«ОБРАТНЫЙ» МЕТОД РАСЧЕТА УСИЛИВАЕМЫХ ПОД НАГРУЗКОЙ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПУТЕМ УВЕЛИЧЕНИЯ СЕЧЕНИЙ

«REVERSE» METHOD OF CALCULATING STEEL STRUCTURE ROD ELEMENTS REINFORCED UNDER LOAD BY INCREASING CROSS SECTIONS

Для разработки практических рекомендаций по расчету на прочность и устойчивость при общем случае нагружения усиливаемых под нагрузкой стержневых элементов стальных конструкций предложен «обратный» численно-аналитический метод расчета, который позволяет сократить время расчета на несколько порядков по сравнению с существующими. По заданному упругому предельному состоянию в сечении, соответствующему критерию максимальной пластической деформации $\bar{\varepsilon}_{\text{lim},p} = \varepsilon_{\text{lim},p} \cdot E / R_y = 3(\bar{\varepsilon}_{\text{max}} = 4)$ численно, с помощью алгоритма «Сечение», устанавливается реальное предельное состояние по прочности: общий параметр нагружения $\varphi = N / R_{y0} A$ и его относительные эксцентриситеты m_x и m_y . Полученные таким образом результаты являются более достоверными, чем по СП 16.13330.2017, поскольку развитие пластических деформаций определяется совместным действием усилий. Устойчивость же стержневых элементов за пределом упругости, как известно, характеризуется нарушением равновесного деформированного состояния. Поэтому, следуя методике решения задач прочности при ряде предельных деформаций $\bar{\varepsilon}_{\text{lim},i} = 1 + \Delta \bar{\varepsilon} \cdot i (i = 1, 2, \dots, n; \Delta \bar{\varepsilon} = 3 / n)$ «обратным» аналитическим методом для заданных гибкостей сжатого с равными концевыми одно- или двухосными эксцентриситетами стержня, определяются соответствующие параметры общего нагружения φ_i и его недеформационные эксцентриситеты m_x^0 и m_y^0 . При этом коэффициент потери устойчивости будет соответствовать φ_{max} при $m_x^0 = \text{const}$ и $m_y^0 = \text{const}$. Аналитические решения таких задач обладают достаточной для практики проектирования точностью и предусматривают все возможные формы потери устойчивости: изгибную, изгибно-крутильную и пространственную.

Ключевые слова: стержневой элемент, прочность, общая устойчивость, усиление путем увеличения сечения, усиление под нагрузкой, упругопластические деформации, общее нагружение.

To develop practical recommendations for strength and stability analysis in the general case of steel structure rod elements reinforced under load, there is proposed a «reverse» numerical-analytical calculation method, which allows reducing the calculation time by several orders of magnitude if compared with the currently used methods. For a given «elastic» limit state in the cross section corresponding to the criterion of maximum plastic deformation $\bar{\varepsilon}_{\text{lim},p} = \varepsilon_{\text{lim},p} \cdot E / R_y = 3(\bar{\varepsilon}_{\text{max}} = 4)$ numerically, using the «Section» algorithm, the real limiting state of strength is established, namely, the general loading parameter $\varphi = N / R_{y0} A$ and its relative eccentricities m_x^0 and m_y^0 . The results obtained in this way are more reliable than those according to SP 16.13330.2017, since the development of plastic deformations is determined by the joint action of forces. The stability of rod elements beyond the elastic limit is known to be characterized by a violation of the equilibrium deformed state. Therefore, following the technique of solving strength problems at a number of ultimate deformations $\bar{\varepsilon}_{\text{lim},i} = 1 + \Delta \bar{\varepsilon} \cdot i (i = 1, 2, \dots, n; \Delta \bar{\varepsilon} = 3 / n)$ by the «reverse» analytical method for the given flexibilities of the rod compressed with equal end uniaxial or biaxial eccentricities, the corresponding parameters of the total loading φ_i and its non-deformational eccentricities m_x^0 and m_y^0 are determined. In this case, the buckling factor will correspond to φ_{max} at $m_x^0 = \text{const}$ and $m_y^0 = \text{const}$. Analytical solutions of such problems have sufficient accuracy for design practice and provide for all possible forms of buckling, namely, lateral, lateral-torsional and spatial ones.

Keywords: rod element, strength, general stability, reinforcement by increasing the cross section, reinforcement under load, elastic-plastic deformations, general loading.

Широко проводимые в настоящее время техническое перевооружение и реконструкция действующих промышленных предприятий, как правило, связаны с увеличением эксплуатационных нагрузок на существующие, зачастую физически изношенные, несущие конструкции зданий и сооружений, что приводит к необходимости их усиления. Разработке приемов и методов усиления стальных конструкций посвящено сравнительно много работ. Среди них следует отметить монографии М. Н. Лашенко [1–3], в которых дана классификация и сделан анализ разработанных методов.

Усиление практически всегда осуществляется в условиях действующего производства, когда на усиливаемые конструкции воздействуют некоторые эксплуатационные нагрузки. При этом нужен особый подход к методам проектирования и расчета усиления конструкций с учетом негативного влияния сварочных процессов усиления на несущую способность, чему были посвящены исследования Б. И. Десятова [4], И. С. Реброва [5], И. К. Родионова [6] и др.

Отсутствие единых нормативных документов по проектированию и расчету усиления стальных конструкций и настоятельная необходимость в них привели в свое время (1989 г.) к разработке соответствующего пособия к СНиП-II-23–81¹, которое легло также в основу 18-й главы действующего свода правил СП 16.13330.2017² по стальным конструкциям.

Практические методы расчета в этом пособии были разработаны в основном И. С. Ребровым, который численными методами, изложенными в монографиях [7, 8], исследовал влияние начального нагружения и сварочных процессов усиления на прочность и устойчивость в плоскости изгиба усиливаемых стержневых элементов конструкций.

За истекший с того времени тридцатилетний период назрела потребность в актуализации указанного пособия и соответствующий главы СП 16.13330.2017 с соблюдением содержащихся в них рекомендаций по влиянию сварочных процессов усиления на несущую способность. Актуализацию пособия следует проводить в соответствии с действующими нормами проекти-

рования. При этом крайне важной является разработка недостающих рекомендаций по практическим методам расчета:

- на прочность при общем случае нагружения по критерию ограниченных пластических деформаций усиливаемого элемента;
- на устойчивость по изгибно-крутильной и пространственной формам.

Разработку последних можно выполнить только с помощью новых быстродействующих методов исследования напряженно-деформированных и предельных состояний усиливаемых под нагрузкой стержневых элементов, позволяющих получить достаточный для практики проектирования объем достоверных результатов.

Использование аналитически-численного метода [9] при определении предельных состояний усиливаемых стержневых элементов по заданному сценарию нагружения и усиления, как показали исследования П. А. Пяткина [10] и В. В. Михаськина [11], связано с выполнением многочисленных итерационных процессов между алгоритмами «Стержень» и «Сечение».

Для сокращения объема расчетных операций в настоящей статье на основе метода упругих решений, как это было сделано в [12], предлагается обратный ход исследования тем же методом [9]. По заданному предельному состоянию идеально упругого усиленного стержневого элемента, соответствующему критерию нормативной предельной деформации наиболее напряженного волокна $\bar{\epsilon}_{lim} = \epsilon_{lim} E / R_{y0}$ (R_{y0} — расчетное сопротивление усиливаемого стержня), с помощью алгоритма «Сечение» будем определять реальное его состояние: предельные усилия и их соотношения, а также рабочие характеристики сечения, необходимые для обратного аналитического решения задач устойчивости [12]. Предельные состояния последних, как известно, определяются нарушением равновесного деформированного состояния. Поэтому обратные аналитические решения деформационных задач следует проводить при ряде значений $\bar{\epsilon}_{lim,i}$ ($1,7 \leq \bar{\epsilon}_{lim,i} \leq 4$) с целью поиска наибольшего параметра общего нагружения — коэффициента потери устойчивости.

Схемы усиления следует устанавливать по результатам предварительного расчета неограниченно упругого неусиленного стержневого элемента с учетом физического износа по наи-

¹ Пособие по проектированию усиления стальных конструкций (к СНиП-II-23–81*). М.: Стройиздат, 1989. 159 с.

² СП 16.13330.2017. Стальные конструкции. М., 2017. 139 с.

худшим комбинациям усилий (как положительного, так и возможного отрицательного их направления), вытекающим из статического расчета конструкции при действии предполагаемых после усиления расчетных нагрузок. Выявив перенапряженные зоны в наиболее нагруженном сечении ($\bar{\sigma} = \sigma / R_{y0} > 1$), можно сформировать рациональную схему усиления, размещая сечения усиливаемых элементов вблизи этих зон. При этом общее сечение должно обладать осью симметрии, в противном случае (несимметричное усиление) выполнение сварочных работ при усилении приведет к дополнительному кручению стержневого элемента, негативно влияющему на его несущую способность.

1. Решение задач прочности по критерию ограниченных пластических деформаций

Следуя методу упругих решений, рассмотрим общий случай нагружения усиленного по принятой на рис. 1 схеме (см. заштрихованные площади) неограниченно упругого стержневого элемента, когда в его сечениях действуют: продольная сила N^* , изгибающие в двух главных плоскостях моменты M_x^* , M_y^* и поперечная сила Q_y^* в плоскости симметрии. Влияние последней на несущую способность будем учитывать со-

Рис. 1. Общее загружение силовыми факторами

гласно СП 16.13330.2017 на завершающем этапе расчета.

За общий параметр загрузки примем коэффициент продольной силы $\varphi^* = N^* / R_{y0} A$, тогда предельное напряженно-деформированное состояние в сечении упругого стержня по $\bar{\varepsilon}_{\text{lim}} = 4$ ($\bar{\varepsilon}_{\text{lim}, p} = 3$) (пособие к СНиП-II-23-81*) можно представить в виде:

$$\bar{\sigma}^*(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{\varepsilon}^*(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi^*(1 + m_x^* \bar{y} + m_y^* \bar{x}), \quad (1)$$

где $\varphi^* = 4 / (1 + m_x^* + m_y^*)$; $\bar{x} = x / x_*$; $\bar{y} = y / y_*$;
 $m_x^* = e_y^* / \rho_x$; $m_y^* = e_x^* / \rho_y$; $e_y^* = M_x^* / N^*$; $e_x^* = M_y^* / N^*$;
 $\rho_x = W_{xc} / A$; $\rho_y = W_{yc} / A$; W_{xc}, W_{yc} — моменты со-
 противления наиболее напряженного волокна
 усиливаемого элемента с координатами x_*, y_* .

Для определения соответствующего (1) предельного состояния за пределом упругости с учетом начального нагружения¹ $\beta = \sigma_{\max,н} / R_{y0}$ разобьем сечение усиливаемого стержня на n_0 и элементов усиления на n_y , достаточно малых дискретных площадок ΔA_{k0} и ΔA_{ky} , с координатами центра тяжести x_{k0}, y_{k0} и x_{ky}, y_{ky} , соответственно (см. рис. 1). Расчетные сопротивления усиленного элемента R_{y0} и элемента усиления R_{yy} , могут быть различными ($R_{yy} > R_{y0}$), поэтому в решении поставленной задачи используем унифицированную диаграмму работы стали $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$ с R_{y0} (см. сплошную линию на рис. 2), на которую наложим соответствующую R_{yy} диаграмму элементов усиления (пунктирная линия). При этом относительные секущие модули окажутся взаимосвязанными: $\bar{E}_{скy} = \bar{E}_{ск0} R_{yy} / R_{y0}$. Гипотеза плоских сечений в этом случае примет вид:

$$\bar{\varepsilon}_k = \bar{\varepsilon}_0 - \bar{v}'' \tilde{y}_k - \bar{u}'' \tilde{x}_k, \quad (2)$$

где $\bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 E / R_{y0}$; $\bar{v}'' = v'' \rho_x E / R_{y0}$; $\bar{u}'' = u'' \rho_y E / R_{y0}$; $\bar{x}_k = x_k / \rho_y$; $\bar{y}_k = y_k / \rho_x$; ε_0 — относительная деформация оси усиленного стержня; v'' , u'' — кри-

Рис. 2. Унифицированная диаграмма работы стали с R_{y0}

визны при изгибе стержня относительно осей x и y соответственно.

Используя (2), представим уравнения равновесия, соответствующие предельному состоянию $\bar{\varepsilon}_{\text{lim}} = 4$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \bar{\varepsilon}_0 \bar{A}_{ef} + \bar{v}'' \bar{y}_c + \bar{u}'' \bar{x}_c \\ \varphi m_x &= -\bar{\varepsilon}_0 \bar{y}_c - \bar{v}'' \bar{i}_{x,ef}^2 + \bar{u}'' \bar{i}_{xy,ef}^2 \\ \varphi m_y &= -\bar{\varepsilon}_0 \bar{x}_c + \bar{v}'' \bar{i}_{xy,ef}^2 - \bar{u}'' \bar{i}_{y,ef}^2 \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{ef} &= 1 - \bar{A}_{0c}; \\ \bar{A}_{0c} &= \sum_{k_0=1}^{n_0} (1 - \bar{E}_{ck0}) \Delta \bar{A}_{k0} + \sum_{k_y=1}^{n_y} (1 - \bar{E}_{cky}) \Delta \bar{A}_{ky}; \\ \bar{y}_c &= \sum_{k_0=1}^{n_0} (1 - \bar{E}_{ck0}) \tilde{y}_{k0} \Delta \bar{A}_{k0} + \\ &+ \sum_{k_y=1}^{n_y} (1 - \bar{E}_{cky}) \tilde{y}_{ky} \Delta \bar{A}_{ky}; \\ \bar{i}_{x,ef}^2 &= \frac{I_x}{A \rho_x^2} - \bar{i}_{x,0c}^2; \\ \bar{x}_c &= \sum_{k_0=1}^{n_0} (1 - \bar{E}_{ck0}) \tilde{x}_{k0} \Delta \bar{A}_{k0} + \\ &+ \sum_{k_y=1}^{n_y} (1 - \bar{E}_{cky}) \tilde{x}_{ky} \Delta \bar{A}_{ky}; \\ \bar{i}_{y,ef}^2 &= \frac{I_y}{A \rho_y^2} - \bar{i}_{y,0c}^2; \\ \bar{i}_{x,0c}^2 &= \sum_{k_0=1}^{n_0} (1 - \bar{E}_{ck0}) \tilde{y}_{k0}^2 \Delta \bar{A}_{k0} + \\ &+ \sum_{k_0=1}^{n_0} (1 - \bar{E}_{ck0}) \tilde{y}_{ky}^2 \Delta \bar{A}_{ky}; \\ \bar{i}_{y,0c}^2 &= \sum_{k_0=1}^{n_0} (1 - \bar{E}_{ck0}) \tilde{x}_{k0}^2 \Delta \bar{A}_{k0} + \\ &+ \sum_{k_y=1}^{n_y} (1 - \bar{E}_{cky}) \tilde{x}_{ky}^2 \Delta \bar{A}_{ky}; \\ \bar{i}_{xy,ef}^2 &= \sum_{k_0=1}^{n_0} (1 - \bar{E}_{ck0}) \tilde{x}_{k0} \tilde{y}_{k0} \Delta \bar{A}_{k0} + \\ &+ \sum_{k_y=1}^{n_y} (1 - \bar{E}_{cky}) \tilde{x}_{ky} \tilde{y}_{ky} \Delta \bar{A}_{ky} \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

n_0 — количество площадок $\Delta \bar{A}_{k0}$, где $0,8 < \bar{\varepsilon}_{k0} < -0,8$, а n_y — соответственно при $0,8 R_{yy} / R_{y0} < \bar{\varepsilon}_{ky} < -0,8 R_{yy} / R_{y0}$.

Заметим, что уровень начального нагружения β^1 учитывается в (4) при определении $\bar{E}_{cky}$ по предельной деформации элементов усиления $\bar{\varepsilon}_{\text{lim},y} = 4 - \beta$.

Деформационные характеристики сечения $\bar{\varepsilon}_0$, $\bar{v}''$, $\bar{u}''$ в предельном состоянии согласно методу упругих решений примут вид:

$$\bar{\varepsilon}_0 = \varphi^* \bar{\varepsilon}_0^*; \bar{v}'' = -\varphi^* m_x^* \frac{\rho_x}{y_*}; \bar{u}'' = -\varphi^* m_y^* \frac{\rho_y}{x_*}. \quad (5)$$

Тогда, используя систему (3), получим реальные предельные параметры усилий:

$$\varphi = \varphi^* C_1; m_x = \frac{C_2}{C_1}; m_y = \frac{C_3}{C_1}, \quad (6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \bar{A}_{ef} - m_x^* \frac{\rho_x}{y_*} \bar{y}_c - m_y^* \frac{\rho_y}{x_*} \bar{x}_c \\ C_2 &= -\bar{y}_c + m_x^* \frac{\rho_x}{y_*} \bar{i}_{x,ef}^2 - m_y^* \frac{\rho_y}{x_*} \bar{i}_{xy,ef}^2 \\ C_3 &= -\bar{x}_c - m_x^* \frac{\rho_x}{y_*} \bar{i}_{xy,ef}^2 + m_y^* \frac{\rho_y}{x_*} \bar{i}_{y,ef}^2 \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Получив (6), практический метод расчета на прочность можно свести к виду:

$$\frac{1}{\gamma_c R_{ycp}} \left(\frac{N}{A} + \frac{M_x}{\beta_\tau I_x} y_* + \frac{M_y}{I_y} x_* \right) \leq 1, \quad (8)$$

где

$$c_p = \varphi(1 + m_x + m_y) > 1. \quad (9)$$

В (9) коэффициент c_p учитывает развитие пластических деформаций при совместном действии N , M_x , M_y с относительными эксцентриситетами m_x , m_y по (6).

Коэффициент β_τ в (8), согласно СП 16.13330.2017, характеризует влияние поперечной силы Q_y (при $0,5 R_s \leq \tau \leq 0,9 R_s$) на прочность за пределом упругости.

Таким образом, задаваясь общим нагружением безразмерными силовыми факторами m_x^* , m_y^* в сечении неограниченно упругого усиленного стержневого элемента, устанавливаем предельное деформированное состояние по $\bar{\varepsilon}_{\text{lim}} = 4$ с параметром φ^* . Следуя методу упругих решений, используем последнее и с помощью алгоритма «Сечение» определяем соответствующие упругой работе материала и начальному нагружению β

предельное состояние m_x , m_y и φ по (6), а также коэффициент c_p по (9).

Такой подход позволяет сократить время расчета на несколько порядков по сравнению с прямым методом, что позволит получить необходимое для разработки практических методов расчета количество результатов по прочности при общем случае нагружения усиливаемых под нагрузкой стержневых элементов.

2. Аналитический метод деформационного расчета усиленных стержневых элементов конструкций при неограниченной упругости

Рассмотрим выделенный из конструкции с помощью расчетной длины $l_{ef,x}$ или $l_{ef,y}$ усиленный стержневой элемент моносимметричного сечения. На рис. 3, а $l_{ef,x}$ и $l_{ef,y}$ показаны в совмещенном виде общей длиной l . Следуя практическим методам расчета^{1,2}, рассмотрим стержень, имеющий в плоскости симметрии остаточный после сварки прогиб $f_w^{1,2}$, нагруженный продольной силой с равными концевыми эксцентриситетами: в плоскости симметрии e_y^0 и из этой плоскости e_x^0 . Остаточный прогиб f_w^1 приведем к эквивалентному эксцентриситету $e_w^0 = f_w^1 / \pi^2$, тогда $e_{y*}^0 = e_y^0 + e_w^0$ (см. рис. 3, а). Закрепление стержня в двух главных плоскостях

принято шарнирным при отсутствии угла закручивания концевых сечений, которые свободно деформируются.

Пренебрегая малым разгружающим влиянием изгибно-крутильных перемещений u и θ на перемещения в плоскости большей жесткости ($I_x > I_y$) v (см. рис. 3, б), согласно [13], представим уравнения равновесия:

$$EI_x v'' + N^* v = -N^* e_{y*,v}^0; \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} EI_y u'' + N^* [u + \theta(e_{y*,u}^0 - a_y)] &= -N^* e_x^0 \\ EI_\omega \theta^{IV} - GI_k \theta'' + N^* (e_{y*,u}^0 - a_y) u'' + \\ &+ N^* (i_A^2 + 2\beta_y e_{y*,u}^0) \theta'' = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

где I_x, I_y, I_ω — осевые и секториальный моменты инерции сечения; I_k — момент инерции чистого кручения; $i_A^2 = i_p^2 + a_y^2$; i_p — полярный радиус инерции; a_y — центр изгиба;

$$\beta_y = (2I_y)^{-1} \int (x^2 + y^2) y dA - a_y.$$

Уравнение (10) соответствует изгибной в плоскости симметрии форме деформирования, а система (11) — изгибно-крутильной. Следуя нормам проектирования², в первом случае $e_{y,v}^0$ ($e_{y*,v}^0 = e_{y,v}^0 + e_w^0$) принимается по максимальному моменту, а во втором $e_{y,u}^0$ ($e_{y*,u}^0 = e_{y,u}^0 + e_w^0$) —

Рис. 3. Расчетная модель стержневого элемента: а — схема нагружения; б — схема деформирования

по наибольшему моменту в средней трети длины стержня.

Потеря устойчивости в бифуркационной постановке задачи по изгибной (решение уравнения (10) при $e_{y,*}^0 = 0$) и изгибно-крутильной (решение системы (11) при $e_x^0 = 0$) формам происходит, как известно, по синусоиде, а соответствующие им «недеформационные» перемещения — по параболе. Качественно эти формы близки, и при решении деформационных задач их можно принять по форме потери устойчивости, тогда решение уравнения (10) принимает известный вид:

$$v(z) = v_0(z) \left(1 - N^* / N_{cr,x}^* \right)^{-1}$$

или

$$v(z) = v_0(z) \left(1 - \Phi^* \bar{\lambda}_x^2 / \pi^2 \right)^{-1}, \quad (12)$$

а решение системы (11) при $\theta_0(z) = 0$ [14]:

$$u(z) = u_0(z) \eta,$$

где

$$\eta = \left[\left(1 - \Phi^* / \Phi_{cr1}^* \right) \left(1 - \Phi^* / \Phi_{cr2}^* \right) \right]^{-1}. \quad (13)$$

В (12) и (13) обозначены: $v_0(z)$, $u_0(z)$ — перемещения, полученные расчетом по недеформированной схеме; $\Phi_{cr1}^* = N_{cr1}^* / R_{y0} A$, $\Phi_{cr2}^* = N_{cr2}^* / R_{y0} A$ — коэффициенты критических сил N_{cr1}^* и N_{cr2}^* , которые вытекают из решения системы (11) при $e_x^0 = 0$ [15] (решение бифуркационной задачи устойчивости по изгибно-крутильной форме):

$$\Phi_{cr1,2}^* = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{1}{a}}, \quad (14)$$

где

$$a = \frac{\bar{\lambda}_y^4 I_y (e_{y*,u}^0)^2}{\pi^4 I_\omega} \left[\left(\frac{i_A^2}{(e_{y*,u}^0)^2} + \frac{2\beta_y}{e_{y*,u}^0} \right) - \left(1 + \frac{(kl)^2}{\pi^2} \right)^{-1} \right];$$

$$b = \frac{\bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} \left[1 + \frac{I_y (e_{y*,u}^0)^2}{I_\omega} \left(\frac{i_A^2}{(e_{y*,u}^0)^2} + \frac{2\beta_y}{e_{y*,u}^0} \right) \left(1 + \frac{(kl)^2}{\pi^2} \right)^{-1} \right];$$

$k = \sqrt{GI_k (EI_\omega)^{-1}}$ — изгибно-крутильная характеристика.

Следует заметить, что аналитические решения (12) и (13) применительно к рассматри-

ваемым расчетным моделям обладают высокой точностью. Воспользуемся ими и представим деформационные усилия в наиболее напряженном среднем сечении [16]:

- при изгибе в плоскости симметрии (решение уравнения (10)):

$$M_x^* = N^* e_{y*,v}^0 \left[1 + \frac{\Phi^* \bar{\lambda}_x^2}{8} \left(1 - \frac{\Phi^* \bar{\lambda}_x^2}{\pi^2} \right)^{-1} \right]; \quad (15)$$

- при изгибе из плоскости симметрии в сочетании с кручением (решение системы уравнений (11)):

$$M_y^* = N^* e_x^0 \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{\pi^2}{8} \left(1 - \frac{a_y}{e_{y*,u}^0} \right)^{-1} \times \\ & \times \left[\left(1 - \frac{a_y}{e_{y*,u}^0} \cdot \frac{\Phi^* \bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} \right) \eta - 1 \right] \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

где

$\Phi^* = \frac{N^*}{R_{y0} A}$; $\bar{\lambda}_x = \frac{l_{ef,x}}{i_x} \sqrt{\frac{R_{y0}}{E}}$; $\bar{\lambda}_y = \frac{l_{ef,y}}{i_y} \sqrt{\frac{R_{y0}}{E}}$ — условные гибкости стержня в плоскости симметрии и из этой плоскости.

Рассматривая предельные состояния по $\bar{\epsilon}_{lim,i} = 1 + \Delta \bar{\epsilon}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $\Delta \bar{\epsilon} = 3/n$) в сечении, где определялись деформационные моменты M_x^* (15) и M_y^* (16), представим выражения для соответствующих максимальных напряжений, вытекающих из расчета:

- по изгибной деформированной схеме ($e_{y*,v}^0 \neq 0$; $e_x^0 = 0$) с выделением стержневого элемента из конструкции по $l_{ef,x}$:

$$\bar{\sigma}_{max,i}^* = \Phi_{ex,i}^* \left[\begin{aligned} & 1 + m_{x*,v}^* \times \\ & \times \left(1 + \frac{\Phi_{ex,i}^* \bar{\lambda}_x^2 \cdot 0,125}{1 - \frac{\Phi_{ex,i}^* \bar{\lambda}_x^2}{\pi^2}} \right) \end{aligned} \right] = \bar{\epsilon}_{lim,i}; \quad (17)$$

- по изгибно-крутильной деформированной схеме ($e_{y*,v}^0 \neq 0$; $e_x^0 = 0$) с выделением стержневого элемента по $l_{ef,y}$ при $I_x \leq I_y$:

$$\bar{\sigma}_{max,i}^* = \Phi_{yc,i}^* \left[1 + m_{x*,u}^{0*} + m_{y,u}^{0*} K_{d,y}^* \right] = \bar{\epsilon}_{lim,i}, \quad (18)$$

где

$$K_{d,y}^* = 1 + \frac{\pi^2}{8} \left(1 - \frac{a_y}{e_{y*,u}^0} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left[\left(1 - \frac{a_y}{e_{y*,u}^0} \cdot \frac{\Phi_{yc,i}^* \bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} \right) \eta - 1 \right] = \bar{\epsilon}_{lim,i}, \quad (19)$$

$K_{d,y}^*$ — деформационный коэффициент, учитывающий влияние изгибно-крутильных перемещений на усилия;

• по пространственно-деформированной схеме при $1 \leq (i_x / i_y) \leq 1,5$ с выделением элемента по $l_{ef,y}$:

$$\bar{\sigma}_{\max,i}^* = \Phi_{\text{пр},i}^* \left[1 + m_{x*,u}^{0*} K_{d,xu}^* + m_{y*}^{0*} K_{d,y}^* \right] = \bar{\varepsilon}_{\text{lim},i}^*, \quad (20)$$

где

$$K_{d,xu}^* = 1 + \frac{\Phi_{\text{пр},i}^* \bar{\lambda}_{x,u}^2}{8} \left(1 - \frac{\Phi_{\text{пр},i}^* \bar{\lambda}_{x,u}^2}{\pi^2} \right)^{-1}; \quad (21)$$

$K_{d,xu}^*$ — деформационный коэффициент, учитывающий влияние перемещений в плоскости симметрии на усилия; $\bar{\lambda}_{x,u} = \bar{\lambda}_{y,i} i_y / i_x$; $K_{d,y}^*$ — определяется по (19) с заменой $\Phi_{yc,i}$ на $\Phi_{\text{пр},i}$.

В (17), (18) и (20) обозначены: $\Phi_{ex,i}^*$, $\Phi_{yc,i}^*$ и $\Phi_{\text{пр},i}^*$ — коэффициенты продольной силы (параметры общего нагружения); $m_{x*,v}^{0*} = e_{y*,v}^{0*} / \rho_x$; $m_{x*,u}^{0*} = e_{y*,u}^{0*} / \rho_y$; $m_{y*}^{0*} = e_{x*}^{0*} / \rho_y$.

Таким образом, используя «нормативные» модели неограниченно упругого с начальным «сварочным» прогибом f_w^1 усиленного стержневого элемента, подверженного действию продольной силы с равными одно- или двухосными концевыми эксцентриситетами, в аналитическом виде получены уравнения (17), (18) и (20), решения которых позволяют определить параметры общего нагружения $\Phi_{ex,i}^*$, $\Phi_{yc,i}^*$ и $\Phi_{\text{пр},i}^*$ по критерию $\bar{\varepsilon}_{\text{lim},i}^*$ для соответствующих форм деформирования.

3. «Обратный» деформационный расчет и устойчивость усиленных под нагрузкой стержневых элементов за пределом упругости

Следуя обратному решению задач прочности, рассмотрим пространственно-деформированный неограниченно упругий стержневой элемент, в наиболее нагруженном сечении которого действует продольная сила с деформационными моментами $m_{x*,u}^*$ и m_{y*}^* . Принимая предельное состояние по ограниченной относительной деформации $\bar{\varepsilon}_{\text{lim},i}$ наиболее нагруженного волокна, устанавливаем напряженно-деформированное состояние:

$$\bar{\sigma}^*(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{\varepsilon}^*(\bar{x}, \bar{y}) = \Phi_{\text{пр},i}^* (1 + m_{x*,u}^* \bar{y} + m_{y*}^* \bar{x}), \quad (22)$$

где

$$\Phi_{\text{пр},i}^* = \bar{\varepsilon}_{\text{lim},i}^* \left(1 + m_{x*,u}^* + m_{y*}^* \right)^{-1}. \quad (23)$$

Затем, обращаясь к алгоритму «Сечение» (см. (3)–(7)), определяем:

• реальный параметр нагружения (с учетом развития пластических деформаций и начального нагружения)

$$\Phi_{\text{пр},i} = \Phi_{\text{пр},i}^* \left(\bar{A}_{ef} - m_{x*,u}^* \frac{\rho_x}{y_*} \bar{y}_c - m_{y*}^* \frac{\rho_y}{x_*} \bar{x}_c \right); \quad (24)$$

• фиктивный — с его относительными эксцентриситетами

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{пр},i}^\Phi &= \Phi_{\text{пр},i}^* C_{1\Phi}; m_{x\Phi}^0 = C_{2\Phi} / C_{1\Phi}; \\ m_{y\Phi}^0 &= C_{3\Phi} / C_{1\Phi}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_{1\Phi} &= \bar{A}_0 + m_{x*,u}^* \frac{\rho_x}{y_*} \bar{y}_c + m_{y*}^* \frac{\rho_y}{x_*} \bar{x}_c \\ C_{2\Phi} &= \bar{y}_c + m_{x*,u}^* \frac{\rho_x}{y_*} \bar{i}_{x,0c}^2 + m_{y*}^* \frac{\rho_y}{x_*} \bar{i}_{xy,ef}^2 \\ C_{3\Phi} &= \bar{x}_c + m_{x*,u}^* \frac{\rho_x}{y_*} \bar{i}_{xy,ef}^2 + m_{y*}^* \frac{\rho_y}{x_*} \bar{i}_{y,0c}^2 \end{aligned} \right\}. \quad (26)$$

Фиктивная сила $N_{\text{пр},i}^\Phi = \Phi_{\text{пр},i}^\Phi R_{y0} A$ с равными концевыми двухосными эксцентриситетами $e_{y\Phi}^0 = m_{x\Phi}^0 \rho_x$, $e_{x\Phi}^0 = m_{y\Phi}^0 \rho_y$ является следствием действия фактической $N_{\text{пр},i} = \Phi_{\text{пр},i} R_{y0} A$, поэтому пространственно-деформированное состояние стержня, вызванное $N_{\text{пр},i}$, распространяется также и на действие $N_{\text{пр},i}^\Phi$.

Учитывая изложенное, рассмотрим предельные напряженные состояния в наиболее нагруженном сечении ($\bar{\sigma}_{\max}^* = \bar{\varepsilon}_{\text{lim},i}^*$) по различным схемам деформирования упругого стержня при совместном действии $N_{\text{пр},i}$ и $N_{\text{пр},i}^\Phi$.

1. Предельное состояние по $\bar{\varepsilon}_{\text{lim},i}$ при пространственной схеме деформирования:

$$\begin{aligned} \sigma^*(\bar{x}, \bar{y}) &= \Phi_{\text{пр},i} \left(1 + m_{x*,u}^0 \bar{y} K_{d,xu} + m_{y*,ef}^0 \bar{x} K_{d,y} \right) + \\ &+ \Phi_{\text{пр},i}^\Phi \left(1 + m_{x\Phi}^0 \bar{y} K_{d,xu} + m_{y\Phi}^0 \bar{x} K_{d,y} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$K_{d,xu} = 1 + \frac{\Phi_{\text{пр},i} \bar{\lambda}_{x,u}^2}{8} \left(1 - \frac{\Phi_{\text{пр},i} \bar{\lambda}_{x,u}^2}{\pi^2} \right)^{-1}; \quad (28)$$

$$\begin{aligned} K_{d,y} &= 1 + \frac{\pi^2}{8} \left(1 - \frac{a_y}{e_{y*,u}^0} \right)^{-1} \times \\ &\times \left[\left(1 - \frac{a_y}{e_{y*,u}^0} \cdot \frac{\Phi_{\text{пр},i} \bar{\lambda}_{x,u}^2}{\pi^2} \right) \eta - 1 \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Из выражения (27) видно, что неизвестными являются концевые относительные эксцентриситеты $m_{x*,u,ef}^0$ ($e_{y*,u,ef}^0 = m_{x*,u,ef}^0 \rho_x$) и $m_{y,ef}^0$. Для их определения сопоставим предельные напряженные состояния (27) и (22), в результате чего получим:

- при $\bar{x} = 0; \bar{y} = 1$:

$$\begin{aligned} \Phi_{пр,i} \left(1 + m_{x*,u,ef}^0 K_{d,xu} \right) + \Phi_{пр,i}^{\Phi} \left(1 + m_{x\Phi}^* K_{d,xu} \right) = \\ = \frac{\bar{e}_{lim,i} \left(1 + m_{x*,u}^* \right)}{1 + m_{x*,u}^* + m_y^*}; \end{aligned} \quad (30)$$

- при $\bar{x} = 1; \bar{y} = 0$:

$$\begin{aligned} \Phi_{пр,i} \left(1 + m_{y,ef}^0 K_{d,y} \right) + \Phi_{пр,i}^{\Phi} \left(1 + m_{y\Phi}^* K_{d,y} \right) = \\ = \frac{\bar{e}_{lim,i} \left(1 + m_y^* \right)}{1 + m_{x*,u}^* + m_y^*}. \end{aligned} \quad (31)$$

Тогда

$$\begin{aligned} m_{x*,u,ef}^0 = \frac{\bar{e}_{lim,i} \left(1 + m_{x*,u}^* \right)}{\left(1 + m_{x*,u}^* + m_y^* \right) K_{d,xu} \Phi_{пр,i}} - \\ - \left[\frac{\Phi_{пр,i}^{\Phi} \left(\frac{1}{K_{d,xu}} + m_{x\Phi}^0 \right) + \frac{1}{K_{d,xu}} \right]; \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} m_{y,ef}^0 = \frac{\bar{e}_{lim,i} \left(1 + m_y^* \right)}{\left(1 + m_{x*,u}^* + m_y^* \right) K_{d,y} \Phi_{пр,i}} - \\ - \left[\frac{\Phi_{пр,i}^{\Phi} \left(\frac{1}{K_{d,y}} + m_{y\Phi}^0 \right) + \frac{1}{K_{d,y}} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

2. Рассматривая предельное напряженное состояние по $\bar{e}_{lim,i}$ при изгибно-крутильной схеме деформирования стержня, когда в его наиболее нагруженном сечении действуют недеформационный $m_{x*,u}^{0*}$ ($I_x \gg I_y$) и деформационный m_y^* моменты, имеем:

$$m_{x*,u,ef}^0 = \frac{\bar{e}_{lim,i} \left(1 + m_{x*,u}^{0*} \right)}{\left(1 + m_{x*,u}^{0*} + m_y^* \right) \Phi_{yc,i}} - \left[\frac{\Phi_{yc,i}^{\Phi} \left(1 + m_{x\Phi}^0 \right) + 1}{\Phi_{yc,i}} \right]; \quad (34)$$

$$\begin{aligned} m_{y,ef}^0 = \frac{\bar{e}_{lim,i} \left(1 + m_y^* \right)}{\left(1 + m_{x*,u}^{0*} + m_y^* \right) \Phi_{yc,i} K_{d,y}} - \\ - \left[\frac{\Phi_{yc,i}^{\Phi} \left(\frac{1}{K_{d,y}} + m_{y\Phi}^0 \right) + \frac{1}{K_{d,y}} \right], \end{aligned} \quad (35)$$

где $\Phi_{yc,i}$, $\Phi_{yc,i}^{\Phi}$, $m_{x\Phi}^0$, $m_{y\Phi}^0$ — определяются по (24) и (25) с заменой деформационного $m_{x*,u}^*$ на недеформационный $m_{x*,u}^{0*}$ относительные эксцентриситеты; $K_{d,y}$ — по (29) с заменой $\Phi_{пр,i}$ на $\Phi_{yc,i}$.

3. То же при изгибной схеме деформирования стержня в плоскости симметрии (выделение по $l_{ef,x}$) при действии только деформационного момента с $m_{x*,v}^*$:

$$\begin{aligned} m_{x*,v,ef}^0 = \frac{\bar{e}_{lim,i}}{\Phi_{ex,i} K_{d,xv}} - \\ - \left[\frac{\Phi_{ex,i}^{\Phi} \left(\frac{1}{K_{d,xv}} + m_{x\Phi}^0 \right) + \frac{1}{K_{d,xv}} \right], \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\Phi_{ex,i} = \frac{\bar{e}_{lim,i}}{\left(1 + m_{x*,v}^* \right) \left(\bar{A}_{ef} - m_{x*,u}^* \frac{\rho_x}{y_*} \bar{y}_c \right)};$$

$$\Phi_{ex,i}^{\Phi} = \frac{\bar{e}_{lim,i}}{\left(1 + m_{x*,v}^* \right)} - \Phi_{ex,i};$$

$$m_{x\Phi}^0 = \left(\bar{y}_c + m_{x*,v}^* \frac{\rho_x}{y_*} \bar{i}_{x,0c}^2 \right) \left(\bar{A}_0 + m_{x*,v}^* \frac{\rho_x}{y_*} \bar{y}_c \right)^{-1};$$

$K_{d,xv}$ — определяется по (28) с заменой $\Phi_{пр,i}$ на $\Phi_{ex,i}$ и $\bar{\lambda}_{x,u}$ и $\bar{\lambda}_x$.

Таким образом, по назначенному i -му предельному состоянию по $\bar{e}_{lim,i} = 1 + \Delta \bar{e}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n; \Delta \bar{e} = 3/n$) с заданными деформационными относительными эксцентриситетами m_x^* и m_y^* обратным численно-аналитическим методом расчета можно определить соответствующие загрузки усиленного под нагрузкой стержня силовыми факторами Φ_i , $m_{x*,ef}^0$, $m_{y,ef}^0$ для любой из рассматриваемых схем деформирования: пространственной, изгибно-крутильной или изгибной.

Рассматривая предельные состояния при ряде значений $\bar{e}_{lim,i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), когда $m_{x*}^0 = \text{const}$ и $m_y^0 = \text{const}$, определяем наибольший параметр общего нагружения Φ_{max} , который будет соответствовать коэффициенту потери устойчивости.

Выводы

1. Предложенный обратный численно-аналитический метод решения задач прочности и общей устойчивости усиленных под нагрузкой стержневых элементов за пределом упругости при общем случае нагружения позволяет сократить время расчета на несколько порядков по сравнению с существующими методами.

2. Рассматривая упругое предельное состояние в сечении стержня по критерию максимальной относительной деформации $\bar{\epsilon}_{lim,i} = 4$ при заданных силовых факторах, численно, с помощью алгоритма «Сечение» устанавливается реальное предельное состояние по прочности (с учетом развития пластических деформаций и уровня начального нагружения): усилия и их соотношения. При этом коэффициент, учитывающий развитие пластических деформаций, определяется при совместном действии усилий.

3. Используя предложенное решение задач прочности при различных значениях $\bar{\epsilon}_{lim,i} = 1 + \Delta \bar{\epsilon} i$ ($i = 1, 2, \dots, n; \Delta \bar{\epsilon} = 3/n$), обратным аналитическим решением деформационной задачи устанавливаются соответствующие условия нагружения стержня по назначенным гибкостям $\bar{\lambda}_x$ и $\bar{\lambda}_y$; общий параметр нагружения ϕ_i и его относительные недеформационные эксцентриситеты $m_{x*,ef}^0$, $m_{y,ef}^0$. Коэффициент потери устойчивости будет соответствовать максимальному параметру нагружения ϕ_{max} при $m_{x*,ef}^0 = const$ и $m_{y,ef}^0 = const$.

4. Предложенный обратный численно-аналитический метод позволяет получить необходимый для разработки практических рекомендаций объем результатов по прочности и общей устойчивости усиленных под нагрузкой стержневых элементов стальных конструкций.

Библиографический список

1. Лащенко М. Н. Усиление металлических конструкций. М.; Л.: Госстройиздат, 1954. 155 с.
2. Лащенко М. Н. Регулирование напряжений в металлических конструкциях. Л.; М.: Стройиздат, 1966. 190 с.
3. Лащенко М. Н. Аварии металлических конструкций зданий и сооружений. Л.: Стройиздат, 1969. 182 с.
4. Десятов Б. И. Исследование работы усиленных под нагрузкой элементов сварных стальных ферм: автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 1969. 22 с.
5. Ребров И. С. К расчету стержневых систем, усиленных под нагрузкой // Изв. вузов. Сер. «Строительство и архитектура». 1979. № 1. С. 52–57.
6. Родионов И. К. Влияние технологических параметров сварки на работу сжатых, усиливаемых увеличением сечения стержней стальных стропильных ферм, находящихся под нагрузкой: автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 1980. 23 с.

7. Ребров И. С. Работа сжатых элементов стальных конструкций, усиленных под нагрузкой. Л.: Стройиздат, 1976. 176 с.

8. Ребров И. С. Усиление стержневых металлических конструкций. Л.: Стройиздат, 1988. 288 с.

9. Белый Г. И. О расчете упругопластических тонкостенных стержней по пространственно-деформируемой схеме с учетом касательных напряжений и деформации сдвига // Металлические конструкции и испытания сооружений: межвуз. темат. сб. тр. ЛИСИ. 1985. № 62. С. 10–20.

10. Пяткин П. А. Прочность и пространственная устойчивость усиленных под нагрузкой стержневых элементов конструкций открытого профиля: автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2000. 24 с.

11. Михаськин В. В. Влияние сварочных процессов на пространственную устойчивость усиливаемых под нагрузкой элементов стержневых конструкций: автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2010. 26 с.

12. Белый Г. И. Развитие методов расчета стержневых элементов стальных конструкций при многопараметрическом нагружении // Вестник гражданских инженеров. 2020. № 3 (80). С. 43–54.

13. Бейлин Е. А. Общие уравнения деформационного расчета и устойчивости тонкостенных стержней // Строительная механика и расчет сооружений. 1969. № 5. С. 35–41.

14. Бейлин Е. А., Белый Г. И. К деформационному расчету упругих систем, подверженных одновременному действию активных и параметрических нагрузок // Строительная механика сооружений. 1976. № 3. С. 30–34.

15. Белый Г. И. Новые положения в инженерной методике расчета на устойчивость стальных стержневых элементов конструкций из холодногнутых профилей // Вестник гражданских инженеров. 2017. № 2 (61). С. 75–80.

16. Белый Г. И. Аналитически-численный метод расчета на устойчивость стержневых элементов легких стальных тонкостенных конструкций // Вестник гражданских инженеров. 2020. № 4 (81). С. 39–46.

References

1. Lashchenko M. N. *Usilenie metallicheskih konstruktsiy* [Strengthening of metal structures]. Moscow, Leningrad, Gosstroyizdat Publ., 1954, 155 p.
2. Lashchenko M. N. *Regulirovanie napryazheniy v metallicheskih konstruktsiyakh* [Regulation of stresses in metal structures]. Moscow, Leningrad, Sroyizdat Publ., 1966, 190 p.
3. Lashchenko M. N. *Avarii metallicheskih konstruktsiy zdaniy i sooruzheniy* [Failures of metal

structures of buildings and structures]. Leningrad, Stroyizdat Publ., 1969, 182 p.

4. Desyatov B. I. *Issledovanie raboty usilennykh pod nagruzkoj elementov svarnykh stal'nykh ferm*. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk [Investigation of the performance of elements of welded steel trusses reinforced under load. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. Moscow, 1969, 22 p.

5. Rebrov I. S. *K raschetu sterzhnevyykh sistem, usilennykh pod nagruzkoj* [Regarding the calculation of rod systems reinforced under load]. *Izv. vuzov. Ser. «Stroitel'stvo i Arkhitektura» – Bulletin of Higher schools. Ser. "Construction and Architecture"*, 1979, no. 1, pp. 52–57.

6. Rodionov I. K. *Vliyanie tekhnologicheskikh parametrov svarki na rabotu szhatykh usilivaemykh uvelicheniem secheniya sterzhney stal'nykh stropil'nykh ferm, nakhodyashchikhsya pod nagruzkoj*. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk [The influence of welding technological parameters on the work of compressed rods reinforced by increasing the cross-section of steel trusses under load. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. Moscow, 1980, 23 p.

7. Rebrov I. S. *Rabota szhatykh elementov stal'nykh konstruktsiy, usilennykh pod nagruzkoj* [Performance of compressed elements of steel structures reinforced under load]. Leningrad, Stroyizdat Publ., 1976, 176 p.

8. Rebrov I. S. *Usilenie sterzhnevyykh metallicheskiy konstruktsiy* [Strengthening of rod metal structures]. Leningrad, Stroyizdat Publ., 1988, 288 p.

9. Belyy G. I. *O raschete uprugoplasticheskikh tonkostennykh sterzhney po prostranstvenno-deformiruemoy skheme s uchyotom kasatel'nykh napryazheniy i deformatsiy sdviga* [About the calculation of elastic-plastic thin-walled rods according to a spatially deformable scheme taking into account tangential stresses and shear deformations]. *Mezhvuzovskiy tematicheskii sbornik LICI «Metallicheskie konstruktsii i ispytaniya sooruzheniy»* [Coll. of works of the Leningrad Institute of Civil Engineers "Metal structures and testing of structures"]. Leningrad, 1985, no. 62, pp. 10–20.

10. Pyatkin P. A. *Prochnost' i prostranstvennaya ustoychivost' usilennykh pod nagruzkoj sterzhnevyykh elementov konstruktsiy otkrytogo profilya*. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk [Strength and spatial stability of rod

elements of open profile structures reinforced under load. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. 2000, 24 p.

11. Mikhas'kin V. V. *Vliyanie svarochnykh protsessov na prostranstvennuyu ustoychivost' usilivaemykh pod nagruzkoj elementov sterzhnevyykh konstruktsiy*. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk [Influence of welding processes on the spatial stability of elements of rod structures reinforced under load. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. 2010, 26 p.

12. Belyy G. I. *Razvitie metodov rascheta sterzhnevyykh elementov stal'nykh konstruktsiy pri mnogoparametricheskom zagruzhenii* [Development of methods for calculating rod elements of steel structures under multi-parameter loading]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2020, no. 3 (80), pp. 43–54.

13. Beylin E. A. *Obshchie uravneniya deformatsionnogo rascheta i ustoychivosti tonkostennykh sterzhney* [General equations of deformation calculation and stability of thin-walled rods]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Construction mechanics and calculation of structures*, 1969, no. 5, pp. 35–41.

14. Beylin E. A., Belyy G. I. *O raschyote uprugikh sistem, podverzhennykh odnovremennomu deystviyu aktivnykh i parametricheskikh nagruzok* [On the calculation of elastic systems subjected to simultaneous action of active and parametric loads]. *Stroitel'naya mekhanika sooruzheniy – Construction mechanics of structures*, 1976, no. 3, pp. 30–34.

15. Belyy G. I. *Novye polozheniya v inzhenernoy metodike rascheta na ustoychivost' stal'nykh sterzhnevyykh elementov konstruktsiy iz kholodnogutykh profiley* [New provisions in the engineering calculation procedure on the stability of steel bar elements of structures made of cold-formed profiles]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2017, no. 2 (61), pp. 75–80.

16. Belyy G. I. *Analiticheski – chislennyi metod rascheta na ustoychivost' sterzhnevyykh elementov legkikh stal'nykh tonkostennykh konstruktsiy* [Analytical and numerical method for calculating the stability of rod elements of light steel thin-walled structures]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2020, no. 4 (81), pp. 39–46.