряженных балок с жесткими опорными узлами, полученными в настоящей работе, заметим, что круговая частота колебаний балок с жесткими опорами снижается в 5,58 раза по сравнению с обычными балками и в 4 раза по сравнению с преднапряженными балками, шарнирно закрепленными в опорных узлах; угловая скорость, соответственно, — в 5,5 и 5,23 раза; прогибы — в 7,27 и 6,43 раза; нормальные напряжения снижаются многократно.

Значения динамических параметров несущей способности балок приведены в таблице.

Результаты исследования позволяют рекомендовать для соединения элементов несущего стального каркаса зданий и сооружений жесткие сопряжения, дающие совместно с предварительно напряжением наилучшие результаты, характеризующие несущую способность конструкций.

Библиографический список

1. Рабинович И. М. Курс строительной механики. Ч. II. Статически неопределимые системы. М.: Госиздат, 1954. 543 с.
2. Киселев В. А. Строительная механика. Специальный курс. М.: Стройиздат, 1964. 331 с.
3. Кравчук В. А. Стальные стержни, предварительно напряженные без затяжек. М.: АСВ, 2015. 550 с.
4. Пуховский А. Б. Предварительно напряженные металлические конструкции для сейсмических районов: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. М., 1987. 37 с.
5. Нгуен Х. Х. Определение частот свободных колебаний складчатых пологих оболочек на прямоугольном плане и сравнение аналитических и численных результатов // Вестник гражданских инженеров. 2014. № 1 (42). С. 44–48.
6. Березнев А. В. Влияние внутреннего рабочего давления на частоты свободных колебаний криволинейных участков полиэтиленовых трубопроводов // Вестник гражданских инженеров. 2015. № 3 (50). С. 101–104.
7. Соколов В. Г., Разов И. О., Волинец С. И. Исследование свободных колебаний тонкостенных прямолинейных газопроводов большого диаметра при полуподземной прокладке // Вестник гражданских инженеров. 2019. № 6 (77). С. 149–156.
8. Соколов В. Г., Огороднова Ю. В., Дмитриев А. В., Масленников А. М. Колебания подземных тонкостенных магистральных трубопроводов с учетом внутреннего давления и продольной силы // Вестник гражданских инженеров. 2019. № 5 (76). С. 105–112.
9. Каган-Розенцвейг Л. М. Метод вычисления частот собственных колебаний упругих стержней прямым интегрированием дифференциального уравнения изгиба // Вестник гражданских инженеров. 2019. № 1 (72). С. 61–66.
10. Кравчук В. А. Свободные колебания стальных балок, предварительно напряженных вытяжкой стенки // Вестник гражданских инженеров. 2020. № 6 (83). С. 97–103.

References

1. Rabinovich I. M. *Kurs stroitel'noy mekhaniki* [A course in structural mechanics]. Pt. II. *Staticheski neopredelime sistemy* [Statically indeterminate systems]. Moscow, Gosizdat Publ., 1954, 543 p.
2. Kiselev V. A. *Stroitel'naya mekhanika. Spetsial'niy kurs* [Construction mechanics. Special course]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1964, 331 p.
3. Kravchuk V. A. *Stal'nye sterzhni, predvaritel'no napryazhennye bez zatyazhek* [Steel rods prestressed without using tighteners]. Moscow, ASV Publ., 2015, 550 p.
4. Pukhovskiy A. B. *Predvaritel'no napryazhennye metallicheskie konstruksii dlya seysmicheskikh rayonov. Avtoref. diss. dokt. tekhn. nauk* [Prestressed metal structures for seismic areas. Author's thesis of Dr. Sci. Tech. diss.]. Moscow, 1987, 37 p.
5. Nguyen Kh. Kh. *Opredelenie chastot svobodnykh kolebaniy skladchatykh pologikh obolochek na pryamougol'nom plane i sravnenie analiticheskikh i chislennykh rezul'tatov* [Determination of frequencies of free oscillations of folded flat shells on the rectangular plan and comparison of analytical and numerical results]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2014, no. 1 (42), pp. 44–48.
6. Bereznov A. V. *Vliyaniye vnutrennego rabochego davleniya na chastoty svobodnykh kolebaniy krivolinyeynykh uchastkov polietilenovykh truboprovodov* [The influence of the internal working pressure on the frequency of free oscillations of curvilinear sections of polyethylene pipelines]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2015, no. 3 (50), pp. 101–104.
7. Sokolov V. G., Razov I. O., Volynets S. I. *Issledovaniye svobodnykh kolebaniy tonkostennykh pryamolineynykh gazoprovodov bol'shogo diametra pri polupodzemnoy prokladke* [Investigation of free oscillations of thin-walled straight-line gas pipe lines of large diameter at semi-underground laying]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2019, no. 6 (77), pp. 149–156.
8. Sokolov V. G., Ogorodnova Yu. V., Dmitriev A. V., Maslennikov A. M. *Kolebaniya podzemnykh tonkostennykh magistral'nykh truboprovodov s uchetom vnutrennego davleniya i prodol'noy sily* [Oscillations of underground thin-walled pipelines taking into account internal pressure and longitudinal force]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2019, no. 5 (76), pp. 105–112.
9. Kagan-Rosenzweig L. M. *Metod vychisleniya chastot sobstvennykh kolebaniy uprugikh sterzhney pryamym integririvaniem differentsial'nogo uravneniya izgiba* [The method for calculating the natural oscillation frequencies of elastic rods by application of direct integration of differential bending equation]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2019, no. 1 (72), pp. 61–66.
10. Kravchuk V. A. *Svobodnye kolebaniya stal'nykh balok, predvaritel'no napryazhennykh vytyazhkoy stenki* [Free oscillations of steel beams prestressed by wall stretching]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2020, no. 6 (83), pp. 97–103.