УДК 539.3

© А. А. Семенов, канд. техн. наук, доцент

© Л. П. Москаленко, канд. техн. наук

© В. В. Карпов, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Россия)

E-mail: sw.semenov@gmail.com

© М. В. Сухотерин, д-р техн. наук, доцент
(Государственный университет морского и речного
флота им. адмирала С. О. Макарова,
Санкт-Петербург, Россия)

E-mail: mv@sukhoterin.com

DOI 10.23968/1999-5571-2020-17-6-117-125

© А. А. Semenov, PhD in Sci. Tech., Associate Professor

© L. P. Moskalenko, PhD in Sci. Tech.

© V. V. Karpov, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering,
St. Petersburg, Russia)

E-mail: sw.semenov@gmail.com

© M. V. Sukhoterin, Dr. Sci. Tech., Associate Professor
(Admiral Makarov State University
of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russia)

E-mail: mv@sukhoterin.com

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ, ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СЕТКОЙ РЕБЕР

BUCKLING OF CYLINDRICAL PANELS STRENGTHENED WITH AN ORTHOGONAL GRID OF STIFFENERS

Приводится математическая модель деформирования тонкостенных цилиндрических панелей, учитывающая поперечные сдвиги, геометрическую нелинейность и наличие ребер жесткости. Используются безразмерные параметры. Вычислительный алгоритм построен на основе метода Ритца и метода продолжения решения по наилучшему параметру. Показаны значения критических нагрузок потери устойчивости для нескольких вариантов конструкций в зависимости от выбранного метода учета подкрепления и числа ребер жесткости.

Ключевые слова: оболочки, цилиндрические панели, устойчивость, метод Ритца, ребра жесткости.

The paper presents a mathematical model of deformation of thin-walled cylindrical shell panels, taking into account transverse shears, geometric nonlinearity, and the presence of ribbed stiffeners. Dimensionless parameters are used. The computational algorithm is based on using the Ritz method and the method of continuation of the solution with respect to the best parameter. There are shown the values of critical buckling loads for several variants of structures, depending on the chosen method of taking into account the reinforcement and the number of stiffeners.

Keywords: shells, cylindrical panels, Buckling, Ritz method, stiffeners.

Введение

Тонкостенные конструкции применимы для решения широкого класса прикладных задач, в том числе и задач строительства. Исследование процесса их нелинейного деформирования при действии внешних нагрузок является актуальной задачей, поскольку позволяет выявить критические режимы работы и избежать в дальнейшем потери устойчивости.

Важно подчеркнуть, что конструкции, подкрепленные ребрами жесткости, исследовать существенно сложнее, чем конструкции постоянной толщины. В связи с этим существуют не-

сколько подходов к введению ребер жесткости. Так, например, в работах [1, 2] выделяют две группы подходов к учету в конструкции ребер жесткости: это дискретный подход [3], а также подход с размазыванием жесткости [4–5 и др.].

Авторы работы [1] определили нагрузку общей потери устойчивости при разных вариантах подкрепляющей решетки ребер для цилиндрической оболочки с шарнирно-неподвижным закреплением контура и жесткой заделкой.

В статье [6] было рассмотрено влияние подкрепления на колебания и флаттер. Колебания были рассмотрены также в работах [7–9]. В ра-

боте [10] проведен анализ свободных колебаний и потери устойчивости подкрепленных панелей под общей нагрузкой.

Вопросы оптимизации подкрепленных цилиндрических оболочек для решения конкретных практических задач были затронуты в работах [11–17]. Обзоры литературы по подкрепленным оболочкам можно найти в значимых работах [2, 18–22].

Целью данной работы является анализ устойчивости цилиндрических панелей, подкрепленных ортогональной сеткой ребер, на основе разных подходов к введению подкрепляющих элементов.

1. Теория и методы

1.1. Математическая модель

Будем рассматривать тонкостенные оболочки, находящиеся под действием внешней механической нагрузки. Геометрический вид данных конструкций будет характеризоваться параметрами Ляме A, B и главными кривизнами k_x, k_y вдоль координат x, y соответственно. Для цилиндрических панелей (рис. 1) необходимо будет принять $A = 1, B = R, k_x = 0, k_y = 1/R$.

Будем использовать математическую модель типа Тимошенко (Миндлина — Рейснера), которая учитывает поперечные сдвиги, ортотропию материала и геометрическую нелинейность. Согласно этой модели, для задач статики неизвестными будут три функции перемещений точек координатной поверхности $U(x, y), V(x, y), W(x, y)$ и две функции, характеризующие углы поворота нормали в плоскости xOz, yOz : $\Psi_x(x, y), \Psi_y(x, y)$. Учет геометрической нелинейности в данном

Рис. 1. Панель цилиндрической оболочки

случае дает возможность исследовать не только напряженно-деформированное состояние оболочки, но и ее устойчивость.

В основе данной модели лежит функционал полной потенциальной энергии деформации, который будет иметь следующий вид:

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left(N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} + Q_x (\Psi_x - \theta_1) + Q_y (\Psi_y - \theta_2) - qW - P_x U - P_y V \right) AB dx dy, \quad (1)$$

где q, P_x, P_y — компоненты нагрузки; N_x, N_y — нормальные усилия в направлении осей x, y ; N_{xy}, N_{yx} — сдвиговые усилия в соответствующей плоскости xOy ; M_x, M_y — изгибающие моменты; M_{xy}, M_{yx} — крутящие моменты; Q_x, Q_y — поперечные силы в плоскостях xOz и yOz , которые для конструкций без ребер жесткости определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E_1 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y), \\ N_y &= \frac{E_2 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x), \\ N_{xy} &= N_{yx} = G_{12} h \gamma_{xy}, \\ M_x &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21})} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2), \\ M_y &= \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21})} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1), \\ M_{xy} &= M_{yx} = \frac{G_{12} h^3}{6} \chi_{12}, \end{aligned}$$

$$Q_x = G_{13} k h (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y = G_{23} k h (\Psi_y - \theta_2). \quad (2)$$

Здесь E_1, E_2 — модули упругости в направлениях x, y ; $k = 5/6$; G_{12}, G_{13}, G_{23} — модули сдвига в плоскостях xOy, xOz, yOz соответственно; μ_{12}, μ_{21} — коэффициенты Пуассона; $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ — деформации удлинения; γ_{xy} — деформации сдвига в плоскости xOy ; $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$ — функции изменения кривизн и кручения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1 \theta_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_1 &= -\left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U\right), \quad \theta_2 = -\left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V\right), \\ \chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_y, \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_x, \\ \chi_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_y - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_x \right).\end{aligned}\quad (3)$$

1.1.1. Безразмерные параметры

Для корректности дальнейшего применения численных методов введем безразмерные параметры

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \bar{\lambda} = \frac{aA}{bB}, \quad k_\xi = hk_x, \quad k_\eta = hk_y, \quad \bar{A} = \frac{aA}{h}, \\ \bar{B} &= \frac{bB}{h}, \quad \bar{U} = \frac{aUA}{h^2}, \quad \bar{V} = \frac{bVB}{h^2}, \quad \bar{W} = \frac{W}{h}, \quad \bar{\Psi}_x = \frac{\Psi_x aA}{h}, \\ \bar{\Psi}_y &= \frac{\Psi_y bB}{h}, \quad \bar{P} = \frac{a^4 A^4 q}{h^4 E_1}.\end{aligned}\quad (4)$$

Таким образом, осуществлен переход к новой системе координат $(\xi, \eta, \bar{z})$, и неизвестными функциями теперь являются $\bar{U}(\xi, \eta), \bar{V}(\xi, \eta), \bar{W}(\xi, \eta), \bar{\Psi}_x(\xi, \eta), \bar{\Psi}_y(\xi, \eta)$.

1.1.2. Геометрия и способы учета ребер жесткости

Со стороны вогнутости оболочка подкреплена ортогональной сеткой ребер, параллельных координатным линиям. Характеризуются ребра следующими параметрами: h^j, h^i — высота ребер, параллельных осям y и x соответственно; r_j, r_i — ширина, соответственно, j -х и i -х ребер; ребра, параллельные оси y (j -е ребра), расположены при $a_j \leq x \leq b_j$, а ребра, параллельные оси x (i -е ребра), расположены при $c_i \leq y \leq d_i$.

В случае наличия ребер жесткости изменяются соотношения для усилий, моментов и поперечных сил. Существуют различные способы учесть наличие ребер. Ранее в работе [23] были подробно рассмотрены: дискретный ввод ребер при контакте с обшивкой по линии (А. И. Лурье), дискретный ввод ребер при контакте с обшивкой по полосе (В. В. Карпов), ввод ребер при «размазывании» жесткости по методу конструктивной анизотропии (В. В. Карпов), а также предложен новый (уточненный) вариант дискретного ввода ребер при контакте с обшивкой по полосе (А. А. Семенов). В силу громоздкости приводить все эти соотношения здесь не будем.

1.2. Алгоритм решения задач устойчивости

Для решения задачи анализа устойчивости оболочечной конструкции необходимо найти минимум функционала (1). Применим для этого метод Ритца, что позволит свести вариационную задачу о поиске минимума функционала к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. В таком случае неизвестные безразмерные функции представим в виде

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n U_{kl} X_1^k Y_1^l, \quad \bar{V} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n V_{kl} X_2^k Y_2^l, \\ \bar{W} &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n W_{kl} X_3^k Y_3^l, \quad \bar{\Psi}_x = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \Psi_{xkl} X_4^k Y_4^l, \\ \bar{\Psi}_y &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \Psi_{ykl} X_5^k Y_5^l,\end{aligned}\quad (5)$$

где $U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{xkl}, \Psi_{ykl}$ — неизвестные числовые параметры; $X_1^k, \dots, X_5^k$ и $Y_1^l, \dots, Y_5^l$ — известные аппроксимирующие функции аргументов ξ и η , которые удовлетворяют краевым условиям. Краевые условия для каждой конструкции выбираются исходя из способа закрепления контура оболочки.

Будем рассматривать тонкостенные цилиндрические панели, шарнирно-неподвижно закрепленные по контуру (при $\xi = 0, \xi = 1$: $\bar{U} = \bar{V} = \bar{W} = \bar{M}_x = \bar{\Psi}_y = 0$; при $\eta = 0, \eta = 1$: $\bar{U} = \bar{V} = \bar{W} = \bar{M}_y = \bar{\Psi}_x = 0$). Тогда в качестве аппроксимирующих функций можно использовать следующие тригонометрические функции:

$$\begin{aligned}X_1^k &= \sin(2k\pi\xi), \quad X_2^k = \sin((2k-1)\pi\xi), \\ X_3^k &= \sin((2k-1)\pi\xi), \quad X_4^k = \cos((2k-1)\pi\xi), \\ X_5^k &= \sin((2k-1)\pi\xi), \quad Y_1^l = \sin((2l-1)\pi\eta), \\ Y_2^l &= \sin(2l\pi\eta), \quad Y_3^l = \sin((2l-1)\pi\eta), \\ Y_4^l &= \sin((2l-1)\pi\eta), \quad Y_5^l = \cos((2l-1)\pi\eta).\end{aligned}\quad (6)$$

Подставим (6) в (1), перейдя таким образом от функционала E_s к функции E_{sf} . Для поиска минимума найдем производные от функции E_{sf} по всем неизвестным числовым параметрам и далее приравняем их к нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{E}_{sf}}{\partial U_{kl}} &= 0, \quad \frac{\partial \bar{E}_{sf}}{\partial V_{kl}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{E}_{sf}}{\partial W_{kl}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{E}_{sf}}{\partial \Psi_{xkl}} = 0, \\ \frac{\partial \bar{E}_{sf}}{\partial \Psi_{ykl}} &= 0, \quad k, l = \overline{1, n}.\end{aligned}\quad (7)$$

В результате получена система нелинейных алгебраических уравнений. Для ее решения используем метод продолжения решения по наилучшему параметру, который позволяет свести решение нелинейной системы к решению начальной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве наилучшего параметра продолжения решения предлагается брать длину дуги кривой множества решений λ [24].

Программная реализация в данном случае наиболее оптимально может быть осуществлена в среде аналитических вычислений Maple, поскольку требуются достаточно объемные символьные вычисления.

2. Расчеты

В соответствии с предложенной моделью и алгоритмом, проведем расчеты трех вариантов цилиндрических панелей (табл. 1). Закрепление контура — шарнирно-неподвижное, нагрузка — статическая, равномерно распределенная, по нормали к поверхности. Материал — сталь ($E_1 = E_2 = E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\mu_{12} = \mu_{21} = \mu = 0,3$).

Ортогональную сетку ребер будем располагать с внутренней стороны оболочки, высоту и шири-

ну ребер будем выбирать $h^i = h^j = 3h$, $r_i = r_j = 2h$ соответственно. Количество ребер будем брать одинаковым в обоих направлениях, для каждого нового варианта сетки увеличивая его на 2 или 4. Перед тем как приводить данные расчетов, покажем некоторые характеристики рассматриваемых оболочек в зависимости от числа ребер жесткости (табл. 2). Здесь S^0 — площадь поверхности обшивки; V^0 — объем, занимаемый обшивкой; d — стрела подъема; x_r — расстояние между ребрами; S^R — площадь, занимаемая ребрами жесткости; V^R — объем, занимаемый ребрами жесткости.

В табл. 3 показаны значения критических нагрузок потери устойчивости для разных вариантов подкрепления, полученные по разным методам учета ребер жесткости и при разных значениях $N = n^2$. Как видно из представленных данных, для конструкций вариантов 1 и 3, начиная с определенного количества подкрепляющих элементов, потеря устойчивости не наблюдается. На рис. 2 и 3 для оболочки варианта 2 полученные значения представлены графически.

Для оболочки варианта 2 значения критических нагрузок, полученные при учете контакта ребер с обшивкой по линии, практически совпадают с уточненным методом и методом конструктивной анизотропии. Здесь это может быть объяснено отсутствием кривизны цилиндрической панели в одном из направлений. Однако, как было показано в работе [23], например, для пологих оболочек двоякой кривизны, разброс значений может быть существенным.

Таблица 1

Варианты рассматриваемых цилиндрических панелей

№	h , м	a , м	b , рад	R_2 , м
1	0,08	16	1	16
2	0,01	20	$\pi/2$	5,4
3	0,01	1,5	0,4	2,5

Таблица 2

Характеристики рассматриваемых оболочек в зависимости от числа ребер жесткости

Вариант	Параметр							
	S^0 , м ²	V^0 , м ³	a/h	d , м	$h^i = h^j$, м	$r_i = r_j$, м		
1	256	20,48	200	1,96	0,24	0,16		
		2×2	4×4	6×6	8×8	12×12	16×16	20×20
	x_r , м	8	4	2,67	2	1,33	1	0,8
	y_r , м	8	4	2,67	2	1,33	1	0,8
	S^R , м ²	10,14	20,07	29,80	39,32	57,75	75,37	92,16
	V^R , м ³	2,43	4,82	7,15	9,44	13,86	18,09	22,12
	S^R/S^0	0,040	0,078	0,116	0,154	0,226	0,294	0,360
	V^R/V^0	0,119	0,235	0,349	0,461	0,677	0,883	1,080

Окончание табл. 2

Вариант	Параметр							
2	$S^0, \text{м}^2$	$V^0, \text{м}^3$	a/h	$d, \text{м}$	$h^i = h^j, \text{м}$	$r_i = r_j, \text{м}$		
	169,64	1,70	2000	1,58	0,03	0,02		
		2×2	4×4	6×6	8×8	12×12	16×16	20×20
	$x_p, \text{м}$	10	5	3,33	2,5	1,67	1,25	1
	$y_p, \text{м}$	4,24	2,12	1,41	1,06	0,71	0,53	0,42
	$S^R, \text{м}^2$	1,14	2,27	3,40	4,53	6,78	9,01	11,23
	$V^R, \text{м}^3$	0,03	0,07	0,10	0,14	0,20	0,27	0,34
	S^R/S^0	0,007	0,013	0,020	0,027	0,040	0,053	0,066
	V^R/V^0	0,020	0,040	0,060	0,080	0,120	0,159	0,199
3	$S^0, \text{м}^2$	$V^0, \text{м}^3$	a/h	$d, \text{м}$	$h^i = h^j, \text{м}$	$r_i = r_j, \text{м}$		
	1,5	0,015	150	0,05	0,03	0,02		
		2×2	4×4	6×6	8×8	12×12	16×16	20×20
	$x_p, \text{м}$	0,75	0,375	0,25	0,188	0,125	0,09	0,075
	$y_p, \text{м}$	0,50	0,25	0,17	0,13	0,08	0,06	0,05
	$S^R, \text{м}^2$	0,098	0,194	0,286	0,374	0,542	0,698	0,840
	$V^R, \text{м}^3$	0,003	0,006	0,009	0,011	0,016	0,021	0,025
	S^R/S^0	0,066	0,129	0,190	0,250	0,362	0,465	0,560
	V^R/V^0	0,197	0,387	0,571	0,749	1,085	1,395	1,680

Таблица 3

Критические нагрузки для изотропных подкрепленных цилиндрических панелей

№	N	Метод	Критическая нагрузка потери устойчивости $q_{cr}, \text{МПа}$							
			0×0	2×2	4×4	6×6	8×8	12×12	16×16	20×20
1	9	Уточненный дискретный	0,8611	1,4745	2,1970	2,7377	3,2446	–	–	–
	16		0,6897	1,4356	2,1014	2,6698	3,1806	–	–	–
	9	МКА	0,8611	1,5755	2,1932	2,7431	3,2468	–	–	–
	16		0,6897	1,5325	2,1373	2,6803	3,1829	–	–	–
2	4	Уточненный дискретный	0,3114	0,3181	0,3234	0,3296	0,3360	0,3494	0,3637	0,3794
	9		0,1221	0,1243	0,1272	0,1295	0,1318	0,1365	0,1411	0,1457
	16		0,0277	0,0299	0,0344	0,0378	0,0411	0,0478	0,0543	0,1050
	4	Дискретный	0,3114	0,3714	0,3192	0,3503	0,3763	–	–	–
	9		0,1221	0,1280	0,1310	0,1375	0,1481	0,1578	0,1688	0,1796
	16		0,0277	0,0450	0,0870	0,1008	0,1127	0,1172	0,1290	0,1402
	4	По линии	0,3114	0,3160	0,3209	0,3258	0,3308	0,3409	0,3515	0,3626
	9		0,1221	0,1234	0,1261	0,1281	0,1301	0,1339	0,1377	0,1414
	16		0,0277	0,0299	0,0339	0,0374	0,0407	0,0471	0,0534	0,1002
	4	МКА	0,3114	0,3173	0,3234	0,3297	0,3361	0,3495	0,3638	0,3794
	9		0,1221	0,1246	0,1270	0,1294	0,1318	0,1365	0,1412	0,1457
	16		0,0277	0,0310	0,0344	0,0378	0,0411	0,0478	0,0543	0,1050
3	4	Уточненный дискретный	–	2,4401	2,7989	3,1326	–	–	–	–
	9		0,7067	1,5598	2,7843	3,1177	–	–	–	–
	16		0,7059	2,1714	2,7616	3,1110	–	–	–	–
	4	МКА	–	2,4416	2,7989	3,1342	–	–	–	–
	9		0,7067	2,4322	2,7882	3,1193	–	–	–	–
	16		0,7059	2,4327	2,7835	3,1129	–	–	–	–

Рис. 2. Значения критических нагрузок при разном числе ребер жесткости (цилиндрическая панель 2, $N = 9$)

Рис. 3. Значения критических нагрузок при разном числе ребер жесткости (цилиндрическая панель 2, $N = 16$)

На рис. 4 показан график зависимости прогиба W от нагрузки q при разном количестве подкрепляющих ребер жесткости для цилиндрической панели варианта 1. Красные кривые W_c — прогиб в центре конструкции ($x = a/2, y = b/2$); синие кривые W_4 — прогиб в четвертой части конструкции ($x = a/4, y = b/4$); верхний индекс указывает на количество ребер жесткости в каждом направлении, дополнительный нижний индекс — способ учета ребер (уточненный дискретный — «d» или метод конструктивной анизотропии — «s»).

Из полученных значений видно, что для данных конструкций метод конструктивной анизотропии сходится к решению, полученному при дискретном вводе ребер, начиная с сетки ребер

8×8 (разница в значениях составляет менее 1 % при $N = 16$).

Заключение

Таким образом, было проведено исследование устойчивости тонкостенных цилиндрических панелей, подкрепленных ребрами жесткости. Проведен анализ подходов к введению ребер жесткости, который показал, что предложенный уточненный вариант учета жесткостных характеристик дает близкий результат с методом конструктивной анизотропии. Также было показано, что для данного вида панелей допустимо использовать и подход к введению ребер А. И. Лурье.

Кроме того, показана сходимость метода конструктивной анизотропии при увеличении числа подкрепляющих элементов. Использо-

Рис. 4. График зависимости прогиба от нагрузки при разном количестве подкрепляющих ребер жесткости для цилиндрической панели варианта 1

ние его вместо дискретных подходов к введению ребер позволяет существенно сократить время расчета.

Библиографический список

1. Kidane S., Li G., Helms J., Pang S.-S., Woldeesenbet E. Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders // *Composites Part B: Engineering*. 2003. Vol. 34, № 1. Pp. 1–9. DOI 10.1016/S1359-8368(02)00074-4.
2. Jaunky N., Knight N. F., Ambur D. R. Formulation of an improved smeared stiffener theory for buckling analysis of grid-stiffened composite panels // *Composites Part B: Engineering*. 1996. Vol. 27, № 5. Pp. 519–526. DOI 10.1016/1359-8368(96)00032-7.
3. Wang J. T.-S., Hsu T.-M. Discrete analysis of stiffened composite cylindrical shells // *AIAA Journal*. 1985. Vol. 23, № 11. Pp. 1753–1761. DOI 10.2514/3.9162.
4. Troitsky M. S. Stiffened plates: bending, stability, and vibrations. Amsterdam; New York: Elsevier Scientific Pub. Co.; distributors for the U.S. and Canada, Elsevier/North-Holland, 1976. 410 p.
5. Reddy A. D., Valisetty R., Rehfield L. W. Continuous filament wound composite concepts for aircraft fuselage structures // *Journal of Aircraft*. 1985. Vol. 22, № 3. Pp. 249–255. DOI 10.2514/3.45115.
6. McElman J. A., Mikulas, Jr. M. M., Stein M. Static and dynamic effects of eccentric stiffening of plates and cylindrical shells // *AIAA Journal*. 1966. Vol. 4, № 5. Pp. 887–894. DOI 10.2514/3.3562.
7. Lee Y.-S., Kim Y.-W. Vibration analysis of rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners // *Computers & Structures*. 1998. Vol. 69, № 2. Pp. 271–281. DOI 10.1016/S0045-7949(97)00047-3.
8. Zhao X., Liew K. M., Ng T. Y. Vibrations of rotating cross-ply laminated circular cylindrical shells with stringer and ring stiffeners // *International Journal of Solids and Structures*. 2002. Vol. 39, № 2. Pp. 529–545. DOI 10.1016/S0020-7683(01)00194-9.
9. Talebitooti M., Ghayour M., Ziaei-Rad S., Talebitooti R. Free vibrations of rotating composite conical shells with stringer and ring stiffeners // *Archive of Applied Mechanics*. 2010. Vol. 80, № 3. Pp. 201–215. DOI 10.1007/s00419-009-0311-4.
10. Prusty B. G. Free vibration and buckling response of hat-stiffened composite panels under general loading // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2008. Vol. 50, № 8. Pp. 1326–1333. DOI 10.1016/j.ijmecsci.2008.03.003.
11. Bai X., Xu W., Ren H., Li J. Analysis of the influence of stiffness reduction on the load carrying capacity of ring-stiffened cylindrical shell // *Ocean Engineering*. 2017. Vol. 135. Pp. 52–62. DOI 10.1016/j.oceaneng.2017.02.034.
12. Jarmai K., Snyman J. A., Farkas J. Minimum cost design of a welded orthogonally stiffened cylindrical shell // *Computers & Structures*. 2006. Vol. 84, № 12. Pp. 787–797. DOI 10.1016/j.compstruc.2006.01.002.
13. Simões L. M. C., Farkas J., Jarmai K. Reliability-based optimum design of a welded stringer-stiffened steel cylindrical shell subject to axial compression and bending // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2006. Vol. 31, № 2. Pp. 147–155. DOI 10.1007/s00158-005-0592-3.
14. Chen B., Liu G., Kang J., Li Y. Design optimization of stiffened storage tank for spacecraft // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2008. Vol. 36, № 1. Pp. 83–92. DOI 10.1007/s00158-007-0174-7.

15. Lene F., Duvaut G., Olivier-Mailhe M., Ben Chaabane S., Grihon S. An advanced methodology for optimum design of a composite stiffened cylinder // *Composite Structures*. 2009. Vol. 91, № 4. Pp. 392–397. DOI 10.1016/j.compstruct.2009.04.005.
16. Смердов А. А. Возможности повышения местной устойчивости подкрепленных и интегральных композитных конструкций // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2014. № 10 (655). С. 70–79.
17. Hao P., Wang B., Tian K., Liu H., Wang Y., Niu F., Zeng D. Simultaneous buckling design of stiffened shells with multiple cutouts // *Engineering Optimization*. 2017. Vol. 49, № 7. Pp. 1116–1132. DOI 10.1080/0305215X.2016.1235328.
18. Wang B., Tian K., Hao P., Zheng Y., Ma Y., Wang J. Numerical-based smeared stiffener method for global buckling analysis of grid-stiffened composite cylindrical shells // *Composite Structures*. 2016. Vol. 152. Pp. 807–815. DOI 10.1016/j.compstruct.2016.05.096.
19. Buragohain M., Velmurugan R. Buckling Analysis of Composite Hexagonal Lattice Cylindrical Shell using Smeared Stiffener Model // *Defense Science Journal*. 2009. Vol. 59, № 3. Pp. 230–238. DOI 10.14429/dsj.59.1516.
20. Jones R. M. Buckling of circular cylindrical shells with multiple orthotropic layers and eccentric stiffeners // *AIAA Journal*. 1968. Vol. 6, № 12. Pp. 2301–2305. DOI 10.2514/3.4986.
21. Sadeghifar M., Bagheri M., Jafari A. A. Buckling analysis of stringer-stiffened laminated cylindrical shells with nonuniform eccentricity // *Archive of Applied Mechanics*. 2011. Vol. 81, № 7. Pp. 875–886. DOI 10.1007/s00419-010-0457-0.
22. Ren M., Li T., Huang Q., Wang B. Numerical investigation into the buckling behavior of advanced grid stiffened composite cylindrical shell // *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2014. Vol. 33, № 16. Pp. 1508–1519. DOI 10.1177/0731684414537881.
23. Karpov V. V., Semenov A. A. Refined model of stiffened shells // *International Journal of Solids and Structures*. 2020. Vol. 199. Pp. 43–56. DOI 10.1016/j.ijsolstr.2020.03.019.
24. Семенов А. А., Леонов С. С. Метод непрерывного продолжения решения по наилучшему параметру при расчете оболочечных конструкций // *Ученые записки Казанского университета. Серия «Физико-математические науки»*. 2019. Т. 161, кн. 2. С. 230–249. DOI 10.26907/2541-7746.2019.2.230-249.
- cylinders. *Composites Part B: Engineering*, 2003, vol. 34, no. 1, pp. 1–9. DOI 10.1016/S1359-8368(02)00074-4.
2. Jaunky N., Knight N. F., Ambur D. R. Formulation of an improved smeared stiffener theory for buckling analysis of grid-stiffened composite panels. *Composites Part B: Engineering*. 1996, vol. 27, no. 5, pp. 519–526. DOI 10.1016/1359-8368(96)00032-7.
3. Wang J. T.-S., Hsu T.-M. Discrete analysis of stiffened composite cylindrical shells. *AIAA Journal*, 1985, vol. 23, no. 11, pp. 1753–1761. DOI 10.2514/3.9162.
4. Troitsky M. S. *Stiffened plates: bending, stability, and vibrations*. Amsterdam; New York, Elsevier Scientific Publ., distributors for the U.S. and Canada, Elsevier/North-Holland, 1976, 410 p.
5. Reddy A. D., Valisetty R., Rehfield L. W. Continuous filament wound composite concepts for aircraft fuselage structures. *Journal of Aircraft*, 1985, vol. 22, no. 3, pp. 249–255. DOI 10.2514/3.45115.
6. McElman J. A., Mikulas, Jr. M. M., Stein M. Static and dynamic effects of eccentric stiffening of plates and cylindrical shells. *AIAA Journal*, 1966, vol. 4, no. 5, pp. 887–894. DOI 10.2514/3.3562.
7. Lee Y.-S., Kim Y.-W. Vibration analysis of rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners. *Computers & Structures*, 1998, vol. 69, no. 2, pp. 271–281. DOI 10.1016/S0045-7949(97)00047-3.
8. Zhao X., Liew K. M., Ng T. Y. Vibrations of rotating cross-ply laminated circular cylindrical shells with stringer and ring stiffeners. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, vol. 39, no. 2, pp. 529–545. DOI 10.1016/S0020-7683(01)00194-9.
9. Talebitooti M., Ghayour M., Ziaei-Rad S., Talebitooti R. Free vibrations of rotating composite conical shells with stringer and ring stiffeners. *Archive of Applied Mechanics*, 2010, vol. 80, no. 3, pp. 201–215. DOI 10.1007/s00419-009-0311-4.
10. Prusty B. G. Free vibration and buckling response of hat-stiffened composite panels under general loading. *International Journal of Mechanical Sciences*, 200, vol. 50, no. 8, pp. 1326–1333. DOI 10.1016/j.ijmecsci.2008.03.003.
11. Bai X., Xu W., Ren H., Li J. Analysis of the influence of stiffness reduction on the load carrying capacity of ring-stiffened cylindrical shell. *Ocean Engineering*, 2017, vol. 135, pp. 52–62. DOI 10.1016/j.oceaneng.2017.02.034.
12. Jarmai K., Snyman J. A., Farkas J. Minimum cost design of a welded orthogonally stiffened cylindrical shell. *Computers & Structures*, 2006, vol. 84, no. 12, pp. 787–797. DOI 10.1016/j.compstruc.2006.01.002.
13. Simões L. M. C., Farkas J., Jarmai K. Reliability-based optimum design of a welded stringer-stiffened steel cylindrical shell subject to axial compression and bending. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2006, vol. 31, no. 2, pp. 147–155. DOI 10.1007/s00158-005-0592-3.

References

1. Kidane S., Li G., Helms J., Pang S.-S., Woldesenbet E. Buckling load analysis of grid stiffened composite

14. Chen B., Liu G., Kang J., Li Y. Design optimization of stiffened storage tank for spacecraft. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2008, vol. 36, no. 1, pp. 83–92. DOI 10.1007/s00158-007-0174-7.
15. Lene F., et al. An advanced methodology for optimum design of a composite stiffened cylinder. *Composite Structures*, 2009, vol. 91, no. 4, pp. 392–397. DOI 10.1016/j.compstruct.2009.04.005.
16. Smerdov A. A. *Vozmozhnosti povysheniya mestnoy ustoychivosti podkreplennykh i integral'nykh kompozitnykh konstruktsiy* [Possibilities of increasing local stability of reinforced and integral composite structures]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie – News of higher educational institutions. Engineering*, 2014, no. 10(655), pp. 70–79.
17. Hao P., et al. Simultaneous buckling design of stiffened shells with multiple cutouts. *Engineering Optimization*, 2017, vol. 49, no. 7, pp. 1116–1132. DOI 10.1080/0305215X.2016.1235328.
18. Wang B., et al. Numerical-based smeared stiffener method for global buckling analysis of grid-stiffened composite cylindrical shells. *Composite Structures*, 2016, vol. 152, pp. 807–815. DOI 10.1016/j.compstruct.2016.05.096.
19. Buragohain M., Velmurugan R. Buckling analysis of composite hexagonal lattice cylindrical shell using smeared stiffener model. *Defense Science Journal*, 2009, vol. 59, no. 3, pp. 230–238. DOI 10.14429/dsj.59.1516.
20. Jones R. M. Buckling of circular cylindrical shells with multiple orthotropic layers and eccentric stiffeners. *AIAA Journal*, 1968, vol. 6, no. 12, pp. 2301–2305. DOI 10.2514/3.4986.
21. Sadeghifar M., Bagheri M., Jafari A. A. Buckling analysis of stringer-stiffened laminated cylindrical shells with non-uniform eccentricity. *Archive of Applied Mechanics*, 2011, vol. 81, no. 7, pp. 875–886. DOI 10.1007/s00419-010-0457-0.
22. Ren M., Li T., Huang Q., Wang B. Numerical investigation into the buckling behavior of advanced grid stiffened composite cylindrical shell. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2014, vol. 33, no. 16. C. 1508–1519. DOI 10.1177/0731684414537881.
23. Karpov V. V., Semenov A. A. Refined model of stiffened shells. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, vol. 199, pp. 43–56. DOI 10.1016/j.ijsolstr.2020.03.019.
24. Semenov A. A., Leonov S. S. *Metod nepreryvnogo prodolzheniya resheniya po nailuchshemu parametru pri raschete obolocheknykh konstruktsiy* [Method of continuous continuation of the solution by the best parameter in the calculation of shell structures]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki – Scientific notes of Kazan University. Series of Physical and mathematical Sciences*, 2019, vol. 161, pt. 2, pp. 230–249. DOI 10.26907/2541-7746.2019.2.230-249.