Строительная механика и расчет сооружений

УДК 624.044

© В. Н. Глухих, д-р техн. наук, профессор

© А. М. Масленников, д-р техн. наук, профессор

© Л. Н. Кондратьева, д-р техн. наук, профессор

© В. А. Мелешко, канд. техн. наук, доцент

(Санкт-Петербургский государственный

архитектурно-строительный университет,

Санкт-Петербург, Россия)

E-mail: vl-meleshko@yandex.ru

© М. В. Сухотерин, д-р техн. наук, профессор

(Государственный университет морского и речного

флота им. адмирала С. О. Макарова,

Санкт-Петербург, Россия)

E-mail: sukhoterinmv@gumrf.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2021-18-6-66-71

© V. N. Glukhikh, Dr. Sci. Tech., Professor

© A. M. Maslennikov, Dr. Sci. Tech., Professor

© L. N. Kondratieva, Dr. Sci. Tech., Professor

© V. A. Meleshko, PhD in Sci. Tech., Associate Professor

(Saint Petersburg State University

of Architecture and Civil Engineering,

St. Petersburg, Russia)

E-mail: vl-meleshko@yandex.ru

© M. V. Sukhoterin, Dr. Sci. Tech., Professor

(Admiral Makarov State University

of Maritime and Inland Shipping,

St. Petersburg, Russia)

E-mail: sukhoterinmv@gumrf.ru

ПЛАСТИЧЕСКАЯ МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ ПЛОСКОГО СТЕРЖНЕВОГО МАКРОЭЛЕМЕНТА ДЛЯ ДИСКРЕТНО-АНАЛИТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ПРОЧНОСТИ

PLASTIC STIFFNESS MATRIX OF A PLANE ROD MACROELEMENT FOR DISCRETE-ANALYTICAL STRENGTH COMPUTATION

Рассмотрено дискретно-аналитическое решение плоской задачи прочности при упругопластическом нагружении стержневой системы, где принципиальна работа стержня на изгиб. Предложены упрощения при определении пластической матрицы жесткости стержневого элемента с использованием интегральной функции закона состояния сечения. Разработана математическая модель для определения касательной жесткости сечения стержня любой формы на временном шаге при упругопластическом расчете. Представлены результаты физически нелинейного расчета плоской системы при сочленении большого количества стержневых макроэлементов.

Ключевые слова: стержневые системы, пластическая матрица жесткости, касательная жесткость, физическая нелинейность, дискретно-аналитический анализ.

The paper considers a discrete-analytical solution of the plane strength problem, with the rod system being under elastic-plastic loading, and the rod performance is considered fundamentally important for the study. Simplifications are proposed in determining the plastic stiffness matrix of the rod element using the integral function of the law of the section state. A mathematical model has been developed to determine the tangential stiffness of a cross-section of the rod of a variable form at a time step, during elastic-plastic computation. The results of a physically nonlinear calculation of the planar system with the articulation of a large number of rod macroelements are presented.

Keywords: rod systems, plastic stiffness matrix, tangential stiffness, physical nonlinearity, discrete-analytical analysis.

Введение

В основе современных программных комплексов для прочностного анализа конструкций положена идея метода конечных элементов

(МКЭ). Для определения упругопластических деформаций используется МКЭ в классической форме метода перемещений [1]. Основными неизвестными здесь являются перемещения узло-

вых точек, напряжения же вторичны и определяются путем численного дифференцирования перемещений. Но для нелинейных задач может быть более удобна гибридная схема МКЭ в форме метода перемещений [2, 3], которую можно получить путем замены конечных элементов на участки интегрирования в пределах стержневого макроэлемента.

Для проведения упругопластического расчета [4–7] необходимо знание полей напряжений (усилий), возникающих в сечении деформируемого тела. С точки зрения определения напряжений при численных расчетах постановки задач в перемещениях обладают существенным недостатком. Поскольку результатом приближенного решения для таких постановок являются значения перемещений в отдельных точках (узлах сетки) тела, то вычисление напряжений сводится к численному дифференцированию заданных по точкам функций. Это приводит к снижению точности определения напряжений (усилий) по сравнению с точностью определения перемещений.

Цель данной работы — рассмотреть постановку задачи прочности, которая была бы более эффективна с точки зрения определения упругопластических напряжений и деформаций при численном расчете.

1. Касательная жесткость сечения

Для определения перехода от упругой к пластической деформации в сечении введем безразмерный параметр τ [8]:

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_T} = \frac{\chi h}{2\varepsilon_T}, \quad (1)$$

где χ — кривизна; h — высота сечения; ε — деформация в крайних волокнах; ε_T — деформация текучести.

Через этот параметр будет определяться общая жесткость в сечении с учетом изменения модуля упругости по высоте на временном шаге. Аналитические зависимости для жесткостей различных сечений были определены с помощью интегральной функции закона состояния, с учетом изменения ширины, предложенной в работах [9, 10]:

$$\Phi(\tau) \equiv \frac{1}{\tau^2} \int_0^\tau f(\tau_1) \beta\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right) \tau_1 d\tau_1, \quad (2)$$

где $\tau_1 = \frac{\chi z}{\varepsilon_T}$ — безразмерный параметр; $\beta\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)$ — функция, учитывающая изменение ширины сечения.

Используя выражение (2) и закон состояния материала [11] для билинейной аппроксимации диаграммы напряжений

$$\sigma = \sigma_T f(\tau), \quad (3)$$

$$f(\tau) = \begin{cases} \tau, & 0 \leq \tau \leq 1, \\ 1 + a(\tau - 1), & 1 \leq \tau \leq \tau_{\max} \end{cases}, \quad (4)$$

можно получить интегральную функцию закона состояния некоторых сечений, зная их геометрические размеры. Эта интегральная функция характеризует изменение касательной жесткости сечения по высоте при упругопластическом расчете.

Такой подход накладывает определенные ограничения при интегрировании негладких функций. В результате можно получить аналитические выражения осредненной жесткости $T(\tau)$ для относительно простых сечений.

Далее рассмотрим численную реализацию определения осредненной жесткости сечения произвольной формы в зависимости от безразмерного параметра τ в упругопластической зоне работы материала. Для интегрирования по области сложной формы будем использовать метод ячеек. Наложим на область D , определяющую границы сечения, прямоугольную сетку и в интегральную сумму будем включать только те ячейки, все точки которых принадлежат этой области (рис. 1). В результате на порядок будет снижена точность формулы, поэтому для вычис-

Рис. 1. Область сечения

ления интеграла с достаточной точностью требуется сетка с более мелкими ячейками.

Введем логическую матрицу D , элементами которой будут являться нули, если ячейка находится вне контура сечения.

Для упрощения определения этой матрицы рассмотрим определение жесткости на примере прямоугольного сечения, так как сетка будет совпадать с формой сечения. Индексами i и j будет определено число ячеек по высоте и ширине соответственно. Параметрами a и b заданы ширина и высота ячейки. Для прямоугольного сечения их можно выразить через число ячеек и размеры сечения. Предварительно необходимо определить положение нейтральной линии сечения. Тогда для симметричного сечения средняя жесткость в упругопластической зоне будет равна

$$T_k = \sum_{i=1}^i \sum_{j=1}^j \Delta I_{i,j} \cdot E_{i,k}; \quad (5)$$

$$\Delta I_{i,j} = y_{i,j} \Delta A; \quad (6)$$

$$\tau_k = \frac{h}{2y_k}, \quad (7)$$

где ΔA — площадь ячейки; y_k — высота от нейтральной линии до центра ячейки, в которой напряжения превысили предел текучести; E — матрица модулей упругости; k — индекс, определяющий положение пластического модуля упругости в матрице E . В результате получим график зависимости $T(\tau_k)$ (рис. 2).

2. Матрица жесткости стержневого макроэлемента

Теперь рассмотрим получение пластической матрицы жесткости стержневого макроэлемента. Так как здесь не учитывается перемещение от сдвига, то матрицу жесткости стержня можно получить через функции формы (рис. 3):

Рис. 2. График изменения жесткости сечения

Рис. 3. Степени свободы

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l}; N_2 = (1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3});$$

$$N_3 = (x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}); \quad (8)$$

$$N_4 = \frac{x}{l}; N_5 = (\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}); N_6 = (-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}). \quad (9)$$

Продифференцировав потенциальную энергию деформации по перемещениям, получим формулу для определения матрицы жесткости стержневого элемента, работающего на изгиб [12]:

$$\begin{aligned} [K^e] &= EI \int_0^l \frac{d^2[N]^T}{dx^2} \frac{d^2[N]}{dx^2} dx = \\ &= EI \int_0^l \begin{bmatrix} N_2'' \\ N_3'' \\ N_5'' \\ N_6'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_2'' & N_3'' & N_5'' & N_6'' \end{bmatrix} dx = \\ &= EI \int_0^l \begin{bmatrix} N_2'' N_2'' & N_2'' N_3'' & N_2'' N_5'' & N_2'' N_6'' \\ N_3'' N_2'' & N_3'' N_3'' & N_3'' N_5'' & N_3'' N_6'' \\ N_5'' N_2'' & N_5'' N_3'' & N_5'' N_5'' & N_5'' N_6'' \\ N_6'' N_2'' & N_6'' N_3'' & N_6'' N_5'' & N_6'' N_6'' \end{bmatrix} dx. \quad (10) \end{aligned}$$

Заменим EI на $T(t)$ и внесем под знак интеграла. С учетом осевых коэффициентов жесткости получим формулу для определения матрицы жесткости стержня на шаге через функции формы:

$$\begin{aligned} [K^e] &= \\ &= \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{F}{I} N_1' N_1' & 0 & 0 & \frac{F}{I} N_1' N_4' & 0 & 0 \\ 0 & N_2'' N_2'' & N_2'' N_3'' & 0 & N_2'' N_5'' & N_2'' N_6'' \\ 0 & N_3'' N_2'' & N_3'' N_3'' & 0 & N_3'' N_5'' & N_3'' N_6'' \\ \frac{F}{I} N_4' N_1' & 0 & 0 & \frac{F}{I} N_4' N_4' & 0 & 0 \\ 0 & N_5'' N_2'' & N_5'' N_3'' & 0 & N_5'' N_5'' & N_5'' N_6'' \\ 0 & N_6'' N_2'' & N_6'' N_3'' & 0 & N_6'' N_5'' & N_6'' N_6'' \end{bmatrix} \times \\ &\quad \times T(\tau) dx, \quad (11) \end{aligned}$$

где F — площадь сечения; I — момент инерции сечения

Приведение распределенной нагрузки p к эквивалентной на шаге [12]

$$\{P^e\} = \int_0^l [N]^T p \frac{T(\tau)}{EI} dx = p \int_0^l \begin{bmatrix} N_2 \\ N_3 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} \frac{T(\tau)}{EI} dx. \quad (12)$$

После определения коэффициентов жесткости k_{ij} матрица жесткости в глобальной системе координат определяется обычным образом на каждом шаге. Коэффициенты жесткости сходящихся в узле стержней складываются. Затем в инкрементальной форме для приращения нагрузки на шаге решаются для системы в целом уравнения метода конечных элементов и находятся приращения моментов в сечениях $DM(x)$.

Определение приращения кривизн и деформаций по длине стержней:

$$\Delta\chi(x) = \frac{\Delta M(x)}{T(\tau)}, \quad \Delta\varepsilon(x) = \Delta\chi(x) \frac{h}{2}. \quad (13)$$

Определение напряжений и деформаций на временном шаге:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(x) + \Delta\varepsilon(x); \quad (14)$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma(x) + E_{pl}\Delta\varepsilon(x), & \tau > 1 \\ \sigma(x) + E\Delta\varepsilon(x), & \tau \leq 1 \end{cases}. \quad (15)$$

Далее происходит формирование новой локальной матрицы жесткости стержневого элемента посредством интегрирования (11), с учетом изменения жесткости в сечении. И цикл повторяется.

3. Результаты численного эксперимента

Для численного решения плоской задачи с большим количеством стержневых макроэлементов были приняты следующие исходные данные: модуль упругости $E = 2,1 \times 10^{11}$ Па; касательный модуль упругости $E = 2,1 \times 10^{10}$ Па; коэффициент Пуассона $\eta = 0,3$; предел текучести $\sigma = 240$ МПа; размеры стержней $l = 6$ м, $h = 3$ м; высота прямоугольного сечения $a = 0,1$ м; ширина $b = 0,2$ м; сосредоточенная сила в верхнем левом углу $F = 2 \times 10^5$ Н. Расчет проводился за 10 шагов, число конечных элементов на стержне 100 (рис. 4). Результаты приведены в таблице.

Результаты физически нелинейного расчета

Метод Модель	Аналитический			МКЭ (BEAM 188)			$\sigma, \%$	$\Delta, \%$
	$\sigma, \text{МПа}$	$\Delta, \text{мм}$	$t, \text{с}$	$\sigma, \text{МПа}$	$\Delta, \text{мм}$	$t, \text{с}$		
100 эл.	315	1130	3	304	1133	21	3,6	0,3

Рис. 4. Распределение суммарных напряжений в плоской раме

Выводы

Применение дискретно-аналитического метода позволяет на порядок снизить время упругопластического расчета, а также повысить точность результатов за счет замены конечных элементов в пределах стержня на участки интегрирования и использования аналитических выражений для касательной жесткости сечения стержня.

Не всегда можно получить аналитические выражения для сечений сложной формы, поэтому целесообразно использовать универсальный численный алгоритм для определения касательной жесткости сечения любой формы. Чтобы повысить точность интегрирования по области, можно использовать квадратурные формулы Гаусса [13].

Библиографический список

1. Секулович М. Метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1993. 664 с.
2. Meleshko V. A. Generalized force method on the example of plane geometrically nonlinear problem // *Procedia Structural Integrity*. 2017. Vol. 6. Pp. 115–121.
3. Meleshko V. A., Rutman Yu. L. Generalized flexibility method by the example of plane elastoplastic problem // *Procedia Structural Integrity*. 2017. Vol. 6. Pp. 140–145.
4. Рутман Ю. Л. Учет упрочнения в упругопластической макромодели // Вестник гражданских инженеров. 2013. № 4 (39). С. 110–113.
5. Рутман Ю. Л. Модель сложного упругопластического деформирования механической системы с несколькими степенями свободы // Вестник гражданских инженеров. 2012. № 1 (30). С. 117–120.
6. Лалин В. В., Беляев М. О. Изгиб геометрически нелинейного консольного стержня. Решение по теориям Кирхгофа и Коссера–Тимошенко // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1 (53). С. 39–55.
7. Meleshko V. A. Hybrid model for determining the stiffness of a spatial rod with consideration geometric nonlinearity // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. 1074:012075.
8. Ковалева Н. В., Скворцов В. Р., Рутман Ю. Л. Определение параметров силовой диаграммы пластически деформируемых элементов конструкции // Сб. тр. 22-й Междунар. конф. «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов». СПб.: НИЦ «МОРИНТЕХ», 2007. С. 220–225.
9. Островская Н. В. Определение параметров силовой диаграммы пластически деформируемого кри-

волинейного стержня круглого сечения // Вестник гражданских инженеров. 2015. № 4 (51). С. 68–73.

10. Островская Н. В., Мелешко В. А. Аналитические зависимости для касательных жесткостей сечений при упругопластическом расчете плоских стержневых систем // Морские интеллектуальные технологии. 2017. № 4-1 (38). С. 183–188.

11. Островская Н. В., Рутман Ю. Л. Линеаризация силовых характеристик пластических демпферов, применяемых в системах сейсмоизоляции // Морские интеллектуальные технологии. 2016. № 2-1 (32). С. 89–94.

12. Лукашевич А. А. Нелинейные задачи строительной механики. СПб.: СПбГАСУ, 2016. 136 с.

13. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.

References

1. Sekulovich M. *Metod konechnykh elementov* [Finite element method]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1993, 664 p.
2. Meleshko V. A. Generalized force method on the example of plane geometrically nonlinear problem. *Procedia Structural Integrity*, 2017, vol. 6, pp. 115–121.
3. Meleshko V. A., Rutman Yu. L. Generalized flexibility method by the example of plane elastic-plastic problem. *Procedia Structural Integrity*, 2017, vol. 6, pp. 140–145.
4. Rutman Yu. L. *Uchet uprochneniya v uprugoplasticheskoy makromodeli* [Accounting the hardening the elastic-plastic macromodel]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2013, no. 4 (39), pp. 110–113.
5. Rutman Yu. L. *Model' slozhnogo uprugoplasticheskogo deformirovaniya mekhanicheskoy sistemy s neskol'kimi stepenyami svobody* [The complex plastic-elastic deformation model of mechanical multiple freedom degree system]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2012, no. 1 (30), pp. 117–120.
6. Lalin V. V., Belyaev M. O. *Izhib geometricheski nelineynogo konsol'nogo stержnya. Reshenie po teoriyam Kirkhgofa i Kossera – Timoshenko* [Bending of a geometrically nonlinear cantilever rod. The solution according to the theories of Kirchhoff and Kossar - Timoshenko]. *Inzhenerno-stroitel'niy zhurnal – Civil Engineering Journal*, 2015, no. 1 (53), pp. 39–55.
7. Meleshko V. A. Hybrid model for determining the stiffness of a spatial rod with consideration geometric nonlinearity. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, 1074:012075.
8. Kovaleva N. V., Skvortsov V. R., Rutman Yu. L. *Opredelenie parametrov silovoy diagrammy plasticheski deformiruemyykh elementov konstruktsii* [Determination of the parameters of the force diagram of plastically deformable structural elements]. *Trudy 22-y Mezhdunar. konf.*

«*Matematicheskoe modelirovanie v mekhanike sploshnykh sred. Metody granichnykh i konechnykh elementov*» [Proceedings of the 22-nd International conference “Mathematical modeling in continuum mechanics. Methods of boundary and finite elements”]. St. Petersburg, NITs «MORINTEKh» Publ., 2007, pp. 220–225.

9. Ostrovskaya N. V. *Opredelenie parametrov silovoy diagrammy plasticheski deformiruemogo krivolinyenogo sterzhnya kruglogo secheniya* [Determination of the force-deformation response of plastically deformable round section curvilinear core]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2015, no. 4 (51), pp. 68–73.

10. Ostrovskaya N. V., Meleshko V. A. *Analiticheskie zavisimosti dlya kasatel'nykh zhestkostey secheniy pri uprugoplasticheskom raschete ploskikh sterzhnevyykh sistem*

[Analytical dependences for tangential stiffness of sections in the elastic-plastic calculation of flat rod systems]. *Morskie intellektual'nye tekhnologii – Marine Intelligent Technologies*, 2017, no. 4–1 (38), pp. 183–188.

11. Ostrovskaya N. V., Rutman Yu. L. *Linearizatsiya silovykh kharakteristik plasticheskikh dempferov, primenyaemykh v sistemakh seysmoizolyatsii* [Linearization of power characteristics of plastic dampers used in seismic isolation systems]. *Morskie intellektual'nye tekhnologii – Marine Intelligent Technologies*, 2016, no. 2–1 (32), pp. 89–94.

12. Lukashevich A. A. *Nelineynye zadachi stroitel'noy mekhaniki* [Nonlinear problems of structural mechanics]. St. Petersburg, SPbGASU Publ., 2016, 136 p.

13. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 600 p.