УДК [624.9+692]:624.04

© Г. И. Белый, д-р техн. наук, профессор
© А. А. Ведерникова, ст. преподаватель
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Россия)
E-mail: office@erkon.ru, parallelogram13@gmail.com

DOI 10.23968/1999-5571-2021-18-2-26-35

© G. I. Belyy, Dr. Sci. Tech., Professor
© A. A. Vedernikova, senior lecturer
(Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering,
St. Petersburg, Russia)
E-mail: office@erkon.ru, parallelogram13@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ТРУБОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ОБРАТНЫМ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

THE INVERSE NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD FOR STUDYING THE STRENGTH AND STABILITY OF CONCRETE-FILLED STEEL TUBE STRUCTURAL MEMBERS

Для сокращения объема расчетных операций исследование прочности и устойчивости трубобетонных элементов конструкций проводится обратным численно-аналитическим методом. По упругому предельному состоянию в сечении стержня, соответствующему максимально допустимой деформации наиболее напряженного волокна, численно, за пределом упругости, определяются предельные усилия. Последние в задачах устойчивости принимаются за деформационные в наиболее нагруженном сечении, которые при совместном действии с компенсирующими физическую нелинейность фиктивными усилиями позволяют обратным аналитическим деформационным расчетом упругого стержня установить фактическое его нагружение на опорах. Для практического применения решения построены в безразмерных параметрах с использованием приведенных к механическим характеристикам стали расчетных параметров сечения. Сопоставление многочисленных результатов расчета на устойчивость с данными экспериментальных исследований зарубежных авторов показали достаточно хорошую согласованность.

Ключевые слова: обратный численно-аналитический метод, трубобетонные стержни, расчет устойчивости.

In order to reduce the volume of calculations, the research of the strength and stability of concrete-filled steel tube structural members is carried out by the inverse numerical-analytical method. The limit forces are numerically assessed, according to the elastic limit state in the rod's cross section, corresponding to the maximum permissible deformation of the most stressed fiber beyond the elastic limit. In stability problems, the limit forces are taken as deformation ones in the most loaded section, and, being combined with fictitious forces compensating for physical nonlinearity, they allow, using the inverse analytical deformation calculation of the elastic rod, to determine its the actual loading on the supports. Taking into account the practical application of this method, the solutions are constructed in dimensionless parameters, using the steel members with the calculated section parameters taken as mechanical characteristics. Comparison analysis of the obtained numeric calculation results of stability with the data obtained during the experimental studies of foreign researchers has shown a good consistency.

Keywords: inverse numerical-analytical method, concrete-filled steel tubes, stability calculation.

Совершенствование и развитие практических методов расчета стержневых элементов конструкций с учетом физической и геометрической нелинейности традиционными методами исследования, требующими выполнения многочисленных итерационных операций, может оказаться достаточно трудным, а в некоторых случаях невыполнимым мероприятием. Эти методы можно характеризовать как прямые: по заданным соотношениям нагрузок (усилий) численно определяются их предельные значения.

Для сокращения объема расчетных операций в работах [1, 2] предложен обратный ход исследования: по заданному предельному состоянию в сечении неограниченно упругого стержневого элемента, соответствующему критерию предельной нормативной деформации наиболее напряженного волокна $\bar{\varepsilon}_{\text{lim}} = \varepsilon_{\text{lim}} E / R$, численно с помощью алгоритма «Сечение» определяются физические предельные усилия и их соотношения: решения задач прочности. При этом, в отличие, например, от СП 16.13330.2017¹, развитие пластических деформаций учитывается при совместном действии и взаимном влиянии всех усилий, что позволяет получить более достоверные результаты.

Устойчивость, как известно, определяется нарушением равновесного деформированного состояния стержня, которое, в зависимости от его гибкости может происходить при соответствующем напряженно-деформированном состоянии (НДС) в наиболее нагруженном сечении с максимальной относительной деформацией

$\varepsilon_{\text{max},n}$. Учитывая изложенное, устойчивость обратным методом можно определять при рассмотрении НДС по ряду значений $\bar{\varepsilon}_{\text{max},i} = 1 + \Delta \bar{\varepsilon} i$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $\Delta \bar{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon}_{\text{lim}} - 1) / n$).

Задаваясь i -м упругим НДС, с помощью алгоритма «Сечение» устанавливаются соответствующие ему действующие и фиктивные, компенсирующие физическую нелинейность, усилия. Приняв их за деформационные в наиболее напряженном сечении упругого стержня, обратным аналитическим решением деформационной задачи (по изгибной, изгибно-крутильной для стальных стержней, или пространственной схем) [1, 2] определяются соответствующие условия загрузки продольной силой с одно- или двухосными эксцентриситетами. Получив таким образом результаты расчета при различных значениях $\bar{\varepsilon}_{\text{max},i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), устойчивость можно установить по максимальной продольной силе при постоянных значениях ее эксцентриситетов.

Для совершенствования практических рекомендаций по расчету трубобетонных элементов, изложенных в СП 266.1325800.2016², воспользуемся обратным решением задач прочности и устойчивости [1, 2], которое апробировано на примерах расчета стержневых элементов легких стальных тонкостенных конструкций (ЛСТК) [3].

В расчетах трубобетонных элементов, в качестве труб которых используются гнутосварные профили (ГСП), необходимо учитывать приобретенные в процессе их производства упрочнение металла в местахгиба и остаточные напряжения (рис. 1, а). Плоские участки трубы имеют

¹ СП 16.13330.2017. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*. М.: Минстрой России, 2017. 148 с.

² СП 266.1325800.2016. Конструкции сталежелезобетонные. Правила проектирования. М.: Минрегионразвития, 2016. 124 с.

Рис. 1. Гнутосварные прямоугольные трубы: а — остаточные напряжения (1 — плоский участок трубы, 2 — зонагиба); б — унифицированные диаграммы $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$

прочностные характеристики исходных заготовок R_s , а в зонахгиба — повышенные $R_{su} = R_s K_{уп}$. Величина упрочнения $K_{уп}$ и распространение зон наклепа зависят от ряда факторов, которые приведены в соответствующей литературе, например [4, 5]. Унифицированная диаграмма $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$ показана на рис. 1, б (см. кривую 1), на которую наложена диаграмма упрочненного металла (кривая 2).

Методика определения остаточных напряжений в ГСП также хорошо разработана, например в [6], согласно которой сжимающие напряжения на плоских участках находятся в равновесии с растянутыми в зонахгиба (см. рис. 1, а).

1. Обратное решение задач прочности по критерию ограниченных деформаций

Рассмотрим трубобетонный элемент, в прямоугольном сечении которого действуют продольная сила N и изгибающие моменты M_x и M_y (рис. 2). Для удобства построения методики расчета механические свойства бетона приведем к соответствующим стальным, тогда геометрические характеристики общего сечения примут вид:

$$A_{red} = A_s \left(1 + \frac{A_b E_b}{A_s E_s} \right); I_{x,red} = I_{x,s} \left(1 + \frac{I_{x,b} E_b}{I_{x,s} E_s} \right);$$

Рис. 2. Общее нагружение силовыми факторами: 1 — плоский участок трубы; 2 — зонагиба; 3 — бетонное дополнение

$$I_{y,red} = I_{y,s} \left(1 + \frac{I_{y,b} E_b}{I_{y,s} E_s} \right). \quad (1)$$

Обозначенные в (1) индексами s и b площади сечения A , их моменты инерции I_x, I_y , расчетные сопротивления R и модули упругости E относятся к стальной трубе и бетонному заполнению.

Предельное напряженно-деформированное состояние в сечении упругого трубобетонного элемента по нормативной предельной деформации $\bar{\epsilon}_{lim} = \epsilon_{lim} \frac{E_s}{R_s}$ в безразмерных параметрах можно представить в виде

$$\bar{\sigma}_s(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{\epsilon}_s(\bar{x}, \bar{y}) = \phi(1 + m_x \bar{y} + m_y \bar{x}), \quad (2)$$

где $\phi = \bar{\epsilon}_{lim} (1 + m_x + m_y)^{-1}$ — коэффициент продольной силы; $m_x = \frac{e_y}{\rho_x}$, $m_y = \frac{e_x}{\rho_y}$ — относительные эксцентриситеты; $e_y = \frac{M_x}{N}$, $e_x = \frac{M_y}{N}$; $\rho_x = I_{x,red} (y_* A_{red})^{-1}$, $\rho_y = I_{y,red} (x_* A_{red})^{-1}$ — ядровые расстояния; $\bar{x} = \frac{x}{x_*}$; $\bar{y} = \frac{y}{y_*}$; x_* , y_* — координаты наиболее напряженного волокна.

Для определения соответствующего (2) предельного состояния за пределом упругости разобьем сечение стальной трубы с плоскими участками на n_s , в местахгиба (упрочненные участки) на n_{su} и сечение бетонного заполнения на n_b дискретных площадок ΔA_{ks} , ΔA_{ksu} и ΔA_{kb} с координатами центров тяжести x_{ks} , y_{ks} ; x_{ksu} , y_{ksu} и x_{kb} , y_{kb} соответственно (см. рис. 2) и воспользуемся гипотезой плоских сечений, в соответствии с которой относительная деформация k -го волокна представляется:

$$\bar{\epsilon}_k = \bar{\epsilon}_0 - \bar{v}'' \bar{y}_k - \bar{u}'' \bar{x}_k, \quad (3)$$

где $\bar{\epsilon}_0 = \epsilon_0 \frac{E_s}{R_s}$; $\bar{v}'' = v'' \frac{E_s}{R_s \rho_x}$; $\bar{u}'' = u'' \frac{E_s}{R_s \rho_y}$; $\bar{x}_k = \frac{x_k}{\rho_y}$; $\bar{y}_k = \frac{y_k}{\rho_x}$; ϵ_0 — относительная деформация оси стержня, имеющая кривизны v'' , u'' при изгибе относительно осей x и y соответственно.

Используя (3), представим соответствующие предельному деформированному состоянию (2) уравнения равновесия трубобетонного элемента в сечении за пределом упругости:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{ef} &= \bar{\epsilon}_0 \bar{A}_{ef} + \bar{v}'' \bar{y}_c + \bar{u}'' \bar{x}_c \\ \phi_{ef} m_{x,ef} &= -\bar{\epsilon}_0 \bar{y}_c - \bar{v}'' \bar{i}_{x,ef}^2 + \bar{u}'' \bar{i}_{xy,ef}^2 \\ \phi_{ef} m_{y,ef} &= -\bar{\epsilon}_0 \bar{x}_c + \bar{v}'' \bar{i}_{xy,ef}^2 - \bar{u}'' \bar{i}_{y,ef}^2 \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{A}_{ef} &= \sum_{k_s=1}^{n_s} \bar{E}_{ks} \Delta \bar{A}_{ks} + \sum_{k_u=1}^{n_u} \bar{E}_{ku} \Delta \bar{A}_{ku} + \sum_{k_b=1}^{n_b} \bar{E}_{kb} \Delta \bar{A}_{kb}; \\ \bar{y}_c &= \sum_{k_s=1}^{n_s} \bar{E}_{ks} \tilde{y}_{ks} \Delta \bar{A}_{ks} + \sum_{k_u=1}^{n_u} \bar{E}_{ku} \tilde{y}_{ku} \Delta \bar{A}_{ku} + \\ &\quad + \sum_{k_b=1}^{n_b} \bar{E}_{kb} \tilde{y}_{kb} \Delta \bar{A}_{kb}; \\ \bar{x}_c &= \sum_{k_s=1}^{n_s} \bar{E}_{ks} \tilde{x}_{ks} \Delta \bar{A}_{ks} + \sum_{k_u=1}^{n_u} \bar{E}_{ku} \tilde{x}_{ku} \Delta \bar{A}_{ku} + \\ &\quad + \sum_{k_b=1}^{n_b} \bar{E}_{kb} \tilde{x}_{kb} \Delta \bar{A}_{kb}; \\ \bar{i}_{x,ef}^2 &= \sum_{k_s=1}^{n_s} \bar{E}_{ks} \tilde{y}_{ks}^2 \Delta \bar{A}_{ks} + \sum_{k_u=1}^{n_u} \bar{E}_{ku} \tilde{y}_{ku}^2 \Delta \bar{A}_{ku} + \\ &\quad + \sum_{k_b=1}^{n_b} \bar{E}_{kb} \tilde{y}_{kb}^2 \Delta \bar{A}_{kb}; \\ \bar{i}_{xy,ef}^2 &= \sum_{k_s=1}^{n_s} \bar{E}_{ks} \tilde{x}_{ks} \tilde{y}_{ks} \Delta \bar{A}_{ks} + \sum_{k_u=1}^{n_u} \bar{E}_{ku} \tilde{x}_{ku} \tilde{y}_{ku} \Delta \bar{A}_{ku} + \\ &\quad + \sum_{k_b=1}^{n_b} \bar{E}_{kb} \tilde{x}_{kb} \tilde{y}_{kb} \Delta \bar{A}_{kb}; \\ \bar{i}_{y,ef}^2 &= \sum_{k_s=1}^{n_s} \bar{E}_{ks} \tilde{x}_{ks}^2 \Delta \bar{A}_{ks} + \sum_{k_u=1}^{n_u} \bar{E}_{ku} \tilde{x}_{ku}^2 \Delta \bar{A}_{ku} + \\ &\quad + \sum_{k_b=1}^{n_b} \bar{E}_{kb} \tilde{x}_{kb}^2 \Delta \bar{A}_{kb};\end{aligned} \quad (5)$$

$\Delta \bar{A}_k = \Delta A_k / A_{red}$; $\bar{E}_{ks} = \text{tg } \alpha_{ks}$ и $\bar{E}_{ku} = \text{tg } \alpha_{ku}$ — секущие модули стали, показанные на рис. 1, б; $\bar{E}_{kb} = \text{tg } \alpha_{kb} E_b / E_s$, $\text{tg } \alpha_{kb}$ — секущий модуль бетона (рис. 3). Учет длительности нагружения для бетона (ползучести), как известно, определяется

по п. 6.1.13–6.1.22 СП 63.13330.2012³ и заключается в изменении уклона диаграммы для бетона.

Влияние остаточных напряжений в трубе $\bar{\sigma}_{k,oc}(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ (см. рис. 1, а) на несущую способность можно учесть при определении секущих модулей $\bar{E}_{ks}$ и $\bar{E}_{ku}$ по формуле

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{\bar{\sigma}_{k,oc}}{R_s} + \bar{\varepsilon}_0 - \bar{v}'' \bar{y}_k - \bar{u}'' \bar{x}_k. \quad (6)$$

Деформационные характеристики сечения $\bar{\varepsilon}_0$, $\bar{v}''$, $\bar{u}''$ в предельном состоянии, соответствующем (2), примут вид

$$\bar{\varepsilon}_0 = \varphi; \bar{v}'' = -\varphi m_x \frac{\rho_x}{y_*}; \bar{u}'' = -\varphi m_y \frac{\rho_y}{x_*}. \quad (7)$$

Тогда, используя систему (4), получим предельные усилия при упругопластической работе материалов с учетом возможного выключения из работы бетона в растянутой зоне:

$$\varphi_{ef} = \varphi C_1; m_{x,ef} = \frac{C_2}{C_1}; m_{y,ef} = \frac{C_3}{C_1}, \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \bar{A}_{ef} - m_x \frac{\rho_x}{y_*} \bar{y}_c - m_y \frac{\rho_y}{x_*} \bar{x}_c \\ C_2 &= -\bar{y}_c + m_x \frac{\rho_x}{y_*} \bar{i}_{x,ef}^2 - m_y \frac{\rho_y}{x_*} \bar{i}_{xy,ef}^2 \\ C_3 &= -\bar{x}_c - m_x \frac{\rho_x}{y_*} \bar{i}_{xy,ef}^2 + m_y \frac{\rho_y}{x_*} \bar{i}_{y,ef}^2 \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Имея (8), практический метод расчета на прочность можно привести к виду:

$$\frac{1}{\gamma_A R_s c_p} \left(\frac{N}{A_{red}} + \frac{M_x}{I_{x,red}} y_* + \frac{M_y}{I_{y,red}} x_* \right) \leq 1, \quad (10)$$

где $c_p = \varphi_{ef} (1 + m_{x,ef} + m_{y,ef})$. (11)

³ СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. М.: Минстрой России. 2015. 168 с.

Рис. 3. Унифицированная диаграмма работы бетона

В (11) коэффициент c_p учитывает развитие пластических деформаций и выключение из работы бетонного заполнения в растянутой зоне при совместном действии N , M_x и M_y с относительными эксцентриситетами $m_{x,ef}$, $m_{y,ef}$ по (8).

Таким образом, задаваясь общим нагружением безразмерными силовыми факторами m_x , m_y в сечении неограниченно упругого элемента, устанавливаем предельное деформированное состояние по $\bar{\epsilon}_{lim}$ с параметром ϕ , которое затем используется для определения с помощью алгоритма «Сечение» фактически воспринимаемых этим элементом предельных усилий $m_{x,ef}$, $m_{y,ef}$ и ϕ_{ef} по (8).

2. Аналитический метод деформационного расчета трубобетонных элементов при неограниченной упругости

Рассмотрим выделенный из конструкции с помощью расчетной длины $l_{ef,x}$ или $l_{ef,y}$ трубобетонный стержневой элемент. На рис. 4, а $l_{ef,x}$ и $l_{ef,y}$ показаны в совмещенном виде общей длиной l . Загружение шарнирно закрепленного стержня в двух главных плоскостях стержня (согласно нормам проектирования¹) рассмотрим продольной силой с равными одно- или двухосными при $l_{ef,x} \approx l_{ef,y}$ концевыми эксцентриситетами e_x^0 , e_y^0 .

Тогда деформационные уравнения равновесия для принятой упругой модели стержня примут вид

$$\left. \begin{aligned} EI_{x,red} v'' + Nv &= -Ne_y^0 \\ EI_{y,red} u'' + Nu &= -Ne_x^0 \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

где u и v — перемещения сечения в направлении осей x и y соответственно (рис. 4, б).

Приближенные решения уравнений (12) широко известны в литературе и имеют вид

$$\left. \begin{aligned} v(z) &= v_0(z) \left(1 - \frac{N}{N_{cr,x}} \right)^{-1}; \\ u(z) &= u_0(z) \left(1 - \frac{N}{N_{cr,y}} \right)^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где $v_0(z)$ и $u_0(z)$ — перемещения, полученные расчетом по недеформированной схеме; $N_{cr,x}$ и $N_{cr,y}$ — критические силы при изгибе относительно осей x и y соответственно.

Эти решения для принятых «нормативных» схем нагружения стержней¹, как известно, обладают высокой точностью. Воспользуемся ими и представим деформационные усилия в наиболее напряженном сечении стержня:

$$M_x = Ne_y^0 K_{d,x}; \quad M_y = Ne_x^0 K_{d,y}, \quad (14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K_{d,x} &= 1 + \frac{\Phi_{ex} \bar{\lambda}_x^2}{8} \left(1 - \frac{\Phi_{ex} \bar{\lambda}_x^2}{\pi^2} \right)^{-1} \\ K_{d,y} &= 1 + \frac{\Phi_{ey} \bar{\lambda}_y^2}{8} \left(1 - \frac{\Phi_{ey} \bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} \right)^{-1} \end{aligned} \right\}; \quad (15)$$

Рис. 4. Расчетная модель стержневого элемента: а — схема нагружения; б — схема деформирования

$K_{d,x}, K_{d,y}$ — деформационные коэффициенты; $\varphi = \frac{N}{R_s A_{red}}$; $\bar{\lambda}_x = \frac{l_{ef,x}}{i_x} \sqrt{\frac{R_s}{E_s}}$; $\bar{\lambda}_y = \frac{l_{ef,y}}{i_y} \sqrt{\frac{R_s}{E_s}}$ — условные гибкости стержня.

Имея (14), представим соответствующие i -й максимальной деформации $\bar{\varepsilon}_{\max,i} = 1 + \Delta \bar{\varepsilon}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $\Delta \bar{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon}_{\lim} - 1) / n$) выражения для соответствующих максимальных напряжений в безразмерных параметрах $\bar{\sigma}_{\max,i} = \sigma_{\max,i} / R_s$, вытекающих из расчета:

— по изгибной относительно оси x деформированной схеме ($e_y^0 \neq 0, e_x^0 = 0$) с выделением стержневого элемента из конструкции по $l_{ef,x}$:

$$\bar{\sigma}_{\max,i} = \varphi_{ex,i} (1 + m_x^0 K_{d,xi}) = \bar{\varepsilon}_{\max,i}; \quad (16)$$

— то же относительно оси y ($e_y^0 = 0, e_x^0 \neq 0$) с выделением стержневого элемента из конструкции по $l_{ef,y}$:

$$\bar{\sigma}_{\max,i} = \varphi_{ey,i} (1 + m_y^0 K_{d,yi}) = \bar{\varepsilon}_{\max,i}; \quad (17)$$

— по изгибной в двух плоскостях (пространственной) деформированной схеме ($e_y^0 \neq 0, e_x^0 \neq 0$) при $l_{ef,x} \approx l_{ef,y}$:

$$\bar{\sigma}_{\max,i} = \sigma_{exy,i} (1 + m_x^0 K_{d,y}^{np} + m_y^0 K_{d,x}^{np}) = \bar{\varepsilon}_{\max,i}, \quad (18)$$

где $K_{d,y}^{np}$ и $K_{d,x}^{np}$ — деформационные коэффициенты, определяемые по (15) с заменой $\varphi_{ex,i}$ и $\varphi_{ey,i}$ на $\varphi_{exy,i}$.

В (16), (17) и (18) обозначено: $\varphi_{ex,i}$, $\varphi_{ey,i}$ и $\varphi_{exy,i}$ — коэффициенты продольной силы (параметры общего нагружения); $m_x^0 = e_y^0 / \rho_x$; $m_y^0 = e_x^0 / \rho_y$.

Таким образом, используя «нормативные» расчетные модели неограниченно упругого стержневого элемента, подверженного действию продольной силы с равными одно- или двухосными эксцентриситетами, в аналитическом виде получены уравнения (16), (17) и (18), решения которых позволяют определить параметры общего нагружения $\varphi_{ex,i}$, $\varphi_{ey,i}$ и $\varphi_{exy,i}$ по критерию $\bar{\varepsilon}_{\max,i}$ для соответствующих форм деформирования.

3. Обратный деформационный расчет и устойчивость трубобетонных элементов за пределом упругости

Рассмотрим неограниченно упругий трубобетонный элемент, в наиболее нагруженном сечении которого действуют деформационные моменты с m_x , m_y . Предельное напряженно-деформированное состояние по $\bar{\varepsilon}_{\max,i}$ в этом случае примет вид

$$\bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{\varepsilon}(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi_{exy,i} (1 + m_x \bar{y} + m_y \bar{x}), \quad (19)$$

где

$$\varphi_{exy,i} = \bar{\varepsilon}_{\max,i} (1 + m_x + m_y)^{-1}. \quad (20)$$

Используя (19), с помощью алгоритма «Сечение» (см. (4)–(8)), определяем:

• фактический параметр нагружения с учетом развития пластических деформаций, упрочнения металла, остаточных напряжений и выключения из работы бетона в растянутой зоне

$$\varphi_{exy,ef,i} = \varphi_{exy,i} \left(\bar{A}_{ef,i} - m_x \frac{\rho_x}{y_*} \bar{y}_{c,i} - m_y \frac{\rho_y}{x_*} \bar{x}_{c,i} \right); \quad (21)$$

• фиктивный — с относительными эксцентриситетами

$$\begin{aligned} \varphi_{exy,\phi,i} &= \varphi_{exy,i} C_{1\phi,i}; m_{x,\phi,i}^0 = C_{2\phi,i} / C_{1\phi,i}; \\ m_{y,\phi,i}^0 &= C_{3\phi,i} / C_{1\phi,i}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_{1\phi,i} &= 1 - \bar{A}_{ef,i} + m_x \frac{\rho_x}{y_*} \bar{y}_{c,i} + m_y \frac{\rho_y}{x_*} \bar{x}_{c,i} \\ C_{2\phi,i} &= \bar{y}_{c,i} + m_x \frac{\rho_x}{y_*} \bar{i}_{x,\phi,i}^2 + m_y \frac{\rho_y}{x_*} \bar{i}_{xy,ef,i}^2 \\ C_{3\phi,i} &= \bar{x}_{c,i} + m_x \frac{\rho_x}{y_*} \bar{i}_{xy,ef,i}^2 + m_y \frac{\rho_y}{x_*} \bar{i}_{y,\phi,i}^2 \end{aligned} \right\}; \quad (23)$$

$$\bar{i}_{x,\phi,i}^2 = \frac{I_{x,red}}{\rho_x^2 A_{red}} - \bar{i}_{x,ef,i}^2; \bar{i}_{y,\phi,i}^2 = \frac{I_{y,red}}{\rho_y^2 A_{red}} - \bar{i}_{y,ef,i}^2.$$

1. Следуя методу [2], рассмотрим предельное состояние по изгибной в двух плоскостях деформированной схеме при совместном действии фактической $N_{exy,ef,i}$ и фиктивной $N_{exy,\phi,i}$ силами с соответствующими параметрами $\varphi_{exy,ef,i}$ и $\varphi_{exy,\phi,i}$:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{y}) &= \\ &= \varphi_{exy,ef,i} (1 + m_{x,ef,i}^0 \bar{y} \cdot K_{d,x,i}^{np} + m_{y,ef,i}^0 \bar{x} \cdot K_{d,y,i}^{np}) + \\ &+ \varphi_{exy,\phi,i} (1 + m_{x,\phi,i}^0 \bar{y} \cdot K_{d,x,i}^{np} + m_{y,\phi,i}^0 \bar{x} \cdot K_{d,y,i}^{np}). \end{aligned} \quad (24)$$

В (24) неизвестными являются концевые относительные эксцентриситеты $m_{x,ef,i}^0$ и $m_{y,ef,i}^0$, которые можно получить при сопоставлении (24) и (19):

— при $\bar{x} = 0$; $\bar{y} = 1$:

$$\begin{aligned} \varphi_{exy,ef,i} (1 + m_{x,ef,i}^0 K_{d,x,i}^{np}) + \\ + \varphi_{exy,\phi,i} (1 + m_{x,\phi,i}^0 K_{d,x,i}^{np}) = \frac{\bar{\varepsilon}_{\max,i} (1 + m_x)}{1 + m_x + m_y}, \end{aligned} \quad (25)$$

— при $\bar{x} = 1$; $\bar{y} = 0$:

$$\varphi_{exy,ef,i} \left(1 + m_{y,ef,i}^0 K_{d,y,i}^{np} \right) + \varphi_{exy,\phi,i} \left(1 + m_{y,\phi,i}^0 K_{d,y,i}^{np} \right) = \frac{\bar{\varepsilon}_{\max,i} (1 + m_y)}{1 + m_x + m_y}, \quad (26)$$

тогда

$$m_{x,ef,i}^0 = \frac{\bar{\varepsilon}_{\max,i} (1 + m_x)}{(1 + m_x + m_y) \varphi_{exy,ef,i} K_{d,x,i}^{np}} - \left[\frac{\varphi_{exy,\phi,i}}{\varphi_{exy,ef,i}} \left(\frac{1}{K_{d,x,i}^{np}} + m_{x,\phi,i}^0 \right) + \frac{1}{K_{d,x,i}^{np}} \right]; \quad (27)$$

$$m_{y,ef,i}^0 = \frac{\bar{\varepsilon}_{\max,i} (1 + m_y)}{(1 + m_x + m_y) \varphi_{exy,ef,i} K_{d,y,i}^{np}} - \left[\frac{\varphi_{exy,\phi,i}}{\varphi_{exy,ef,i}} \left(\frac{1}{K_{d,y,i}^{np}} + m_{y,\phi,i}^0 \right) + \frac{1}{K_{d,y,i}^{np}} \right]. \quad (28)$$

2. Рассматривая i -е предельное напряженное состояние при совместном действии $\varphi_{ex,ef,i}$ и $\varphi_{ex,\phi,i}$ по изгибной, например, относительно оси x деформированной схеме ($e_y^0 \neq 0$, $e_x^0 = 0$), имеем

$$m_{x,ef,i}^0 = \frac{\bar{\varepsilon}_{\max,i}}{\varphi_{ex,ef,i} K_{d,x,i}} - \left[\frac{\varphi_{ex,\phi,i}}{\varphi_{ex,ef,i}} \left(\frac{1}{K_{d,x,i}} + m_{x,\phi,i}^0 \right) + \frac{1}{K_{d,x,i}} \right], \quad (29)$$

где

$$\varphi_{ex,ef,i} = \frac{\bar{\varepsilon}_{\max,i}}{1 + m_x} \left(\bar{A}_{ef,i} - m_x \frac{\rho_x}{y_*} \bar{y}_{c,i} \right);$$

$$\varphi_{ex,\phi,i} = \frac{\bar{\varepsilon}_{\max,i}}{1 + m_x} - \varphi_{ex,ef,i};$$

$$m_{x,\phi,i} = \frac{\bar{y}_{c,i} + m_x \frac{\rho_x}{y_*} \bar{l}_{x,\phi,i}^2}{1 - \bar{A}_{ef,i} + m_x \frac{\rho_x}{y_*} \bar{y}_{c,i}}.$$

Таким образом, по i -му упругому предельному состоянию ($\bar{\varepsilon}_{\max,i} = 1 + \Delta \bar{\varepsilon} \cdot i$) с заданными деформационными относительными одно- или двухосными эксцентриситетами m_x и m_y обратным численно-аналитическим методом расчета [1, 2] можно определить соответствующие фактические загрузки труботонного элемента силовыми факторами $\varphi_{ef,i}$, $m_{x,ef,i}^0$, $m_{y,ef,i}^0$ для изгибных в двух главных или пространственной ($l_{ef,x} \approx l_{ef,y}$) схемах деформирования.

Рассматривая ряд предельных состояний ($\bar{\varepsilon}_{\max,i}$, $i = 1, 2, \dots, n$), когда $m_{x,ef,i}^0 = \text{const}$, $m_{y,ef,i}^0 = \text{const}$, определяем наибольший параметр общего нагружения $\varphi_{ef,\max}$, который будет соответствовать коэффициенту потери устойчивости.

Использованный в [1, 2] метод расчета проиллюстрируем на примере расчета общей устойчивости труботонного стержня, принятого в качестве одного из образцов экспериментальных исследований Н. Shakir-Khalil и J. Zegnicher [7] (см. образец Z-6 из табл. 4). Стержень длиной 321 см выполнен из прямоугольной стальной трубы сечением 120×80 мм с толщиной стенки 5 мм, с $R_s = 343,3$ МПа, которая заполнена бетоном с $R_b = 33,2$ МПа и модулем $E_b = 36\,000$ МПа.

По результатам испытания такого стержня, нагруженного продольной силой с равными концевыми двухосными эксцентриситетами $e_{x0} = 16$ мм, $e_{y0} = 24$ мм, была установлена предельная сила $N_{\text{эксп}} = 268,0$ кН.

В соответствии с методом расчета представим приведенные к механическим характеристикам стали расчетные параметры сечения, относительные эксцентриситеты и гибкости стержня:

$$A_{red} = 30,44 \text{ см}^2; I_{x,red} = 490,92 \text{ см}^4;$$

$$I_{y,red} = 244,29 \text{ см}^4; \rho_x = 2,69 \text{ см}; \rho_y = 2,01 \text{ см};$$

$$m_x^0 = 0,893; m_y^0 = 0,797; \bar{\lambda}_y = 4,24; y_* = 6 \text{ см};$$

$$x_* = 4 \text{ см}.$$

Для определения фактически действующих усилий разобьем сечение бетона на $n_b = 18 \times 12 = 216$ и стали на $n_s = 64$ дискретных площадок.

Тогда, задаваясь деформационными относительными эксцентриситетами, например $m_x = m_y = 1,5$, и первым (наименьшим) значением максимальной относительной деформации ($\bar{\varepsilon}_{\max,i} = 1,2 + \Delta \bar{\varepsilon} \cdot i$ при $\Delta \bar{\varepsilon} = 0,1$) $\bar{\varepsilon}_{\max,1} = 1,3$, определяем: $\varphi_{exy,eff,1} = 0,283 \bar{\lambda}_x = 3,26$, $m_{x,eff,1}^0 = 0,773$; $m_{y,eff,1}^0 = 0,445$. Видно, что $m_x^0 \neq m_{x,eff,1}^0$, $m_y^0 \neq m_{y,eff,1}^0$, поэтому подбираем такие m_x и m_y , чтобы было достигнуто равенство. В нашем случае при $m_{x,eff,1}^0 = 0,893$, $m_{y,eff,1}^0 = 0,797$ $\varphi_{exy,eff,1} = 0,244$.

На рис. 5 показана зависимость $\varphi_{exy,eff,i}$ от $\bar{\varepsilon}_{\max,i}$, откуда видно, что при $\bar{\varepsilon}_{\max,4} = 1,6$ достигается максимальное значение $\varphi_{exy,eff,\max} = 0,248$, которое соответствует потере устойчивости стержня.

Таблица 1

Результаты расчета и экспериментальных исследований [8]

№ стержня	A_{red} , см ²	$\bar{\lambda}_x$	m_x^0	R_s , МПа	R_b , МПа	ε	φ	N , кН	N_s , кН [8]	$\frac{N-N_s}{N_s} \cdot 100\%$
1	42,47	2,830	0,72	304	47	1,7	0,432	547	610	-10,3 %
2	51,91	2,856	0,69	323	39	1,7	0,416	698,1	740	-5,7 %
3	53,25	2,769	0,70	300	46	1,7	0,437	697,8	760	-8,2 %

Примечание: стержень № 1 — труба 120×120×5 мм; стержни № 2, № 3 — труба 120×120×8 мм; модуль деформации бетона $E_b = 39\,000$ МПа; расчетная длина 300 см, эксцентриситет $e_y^0 = 20$ мм.

Таблица 2

Результаты расчета и экспериментальных исследований [7, 9]

№ стержня	A_{red} , см ²	$\bar{\lambda}_x$	m_x^0	R_s , МПа	R_b , МПа	ε	φ	N , кН	N_s , кН [7]	$\frac{N-N_s}{N_s} \cdot 100\%$
1	29,80	3,448	0,89	386,3	31,2	1,3	0,308	354,9	390	-9,0 %
2	29,80	3,440	2,21	384,7	31,2	1,5	0,214	245	232	5,6 %
3	29,80	4,461	0,79	384,7	34,32	0,9	0,259	296,4	260	14,0 %
4	30,12	4,226	1,98	343,3	33,54	1,4	0,194	200,2	208	-3,8 %
5	42,72	3,167	1,36	350,5	40,3	1,7	0,294	439,9	445	-1,1 %
6	42,72	3,925	2,27	350,5	38,2	1,3	0,187	280,7	290	-3,2 %
7	42,72	4,819	1,22	368	40,6	0,9	0,203	318,4	350	-9,0 %

Примечание: стержни № 1–4 [7] — труба 120×120×5 мм с расчетной длиной $l_x = 321$ см, $l_y = 294$ см; $E_b = 34\,000$ МПа; стержни № 5–7 [9] — труба 120×120×8 мм; модуль деформации бетона $E_b = 36\,000$ МПа; стержни № 3, 4 и 7 были испытаны при действии силы с эксцентриситетом в плоскости меньшей жесткости.

Таблица 3

Результаты расчета и экспериментальных исследований [9]

№ стержня	A_{red} , см ²	$\bar{\lambda}_x$	m_x^0	r	R_s , МПа	R_b , МПа	ε	φ	N , кН	N_s , кН	$\frac{N-N_s}{N_s} \cdot 100\%$
SHC-1	122,48	1,138	0,78	4,90	291	29,9	2,6	0,568	2022,8	1850	9,3 %
SHC-7	63,90	2,038	1,05	3,63	254	31,1	2	0,442	717	675	6,2 %
SHC-8	63,90	2,038	1,76	3,63	254	31,1	2,2	0,350	567,9	515	10,3 %

Примечание: стержень SHC-1 — труба 203,7×203,7×9,96 мм с расчетной длиной 213,9 см; стержни SHC-7, 8 — 152,5×152,3×6,48 мм с расчетной длиной 305 см; $E_b = 32\,500$ МПа.

Таблица 4

Результаты расчета и экспериментальных исследований [7, 10]

№ стержня	A_{red} , см ²	$\bar{\lambda}_x$	m_x^0	m_y^0	R_s , МПа	R_b , МПа	ε	φ	N , кН	N_s , кН	$\frac{N-N_s}{N_s} \cdot 100\%$
Z-6	30,44	3,26	0,60	0,80	343,3	33,2	1,6	0,248	259,2	268	-3,3 %
Z-7	30,44	3,33	1,49	1,99	357,5	35,2	1,8	0,156	170,1	160	6,3 %
M-2	30,12	3,25	0,30	0,40	341	33,23	1,1	0,314	322,2	348	-7,4 %
M-3	29,80	3,24	1,03	1,38	341	36,04	1,7	0,199	202,6	198,5	2,1 %
M-4	29,48	3,33	1,47	1,96	362,6	33,07	1,7	0,184	196,7	206,8	-4,9 %
M-5	29,48	3,33	0,59	0,78	362,6	31,82	1,9	0,195	208,6	209,8	-0,6 %
M-7	42,20	2,64	0,30	0,40	346,7	36,04	2,2	0,378	552,8	596,2	-7,3 %
M-8	42,20	2,61	0,85	1,14	340	36,35	1,9	0,247	354,5	329,2	7,7 %
M-9	42,20	2,61	1,43	1,91	340	36,82	2,2	0,182	260,8	254,6	2,4 %

Примечание: стержни Z-6, Z-7 [7] — труба 120×80×5 мм; модуль деформации бетона $E_b = 34\,000$ МПа; стержни M-2–M-5, M-7–M-9 [10] — труба 150×100×5 мм; модуль деформации бетона $E_b = 36\,000$ МПа; расчетные длины каждого из стержней составили $l_x = 321$ см, $l_y = 294$ см.

Рис. 5. Зависимость коэффициента продольной силы от максимальной относительной деформации при $m_{x,eff}^0 = 0,893$, $m_{y,eff}^0 = 0,797$

Сравнивая полученную предельную силу $N = 259,2 \text{ кН}$ с экспериментальной [8] $N_s = 268,0 \text{ кН}$, видим, что они отличаются на $-3,3 \%$.

4. Сопоставление результатов расчета на устойчивость с экспериментальными исследованиями зарубежных авторов

Для проверки достоверности предложенного в [1, 2] обратного численно-аналитического метода расчета с использованием приведенных к механическим характеристикам стали расчетных параметров сечения сопоставим результаты расчетов с данными экспериментальных исследований.

В табл. 1–4 приведены результаты расчета и экспериментальных исследований K. Cederwall et al. [8], H. Shakir-Khalil, J. Zegnicher [7], P. H. Schiller, J. F. Hajjar [9], H. Shakir-Khalil, M. Mouli [10] трубобетонных стержней квадратного и прямоугольного сечений, нагруженных продольной силой с одно- (см. табл. 1–3) и двухосными (см. табл. 4) эксцентриситетами. Модули деформации бетона, размеры сечений и расчетные длины приводятся в примечаниях к таблицам.

Сопоставляя результаты расчета и экспериментальных исследований, можно утверждать, что они достаточно хорошо согласуются. Наибольшие расхождения составляют $9 \dots 14 \%$, их можно объяснить тем, что они получены при относительно малых эксцентриситетах в сочетании с большой гибкостью стержней.

Выводы

Обратный численно-аналитический метод [1, 2] применительно к расчету трубобетонных элементов конструкций обладает достаточной точностью и позволяет сократить время расчета на несколько порядков по сравнению с традиционными методами, что является крайне важным для совершенствования и развития практических методов расчета.

Библиографический список

1. Белый Г. И. Развитие методов расчета стержневых элементов стальных конструкций при многопараметрическом нагружении // Вестник гражданских инженеров. 2020. № 3 (80). С. 43–54.
2. Белый Г. И. «Обратный» метод расчета усиленных под нагрузкой стержневых элементов стальных конструкций путем увеличения сечений // Вестник гражданских инженеров. 2020. № 6 (83). С. 46–55.
3. Белый Г. И., Смирнов М. О. Обратный численно-аналитический метод расчета легких стальных тонкостенных стержневых элементов // Промышленное и гражданское строительство. 2021. № 3. С. 57–68.
4. Тришевский Н. С., Гаммерштейн В. А., Акимов В. П. Упрощенная методика определения механических свойств холодногнутой профили // Высокоэкономичные гнутые профили проката: сб. ст. М.: Металлургия, 1965. С. 197–201.
5. Karren K. W. Corner Properties of Cold-Formed Shapes // J. of the Struct. Div., Proc. of the ASCE. 1967. Vol. 93. No. ST1, Feb. Issue 1. Pp. 401–432.

6. Тихоненко Ю. Н., Беседин Г. М., Кадочникова Г. Н., Фурсов В. В. Теоретические и экспериментальные работы гнутых профилей с учетом собственных напряжений // Проектирование металлических конструкций. М.: ЦНИС, 1969. Вып. 7 (15). С. 93–101.

7. Shakir-Khalil H., Zegniche J. Experimental behavior of concrete-filled rolled rectangular hollow-section columns // *The Structural Engineer*. 1989. Vol. 67. No. 19/3. Pp. 346–353.

8. Cederwall K., Engstrom B., Grauers M. High-strength concrete used in composite columns // *ACI Symposium Publication*. No. 121. Pp. 195–214. URL: <https://doi.org/10.14359/2838>.

9. Schiller P. H., Hajjar J. F. A Distributed Plasticity Formulation for Three-Dimensional Rectangular Concrete-Filled Steel Tube Beam-Columns and Composite Frames // *Structural Engineering Report* No. ST-96-5. Department of Civil Engineering, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, November 1996, 223 p.

10. Shakir-Khalil H., Mouli M. Further tests on concrete-filled rectangular hollow-section columns // *The Structural Engineer*. 1990. Vol. 68. No. 20/16. Pp. 405–413.

References

1. Belyy G. I. *Razvitie metodov rascheta sterzhnevnykh elementov stal'nykh konstruktsiy pri mnogoparametricheskom zagruzhenii* [Development of methods for calculating rod elements of steel structures under multi-parameter loading]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2020, no. 3 (80), pp. 43–54.

2. Belyy G. I. «Obratniy» metod rascheta usilivaemykh pod nagruzkoy sterzhnevnykh elementov stal'nykh konstruktsiy putem uvelicheniya secheniy [«Reverse» method of calculating steel structure rod elements reinforced under load by increasing cross sections]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2020, no. 6 (83), pp. 46–55.

3. Belyy G. I., Smirnov M. O. *Obratniy chislennno-analiticheskiy metod rascheta legkikh stal'nykh tonkostennykh sterzhnevnykh elementov* [Inverse numerical-analytical method for calculating light steel thin-walled rod elements]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo – Industrial and civil construction*, 2021, no. 3, pp. 57–68.

4. Trishevskiy N. S., Gammershteyn V. A., Akimov V. P. *Uproshchennaya metodika opredeleniya mekhanicheskikh svoystv kholodnognutykh profiley* [Simplified method for determining the mechanical properties of cold-formed profiles]. *Vysokoekonomichnye gnutye profili prokata: sb. st.* [In: Collection of works “Highly economical bent rolled profiles”]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1965, pp. 197–201.

5. Karren K. W. Corner Properties of Cold-Formed Shapes. *J. of the Struct. Div., Proc. of the ASCE*, 1967, vol. 93, no ST1, Feb. iss. 1, pp. 401–432.

6. Tikhonenko Yu. N., Besedin G. M., Kadochnikova G. N., Fursov V. V. *Teoreticheskie i eksperimental'nye raboty gnutyykh profiley s uchetom sobstvennykh napryazheniy* [Theoretical and experimental works of bent profiles taking into account their own stresses]. *Proektirovanie metallicheskih konstruktsiy* [In: Design of metal structures]. Moscow, TsNIS Publ., 1969, iss. 7 (15), pp. 93–101.

7. Shakir-Khalil H., Zegniche J. Experimental behavior of concrete-filled rolled rectangular hollow-section columns. *The Structural Engineer*, 1989, vol. 67, no. 19/3, pp. 346–353.

8. Cederwall K., Engstrom B., Grauers M. High-strength concrete used in composite columns. *ACI Symposium Publication*, no. 121, pp. 195–214. Available at: <https://doi.org/10.14359/2838>.

9. Schiller P. H., Hajjar J. F. A distributed plasticity formulation for three-dimensional rectangular concrete-filled steel tube beam-columns and composite frames. *Structural Engineering Report*, no. ST-96-5. Department of Civil Engineering Publ., University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, November 1996, 223 p.

10. Shakir-Khalil H., Mouli M. Further tests on concrete-filled rectangular hollow-section columns. *The Structural Engineer*, 1990, vol. 68, no. 20/16, pp. 405–413.