Строительная механика и расчет сооружений

УДК 624.044.3: 514.75:539.37

© Ю. Л. Рутман, д-р техн. наук, профессор
© В. А. Мелешко, канд. техн. наук
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Россия)
E-mail: vl-meleshko@yandex.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2021-18-3-76-83

© Yu. L. Rutman, Dr. Sci. Tech., Professor
© V. A. Meleshko, PhD in Sci. Tech.
(Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering,
St. Petersburg, Russia)
E-mail: vl-meleshko@yandex.ru

СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ В СЕЧЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННО КРИВОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ДОПУЩЕНИЯХ

RATE OF DEFORMATION IN THE CROSS SECTION OF A SPATIALLY CURVED ROD WITH VARIOUS ASSUMPTIONS

Предложены инкрементальные зависимости, связывающие кинематические параметры со скоростями деформаций. Эти зависимости позволяют определять скорости деформаций на элементарных площадках сечения пространственно криволинейного стержня, учитывать деформацию сечения в своей плоскости вследствие сдвига и деформацию сечения при кручении. Установление связей между скоростями деформаций и скоростями кинематических параметров позволяет реализовать метод нелинейного расчета стержневых систем на основе интегральных выражений. В последующем эти соотношения будут использованы для определения касательных жесткостей сечения стержневого элемента при упругопластическом расчете.

Ключевые слова: стержневые системы, скорости деформаций, кинематические параметры, кривизна, сдвиг, векторно-тензорный анализ.

The article considers incremental relations connecting the changes in the kinematic parameters of the rod cross section with the deformation rate. These relations allow assessing the deformation rate on the elemental areas of a spatially curved rod, as well as considering the distortion of cross-section in its plane due to shear and torsion. Assessment of such relations between deformation rates and the rates of kinematic parameters allows developing the method of nonlinear calculation of rod systems based on integral expressions. Subsequently, these relations will be used for assessing the tangential stiffness of the rod element cross-section subjected to elastic-plastic calculation.

Keywords: rod systems, rate of deformation, kinematic parameters, curvature, shear, vector-tensor analysis.

Введение

В большинстве случаев для решения упругопластических задач используются компьютерные программы, основанные на методе конечных элементов (МКЭ). При решении МКЭ нелинейных задач, связанных с анализом напряженно-деформированного состояния в конструкциях, время расчета растет непропорционально размерности задачи, что является проблемой при проектировании. Из последних работ по упругопластическому расчету конструкций можно вы-

делить [1–6]. В работах [7–9] приведены сравнения результатов расчета с численными методами. Аналитическое решение статистически определенной стержневой системы с физической нелинейностью рассмотрено в [10–11]. В физически нелинейных задачах материал конструкции деформируется нелинейно. Закон деформирования может быть с различными пределами сопротивления при растяжении и сжатии. Если перемещения соизмеримы с размерами конструкции, то необходимо учитывать геометрическую нелинейность.

Зависимость между деформациями и перемещениями нелинейная. Следует выделить конструктивную нелинейность, которая связана с изменением расчетной схемы при изменении нагрузки.

Аналитическое решение нелинейной задачи получить достаточно сложно, так как здесь приходится учитывать деформированное состояние рассматриваемой области, поэтому расчет выполняется с помощью метода конечных элементов при использовании деформационной теории пластичности совместно с шаговыми методами или итерационными процедурами поиска [12, 13]. В работах [14–15] предложено решение упругопластических задач с помощью обобщения классических методов строительной механики — метода сил и метода перемещений для стержневых расчетных схем. Такое обобщение предполагает использование шаговых методов нагружения для определения касательных жесткостей системы.

Отличие обобщенных методов от МКЭ заключается в исключении конечных элементов при формировании системы алгебраических уравнений и замене их участками, на которых происходит интегрирование распределенных параметров жесткости. Такой подход позволяет ограничить время решения упругопластических задач.

Целью данной работы было определение скоростей деформаций на элементарных площадках сечения стержня через кинематические параметры. Полученные зависимости в дальнейшем будут использованы для определения касательных жесткостей [14, 15] стержневой системы при нелинейном анализе на основе теории пластического течения, то есть напряжения будут выражены через деформации в сечении стержня на временном шаге.

Формулы, связывающие в пространственно криволинейном стержне кинематические параметры со скоростями деформаций (точнее, с малыми деформациями), существуют в литературе [16]. Однако, полученные геометрическим путем, эти формулы содержат неточности. Незначительные, как правило, в вычислительном плане, они оказываются принципиальными с методологической точки зрения, так как не позволяют достичь искомого результата — обобщенных на случай геометрически и физически нелинейной

задачи формул Мора [14, 17]. Указанных неточностей не будет, если скорости деформаций вычислять методами векторно-тензорного анализа [18]. Соответствующие выводы приведены ниже.

Определение деформаций в сечении пространственно криволинейного стержня на временном шаге

Чтобы найти зависимости скоростей деформаций от кинематических параметров, выполним следующие операции:

- запишем формулу, выражающую вектор скорости точек сечения стержня;
- введем криволинейную (цилиндрическую) систему координат, в которой одним из семейств координатных линий являются продольные волокна (продольные волокна — геометрическое место точек стержня, имеющих во всех сечениях одинаковые координаты в системе главных осей);
- найдем абсолютную производную [18] вектора скорости в указанной системе криволинейных координат.

Полученный в результате этих операций тензор второй валентности будет тензором скоростей деформаций в вышеописанной системе координат. Переход к другой системе координат осуществляется по обычным правилам преобразования компонент тензора.

Запишем формулу для скорости точек сечения стержня:

$$U = \omega_1 \times (\xi \cdot n_1 + \eta \cdot n_2) + V, \quad (1)$$

где $U(s, t)$ — вектор скорости точки с координатами ξ, η в системе главных осей сечения; $V(s, t)$ — вектор скорости точки на оси стержня в рассматриваемом сечении; $\omega_1(s, t)$ — вектор угловой скорости сечения; n_1, n_2 — единичные вектора, направленные вдоль главных осей сечения; ξ, η — координаты рассматриваемой точки в системе главных осей (рис. 1); s — продольная координата стержня; t — временной шаг.

Любую пространственную кривую на малом отрезке можно аппроксимировать (с точностью до третьего порядка) окружностью, лежащей в соприкасающейся плоскости [19]. Поэтому для вычисления скоростей деформаций в окрестности рассматриваемой точки можно ввести цилиндрическую систему координат (рис. 2), ориентированную следующим образом:

Рис. 1. Сечение стержня

Рис. 2. Цилиндрическая система координат $\rho\theta z$

- координату u_1 направить по нормали к рассматриваемому продольному волокну;
- координату u_2 направить по касательной к продольному волокну;
- координату u_3 направить по бинормали к продольному волокну.

В такой системе координат компоненты $a_{i,k}$ тензора, являющегося абсолютной производной вектора, имеют вид [18]:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \frac{\partial a_1}{\partial u_1}, & a_{1,2} &= \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_1}{\partial u_2} - \frac{a_2}{u_1}, & a_{1,3} &= \frac{\partial a_1}{\partial u_3}, \\ a_{2,1} &= \frac{\partial a_2}{\partial u_1}, & a_{2,2} &= \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} - \frac{a_1}{u_1}, & a_{2,3} &= \frac{\partial a_2}{\partial u_3}, \\ a_{3,1} &= \frac{\partial a_3}{\partial u_1}, & a_{3,2} &= \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_3}{\partial u_2}, & a_{3,3} &= \frac{\partial a_3}{\partial u_3}, \end{aligned} \quad (2)$$

где a_i — компоненты дифференцируемого вектора в вышеуказанной цилиндрической системе координат. Если дифференцируемый вектор определяется формулой (1), то $a_{i,k}$ в (2) есть скорости деформаций рассматриваемой точки в системе координат u_1, u_2, u_3 .

Чтобы не загромождать дальнейшее изложение, рассмотрим только определение скорости продольной деформации:

$$\dot{\varepsilon}_{u_2, u_2} = a_{2,2} = \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} - \frac{a_1}{u_1}. \quad (3)$$

Введем обозначения: $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$ — единичные векторы касательной, нормали и бинормали к рассматриваемому продольному волокну; s^* — длина рассматриваемого продольного волокна; χ_1^*, χ_3^* — кручение и кривизна рассматриваемого продольного волокна соответственно.

Заметим, что при отсутствии естественного первоначального кручения и пренебрежения влиянием крутильной деформации на направление продольных волокон, орты $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$ сов-

падают с $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — ортами естественного триэдра оси стержня.

С учетом введенных обозначений можно записать

$$u_1 \partial u_2 = \rho \partial \theta = \partial s^*; \quad (4)$$

$$a_1 = \mathbf{e}_2^* U; \quad (5)$$

$$\frac{1}{u_1} = \chi_3^*; \quad (6)$$

$$\dot{\varepsilon}_{u_2, u_2} = \mathbf{e}_1^* \frac{\partial' U}{\partial s^*} + \chi_3^* \cdot \mathbf{e}_2^* \cdot U. \quad (7)$$

С учетом $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} = \frac{\partial' \mathbf{a}}{\partial s} + \chi \cdot \mathbf{a}$ [20, 21] и используя свойства смешанного векторного произведения, получим

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{u_2, u_2} &= \mathbf{e}_1^* \left(\frac{\partial U}{\partial s^*} - \chi^* \cdot U \right) + \chi_3^* \cdot \mathbf{e}_2^* \cdot U = \\ &= \mathbf{e}_1^* \frac{\partial U}{\partial s^*} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \chi_1^* & \chi_3^* \\ U_1 & U_2 & U_3 \end{vmatrix} + \chi_3^* \cdot U_1 = \mathbf{e}_1^* \frac{\partial U}{\partial s^*}. \end{aligned} \quad (8)$$

Вычислим $\partial U / \partial s^*$, используя (1):

$$\frac{\partial U}{\partial s^*} = \frac{\partial \omega_1}{\partial s^*} (\xi \cdot \mathbf{n}_1 + \eta \cdot \mathbf{n}_2) + \omega_1 \left(\xi \frac{\partial \mathbf{n}_1}{\partial s^*} + \eta \frac{\partial \mathbf{n}_2}{\partial s^*} \right) + \frac{\partial V}{\partial s^*}. \quad (9)$$

Чтобы продолжить преобразование (8), запишем следующие равенства [20, 21]:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} = \omega \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} \mathbf{e}_1; \quad (10)$$

$$\frac{\partial' \chi^{(1)}(s)}{\partial t} = \frac{\partial \omega_1(s)}{\partial s}; \quad (11)$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2; \quad (12)$$

$$\frac{\partial \omega_1(s)}{\partial s^*} = \frac{\partial s}{\partial s^*} \frac{\partial \omega_1(s)}{\partial s} = \frac{\partial s}{\partial s^*} \frac{\partial' \chi^{(1)}(s)}{\partial t}; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s^*} &= \frac{\partial s}{\partial s^*} \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial s}{\partial s^*} \left[(\omega_1 + \omega_2) \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} \mathbf{e}_1 \right] = \\ &= \frac{\partial s}{\partial s^*} \left(\omega_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} \mathbf{e}_1 \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где ω_1 — составляющая вектора угловой скорости, обусловленная изгибом и кручением стержня, т. е. вращательными движениями сечения; ω_2 — составляющая вектора угловой скорости, обусловленная поступательными движениями сечения вследствие сдвига; $w(s)$ — вектор продольной (направленной по касательной) скорости сечения; $\frac{\partial'}{\partial t}, \frac{\partial'}{\partial s}$ — частные производные вектора в местной (подвижной) системе координат стержня.

В (13) было использовано очевидное соотношение $\omega'_2 e_1 = 0$. Вычислим также e_1^* :

$$\frac{\partial r(s)}{\partial s} = e_1; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} e_1^* &= \frac{\partial}{\partial s^*} (r + \xi \cdot n_1 + \eta \cdot n_2) = \\ &= \frac{\partial s}{\partial s^*} \left(e_1 + \xi \frac{\partial n_1}{\partial s} + \eta \frac{\partial n_2}{\partial s} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где $r(s)$ — полярные радиус-векторы точек на оси стержня с полюсом в B (рис. 3).

Введем обозначения: j — угол поворота главных осей сечения относительно ортов естественного триэдра оси стержня e_2, e_3 ; $\hat{\chi}_3, \hat{\chi}_1$ — кривизна и кручение (соответственно) оси стержня, т. е. ненулевые компоненты вектора c в системе осей естественного триэдра; χ_2, χ_3, χ_1 — компоненты вектора c в системе осей, связанных с сечением стержня. Используя известные зависимости [20]:

$$\frac{\partial e_2}{\partial s} = -\hat{\chi}_3 e_1 + \hat{\chi}_1 e_3; \quad (17)$$

$$\frac{\partial e_3}{\partial s} = -\hat{\chi}_1 e_2, \quad (18)$$

а также вытекающие из определения φ' соотношения, получим

$$n_1 = e_2 \cos \varphi + e_3 \sin \varphi; n_2 = -e_2 \sin \varphi + e_3 \cos \varphi; \quad (19)$$

$$\chi_3 = \hat{\chi}_3 \sin \varphi; \chi_2 = \hat{\chi}_3 \cos \varphi. \quad (20)$$

После несложных преобразований (16) получим

$$e_1^* = \frac{\partial s}{\partial s^*} \left[e_1 (1 + \eta \cdot \chi_3 - \xi \cdot \chi_2) + \chi_1 (\xi \cdot n_2 - \eta \cdot n_1) \right]. \quad (21)$$

Вернемся снова к (8). Применяя (9)–(14), (21), имеем

$$\begin{aligned} \dot{e}_{u_2, u_2} &= e_1^* \frac{\partial U}{\partial s^*} = \left(\frac{\partial s}{\partial s^*} \right)^2 \times \\ &\times \left[e_1 (1 + \eta \cdot \chi_3 - \xi \cdot \chi_2) + \chi_1 (\xi \cdot n_2 - \eta \cdot n_1) \right] \times \\ &\times \left[\frac{\partial' \chi^{(1)}(s)}{\partial t} (\xi \cdot n_1 + \eta \cdot n_2) + \right. \\ &+ \omega_1 \left(\xi \frac{\partial n_1}{\partial s^*} + \eta \frac{\partial n_2}{\partial s^*} \right) + \left(\omega_1 \cdot e_1 + \frac{\partial w}{\partial s} e_1 \right) \left. \right] = \\ &= \left(\frac{\partial s}{\partial s^*} \right)^2 \left[e_1 (1 + \eta \cdot \chi_3 - \xi \cdot \chi_2) + \chi_1 (\xi \cdot n_2 - \eta \cdot n_1) \right] \times \\ &\times \left[\frac{\partial' \chi^{(1)}(s)}{\partial t} (\xi \cdot n_1 + \eta \cdot n_2) + \right. \\ &+ \omega_1 \left(\xi \frac{\partial n_1}{\partial s^*} + \eta \frac{\partial n_2}{\partial s^*} + e_1 \right) + \frac{\partial w}{\partial s} e_1 \left. \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Для завершения преобразований (22) заметим, что из (16) с учетом (21) следует:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial s}{\partial s^*} \right)^2 \left[e_1 (1 + \eta \cdot \chi_3 - \xi \cdot \chi_2) + \chi_1 (\xi \cdot n_2 - \eta \cdot n_1) \right] \omega_1 \times \\ \times \left(\xi \frac{\partial n_1}{\partial s^*} + \eta \frac{\partial n_2}{\partial s^*} + e_1 \right) = e_1^* \cdot \omega_1 \times e_1^* = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

в соответствии со свойствами смешанного векторного произведения.

Рис. 3. Схема направления векторов при деформировании стержня

Используя (23), а также взаимную ортогональность $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ после очевидных преобразований (22), получим

$$\dot{\mathbf{e}}_{u_2, u_2} = \left(\frac{\partial s}{\partial s^*} \right)^2 \times \left[(1 + \eta \chi_3 - \xi \chi_2) \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial' \chi_2^{(1)}(s)}{\partial t} \xi + \frac{\partial' \chi_3^{(1)}(s)}{\partial t} \eta \right) + \frac{\partial' \chi_1^{(1)}(s)}{\partial t} \chi_1 (\xi^2 + \eta^2) \right]; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial s^*} &= \left| \frac{\partial}{\partial s} (r + \xi \cdot \mathbf{n}_1 - \eta \cdot \mathbf{n}_2) \right| = \\ &= \left| \mathbf{e}_1 (1 + \eta \cdot \chi_3 - \xi \cdot \chi_2) + \chi_1 (\xi \cdot \mathbf{n}_1 - \eta \cdot \mathbf{n}_2) \right| = \\ &= \sqrt{(1 + \eta \cdot \chi_3 - \xi \cdot \chi_2)^2 + \chi_1^2 (\xi^2 + \eta^2)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_{u_2, u_2} &= \frac{1}{(1 + \eta \cdot \chi_3 - \xi \cdot \chi_2)^2 + \chi_1^2 (\xi^2 + \eta^2)} \times \\ &\times \left[(1 + \eta \cdot \chi_3 - \xi \cdot \chi_2) \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial' \chi_2^{(1)}(s)}{\partial t} \xi + \frac{\partial' \chi_3^{(1)}(s)}{\partial t} \eta \right) + \frac{\partial' \chi_1^{(1)}(s)}{\partial t} \chi_1 (\xi^2 + \eta^2) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично из формул (1) и (2) можно получить скорости сдвиговых деформаций сечений стержня:

$$\dot{\gamma}_{\eta, \xi} = \frac{1}{(1 + \eta \chi_3 - \xi \chi_2)} \left(\dot{\gamma}_2 + \frac{\partial' \chi_1^{(1)}(s)}{\partial t} \xi \right); \quad (27)$$

$$\dot{\gamma}_{\xi, \zeta} = \frac{1}{(1 + \eta \cdot \chi_3 - \xi \cdot \chi_2)} \left(\dot{\gamma}_3 - \frac{\partial' \chi_1^{(1)}(s)}{\partial t} \eta \right), \quad (28)$$

где ζ — ось, перпендикулярная сечению (соответствующая орту $\mathbf{e}_1$); η , ξ — расположены в плоскости сечения; γ'_2 , γ'_3 — компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}_2$ в системе координат ξ , η , ζ :

$$\boldsymbol{\omega}_2 = [0 \ \dot{\gamma}_2 \ \dot{\gamma}_3]^T. \quad (29)$$

Рассмотрим особенности геометрических соотношений, полученных выше. Решение для стержневой системы геометрически нелинейной задачи на основе использования (26)–(28) при учете в условиях изгиба сдвиговых деформаций приводит к следующим вариантам:

- сечения, состоящие из одних и тех же материальных точек, в течение всего процесса де-

формации остаются плоскими. Следовательно, за счет деформаций сдвига появляется конечный угол между сечением и осью стержня. При таком подходе к описанию деформаций нормальная ось сечения ζ и ось стержня не совпадают;

- сечения стержня, с которыми связаны оси ξ , η , считаются перпендикулярными оси стержня, т. е. ось ζ и ось стержня совпадают. В этом случае при наличии сдвигов материальные точки, составляющие плоское сечение, непрерывно меняются в процессе деформаций (т. е. в разные моменты времени «плоские» сечения состоят из неодинаковых материальных точек).

Таким образом, модель С. П. Тимошенко оказывается верна лишь «в малом» при установлении связей между скоростями деформаций и кинематических параметров. В другом случае эта модель недействительна, и сечения, состоящие из одних и тех же материальных точек, становятся вследствие сдвигов неплоскими. Разница между двумя вариантами математически выражается в следующем: в первом варианте конечные углы поворота сечения определяются интегрированием уравнений Эйлера, исходя из изменения во времени компонент $\boldsymbol{\omega}_1$; во втором варианте эти углы определяются исходя из компонент суммарного вектора $\boldsymbol{\omega}$ (12).

Основные результаты и выводы

Приведенная выше методика позволяет в рамках теории стержней Кирхгофа–Клебша определять скорости деформаций внутри сечения пространственно криволинейного стержня с различными допущениями при деформировании. Таким образом, можно получить обобщение зависимостей (26)–(28). Учтем деформацию сечения в своей плоскости вследствие сдвига и депланацию сечения вследствие кручения. Приведем соответствующие зависимости:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_{\xi, \zeta} = \dot{\mathbf{e}}_{u_2, u_2} &= \frac{1}{A^2 + \chi_1^2 (\xi^2 + \eta^2)} \times \\ &\times \left[A \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \dot{\chi}_2^{(1)} \cdot \xi + \dot{\chi}_3^{(1)} \cdot \eta \right) + \dot{\chi}_1^{(1)} \cdot \chi_1 (\xi^2 + \eta^2) \right]; \end{aligned} \quad (30a)$$

$$\dot{\gamma}_{\eta, \xi} = \frac{1}{A} \left[\dot{\gamma}_2 \cdot f_2(\xi, \eta) + \dot{\chi}_1^{(1)} \left(\xi + \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \right]; \quad (30b)$$

$$\dot{\gamma}_{\xi, \zeta} = \frac{1}{A} \left(\dot{\gamma}_3 \cdot f_3(\xi, \eta) + \dot{\chi}_1^{(1)} \left(-\eta + \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \right); \quad (30b)$$

$$\frac{\partial \chi^{(1)}(s)}{\partial t} = \begin{Bmatrix} \dot{\chi}_1^{(1)} \\ \dot{\chi}_2^{(1)} \\ \dot{\chi}_3^{(1)} \end{Bmatrix}; \quad (31)$$

$$A = (1 + \eta \cdot \chi_3 - \xi \cdot \chi_2), \quad (32)$$

где ζ, η, ξ — координаты точек стержня в системе ортогональных осей, связанных с сечением стержня; $u(\xi, \eta)$ — функция, определяющая деформацию сечения при кручении; $f_2(\xi, \eta)$, $f_3(\xi, \eta)$ — функции, определяющие распределение по площади сечения F сдвиговых деформаций и удовлетворяющие условиям

$$\frac{1}{F} \int_F f_2(\xi, \eta) dF = \frac{1}{F} \int_F f_3(\xi, \eta) dF = 1. \quad (33)$$

Выбирая вид этих функций, можно получить различные модели деформирования сечений стержня. Однако такого рода обобщения не являются принципиальными для развиваемой в данном разделе теории. Поэтому в дальнейшем будем использовать зависимости между скоростями деформаций и кинематическими параметрами в форме (26)–(28).

С учетом (31), (32) запишем (26)–(28) в более компактной форме:

$$\dot{\epsilon}_{\zeta, \zeta} = \frac{1}{A^2 + B^2} \times \left[A \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \dot{\chi}_2^{(1)} \xi + \dot{\chi}_3^{(1)} \eta \right) + \dot{\chi}_1^{(1)} B \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \right]; \quad (34a)$$

$$\dot{\gamma}_{\eta, \xi} = \frac{1}{A} (\dot{\gamma}_2 + \dot{\chi}_1^{(1)} \xi); \quad (34b)$$

$$\dot{\gamma}_{\xi, \zeta} = \frac{1}{A} (\dot{\gamma}_3 - \dot{\chi}_1^{(1)} \eta); \quad (34b)$$

$$B = \chi_1 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \quad (35)$$

Равенства (34) соответствуют модели С. П. Тимошенко. Обычно можно использовать упрощенный вариант, принимая $A = 1$, $B = 0$, что соответствует стержням с отсутствием естественного закручивания и большими (по сравнению с размерами сечения) радиусами кривизны. Тогда выражения (34) можно представить в следующем виде:

$$\dot{\epsilon} = S \dot{\Psi}; \quad (36)$$

$$\dot{\Psi} = \begin{bmatrix} \dot{\chi}_1^{(1)} & \dot{\chi}_2^{(1)} & \dot{\chi}_3^{(1)} & \frac{\partial w}{\partial s} & \dot{\gamma}_3 & -\dot{\gamma}_2 \end{bmatrix}^T; \quad (37)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\xi & \eta & 1 & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\eta & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Отметим, что установление линейных связей между скоростями деформаций и скоростями кинематических параметров позволяет развить метод нелинейного расчета стержневых систем на основе интегральных выражений при любых зависимостях типа (34). Полученные геометрические соотношения для скоростей деформаций позволяют учитывать распределение сдвиговых деформаций по площади сечения и могут учитывать деформацию сечения при кручении. Используя систему уравнений (36), можно в полной мере реализовать дискретно-аналитический нелинейный анализ стержневых систем. В работах [15, 22–27] приведены результаты нелинейного расчета стержневых систем в такой постановке.

Библиографический список

1. Shiwua J. A., Rutman Yu. L. Assessment of seismic input energy by means of new definition and the application to earthquake resistant design // *Architecture and Engineering*. 2016. Vol. 1, No 4. Pp. 26–35.
2. Рутман Ю. Л. Учет упрочнения в упругопластической макромодели // *Вестник гражданских инженеров*. 2013. № 4 (39). С. 110–113.
3. Рутман Ю. Л., Ниджад А. Я. Исследование поверхностей текучести для рамных конструкций // *Вестник гражданских инженеров*. 2013. № 3 (38). С. 87–92.
4. Рутман Ю. Л. Модель сложного упругопластического деформирования механической системы с несколькими степенями свободы // *Вестник гражданских инженеров*. 2012. № 1 (30). С. 117–120.
5. Рутман Ю. Л., Шивуа А. Дж. Оценка сейсмической энергии, поступившей в упругопластическую систему с одной степенью свободы // *Вестник гражданских инженеров*. 2015. № 2 (49). С. 64–74.
6. Рутман Ю. Л. Упругопластическая макромодель и её применение к расчету рамных конструкций на сейсмические воздействия // *Труды 5-й международной конференции «Актуальные проблемы архитектуры и строительства»*. СПб.: СПбГАСУ, 2013. С. 416–423.
7. Островская Н. В., Рутман Ю. Л., Грунин В. В. Сопоставление результатов конечно-элементного расчета характеристик пластического демпфера с экспериментом // *Морские интеллектуальные технологии*. 2016. № 4-1 (34). С. 28–34.
8. Рутман Ю. Л., Ниджад А. Я. Проверка адекватности метода макромодели // *Вестник гражданских инженеров*. 2012. № 3 (32). С. 137–142.

9. Симборт Э. Сравнение динамических упруго-пластических расчетов, выполненных по одностепенной модели и по модели со многими степенями свободы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6 (24). С. 23–27.
10. Еленицкий Э. Я. Аналитическое решение для стержневой системы с учетом упругопластических свойств материала // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 3. С. 27–34.
11. Лалин В. В., Беляев М. О. Изгиб геометрически нелинейного консольного стержня. Решение по теориям Кирхгофа и Коссера–Тимошенко // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1 (53). С. 39–55.
12. Лукашевич А. А. Нелинейные задачи строительной механики. СПб.: СПбГАСУ, 2016. 136 с.
13. Лукаш П. А. Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. 204 с.
14. Rutman U. L., Meleshko V. A. The generalization of the flexibility method for elastoplastic computation of rod systems // Materials physics and mechanics. 2017. Vol. 31. No 1-2. Pp. 67–70.
15. Rutman Yu. L., Meleshko V. A. Strength computation of rod systems with the consideration of physical nonlinearity using the generalized flexibility method GFM. The results are compared with FEM // Eastern European Scientific Journal. 2015. No 6. Pp. 150–160.
16. Филин А. П., Тананайко О. Д., Чернева И. М., Шварц М. А. Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем / под ред. А. П. Филина. Л.: Стройиздат, 1983. 232 с.
17. Вольмир А. С., Григорьев Ю. П., Станкевич А. И. Сопротивление материалов / под ред. Д. И. Макаревича. М.: Дрофа, 2007. 591 с.
18. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. М.: Физматлит, 2003. 304 с.
19. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 176 с.
20. Светлицкий В. А. Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978. 222 с.
21. Мелешко В. А., Шмидт А. Б. Кинематические соотношения для пространственно криволинейного стержня // Морские интеллектуальные технологии. 2018. № 3-1 (41). С. 233–237.
22. Meleshko V. A. Generalized force method on the example of plane geometrically nonlinear problem // Procedia Structural Integrity. 2017. Vol. 6. Pp. 115–121.
23. Meleshko V. A., Rutman Y. L. Generalized flexibility method by the example of plane elastoplastic problem // Procedia Structural Integrity. 2017. Vol. 6. Pp. 140–145.
24. Островская Н. В., Мелешко В. А. Аналитические зависимости для касательных жесткостей сечений при упругопластическом расчете плоских стержневых систем // Морские интеллектуальные технологии. 2017. № 4-1 (38). С. 183–188.
25. Ковалева Н. В., Скворцов В. Р., Рутман Ю. Л. Определение параметров силовой диаграммы пластически деформируемых элементов конструкции // Сб. тр. 22-й Междунар. конф. «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов». СПб.: НИЦ «МОРИН-ТЕХ», 2007. С. 220–225.
26. Meleshko V. A. Hybrid model for determining the stiffness of a spatial rod with consideration geometric nonlinearity // Journal of Physics: Conference Series. 2018. 1074:012075.
27. Meleshko V. A., Rutman Yu. L. Force method development in structural mechanics for the nonlinear tasks. FEM hybrid models // Conference Proceedings: 6th European Conference on Computational Mechanics (ECCM 6) 7th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD 7). International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Barcelona, Spain, 2018. Pp. 719–729. ISBN: 978-84-947311-6-7.

References

1. Shiwua J. A., Rutman Yu. L. Assessment of seismic input energy by means of new definition and the application to earthquake resistant design. *Architecture and Engineering*, 2016, vol. 1, no 4, pp. 26–35.
2. Rutman Yu. L. *Uchet uprochneniya v uprugoplasticheskoy makromodeli* [Consideration of hardening in the elastic-plastic macromodel]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2013, no. 4 (39), pp. 110–113.
3. Rutman Yu. L., Nidzhad A. Ya. *Issledovanie poverkhnostey tekuchesti dlya ramnykh konstruktсий* [Study of surface flowability for frame structures] *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2013, no. 3 (38), pp. 87–92.
4. Rutman Yu. L. *Model' slozhnogo uprugoplasticheskogo deformirovaniya mekhanicheskoy sistemy s neskol'kimi stepenyami svobody* [Model of complex elastic-plastic deformation of a mechanical system with several degrees of freedom]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2012, no. 1 (30), pp. 117–120.
5. Rutman Yu. L., Shiwua A. Dzh. *Otsenka seysmicheskoy energii, postupivshey v uprugoplasticheskuyu sistemu s odnoy stepen'yu svobody* [Estimation of the seismic energy received in an elastic-plastic system with one degree of freedom]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2015, no. 2 (49), pp. 64–74.
6. Rutman Yu. L. *Uprugoplasticheskaya makromodel' i eyo primeneniye k raschetu ramnykh konstruktсий na seysmicheskie vozdeystviya* [Elastic-plastic macro-model and its application to the calculation of frame structures for seismic impacts]. *Trudy 5-y mezhduнародной konferentsii «Aktual'nye problemy arkhitektury i stroitel'stva»*

[Proceedings of the 5-th International conference "Actual Problems of Architecture and Construction"]. St. Petersburg, SPbGASU Publ., 2013, pp. 416–423.

7. Ostrovskaya N. V., Rutman Yu. L., Grunin V. V. *Sopostavlenie rezul'tatov konechno-elementnogo rascheta kharakteristik plasticheskogo dempfera s eksperimentom* [Comparison of the results of the finite element calculation of plastic damper characteristics with the results of testing]. *Morskie intellektual'nye tekhnologii – Marine Intelligent Technologies*, 2016, no. 4-1 (34), pp. 28–34.

8. Rutman Yu. L., Nidzhad A. Ya. *Proverka adekvatnosti metoda makromodeli* [Verification of the adequacy of the macromodel method]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2012, no. 3 (32), pp. 137–142.

9. Simbort E. *Sravnenie dinamicheskikh uprugoplasticheskikh raschetov, vpolnennykh po odnostepennoy modeli i po modeli so mnogimi stepenyami svobody* [Comparison of dynamic elastic-plastic calculations performed using a single-stage model and a model with many degrees of freedom]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal – Civil Engineering Journal*, 2011, no. 6 (24), pp. 23–27.

10. Elenitskiy E. Ya. *Analiticheskoe reshenie dlya sterzhnevoy sistemy s uchetom uprugoplasticheskikh svoystv materiala* [Analytical solution for a rod system taking into account the elastic-plastic properties of the material]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy – Construction mechanics of engineering designs and structures*, 2017, no. 3, pp. 27–34.

11. Lalin V. V., Belyaev M. O. *Izhib geometricheski nelineynogo konsol'nogo sterzhnya. Reshenie po teoriyam Kirkhgofai Kossera – Timoshenko* [Bending of a geometrically nonlinear cantilever rod. A solution based on the theories of Kirchhoff and Kossel-Timoshenko]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal – Civil Engineering Journal*, 2015, no. 1 (53), pp. 39–55.

12. Lukashevich A. A. *Nelineynye zadachi stroitel'noy mekhaniki* [Nonlinear problems of structural mechanics]. St. Petersburg, SPbGASU Publ., 2016, 136 p.

13. Lukash P. A. *Osnovy nelineynoy stroitel'noy mekhaniki* [Fundamentals of nonlinear structural mechanics]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1978, 204 p.

14. Rutman U. L., Meleshko V. A. The generalization of the flexibility method for elastoplastic computation of rod systems. *Materials physics and mechanics*, 2017, vol. 31, no. 1-2, pp. 67–70.

15. Rutman Yu. L., Meleshko V. A. Strength computation of rod systems with the consideration of physical nonlinearity using the generalized flexibility method GFM. The results are compared with FEM. *Eastern European Scientific Journal*, 2015, no. 6, pp. 150–160.

16. Filin A. P., Tananayko O. D., Cherneva I. M., Shvarts M. A. *Algoritmy postroyeniya razreshayushchikh uravneniy mekhaniki sterzhnevyykh sistem* [Algorithms for constructing resolving equations of mechanics of rod

systems]. Ed. by Filin A. P. Leningrad, Stroyizdat Publ., 1983, 232 p.

17. Vol'mir A. S., Grigor'ev Yu. P., Stankevich A. I. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Ed. by Makarevskiy D. I. Moscow, Drofa Publ., 2007, 591 p.

18. Akivis M. A., Goldberg V. V. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor calculus]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, 304 p.

19. Pogorelov A. V. *Differentsial'naya geometriya* [Differential geometry]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 176 p.

20. Svetlitskiy V. A. *Mekhanika gibkikh sterzhney i nitay* [Mechanics of flexible rods and threads]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978, 222 p.

21. Meleshko V. A., Shmidt A. B. *Kinematicheskie sootnosheniya dlya prostranstvenno krivoliniynogo sterzhnya* [Kinematic relations for a spatially curved rod]. *Morskie intellektual'nye tekhnologii – Marine Intelligent Technologies*, 2018, no. 3-1 (41), pp. 233–237.

22. Meleshko V. A. Generalized force method on the example of plane geometrically nonlinear problem. *Procedia Structural Integrity*, 2017, vol. 6, pp. 115–121.

23. Meleshko V. A., Rutman Y. L. Generalized flexibility method by the example of plane elastoplastic problem. *Procedia Structural Integrity*, 2017, vol. 6, pp. 140–145.

24. Ostrovskaya N. V., Meleshko V. A. *Analiticheskie zavisimosti dlya kasatel'nykh zhestkostey secheniy pri uprugoplasticheskom raschete ploskikh sterzhnevyykh sistem* [Analytical dependences for tangential stiffness of cross sections in the elastic-plastic calculation of flat rod systems]. *Morskie intellektual'nye tekhnologii – Marine intelligent technologies*, 2017, no. 4-1 (38), pp. 183–188.

25. Kovaleva N. V., Skvortsov V. R., Rutman Yu. L. *Opreделение parametrov silovoy diagrammy plasticheski deformiruemyykh elementov konstruksii* [Determination of the parameters of the force diagram of plastically deformable structural elements]. *Trudy 22-y Mezhdunar. konf. «Matematicheskoe modelirovanie v mekhanike sploshnykh sred. Metody granichnykh i konechnykh elementov»* [Proceedings of the 22-th International Conference "Mathematical modeling in continuum mechanics. Methods of boundary and finite elements"]. St. Petersburg, MORINTEKh Publ., 2007, pp. 220–225.

26. Meleshko V. A. Hybrid model for determining the stiffness of a spatial rod with consideration geometric nonlinearity. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018. 1074:012075.

27. Meleshko V. A., Rutman Yu. L. *Force method development in structural mechanics for the nonlinear tasks. FEM hybrid models*. Proceedings of the 6-th European Conference on Computational Mechanics (ECCM 6), the 7-th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD 7). International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Barcelona, Spain, 2018, pp. 719–729. ISBN: 978-84-947311-6-7.